



VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS STUDIJŲ PROGRAMA

magistro baigiamasis darbas

Lygiakraščio trikampio dalijimas į lygius trikampius

Dividing an equilateral triangle into congruent triangles

Lukas Čiornas

Darbo vadovas : prof. dr. Paulius Drungilas

Vilnius
2025

Čia taip pat galima pridėti padėkas įvairiems kitiems dalykams, pavyzdžiui: vadovui, universitetui, įmonei ir t. t.

Santrauka

Tegul $N > 3$ - bet koks pirminis skaičius. Šiame darbe pristatomas įrodymas pagal [2] darbą, kad lygiakraščio trikampio neįmanoma supjaustyti į N lygių trikampių.

Raktiniai žodžiai: Trikampis, išklotė, padalinimas.

Summary

Let $N > 3$ be any prime number. This paper presents proof according to the work of [2], that it is impossible to cut equilateral triangle into N tiles.

Keywords: Triangle, tile, tiling.

Iliustracijų sąrašas

1	$N = 4, N = 9$ ir $N = 16$, kai T kampai $(\pi/3, \pi/3, \pi/3)$	8
2	$N = 3$ ir $N = 12$, kai T kampai $(\pi/6, \pi/6, 2\pi/3)$	9
3	$N = 6$ ir $N = 8$, kai T kampai $(\pi/2, \pi/6, \pi/3)$	9
4	$N = 10935$, kai T kraštinių santykiai $(3, 5, 7)$	10
5	Trikampio nuspalvinimas, jog beisliečiantys trikampiai būtų skirtingų spalvų	11

Lentelių sąrašas

1 Dengimai, kurie nėra eliminuoti plotų ir spalvinimo lygtimis. 20

Turinys

Santrauka	3
Summary	4
Iliustracijų sąrašas	5
Lentelių sąrašas	6
Įvadas	8
1. Spalvinimo lygtis	11
2. Trikampis T su kampu $\gamma = \pi/3$, kai α/π irracionalus	13
2.1 Algoritmas nustatyti, ar egzistuoja (N)-išsklotė	18
2.2 Palyginimas su Laczkovich rezultatais	19
2.3 Skaitiniai rezultatai	19
2.4 Įrodymas, jog N negali būti pirminis	20

Ivadas

Tegul N - natūralusis skaičius, o ABC ir T - du plokštumos trikampiai. Sakysime, kad trikampis ABC yra N -išklotas trikampiu T , jei egzistuoja tokie plokštumos trikampiai $T_1, T_2, \dots, T_N$, tenkinantys šias sąlygas:

1. kiekvienas trikampis T_j yra lygus trikampiui T ;
2. bet kurių trikampių T_i ir T_j , $i \neq j$, vidus nesikerta (jokie du skirtingi trikampiai nepersidengia);
3. trikampių $T_1, T_2, \dots, T_N$ sąjunga lygi trikampiui ABC .

Tarkime, kad ABC yra lygiakraštis trikampis. Yra žinoma (pacituoti), kad tik tam tikros T formos yra įmanomos, bet iki šiol labai mažai buvo žinoma apie galimas N reikšmes. Šiame darbe, pagal [2] darbą pateikiame įrodymą, kad joks lygiakraštis trikampis nėra N -išklotas kai $N > 3$, N yra pirminis skaičius.

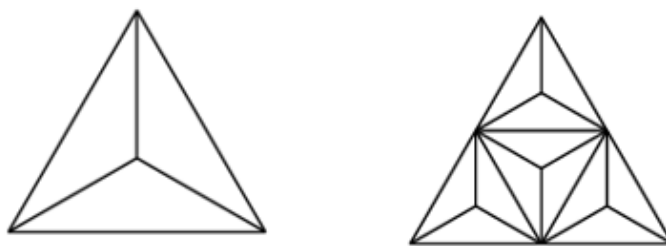
Miklós Laczkovich parašė daug straipsnių apie išsklotines, nagrinėjo trikampius, išskylus daugia-kampius, trikampių dalijimą į lygius trikampius bei trikampių dalijimą į panašius trikampius. Darbuose [4] ir [3] buvo susiaurintas galimų trikampių T , kurie gali būti naudojami iškloti kokį nors lygiakraštį trikampį, sąrašas. Laczkovich įrodė, kad trikampių T kampai (α, β, γ) (tam tikra tvarka) turi būti vieni iš šių:

- (i) $(\pi/3, \pi/3, \pi/3)$ (lygiakraštis)
- (ii) $(\pi/6, \pi/6, 2\pi/3)$
- (iii) $(\pi/6, \pi/2, \pi/3)$
- (iv) $(\alpha, \beta, \pi/3)$, kai α nėra racionalus π daugiklis
- (v) $(\alpha, \beta, 2\pi/3)$, kai α nėra racionalus π daugiklis

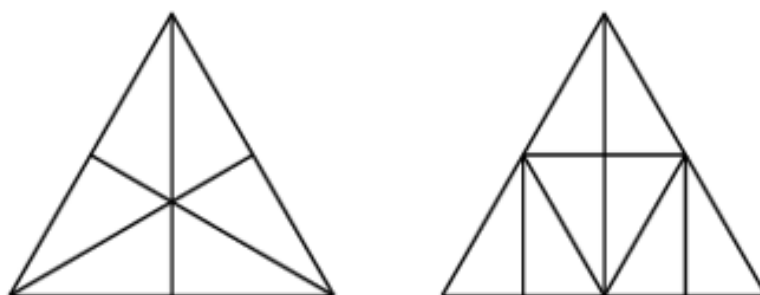
Galimos N reikšmės pirmaisiais trim atvejais yra žinomos. Atveju (i), N turi būti kvadratinis skaičius. Įrodymą į šį teiginį galima rasti [5] ir [6]. Kadangi N yra kvadratinis skaičius tuomet N negali būti pirminis. Atveju (ii) N turi turėti formą $3n^2$, o (iii) N turi būti formos $6n^2$ arba $2n^2$ šių formų įrodymai yra pateikti straipsnyje [1]. Nė vienas iš jų negali būti pirminis, išskyrus, kai $N = 3$ ir $N = 2$ yra galimas. Padalinimų pavyzdžiai pateikiami 1, 2, 3 paveikslėliuose. Toliau mus domina paskutiniai du atvejai (iv) ir (v).



1 pav. $N = 4$, $N = 9$ ir $N = 16$, kai T kampai $(\pi/3, \pi/3, \pi/3)$



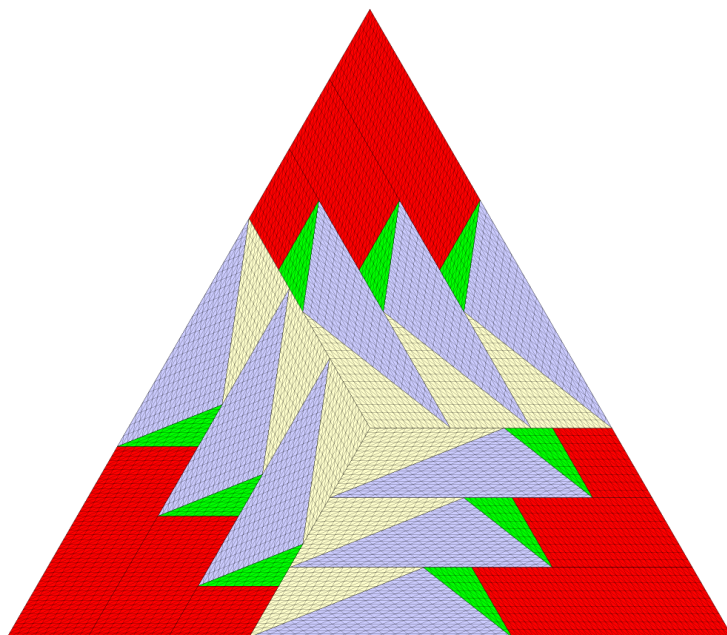
2 pav. $N = 3$ ir $N = 12$, kai T kampai $(\pi/6, \pi/6, 2\pi/3)$



3 pav. $N = 6$ ir $N = 8$, kai T kampai $(\pi/2, \pi/6, \pi/3)$

Skaitytoją gali nustebinti, kad išklotinės, patenkančios į (iv) ir (v) atvejus, egzistuoja. 1995 m. Laczkovich jau pateikė metodą, kaip sukonstruoti kokio nors lygiakraščio trikampio išklotinę iš bet kurio trikampio T , tenkinančio (iv) arba (v) atvejus, bet N gali būti gana didelis.

Kas įdomu, jog M. Beeson straipsnyje [2] pateikė (v) atvejo pavyzdį (žr. 4 pav.). Mažiausias N tenkinantis sąlygą gavosi $N = 10935$, šiuo atveju trikampių T kraštinės buvo $(3, 5, 7)$, o kampai $(\cos^{-1}(\frac{13}{14}), \cos^{-1}(\frac{11}{14}), 2\pi/3)$.



4 pav. $N = 10935$, kai T kraštinių santykiai $(3,5,7)$

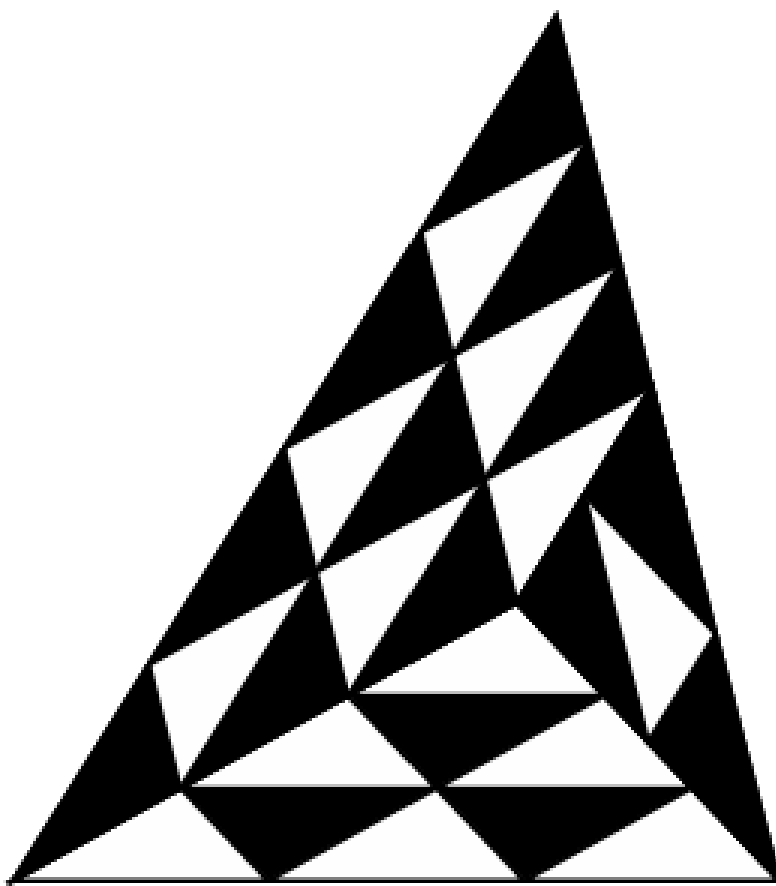
Šiame straipsnyje mes įrodome, kad jei lygiakraštis trikampis yra N -išklotas pagal aukščiau pateiktus atvejus (iv) arba (v), tai N nėra pirminis skaičius. Laczkovich įrodė [3] 3.3 teoremoje, kad tais dviem atvejais trikampis T yra racionalus, kas reiškia, jog trikampio kraštinių santykiai yra racionalūs. Tai suteikia mums gerą atspirties tašką. Tuo remiantis, mes tęsiame atvejį (iv) algebriniais skaičiavimais, pasiekdami tam tikras lygtis, kurias turi tenkinti N . Nors sumažinti šių lygčių iki elegantiško skaičių teorijos kriterijaus nepavyko, bent jau galime parodyti, kad N negali būti pirminis skaičius. Algebriniai skaičiavimai buvo atlikti arba patikrinti naudojant kompiuterinės algebros sistemą SageMath.

Spręsdami atvejį, kai trikampis T turi $\pi/3$ kampą, mes pasinaudojame Laczkovich [3] straipsnyje pateiktu metodu. Šiame straipsnyje mes pateikiame reikiamus apibrėžimus ir paminime lemas, kurių mums reikia, bet įrodymus paliekame cituojamame straipsnyje.

Šiame darbe pristatytas rezultatas, kad lygiakraščiai trikampiai negali būti N -iškloti, kai N yra pirminis skaičius, didesnis už 3, atsako į klausimą, užduotą [6] straipsnyje. Iki 2019m. išleisto M. Beeson [2] straipsnio nebuvo žinoma, ar yra kiek norima didelis N , kad joks lygiakraštis trikampis negalėtų būti N -išklotas.

1. Spalvinimo lygtis

Šiame skyriuje mes pristatome įrankį, kuris yra naudingas kai kurioms, išsklotinių problemoms. Tarkime, kad trikampis ABC yra išklotas trikampiais T su kampais (α, β, γ) ir kraštinėmis (a, b, c) , ir tarkime, kad prie viršūnės A yra tik vienas trikampis T_1 . Mes nuspalviname T_1 juodai, o tada nuspalviname kiekvieną trikampį T juodai arba baltai, keisdami spalvas, kai kertame jų kraštines, pažymime T_j ir T_b . Tam tikromis sąlygomis šį spalvinimą galima apibrėžti vienareikšmiškai, ir tada mes apibrėžiame spalvinimo skaičių kaip juodų T_j skaičių minus baltų T_b skaičių. Toks spalvinimas pavaizduotas 5.



5 pav. Trikampio nuspalvinimas, jog besiliečiantys trikampiai būtų skirtingų spalvų

Toliau sekanti teorema išdėsto sąlygas, su kuriomis galima atlikti tokį trikampio padalijimą. Teoremoje kraštinė viršūnė reiškia viršūnę, kuri yra ABC kraštinėje arba kito trikampio T kraštinėje, taip kad kampų suma toje viršūnėje yra π . Viduje esančioje viršūnėje kampų suma yra 2π .

1.0.1 teorema ([2]). Tarkime, kad trikampis ABC yra išklotas trikampiais T , kurių kraštinės (a, b, c) taip, kad

- (i) Viršūnėje A yra tik vienas trikampis T .
- (ii) Kiekvienoje kraštinėje viršūnėje susitinka nelyginis skaičius trikampių T .
- (iii) Kiekvienoje viduje esančioje viršūnėje susitinka lyginis skaičius trikampių T .

(iv) *Trikampių T skaičius prie B ir C yra arba abiem atvejais lyginis, arba nelyginis.*

Tada kiekvienam trikampiui T galima priskirti spalvą (juodą arba baltą) taip, kad spalvos keistųsi per dalijančių trikampių kraštines, o trikampis T prie A būtų juodas. Tegul M yra juodų trikampių T skaičius minus baltų trikampių skaičius. Tada spalvinimo lygtis

$$X \pm Y + Z = M(a + b + c)$$

galioja, kur Y yra ABC kraštinė, esanti priešais A , o X ir Z yra kitos dvi kraštinės. Ženklas skiriasi, atsižvelgiant į tai, ar trikampių T skaičius prie B ir C yra nelyginis ar lyginis.

Įrodymas. Kiekvienas trikampis T yra nuspalvinta juodai arba baltai, atsižvelgiant į tai, ar trikampių T kraštinių skaičius, kirstas pasiekiant ją nuo A neperėjus per viršūnę, yra lyginis ar nelyginis. Teoremos hipotezės garantuoja, kad taip apibrėžta spalva nepriklauso nuo kelio, pasirinkto pasiekti trikampį T nuo viršūnės A . Bendras juodų kraštų ilgis, minus bendras baltų kraštų ilgis, yra $M(a + b + c)$, nes $a + b + c$ yra kiekvieno trikampio T perimetras. Kiekviena vidinė kraštinė prisideda nuliui prie šios sumos, nes ji yra juoda vienoje pusėje ir balta kitoje. Todėl prisideda tik ABC kraštinės. Dabar X ir Y kraštinėse yra tik juodų trikampių T kraštinės pagal hipotezes (i) ir (ii). Y kraštinė taip pat yra juoda, jei trikampių T skaičius prie B ir C yra nelyginis, ir balta, jei jis yra lyginis. Taigi skirtumas bendrame juodų ir baltų trikampių T ilgių yra $X \pm Y + Z$, o ženklas skiriasi, atsižvelgiant į tai, ar trikampių skaičius prie B ir C yra nelyginis ar lyginis. Tai užbaigia įrodymą. $\square$

2. Trikampis T su kampu $\gamma = \pi/3$, kai α/π irracionalus

Šiuo atveju mes turime $\alpha + \beta = 2\pi/3$. Tada galimi būdai parašyti π ir 2π kaip tiesinę kombinaciją iš (α, β, γ) yra šie:

$$\begin{aligned}\pi &= \alpha + \beta + \gamma \\ 2\pi &= 2\alpha + 2\beta + 2\gamma \\ 2\pi &= 6\gamma \\ 2\pi &= \alpha + \beta + 4\gamma \\ 2\pi &= 2\alpha + 2\beta + 2\gamma\end{aligned}$$

Taigi kiekviena viršūnė su bendru kampu π turi nelyginį trikampių T , besidalijančių ta viršūne, skaičių, o kiekviena viršūnė su bendru kampu 2π turi lyginį trikampių T , besidalijančių ta viršūne, skaičių. Be to, kiekvienoje ABC viršūnėje yra tik vienas trikampis T su savo γ kampu viršūnėje. Taigi spalvinimo teorema (1.0.1 teorema) galioja. Ji sako, kad kai trikampiai T yra nuspalvinti juodai ir baltai, o viršūnė prie A yra juoda, jei M yra juodų trikampių T skaičius minus baltų trikampių T skaičius,

$$M(a + b + c) = 3X \quad (1)$$

kur X yra kiekvienos ABC kraštinės ilgis.

Mūsų antrasis įrankis yra ploto lygtis, gauta prilyginant ABC plotą N kartų trikampių T plotui:

$$X^2 = N ab \quad (2)$$

Šie įrankiai leidžia mums suformuluoti būtiną sąlygą tokios išsklotinės egzistavimui ir apibūdinti trikampį T , t.y., apskaičiuoti trikampį T turint N ir spalvinimo skaičiaus išsklotinę.

2.0.1 teorema ([2]). *Tarkime, kad trikampis ABC yra lygiakraštis. Tarkime, kad jis yra N -išsklotas naudojant trikampį T su kampais $(\alpha, \beta, \frac{\pi}{3})$, kur β nėra racionalus π daugiklis. Tegul M yra išsklotinės spalvinimo skaičius. Tada*

(i) $\zeta = e^{i\alpha}$ tenkina kvadratinę lygtį su koeficientais (įtraukiant N ir M) $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$.

(ii) N ir M vienareikšmiškai nustato trikampio T formą; tai reiškia, jog yra algebrinės formulės (b/a) ir (c/a) išreiškus N ir M . Konkrečiai, a/c ir b/c yra pateikti

$$\frac{1}{2} \left(\frac{3N + M^2}{3N - M^2} \pm \frac{\sqrt{(9N - M^2)(N - M^2)}}{3N - M^2} \right)$$

(iii) $M^2 < N$

Irodymas. Tarkime, kad lygiakraštis trikampis ABC yra N -išklotas naudojant trikampius T su kampais $(\alpha, \beta, \frac{\pi}{3})$. Apibrėžkime

$$\zeta := e^{i\alpha}$$

Tada

$$\begin{aligned} c &= \sin \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a &= \sin \alpha = \frac{\zeta - \zeta^{-1}}{2i} \\ b &= \sin \beta \\ &= \sin(2\pi/3 - \alpha) \\ &= \sin(2\pi/3) \cos \alpha - \cos(2\pi/3) \sin \alpha \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\zeta + \zeta^{-1}}{2} + \frac{1}{2} \frac{\zeta - \zeta^{-1}}{2i} \end{aligned}$$

Įstatome X reikšmę iš spalvinimo lygties (1) į ploto lygtį (2):

$$M^2(a + b + c)^2 = 9Nab$$

Dabar įsistatę a , b ir c reikšmes gauname koeficientus prie ζ :

$$\begin{aligned} 0 &= (M^2(-i\sqrt{3} - 1) + N(3i\sqrt{3} + 3))\zeta^4 \\ &+ 2M^2(-i\sqrt{3} + 1)\zeta^3 \\ &+ 6(M^2 - N)\zeta^2 \\ &+ 2M^2(i\sqrt{3} + 1)\zeta \\ &+ (M^2(i\sqrt{3} - 1) + N(-3i\sqrt{3} + 3)) \end{aligned} \tag{3}$$

Pirmiausia pastebėkime, kad $\zeta = 1$ nėra sprendinys, nes $f(1) = 8M^2$, o pagal spalvinimo lygtį $M > 0$. Toliau pastebėkite, kad $\zeta = -1$ yra sprendinys. Taigi nerealūs sprendimai, kurie yra mums įdomūs, tenkina kubinę lygtį. Ta lygtis yra $f(\zeta)/(\zeta + 1) = 0$. Lygtis gali būti suskaičiuojama pasinaudojant ilgąja dalyba arba naudojant SageMath, kodu:

$g = (f.maxima_methods().divide(x + 1)[0]).full_simplify()$

Lygties rezultatas yra:

$$\begin{aligned} 0 &= (M^2(-i\sqrt{3} - 1) + N(3i\sqrt{3} + 3))\zeta^3 \\ &+ (M^2(-i\sqrt{3} + 3) + N(-3i\sqrt{3} - 3))\zeta^2 \\ &+ (M^2(i\sqrt{3} + 3) + N(3i\sqrt{3} - 3))\zeta \\ &+ M^2(i\sqrt{3} - 1) + N(-3i\sqrt{3} + 3) \end{aligned}$$

Galiausiai ši lygtis turi kitą aiškų sprendimą, būtent $\zeta = e^{-i\pi}/3$, kurį galima patikrinti ranka arba paprašius SageMath $g(x=\exp(-i*\pi/3))$. Padalijus iš $z - e^{-\pi}/3$, randame kvadratinę lygtį ζ :

$$\begin{aligned} 0 &= (M^2(-i\sqrt{3} - 1) + N(3i\sqrt{3} + 3))\zeta^2 \\ &+ (M^2(-i\sqrt{3} + 1) + N(-3i\sqrt{3} + 3))\zeta \\ &+ 2M^2 - 6N \end{aligned}$$

Tai yra kvadratinė lygtis, paminėta (i) teoremoje.

Išsprendę tą lygtį, mes randame

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{M^2(i\sqrt{3} - 1) + N(3i\sqrt{3} - 3)}{M^2(-2i\sqrt{3} - 2) + N(6i\sqrt{3} + 6)} \\ &\pm \frac{\sqrt{M^4(6i\sqrt{3} + 6) + M^2N(-60i\sqrt{3} - 60) + N^2(54i\sqrt{3} + 54)}}{M^2(-2i\sqrt{3} - 2) + N(6i\sqrt{3} + 6)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{3N + M^2}{3N - M^2} \left(\frac{i\sqrt{3} - 1}{i\sqrt{3} + 1} \right) \\ &\pm \frac{\sqrt{M^4(6i\sqrt{3} + 6) + M^2N(-60i\sqrt{3} - 60) + N^2(54i\sqrt{3} + 54)}}{2(3N - M^2)(i\sqrt{3} + 1)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{3N + M^2}{3N - M^2} \left(\frac{i\sqrt{3} - 1}{i\sqrt{3} + 1} \right) \pm \frac{\sqrt{6}\sqrt{i\sqrt{3} + 1}\sqrt{(M^2 - 9N)(M^2 - N)}}{2(3N - M^2)(i\sqrt{3} + 1)} \\ &= \frac{1}{4} \frac{3N + M^2}{3N - M^2} (1 + i\sqrt{3}) \pm \frac{\sqrt{3}e^{i\pi/6}}{2e^{i\pi/3}} \frac{\sqrt{(M^2 - 9N)(M^2 - N)}}{3N - M^2} \\ &= \frac{1}{4} \frac{3N + M^2}{3N - M^2} (1 + i\sqrt{3}) \pm \frac{\sqrt{3}e^{-i\pi/6}}{2} \frac{\sqrt{(9N - M^2)(N - M^2)}}{3N - M^2} \\ &= \frac{1}{4} \frac{3N + M^2}{3N - M^2} (1 + i\sqrt{3}) \pm \frac{3 - i\sqrt{3}}{4} \frac{\sqrt{(9N - M^2)(N - M^2)}}{3N - M^2} \end{aligned}$$

Trikampių T kraštinės a ir b yra įsivaizduojamosios dviejų ζ reikšmių dalys. Mes jas aiškiai apskaičiuojame:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{3N + M^2}{3N - M^2} - \frac{\sqrt{(9N - M^2)(N - M^2)}}{3N - M^2} \right) \\ b &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{3N + M^2}{3N - M^2} + \frac{\sqrt{(9N - M^2)(N - M^2)}}{3N - M^2} \right) \\ c &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Tai atitinka formules (ii) teoremos dalyje.

Toliau įrodysime nelygybę $M^2 < N$, kuri yra (iii) dalis teoremoje. Iš ploto ir spalvinimo lygčių mes turime

$$\begin{aligned} X^2 &= N ab \\ \left(\frac{M}{3}(a+b+c) \right)^2 &= N bc \\ M^2 &= \frac{9Nbc}{(a+b+c)^2} \end{aligned}$$

Iš anksčiau apskaičiuotų formulių (a, b, c) , mes turime

$$\begin{aligned} a+b+c &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{3N+M^2}{3N-M^2} \right) \\ &= \sqrt{3} \left(\frac{3N}{3N-M^2} \right) \end{aligned}$$

Tai jau reiškia $M^2 < 3N$, nes jei ne, dešinė pusė yra neigiama, bet kairė pusė yra teigiama. Dabar atkreipkite dėmesį, kad lygtis (ii) dalyje yra $\sqrt{(9N-M^2)(N-M^2)}$. Kadangi $M^2 < 3N$, pirmasis faktorius yra teigiamas. Todėl antrasis faktorius $N-M^2$ turi būti neneigiamas, arba kvadratinė šaknis nebus reali, bet santykis a/b yra realus. Todėl $M^2 \leq N$. Mes negalime turėti $M^2 = N$, nes tuomet turėsime $a = b$, o tai reiškia $\alpha = \beta$. Gauname prieštarą hipotezei, todėl $M^2 < N$. Tai įrodo (iii) dalį teoremoje.

□

2.0.2 lema ([2]). Tarkime, kad trikampis ABC yra lygiakraštis. Tarkime, kad jis yra N -išklotas naudojant trikampius T su kampais $(\alpha, \beta, \frac{\pi}{3})$, kur α nėra racionalus π kartotinis. Tegul (a, b, c) yra trikampių T kraštinės. Tada

$$\frac{ab}{c^2} = \frac{4M^2N}{(3N-M^2)^2}$$

Įrodymas. Pradedame nuo formulės a ir b iš Teoremos 2.0.3, būtent, jog a ir b yra duota pasirenkant $+$ arba $-$ atitinkamai formulėje:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{3N+M^2}{3N-M^2} \pm \frac{\sqrt{(9N-M^2)(N-M^2)}}{3N-M^2} \right)$$

Naudojant tapatybę $(u-v)(u+v) = u^2 - v^2$, gauname

$$\frac{ab}{c^2} = \frac{1}{4} \frac{(3N+M^2)^2 - (9N-M^2)(N-M^2)}{(3N-M^2)^2}$$

Supaprastinę skaitiklį, turime

$$\frac{ab}{c^2} = \frac{1}{4} \frac{16M^2N}{(3N-M^2)^2}$$

Panaikinus 4, gauname formulę, nurodytą lemoje. Tai užbaigia įrodymą. $\square$

2.0.3 teorema ([2]). Tarkime, kad trikampis ABC yra lygiakraštis. Tarkime, kad jis yra N -išklotas naudojant trikampius T su kampais $(\alpha, \beta, \frac{\pi}{3})$, kur α nėra racionalus π kartotinis. Tada:

(i) $(9N - M^2)(N - M^2)$ yra kvadratas;

(ii) N nėra pirminis.

Pastabos. (1) Ypač, N negali būti 7, 11 ar 19. Darbe [1] yra įrodyta, kad 7 ar 11 išklotė neegzistuoja, o čia nagrinėtas atvejis buvo išspręstas kompiuteriniu būdu, kuris neveikia $N = 19$.

(2) Laczkovich įrodė, kad kiekvienas racionalus trikampis T su kampu $\gamma = \pi/3$, kur α nėra racionalus π kartotinis, gali būti naudojamas iškloti tam tikrą lygiakraštį trikampį. Tačiau reikiama N gali būti labai dideli.

Įrodymas. Tarkime, kad lygiakraštis trikampis ABC yra N -išklotas. Tegul (a, b, c) yra trikampio T kraštinės. Tada, pagal Teoremą 2.0.3, kai $M < \sqrt{N}$, trikampio T kraštinių santykiai a/c ir b/c yra duoti

$$\frac{1}{2} \left(\frac{3N + M^2}{3N - M^2} \pm \frac{\sqrt{(9N - M^2)(N - M^2)}}{3N - M^2} \right).$$

Pagal Teoremą 3.3 iš [3], trijų kraštinių (a, b, c) santykis yra racionalus, todėl a/c ir b/c yra racionalūs. Kadangi šaknies išraiška yra sveikasis skaičius, tai įrodo teoremos (i) dalį.

Prisiminkime plotų lygtį $X^2 = Nab$. Kadangi trikampis T yra racionalus, galime iš naujo parinkti mastelį taip, kad (a, b, c) būtų sveikieji skaičiai be bendro daliklio. (Tai pakeičia trikampio ABC dydį ir paverčia X sveikuoju skaičiumi.) Tegul s yra nekvadratinė ab dalis. Tada s dalija X^2 , kadangi s nėra kvadratas, tai s dalija X . Vadinasi, s^2 dalija Nab , o tai reiškia, kad s dalija N .

Dabar tarkime priešingai, kad N yra pirminis skaičius. Tada s yra arba 1, arba N . Jei $s = 1$, tai ab yra kvadratas, taigi $X = X^2/ab$ yra racionalus kvadratas, kadangi N yra sveikasis skaičius, tai N turi būti sveikasis kvadratas. Bet tai prieštarauja prielaidai, kad N yra pirminis.

Taigi lieka kita galimybė: $s = N$. Kadangi N yra numanomas pirminis, s taip pat yra pirminis, ir vienas iš a, b yra N kartų kvadratas, o kitas yra kvadratas. Tarkime, kad a nėra kvadratas, tada $a = Nd^2$ ir $b = e^2$. Tada $ab = Nd^2e^2$ yra N kartų kvadratas.

Tai neprieštarauja 2.0.2 lemai, su sąlyga $(3N - M^2)$ dalija $2M$. Tegul dalmuo yra q , tada $(3N - M^2)q = 2M$, taigi $qM^2 + 2M = 2N = (qM + 2)M$. Kadangi N yra pirminis, turime $M = 2$ ir $qM + 2 = N$. Bet jei $M = 2$, tai $qM + 2 = 2q + 2 = 2(q + 1) = N$, o tai prieštarauja prielaidai, kad N yra pirminis, nebent $q = 0$. Bet tokiu atveju $N = 2$, kas yra neįmanoma, nes reikia bent trijų trikampių T , kurių viena turėtų $\pi/3$ kampą kiekvienoje trikampio ABC viršūnėje. Tai užbaigia teoremos įrodymą. $\square$

2.1 Algoritmas nustatyti, ar egzistuoja (N)-išklotė

2.1.1 teorema ([2]). *Duotam N ir lygiakraščiui trikampiui ABC egzistuoja baigtinė trikampių T aibė S , kurios dydis neviršija $3\sqrt{N}$, tokia, kad jei bet kuris trikampis T su kampais $(\alpha, \beta, \pi/3)$, kur α nėra racionalus π kartotinis, gali būti naudojama trikampio ABC N -išklotei, tada bent vienas iš trikampių T iš S gali būti panaudota. Ar tokia išklotė egzistuoja, galima apskaičiuoti baigtiniu (galbūt dideliu) veiksmų skaičiumi.*

Pastaba. Mes neteigiam, kad šis algoritmas yra efektyvus.

Irodymas. Pagal teoremą 2.0.3, bet kokiam N -dalijamam trikampyje ABC spalvinimo skaičius M yra daugiausia $\sqrt{3N}$ ir (N, M) kartu nusako trikampio T kraštines (a, b, c) . Tai leidžia gauti baigtinį trikampių T rinkinį S , ir teorema 2.0.1 teigia, kad bet kuris N -dėliojimas naudoja vieną iš šių trikampių T . Visi trikampiai T iš S tenkina plotų lygtį: trikampio ABC plotas yra lygus N kartų trikampių T plotui. Turint tokį trikampį T su kraštinėmis (a, b, c) , naudojant gerai žinomus paieškos grafuose algoritmus (pavyzdžiui, paiešką gylin) galima nuspręsti, ar (a, b, c) gali sudėlioti ABC . Tai gali pasirodyti akivaizdu, bet trumpai aptarkime detales.

Galime traktuoti sujungtus dalinius padalinius kaip grafų viršūnes, kur yra briauna tarp viršūnių p ir q , jei dėliojimas q gaunamas iš p pridėdant dar vieną trikampį T trikampio ABC ribose taip, kad naujoji trikampis T dalintųsi bent viena viršūne ir bent dalimi bent vienos briaunos su dėliojimu p , ir nesikirstų su jokia trikampiu T iš p . Kiekvienas dalinis padalinimas p turi tik baigtinį skaičių kaimynų, kurie gali būti algoritmiškai sugeneruoti išnagrinėjus visas galimas padalinimo plėtimo galimybes. Tokiu atveju reikia patikrinti, ar naujas trikampis kertasi su jau esamais; šioje vietoje iškyla tikslumo klausimas, kuris aptariamas toliau. Nė vienas kelias negali būti ilgesnis nei N , nes dalinio padalinimo plotas negali viršyti N kartų trikampio T ploto. Galiausiai, algoritmiškai galima patikrinti, ar duotas dalinis padalinimas sudaro pilną padalinimą ABC – čia taip pat iškyla tikslumo klausimų. Šių tikslumo problemų esmė – algoritmiškai nuspręsti, ar du taškai sutampa, ar ne, ar trikampių T briaunos sutampa, ar ne, ir ar taškas priklauso duotai atkarpai.

Dalinius padalinius vaizduojame kaip trikampių sąrašus, kur kiekvienas trikampis apibrėžtas trimis taškais, o kiekvienas taškas – koordinačių pora tam tikrame lauke K , arba tiesiog baigtinio tikslumo kompleksiniais skaičiais. Gerai žinoma, kad algebrinių skaičių laukuose sprendžiamas lygybės klausimas, todėl, jei taškų koordinatėms naudojami algebriniai skaičiai, tikslumo problemų neiškyla – skaičiavimai yra tikslūs. Tai užbaigia įrodymą. $\square$

Pastaba. Galėtume parašyti šią įrodymo programą Python kalba, naudodami SageMath biblioteką algebrinių skaičių laukų aritmetikai. Tačiau to nepadarėme. Vietoje to parašėme programą C++ kalba, naudodami fiksuoto tikslumo realiuosius skaičius. Teoriškai fiksuoto tikslumo realieji skaičiai visada veiktų, nors kartais gali reikėti labai didelio tikslumo, jei trikampyje T yra labai mažas kampas. Kadangi trikampių T kampai kiekvienoje viršūnėje susideda iš α , β ir γ , tai dvi trikampių T kraštinės arba sutampa, arba aiškiai skiriasi. Praktikoje nenaudojome trikampių su labai mažais kampais, todėl įprasti fiksuoto tikslumo realieji skaičiai nesukėlė problemų. Ši programa neturėjo jokio vaidmens mūsų įrodymuose ir nerado jokių naujų padalijimų. Tačiau ji padėjo atmesti visas $N < 105$ reikšmes, kaip aprašyta toliau.

2.2 Palyginimas su Laczkovich rezultatais

Dabar, kai žinome, kaip nustatyti baigtinį galimų trikampių T rinkinį, kuriame yra kiekvienas trikampis T su $\pi/3$ kampais ir α , kuris nėra racionalus π kartotinis, kurį gali būti naudojama N -išsklotėje lygiakraščio trikampio ABC , jei pasirinkime N pakankamai didelį. Kitaip tariant, esant duotam N , bent viena (N, ABC) pora yra nustatyta taip, kad išsklotė egzistuoja.

Lyginant šiuos rezultatus, kyla natūralus klausimas, ar trikampis T iš tikrųjų nustato N . Tai yra, ar tas pats trikampis T gali būti naudojama dengiant du skirtingo dydžio lygiakraščius trikampius? Jei yra duotas vienas trikampis T , visada galima jį pakeisti į kvadratinę m^2 mažesnių trikampių dangą, taip sukuriant m^2N -denginį. Taigi, geriausia, ką galime tikėtis, yra tai, kad N kvadratinė dalis gali būti nustatyta pagal trikampį T . Kadangi turime tikslias formules a/b ir b/c , šis klausimas gali būti atsakytas.

2.2.1 teorema ([2]). *Tarkime, kad T yra trikampis su kampais $(\alpha, \beta, \pi/3)$, kur β nėra racionalus $\pi/3$ daugiklis. Tarkime, kad T yra naudojamas N -denginyje lygiakraščio trikampio ir taip pat K -denginyje (kitame) lygiakraščiame trikampyje. Tada N ir K turi tą pačią bekvadratinę dalį.*

Irodymas. Pažymėkime M kaip spalvinimo skaičių N -denginyje ir J kaip spalvinimo skaičių K -denginyje. Iš 2.0.2 turime:

$$\frac{3N + M^2}{3N - M^2} \pm \frac{\sqrt{(9N - M^2)(N - M^2)}}{3N - M^2} = \frac{3K + J^2}{3K - J^2} \pm \frac{\sqrt{(9K - J^2)(K - J^2)}}{3K - J^2}$$

Sudėjus abi lygtis (gautos keičiant ženklus) gauname:

$$\frac{3N + M^2}{3N - M^2} = \frac{3K + J^2}{3K - J^2} \quad (4)$$

Apibrėžkime:

$$f(x) := \frac{3x + 1}{3x - 1}$$

Mes esame suinteresuoti tik racionalių $x > 1$ reikšmių sritimi. Tada f' yra neigiamas, todėl f yra mažėjanti funkcija ir todėl funkcija yra injekcinė. Pagal (4),

$$f\left(\frac{N}{M^2}\right) = f\left(\frac{K}{J^2}\right).$$

Kadangi f yra injekcinė, gauname $N/M^2 = K/J^2$. Taigi $J^2N = M^2K$, todėl M ir N turi tą pačią bekvadratinę dalį. Tai užbaigia teoremos įrodymą. □

2.3 Skaitiniai rezultatai

M. Beeson straipsnyje [2] įrodė, kad jei N yra pirminis skaičius, $N > 3$, lygiakraščio trikampio padalijimas į N dalių su kampais $(\alpha, \beta, \pi/3)$, kai α nėra racionalus π daliklis nėra įmanomas, tačiau

bendros taisyklės visiems N rasti nepavyko. Nepaisant to jis pasiūlė dviejų žingsnių strategiją, kaip patikrinti kiekvieną konkretų N :

1. Pirmiausia patikrinti ar lygtis iš lemos 2.0.2 turi racionalius kraštinių santykius a/c ir b/c . Jei ne, vadinasi, toks N -denginyis neegzistuoja. Jei taip, vadinasi, potencialus trikampis T rastas, ir jo kraštinės galima išreikšti sveikaisiais skaičiais be bendro daliklio.

2. Jei teorinis patikrinimas sėkmingas, tuomet reikia sukonstruoti padalijimą, naudojant paieškos algoritmą (konkrečiai, gylio paiešką, ang. Depth-First Search arba DFS).

Taigi, Beeson atliko skaitinius eksperimentus mažoms N reikšmėms. Jo tikslas buvo išsiaiškinti, ar egzistuoja tokie N denginiai, kai N yra mažesnis už 105.

Pirmiausia, jis parašė programą SageMath kalba, kuri atliko teorinį patikrinimą. Ši programa peržiūrėjo N reikšmes kai $N < 200$ ir susijusio spalvinimo skaičiaus M , kurie tenkino teorinę sąlygą ir egzistavo tinkamas trikampis T (kraštinių santykiai pateikti lentelėje 1).

N	M	Trikampis
54	6	(3,8,7)
66	4	(11,96,91)
70	5	(7,40,37)
85	6	(17,80,73)
96	8	(3,8,7)
105	7	(5,21,19)
105	9	(7,15,13)
130	9	(40,117,103)
150	10	(3,8,7)
153	5	(17,225,217)
156	9	(13,48,43)
198	10	(72,275,247)

1 lentelė. Dengimai, kurie nėra eliminuoti plotų ir spalvinimo lygtimis.

Galutinė M. Beesono išvada, remiantis šiais skaičiavimais, buvo suformuluota kaip teorema: jei $N < 105$, tai nėra jokio N -denginio, kai didysis trikampis yra lygiakraštis, o naudojamas trikampis T turi vieną kampą $\pi/3$, o kitas jos kampas nėra racionalus π kartotinis.

Nors teoriškai būtų galima bandyti tikrinti ir didesnes N reikšmes, pasitelkus galingesnius kompiuterius, pati paieškos problema, ieškant bendro sprendimo tokiu metodu, tampa nebe optimali. Tačiau M. Beeson darbas suteikė įžvalgų bent mažoms N reikšmėms.

2.4 Įrodymas, jog N negali būti pirminis

Dabar įrodysime pagrindinį šio darbo tikslą, jog N negali būti pirminis, kai lygiakraštis trikampis ABC yra padalintas į N mažesnių trikampių su kampais $(\alpha, \beta, \pi/3)$, α nėra racionalus π kartotinis.

2.4.1 teorema. Tarkime, kad lygiakraštis trikampis ABC yra N -išklotas trikampaiais T su kampais (α, β, γ) , kur $\gamma = \pi/3$ ir α nėra racionalus π kartotinis. Tuomet N nėra pirminis skaičius.

Irodymas. Tarkime priešingai, kad N yra pirminis. Pažymėkime X - lygiakraščio trikampio ABC kraštinių ilgį, (a,b,c) - dalijamo trikampio kraštinių ilgių. Remiantis teorema 3.3 iš [3], (a,b,c) yra sveikieji skaičiai, kurių didžiausias bendras daliklis yra lygus 1. Pritaikome trikampio ploto formulę:

$$S = \frac{absin(\gamma)}{2}$$

Kur a ir b yra trikampio kraštinės, o γ yra kampas tarp jų.

Tada plotų lygtis yra:

$$X^2 \sin(\pi/3) = Nab \sin(\pi/3)$$

Kairėje pusėje $\pi/3$ yra lygiakraščio trikampio ABC kampas, o dešinėje $\pi/3$ yra trikampio T kampas γ .

Suprastinę $\sin(\pi/3)$ turime:

$$X^2 = Nab \quad (\text{plotų lygtis})$$

Kadangi kiekviena trikampio ABC kraštinė yra padalyta į mažesnių trikampių T kraštinių aibes, egzistuoja tokie sveikieji skaičiai (p,q,r) , kad

$$X = pa + qb + rc.$$

Kadangi X yra sveikasis skaičius ir $X^2 = Nab$, vadinasi, N dalija X^2 , ką įprastai žymime $N \mid X^2$. Tada turime:

$$N \mid X^2$$

$$N \mid X \quad \text{kadangi } N \text{ yra pirminis}$$

$$N^2 \mid X^2$$

$$N^2 \mid Nab \quad \text{kadangi } X^2 = Nab$$

$$N \mid ab$$

Kadangi N yra pirminis skaičius, tai $N \mid a$ arba $N \mid b$. Kadangi iki šiol niekas neišskyrė α iš β , išskyrus jų pavadinimus, galime be bendrumo praradimo daryti prielaidą, kad $N \mid a$. Tada egzistuoja toks $e \geq 0$, kad $a = Ne$. Tuomet $X^2 = N^2eb$. Padaliję iš N^2 , gauname $eb = \left(\frac{X}{N}\right)^2$. Kadangi X ir N yra sveikieji, $\frac{X}{N}$ yra racionalus skaičius. Kadangi e ir b yra sveikieji, eb yra sveikasis skaičius. Jei sveikasis skaičius eb yra racionalaus skaičiaus kvadratas, tai eb turi būti sveikąjo skaičiaus kvadratas.

Remiantis kosinusų teorema, turime:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cos(\pi/3)ab$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - ab \quad \text{kadangi} \quad \cos(\pi/3) = 1/2 \quad (5)$$

$$\text{Įsistačius } a = Ne \quad \text{gauname} \quad c^2 = N^2e^2 + b^2 - Neb$$

Todėl $c \equiv \pm b \pmod{N}$ ir $N \nmid b$, nes jei $N \mid b$, tuomet $N \mid c^2$ ir $N \mid c$, tai reiškia, N dalija visus (a, b, c) , taigi gauname prieštarą teiginiui, jog (a, b, c) neturi bendro daliklio.

Kadangi X yra trikampių T kraštinių suma, egzistuoja tokie ne neigiami sveikieji skaičiai (p, q, r) , kad:

$$X = pa + qb + rc$$

Be to, galime daryti prielaidą, kad abu p ir q nėra lygūs nuliui tuo pačiu metu, nes kiekviename ABC viršūnės taške visi trikampiai T turi γ kampą ($\gamma = \pi/3$), todėl tas trikampis neturi c kraštinės ant ABC krašto.

Pagal Laczkovich lemas 4.5 ir 4.6 iš [3] straipsnio $r = 0$.

Remiantis, kad c -kraštinės negali būti ant ABC kraštinių ABC kraštinė X gali būti išreikšta forma:

$$X = pNe + qb$$

Kadangi $N \mid X$, pažvelgę į lygtį modulių N , gauname:

$$0 \equiv qb \pmod{N}$$

Žinome, jog $N \nmid b$, taigi $N \mid q$, vadinasi q turi būti 0 arba $q \geq N$.

q negali būti lygus 0, nes tuomet kraštinę X padengs tik a kraštinės, o tai nėra įmanoma, nes tuomet prieštarosime sąlygai, jog trikampio ABC kampus sudaro trikampių T kampai, kurie yra lygūs $\pi/3$

$q \geq N$ reikštų, kad vienai trikampio kraštinei tektų ne mažiau kaip N trikampių T , bet visas trikampis ABC sudarytas tik iš N trikampių, tad tai neįmanoma.

Taigi gauname prieštarą teiginiui, jog N yra pirminis, kai trikampis yra sudarytas iš kampų $(\alpha, \beta, \pi/3)$, kai α nėra racionalus π kartotinis ir ABC yra lygiakraštis trikampis.

□

Pastaba. Panašiai galima įrodyti ir atvejį, kai lygiakraštis trikampis, išklotas trikampaiais T , turinčiais kampus $(\alpha, \beta, 2\pi/3)$. Tik šiuo atveju kosinusų teorema duoda $c^2 = a^2 + b^2 + ab$ vietoje $c^2 = a^2 + b^2 - ab$. Šis įrodymas yra pateikiamas [2] straipsnyje.

Literatūra ir šaltiniai

- [1] M. Beeson. “No triangle can be cut into seven congruent triangles”. Iš: (2018 m.) (cit. psl. 8, 17).
- [2] M. Beeson. “Tiling an equilateral triangle”. Iš: (2019 m.) (cit. psl. 3, 4, 8–11, 13, 16–19, 22).
- [3] M. Laczkovich. “Tilings of convex polygons with congruent triangles”. Iš: *Discrete and Computational Geometry* 38 (2012 m.), p. 330–372 (cit. psl. 8, 10, 17, 21, 22).
- [4] M. Laczkovich. “Tilings of triangles”. Iš: *Discrete Mathematics* 140 (1995 m.), p. 79–94 (cit. psl. 8).
- [5] S. L. Snover, C. Waiveris ir J. K. Williams. “Rep-tiling for triangles”. Iš: *Discrete Mathematics* 91 (1991 m.), p. 193–200 (cit. psl. 8).
- [6] A. Soifer. *How Does One Cut a Triangle?* Springer, 2009 m. (cit. psl. 8, 10).