

VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKA
MAGISTRO STUDIJŲ PROGRAMA

Erdős–Turán problemos versija grupėse
 $\mathbb{Z}_n$ ir Sperner tipo teoremos multiaibėms
A version of the Erdős–Turán problem in
groups $\mathbb{Z}_n$ and Sperner-type theorems
for multisets

Baigiamasis magistro darbas

Atliko: Domas Sakavičius

VU el. p.: domas.sakavicius@mif.vu.lt

Vadovas: Doc., dr. Tomas Juškevičius

Vilnius

2025

Turinys

1	Įvadas	2
2	Du uždavinio susiaurinimai į baigtinę aibę	4
3	Antros eilės $\mathbb{Z}_n$ adityvios bazės	4
3.1	Adityvios bazės ciklinėse grupėse: pagrindinis rezultatas	5
3.2	Reikiamo tankio Newman polinomų apibrėžimas	5
3.3	Įrodymai	6
4	Aukštesnės nei antros eilės $\mathbb{Z}_n$ adityvios bazės	11
4.1	Pagrindinė teorema	11
4.2	Įrodymai	11
5	Sperner teorema ir jos apibendrinimai	14
6	Optimalios nelygybės multiaibių šeimoms su apribotu grandinių ilgiu	17
7	Santrauka	20
8	Summary	20

1 Įvadas

Tegul $0 < a_1 < a_2 \dots$ yra begalinė natūraliųjų skaičių seka. Pažymėkime lygties $n = a_i + a_j$ sprendinių skaičių $f(n)$. 1941 m. P. Erdős ir P. Turán [12] iškėlė hipotezę, kad jei $f(n) > 0$ su visais $n > n_0$, tuomet $\limsup_{n \rightarrow \infty} f(n) = \infty$. Kitaip sakant, funkcija f neturėtų būti aprėžta. 1954 m. Pats P. Erdős [10] minėjo, jog tokį tvirtinimą įrodyti bus labai sunku. 2003 m. G. Grekos, L. Haddad, C. Helou, J. Pihko [5] parodė, kad jei $f(n) > 0$ visiems n , tuomet $f(n)$ būtinai įgyja reikšmę didesnę už 5. 2006 m. P. Borwein, S. Choi, F. Chu [9] pagerino šį rezultatą ir parodė, kad įgyjama reikšmė turi būti didesnė už 7.

Ši uždavinį bandoma spręsti ir iš kitos pusės, t.y. konstruoti $\mathbb{N} \cup \{0\}$ adityvias bazes (aibės $A = \{a_1, a_2, \dots\}$, kurioms $f(n) > 0$ visiems n), kurių reprezentacijos funkcijos $f(n)$ įgyja kiek įmanoma mažesnes reikšmes. 1954 m. P. Erdős [10] parodė, kad egzistuoja $\mathbb{N} \cup \{0\}$ adityvi bazė, kurios reprezentacijos funkcijai teisinga nelygybė $f(n) < c_1 \log n$, visiems $n > 1$. 2012 m. A. Dubickas [1] parodė, kad egzistuoja $\mathbb{N} \cup \{0\}$ adityvi bazė, tokia kad $f(n) < (2e + \varepsilon) \log n$ visiems $n \geq n(\varepsilon)$.

1990 m. I. Z. Ruzsa [6] parodė, kad egzistuoja $\mathbb{N} \cup \{0\}$ adityvi bazė su aprėžtu reprezentacijos funkcijos kvadratinio vidurkiu, t.y. tokia, kad $\sum_{n \leq N} f^2(n) = O(N)$. Šis rezultatas rodo, kad egzistuoja $\mathbb{N} \cup \{0\}$ adityvių bazių, kurių reprezentacijos funkcijos įgyja daug mažų reikšmių. Tokių adityvių bazių egzistavimas reiškia, kad Erdős–Turán spėjimo įrodyti naudojant Dirichlė principą bus sudėtinga.

Šiame darbe taip pat nagrinėsime Sperner tipo nelygybes aibių ir multiaibių šeimoms. Vienas žinomiausių ekstremalios aibių teorijos rezultatų yra Sperner teorema. Tarkime, kad $\mathcal{F}$ yra baigtinės aibės $\{1, 2, \dots, n\}$ poaibių šeima. Sperner teorema teigia, jog jei neegzistuoja dvi aibės $A, B \in \mathcal{F}$ tokios, kad $A \subset B$, tai $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. Teorema taip pat teigia, jog lygybė galioja tada ir tik tada, kai $\mathcal{F}$ yra sudaryta iš visų aibių, turinčių lygiai $\lfloor n/2 \rfloor$ arba $\lceil n/2 \rceil$ elementų. Egzistuoja daugybė skirtingų šios teoremos įrodymų, tačiau nė vienas iš jų nėra elementarus ir remiasi viena ar kita lema ar teorema. Šią teoremą naudojant tik matematinę indukciją įrodė šio darbo vadovas T. Juškevičius savo disertacijoje [14]. Vardan pilnumo, šis įrodymas pateikiamas ir šiame darbe. Šiame darbe praplečiame šį teiginį multiaibių, kuriose elementų kartotinumai neviršija 2, šeimoms.

Darbas sudarytas iš penkių skyrių: pirmame skyriuje pateiksime nagrinėjamos Erdős–Turán problemos motyvą; antrasis skyrius skirtas Erdős–Turán problemos versijai grupėse $\mathbb{Z}_n$, kai sudedami du elementai, čia suformuluosime pagrindinę teoremą, apibrėšime tam tikrą atsitiktinį Newman polinomą, įrodysime kai kurias jo savybes, apžvelgsime įrodymui reikalingus įrankius iš tikimybių teorijos: Chernoff įvertį, FKG nelygybę, apibrėšime susijusias sąvokas, bei įrodysime pagrindinę skyriaus teoremą; trečiasis skyrius skirtas atvejui, kai

sudedami daugiau nei du elementai, čia suformuluosime pagrindinę skyriaus teoremą (ji bus panaši į antro skyriaus teoremą), apžvelgsime įrodymui reikalingus įrankius ir įrodysime jau minėtą teoremą; ketvirtasis skyrius skirtas elementariam Sperner teoremos įrodymui; penktasis skyrius skirtas Sperner tipo teoremai multiaibėse, kur elementų kartotinumai neviršija 2.

2 Du uždavinio susiaurinimai į baigtinę aibę

Pradžioje P. Erdős nagrinėjo tik $\mathbb{N} \cup \{0\}$ adityvias bazes, jas apibrėždamas kaip aibes $A \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ kurių Minkovskio sumai $A + A$ priklauso visi natūralieji skaičiai pradedant koku nors $n_0 \in \mathbb{N}$. Šis apibrėžimas patogus, nes jį nagrinėjant įtakos nedaro kraštas, t.y. nereikia užtikrinti, kad jau minėta Minkowski suma padengtų mažus natūraliuosius skaičius, kuriuos kaip dviejų natūraliųjų skaičių sumą išreikšti yra sąlyginai mažai būdų.

Norint šį uždavinį nagrinėti baigtinėje aibėje iš esmės turime du pasirinkimus - galime nagrinėti aibių $[2n] = \{0, 1, \dots, 2n\}$ adityvias bazes arba grupių $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\}$ adityvias bazes. A. Dubickas baigtinės aibės $[2n]$ adityvią bazę apibrėžė kaip aibę $A \subset [n]$ tokią, kuriai teisinga $A + A = [2n]$. Šis atvejis, atrodo, iš esmės skiriasi nuo begalinio dėl kraštų efekto. Norint užtikrinti, kad būtų padengti kraštiniai aibės $[2n]$ elementai tenka gerokai sutankinti aibę A , ko pasekoje padidėja didžiausios reprezentacijos funkcijos $f(n)$ reikšmės eilė. Kol kas geriausias rezultatas priklauso A. Dubickui, kuris 2012 m. [1] parodė, jog bet kuriam $\varepsilon > 0$ ir visiems $n > N(\varepsilon)$ egzistuoja tokia $[2n]$ adityvi bazė, kurios reprezentacijos funkcijos visos reikšmės priklauso intervalui $[1, (1 + \varepsilon)(4/\pi)(\log n)^2]$. Čia reiktų pastebėti, kad pats P. Erdős parodė, jog egzistuoja $\mathbb{N} \cup \{0\}$ adityvi bazė, kurios reprezentacijos funkcijos eilė yra $\log(n)$. Šiame darbe mes apsiribosime aibių $\mathbb{Z}_n$ adityvių bazių nagrinėjimu. Pastebėsime, jog šis atvejis yra panašesnis į originalų begalinį atvejį, nes čia neegzistuoja jau minėtas krašto efektas.

3 Antros eilės $\mathbb{Z}_n$ adityvios bazės

Aibę $A \subset \mathbb{Z}_n$ vadiname antros eilės $\mathbb{Z}_n$ adityvia baze (toliau - tiesiog $\mathbb{Z}_n$ adityvia baze), jeigu Minkowski suma $A + A = \{a + b \mid a \in A, b \in A\} = \mathbb{Z}_n$ (šis apibrėžimas yra motyvuotas A. Dubicko darbų apie polinominę Erdős–Turán problemos versiją). Apibrėžkime atitinkamą Newman polinomą (tokį polinomą, kurio koeficientai yra 0 arba 1) $P_A(t) = \sum_{a \in A} t^a$. Pastebėkime, kad šio polinomo kvadrato $P_A^2 \pmod{t^n}$ koeficientas prie t^k (dažnai žymimas $f(k)$) yra lygus skaičiui būdų, kuriais galime elementą $\bar{k} \in \mathbb{Z}_n$ išreikšti kaip dviejų elementų (nebūtinai skirtingų) iš aibės A sumą. Nuo šiol laikysime, kad visi polinomi nagrinėjami $\pmod{t^n}$. Taigi, dirbant su adityviomis bazėmis patogiau nagrinėti Newman polinomus ir jų kvadratų koeficientus. Aišku, kad aibė $A \subset \mathbb{Z}_n$ yra $\mathbb{Z}_n$ adityvi bazė tada ir tik tada, kai atitinkamo Newman polinomo kvadrato visi koeficientai yra didesni arba lygūs 1.

3.1 Adityvios bazės ciklinėse grupėse: pagrindinis rezultatas

Šio skyriaus tikslas yra parodyti, jog pakankamai dideliame n visada egzistuoja $\mathbb{Z}_n$ adityvi bazė su maža maksimalia reprezentacijos funkcijos reikšme. Performulavus šį teiginį Newman polinomų kalba suformuluojame teoremą, kurios įrodymas seks kitame šio darbo skyriuje:

1 teorema. Egzistuoja skaičius $N \in \mathbb{N}$ toks, kad visiems $n \geq N$ galime rasti Newman polinomą $P_n(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_{n-1}t^{n-1}$, kurio kvadrato $P_n^2(t) = T_0 + T_1t + \dots + T_{n-1}t^{n-1}$ visi koeficientai T_i priklauso intervalui $[1; C \log(n))$, kur C yra konstanta, nepriklausanti nuo n .

Ši teorema intuityviai sako, jog pakankamai dideliame n egzistuoja adityvi $\mathbb{Z}_n$ bazė su maža reprezentacijos funkcija. Reiktų pastebėti, jog šis koeficientų T_i įvertis iš viršaus yra tokios pat eilės kaip P. Erdős 1954 m. [10] gautas įvertis, kur jis parodė jog visiems n egzistuoja $\mathbb{N} \cup \{0\}$ adityvi bazė kurios reprezentacijos funkcija priklauso intervalui $[1, c_1 \log(n)]$.

3.2 Reikiamo tankio Newman polinomų apibrėžimas

Pagrindinė idėja konstruojant atsitiktinį Newman polinomą - užtikrinti, kad aibės $A \subset \mathbb{Z}_n$ tankis būtų toks pat, kaip jau minėtame P. Erdős pavyzdyje.

Apibrėžkime atsitiktinį Newman polinomą

$$P_n(t) = X_0 + X_1t + \dots + X_{n-1}t^{n-1},$$

kur $X_0, \dots, X_{n-1}$ yra nepriklausomų Bernulio atsitiktinių dydžių, su parametrais p_k , seka. Tikimybes p_k parinkime taip, kad vidutiniškai $c\sqrt{n \log(n)}$ dydžių X_i atvirstų 1. Tai yra,

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = p_k = \frac{c\sqrt{\log(n)}}{\sqrt{n}}$$

ir

$$\mathbb{P}(X_k = 0) = 1 - p_k = 1 - \frac{c\sqrt{\log(n)}}{\sqrt{n}},$$

kur c yra teigiama reali konstanta, nepriklausanti nuo n . Dabar jau galime suformuluoti teoremos 1 atitikmenį atsitiktiniams Newman polinomams.

2 teorema. Visiems $c \geq 2$ egzistuoja skaičius $N \in \mathbb{N}$ toks, kad visiems $n \geq N$ tikimybė, kad polinomo P_n^2 koeficientai priklauso intervalui $[1; (c^2 + c) \log(n))$ yra teigiama.

Reikėtų pastebėti, kad iš teoremos 2 išplaukia teorema 1. Nors ši teorema neduoda būdo sukonstruoti reikiamą Newman polinomą, ji patvirtina tokio polinomo egzistavimą.

Prieš pradedant įrodymą mums reikia kelių bazinių apibrėžimų ir įverčių.

1 apibrėžimas. *Didėjantis įvykis.*

Tegul $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ - tikimybinė erdvė, kur $\Omega = \{0, 1\}^n$. Vektoriams iš Ω apibrėžkime įprastą dalinę tvarką $\leq$. Didėjančiu įvykiu tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vadinsime kolekciją vektorių $B \in \mathcal{F}$, jeigu visi $x \in \Omega$ tokie, kad $y \leq x$ bent vienam $y \in B$ taip pat priklauso B .

1 lema. *FKG nelygybė.*

Tegul $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ - tikimybinė erdvė, kur $\Omega = \{0, 1\}^n$ ir $\mathbb{P}(\omega) = \prod_{k=1}^n q_k^{\omega_k} (1 - q_k)^{1-\omega_k}$ yra sandaugos matas (čia $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$), o $A, B \in \mathcal{F}$ - didėjančios įvykiai. Tuomet teisinga nelygybė

$$\int_{\Omega} \mathbb{1}_{A \cap B}(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \geq \int_{\Omega} \mathbb{1}_A(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \cdot \int_{\Omega} \mathbb{1}_B(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

2 lema. *Chernoff įvertis.* [7]

Tegul $X_1, \dots, X_n$ - nepriklausomų atsitiktinių Bernulio dydžių seka, kur $\mathbb{P}(X_i = 1) = p_i$ ir $\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p_i$. Pažymėkime $X = \sum_{i=1}^n X_i$ ir $\mu = \mathbb{E}[X]$. Tuomet teisingas įvertis

$$\mathbb{P}(X \geq (1 + \delta)\mu) \leq e^{-\frac{\delta^2}{2+\delta}\mu}, \text{ kur } \delta > 0.$$

3.3 Įrodymai

Šis skyrius susideda iš trijų įrodymų: pagalbinės lemos, kuri leidžia įvertinti anksčiau apibrėžto atsitiktinio Newman polinomo P_n kvadrato P_n^2 koeficientų T_k vidurkių, teoremos, kuri teigia kad tikimybė jog visi P_n^2 koeficientai T_i yra teigiami yra teigiama, bei fakto, kad tikimybė jog visi P_n^2 koeficientai T_i yra mažesni už $(c^2 + c) \log(n)$ yra teigiama. Pradėkime nuo pagalbinės lemos.

3 lema. Pažymėkime $P_n^2(t) = (X_0 + X_1 t + \dots + X_{n-1} t^{n-1})^2 = T_0 + T_1 t + \dots + T_{n-1} t^{n-1}$. Tuomet visiems $n > 1$ ir $k \in [n - 1]$ teisinga nelygybė

$$\mathbb{E}T_k \leq (c^2 + c) \log(n).$$

3 lemos įrodymas. Išskirkime visus atvejus į dvi dalis: kur n yra lyginis ir k nelyginis, bei likusius. *Pastaba:* šiame įrodyme rašydami X_k turime omenyje $X_{k \bmod n}$, t.y. į visus indeksus žiūrime mod n .

1) kai n yra lyginis ir k yra nelyginis:

Matome, kad

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}T_k &= \mathbb{E}(X_0X_k + X_1X_{k-1} + \dots + X_{n-1}X_{k-(n-1)}) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}(X_iX_{k-i}) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{c\sqrt{\log(n)}}{\sqrt{n}} \right)^2 \\
&= n \cdot \frac{c^2 \log(n)}{n} \\
&= c^2 \log(n) \\
&\leq (c^2 + c) \log(n).
\end{aligned}$$

2) kai n yra nelyginis arba k yra lyginis:

Matome, kad

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}T_k &= \mathbb{E}(X_0X_k + X_1X_{k-1} + \dots + X_{n-1}X_{k-(n-1)}) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}(X_iX_{k-i}) \\
&= \sum_{i=0}^{n-2} \left(\frac{c\sqrt{\log(n)}}{\sqrt{n}} \right)^2 + \frac{c\sqrt{\log(n)}}{\sqrt{n}} \\
&= (n-1) \cdot \frac{c^2 \log(n)}{n} + \frac{c\sqrt{\log(n)}}{\sqrt{n}} \\
&\leq (c^2 + c) \log(n).
\end{aligned}$$

Paskutinės nelygybės teisingumu galime įsitikinti tiesiogiai nagrinėdami skirtumą

$$\begin{aligned}
&(c^2 + c) \log(n) - \left((n-1) \cdot \frac{c^2 \log(n)}{n} + \frac{c\sqrt{\log(n)}}{\sqrt{n}} \right) \\
&= c \log(n) + \frac{c^2 \log(n)}{n} - \frac{c\sqrt{\log(n)}}{\sqrt{n}} \\
&= \frac{c^2 \log(n)}{n} + c\sqrt{\log(n)} \left(\sqrt{\log(n)} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right),
\end{aligned}$$

pastebėdami, kad funkcija $g(n) = \sqrt{\log(n)} - \frac{1}{\sqrt{n}}$ yra didėjanti visoje savo apibrėžimo srityje ir patikrindami, kad $g(2) > 0$. □

Dabar jau galime pereiti prie pagrindinių šio darbo įrodymų. Pradėsime nuo apatinio įverčio.

3 teorema. Visiems $c \geq 1$ ir visiems n tokiems, kad $c^2 \log(n) \leq n$ visi P_n^2 koeficientai T_i yra teigiami su teigiama tikimybe.

3 teoremos įrodymas. Atskirkime du atvejus, kai n yra lyginis ir kai n yra nelyginis:

1) kai n yra lyginis ir $c > 1$:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left(\bigcap_{i=0}^{n-1} \{T_i \geq 1\} \right) \geq \prod_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(T_i \geq 1) \\
&= \prod_{i=0}^{n-1} (1 - \mathbb{P}(T_i = 0)) \\
&= \prod_{i=0}^{n/2-1} (1 - \mathbb{P}(T_{2i} = 0)) \cdot \prod_{i=0}^{n/2-1} (1 - \mathbb{P}(T_{2i+1} = 0)) \\
&= \prod_{i=0}^{n/2-1} \left(1 - \left(1 - \frac{c\sqrt{\log(n)}}{\sqrt{n}} \right) \prod_{k=0}^{n-2} \left(1 - \frac{c^2 \log(n)}{n} \right) \right) \left(1 - \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{c^2 \log(n)}{n} \right) \right) \\
&= \left(1 - \left(1 - \frac{c\sqrt{\log(n)}}{\sqrt{n}} \right) \left(1 - \frac{c^2 \log(n)}{n} \right)^{n-1} \right)^{n/2} \left(1 - \left(1 - \frac{c^2 \log(n)}{n} \right)^n \right)^{n/2} \\
&\geq \left(1 - \left(1 - \frac{c^2 \log(n)}{n} \right)^n \right)^{n/2} \left(1 - \left(1 - \frac{c^2 \log(n)}{n} \right)^n \right)^{n/2} \\
&\geq \left(1 - \left(1 - \frac{c^2 \log(n)}{n} \right)^n \right)^n \\
&\geq \left(1 - \left(\exp \left(-\frac{c^2 \log(n)}{n} \right) \right)^n \right)^n \\
&= \left(1 - n^{-c^2} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.
\end{aligned} \tag{1}$$

2) kai n yra nelyginis ir $c > 1$:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left(\bigcap_{i=0}^{n-1} \{T_i \geq 1\} \right) \geq \prod_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(T_i \geq 1) \\
&= \prod_{i=0}^{n-1} (1 - \mathbb{P}(T_i = 0))
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 - \left(1 - \frac{c\sqrt{\log(n)}}{\sqrt{n}} \right) \prod_{k=0}^{n-2} \left(1 - \frac{c^2 \log(n)}{n} \right) \right) \\
&= \left(1 - \left(1 - \frac{c\sqrt{\log(n)}}{\sqrt{n}} \right) \left(1 - \frac{c^2 \log(n)}{n} \right)^{n-1} \right)^n \\
&\geq \left(1 - \left(1 - \frac{c^2 \log(n)}{n} \right)^n \right)^n \\
&\geq \left(1 - \left(\exp \left(-\frac{c^2 \log(n)}{n} \right) \right)^n \right)^n \\
&= \left(1 - n^{-c^2} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.
\end{aligned}$$

Pastaba: (1) ir (2) pasinaudojome faktu, kad įvykiai $\{T_i \geq 1\}$ yra didėjantys (apibrėžimas 1) ir pritaikėme FKG nelygybę (lema 1).

Galima pastebėti, kad $c = 1$ yra mažiausia galima c reikšmė, su kuria $\mathbb{P}(\bigcap_{i=0}^{n-1} \{T_i \geq 1\})$ neartėja į 0, kai $n \rightarrow +\infty$. Kai $c = 1$ gauname, kad $\mathbb{P}(\bigcap_{i=0}^{n-1} \{T_i \geq 1\}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1}$ ir $\mathbb{P}(\bigcap_{i=0}^{n-1} \{T_i \geq 1\}) \geq \frac{1}{4}$ visiems $n > 1$. Tai tuo labiau teisinga kai $c > 1$, todėl $\mathbb{P}(\bigcap_{i=0}^{n-1} \{T_i \geq 1\}) \geq \frac{1}{4}$ visiems n tokiems, kad $c^2 \log(n) \leq n$ ir $c \geq 1$. $\square$

Toliau pereisime prie viršutinio įverčio.

4 teorema. Visiems $c \geq 2$ ir visiems n tokiems, kad $c^2 \log(n) \leq n$ visi P_n^2 koeficientai T_i yra mažesni nei $2(c^2 + c) \log(n)$ su teigiama tikimybe.

4 teoremos įrodymas.

$$\mathbb{P}(T_i \geq 2(c^2 + c) \log(n)) = \mathbb{P} \left(T_i \geq \left(1 + \frac{2(c^2 + c) \log(n)}{\mathbb{E}T_i} - 1 \right) \mathbb{E}T_i \right) \quad (3)$$

$$\leq \exp \left(-\mathbb{E}T_i \left(\frac{2(c^2 + c) \log(n)}{\mathbb{E}T_i} - 1 \right)^2 \left(\frac{2(c^2 + c) \log(n)}{\mathbb{E}T_i} + 1 \right)^{-1} \right) \quad (4)$$

$$= \exp \left(-\frac{(2(c^2 + c) \log(n) - \mathbb{E}T_k)^2}{2(c^2 + c) \log(n) + \mathbb{E}T_k} \right)$$

$$\leq \exp \left(-\frac{((c^2 + c) \log(n))^2}{3(c^2 + c) \log(n)} \right)$$

$$= n^{-(c^2+c)/3} \leq n^{-2}.$$

Pastaba: iš (3) į (4) perėjome panaudodami Chernoff įvertį (lema 2).

Taigi, tikimybė, jog bent vienas P_n^2 koeficientas yra ne mažesnis už $2(c^2 + c) \log(n)$ yra

$$\begin{aligned}
\mathbb{P} \left(\bigcup_{i=0}^{n-1} \{T_i \geq 2(c^2 + c) \log(n)\} \right) &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(T_i \geq 2(c^2 + c) \log(n)) \\
&\leq n \cdot n^{-2} \\
&= n^{-1}.
\end{aligned}$$

Aišku, tuomet tikimybė, jog visi P_n^2 koeficientai yra mažesni už $2(c^2 + c) \log(n)$ yra

$$\begin{aligned}
\mathbb{P} \left(\bigcap_{i=0}^{n-1} \{T_i < 2(c^2 + c) \log(n)\} \right) &= 1 - \mathbb{P} \left(\bigcup_{i=0}^{n-1} \{T_i \geq 2(c^2 + c) \log(n)\} \right) \\
&\geq 1 - n^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.
\end{aligned}$$

Matome, jog ši tikimybė taip pat yra teigiama visiems $n > 1$ ir artėja į 1, kai $n \rightarrow +\infty$. $\square$

Dabar jau galime įrodyti pagrindinę šio skyriaus teoremą.

2 teoremos įrodymas. Pasinaudodami teoremų 3 ir 4 rezultatais matome, kad visiems $c \geq 2$ ir n tokiems, kad $c^2 \log(n) \leq n$ abiejų teoremų rezultatai galioja su tikimybe

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P} \left(\left(\bigcap_{i=0}^{n-1} \{T_i \geq 1\} \right) \cap \left(\bigcap_{i=0}^{n-1} \{T_i < 2(c^2 + c) \log(n)\} \right) \right) \\
&\geq (1 - n^{-c^2})^n + (1 - n^{-1}) - 1 \\
&= (1 - n^{-c^2})^n - n^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.
\end{aligned}$$

Reikėtų pastebėti, kad ši tikimybė visiems $n > 1$ yra teigiama:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P} \left(\left(\bigcap_{i=0}^{n-1} \{T_i \geq 1\} \right) \cap \left(\bigcap_{i=0}^{n-1} \{T_i < 2(c^2 + c) \log(n)\} \right) \right) \\
&\geq (1 - 2^{-2^2})^2 - 2^{-1} \geq \frac{97}{256}.
\end{aligned}$$

$\square$

Taigi, mes įrodėme, jog visiems $c \geq 2$ ir n tokiems, kad $c^2 \log(n) \leq n$ (arba, imant blogiausią atvejį $c = 2$, visiems $n \geq 9$) egzistuoja toks Newman polinomas $P_n(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{n-1} t^{n-1}$, kurio kvadrato P_n^2 visi koeficientai T_i priklauso intervalui $[1; 2(c^2 + c) \log(n))$

su teigiama tikimybe, t.y. įrodėme teoremą 2, iš kurios išplaukia teorema 1, o tai reiškia, jog egzistuoja $\mathbb{Z}_n$ adityvi bazė visiems $n \geq 9$ su reprezentacijos funkcija, kurios didžiausia reikšmė yra $\log(n)$ eilės.

4 Aukštesnės nei antros eilės $\mathbb{Z}_n$ adityvios bazės

Šiame skyriuje kalbėsime apie $k > 2$ eilės $\mathbb{Z}_n$ adityvias bazes, t.y. aibes $A \subset \mathbb{Z}_n$ tokias, kad $\{a_1 + \dots + a_k \mid a_i \in A, a_i \neq a_j\} = \mathbb{Z}_n$ (šis apibrėžimas yra motyvuotas P. Erdős ir P. Tetali 1990 m. straipsnio [11]).

Nagrinėkime atsitiktinę aibę $A \subset \mathbb{Z}_n$, kur kiekvienas elementas $z \in \mathbb{Z}_n$ patenka į aibę A su tikimybe $p = \frac{c(\log n)^{1/k}}{n^{(k-1)/k}}$. Pažymėkime $r_k(z)$ skaičių būdų, kuriais galime $\mathbb{Z}_n$ elementą z išreikšti kaip k skirtingų elementų iš A sumą. r_k vadinsime aibės A eilės k reprezentacijos funkcija. Mūsų tikslas yra parodyti, jog šios reprezentacijos funkcijos reikšmės su teigiama tikimybe yra teigiamos (t.y. kad A yra k eilės $\mathbb{Z}_n$ adityvi bazė) ir kad šių reikšmių vidurkiai yra ne didesni nei $C_k \log(n)$.

4.1 Pagrindinė teorema

Šio skyriaus tikslas yra parodyti, jog pakankamai dideliame n visada egzistuoja $\mathbb{Z}_n$ eilės $k > 2$ adityvi bazė su maža vidutine reprezentacijos funkcijos reikšme. Suformuluojame teoremą, kuri bus įrodyta sekančiame skyrelyje:

5 teorema. Bet kokiam $k > 2$ ir pakankamai dideliame n egzistuoja k eilės $\mathbb{Z}_n$ adityvi bazė, kurios reprezentacijos funkcijos reikšmių vidurkiai yra ne didesni nei $c^k \log(n)$.

Kaip ir praeitame skyriuje, šiame skyriuje taip pat įrodysime, jog teoremos 5 sąlygas tenkinanti bazė atvirs su teigiama tikimybe.

4.2 Įrodymai

Pirmiausia suformuluokime teoremą apie reprezentacijos funkcijos vidurkių įvertį.

6 teorema. Bet kokiam $k > 2$ teisingas reprezentacijos funkcijos reikšmių vidurkių įvertis

$$\mathbb{E}(r_k(z)) \leq c^k \log(n).$$

6 teoremos įrodymas. Norint įvertinti $\mathbb{E}(r_k(z))$ iš viršaus tereikia laisvai pasirinkti $k - 1$ skirtingą elementą (tai automatiškai fiksuoja paskutinį elementą, nes visų k elementų suma turi būti lygi z):

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(r_k(z)) &\leq p^k n(n-1) \dots (n-k+2) \\ &\leq \frac{c^k \log(n)}{n^{k-1}} \cdot n^{k-1} \\ &= c^k \log(n).\end{aligned}$$

□

Dabar jau galime pradėti įrodymą, kad A bus $\mathbb{Z}_n$ adityvi bazė su teigiama tikimybe.

Tegul S_i ir S_j yra dvi $\mathbb{Z}_n$ elemento n reprezentacijos kaip k elementų iš $\mathbb{Z}_n$, kurios dalinasi lygiai l elementų, t.y. $S_i = \{z_1, \dots, z_l, x_1, \dots, x_{k-l}\}$, $S_j = \{z_1, \dots, z_l, y_1, \dots, y_{k-l}\}$, kur x_i, y_i, z_i yra skirtingi $\mathbb{Z}_n$ elementai. $\mathbb{P}(S_i)$ laikysime tikimybe, jog visi S_i elementai priklauso aibei A . Tegul $\sum_i z_i = m$, tuomet $\sum_i x_i = \sum_i y_i = n - m$.

Taigi,

$$\begin{aligned}\sum_{|S_i \cap S_j|=l} \mathbb{P}(S_i \cap S_j) &= \sum_m \sum_{\substack{z_1+\dots+z_l=m \\ x_1+\dots+x_{k-l}=n-m \\ y_1+\dots+y_{k-l}=n-m}} (\mathbb{P}(z_1) \dots \mathbb{P}(z_l) \mathbb{P}(x_1) \dots \mathbb{P}(x_{k-l}) \\ &\quad \mathbb{P}(y_1) \dots \mathbb{P}(y_{k-l})) \\ &= \sum_m \mathbb{E}(r_l(m)) (\mathbb{E}(r_{k-l}(n-m)))^2 \\ &\leq np^l \cdot n(n-1) \dots (n-l+2) \cdot (p^{k-l} \cdot n(n-1) \dots (n-k+l+2))^2 \\ &\leq n \cdot n^{l-1} \cdot n^{k-l-1} \cdot p^{2k-l} \\ &= n \cdot n^{k-2} \cdot \left(\frac{c(\log n)^{1/k}}{n^{(k-1)/k}} \right)^{2k-l} \\ &\leq \frac{n^{k-1} c^{2k-l} (\log n)^2}{n^{2k-l-2+\frac{l}{k}}} \\ &= c^{2k-l} (\log n)^2 n^{1+l-k-\frac{l}{k}} \\ &\leq c^{2k-l} (\log n)^2 n^{-1}.\end{aligned}$$

Tuomet

$$\sum_{1 \leq l \leq k-2} \sum_{|S_i \cap S_j|=l} \mathbb{P}(S_i \cap S_j) \leq \frac{c^k (c^k - c^2)}{c - 1} (\log n)^2 n^{-1}$$

$$\leq \frac{c^{2k}}{c-1}(\log n)^2 n^{-1}.$$

Toliau pasinaudosime Janson nelygybės versija, suformuluota P. Erdős ir P. Tetali straipsnyje [11]:

7 teorema. Jei $0 \leq \epsilon \leq 1$, tuomet

$$\mathbb{P}(r_k(z) \leq (1 - \epsilon)\mathbb{E}(r_k(z))) \leq \exp\left(-\frac{\epsilon^2 \mathbb{E}(r_k(z))}{2(1 + \delta)}\right),$$

$$\text{kur } \delta = \frac{1}{\mathbb{E}(r_k(z))} \sum_{1 \leq l \leq k-2} \sum_{|S_i \cap S_j|=l} \mathbb{P}(S_i \cap S_j).$$

Prieš pradėdant reikia įvertinti $\mathbb{E}(r_k(z))$ iš apačios, laisvai renkant $k - 2$ skirtingus elementus, o priešpaskutinį renkant taip, kad garantuotai galėtume gauti dar nepanaudotą paskutinį elementą. Aišku, kad tokių pasirinkimų priešpaskutiniam elementui turime bent $n - (k - 2) - (k - 1) = n - 2k + 3$. Taigi,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(r_k(z)) &\geq n(n-1) \dots (n-k+3)(n-2k+3) \cdot p^k \\ &\geq \frac{c^k (n-2k)^{k-1} \log(n)}{n^{k-1}} \\ &= c^k \log(n) \cdot \left(1 - \frac{2k}{n}\right)^{k-1} \\ &= c^k \log(n)(1 + o(1)). \end{aligned}$$

Toliau įvertinsime δ :

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{\mathbb{E}(r_k(z))} \sum_{1 \leq l \leq k-2} \sum_{|S_i \cap S_j|=l} \mathbb{P}(S_i \cap S_j) \\ &\leq \frac{c^{2k}}{c-1} (\log n)^2 n^{-1} \cdot (c^k \log(n)(1 + o(1)))^{-1} \\ &= \frac{c^k \log(n)}{c-1} n^{-1} (1 + o(1)) = o(1). \end{aligned}$$

5 teoremos įrodymas.

Pasirinkime $\epsilon = 1/2$ ir taikykime teoremą 7:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(r_k(z) \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}(r_k(z))\right) &\leq \exp\left(-\frac{(1/2)^2\mathbb{E}(r_k(z))}{2(1+\delta)}\right) \\
&\leq \exp\left(-\frac{c^k \log(n)(1+o(1))}{8(1+o(1))}\right) \\
&= n^{-\frac{c^k(1+o(1))}{8}} \\
&= n^{-\frac{c^k}{8}}(1+o(1)).
\end{aligned}$$

Dabar jau galima įvertinti tikimybę, kad visi $r_k(z)$ yra teigiami:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{z=0}^{n-1}\{r_k(z) \geq 1\}\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{z=0}^{n-1}\{r_k(z) = 0\}\right) \\
&\geq 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{z=0}^{n-1}\left\{r_k(z) \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}(r_k(z))\right\}\right) \\
&\geq 1 - \sum_{z=0}^{n-1} \mathbb{P}\left(r_k(z) \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}(r_k(z))\right) \\
&\geq 1 - n \cdot n^{-\frac{c^k}{8}}(1+o(1)) \\
&= 1 - n^{1-\frac{c^k}{8}}(1+o(1)) \\
&= 1 - o(1),
\end{aligned}$$

visiems $c > \sqrt[k]{8}$.

Taigi, tikimybė kad A yra k eilės $\mathbb{Z}_n$ adityvi bazė artėja į 1, kai $n \rightarrow +\infty$, todėl pakankamai dideliame n ši tikimybė yra teigiama. $\square$

Reikia pastebėti, kad mes neįrodėme, jog reprezentacijos funkcijos reikšmės priklauso kokiam nors intervalui su teigiama tikimybe.

5 Sperner teorema ir jos apibendrinimai

Šioje magistro baigiamojo darbo dalyje kalbėsime apie vieną iš labiausiai žinomų ekstremaliosios aibių teorijos rezultatų - Sperner teoremą. Teorema tvirtina, kad bet kokios baigtinės aibės $[n] = \{1, \dots, n\}$ poaibių šeimos $\mathcal{F}$, neturinčios poros aibių A, B su $A \subset B$, dydis tenkina nelygybę

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Nesunku pastebėti, kad pastarasis įvertis nepagerinamas. Tai yra, egzistuoja aibių šeima $\mathcal{F}$, su kuria pastarasis įvertis tampa lygybe. Tokios aibės pavyzdys - visų aibės $[n]$ poaibių šeima, kuriai priklausančios aibės turi lygiai $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ elementų. Joje tikrai nėra poros A, B tenkinančios sąlygą $A \subset B$, nes visos aibės šioje šeimoje yra vienodo dydžio ir skiriasi bent per vieną elementą.

P. Erdős [13] apibendrina šį rezultatą aibių šeimoms, neturinčioms $(k+1)$ -grandinės, t.y. aibių $A_1, \dots, A_{k+1}$, tokių, kad $A_1 \subset \dots \subset A_{k+1}$. Tokias šeimas nuo šiol vadinsime k -Sperner šeimomis.

8 teorema. (Erdős) Jei $\mathcal{F}$ yra k -Sperner poaibių iš $[n]$ šeima, tuomet

$$|\mathcal{F}| \leq f(n, k) := \sum_{j=\lfloor \frac{n-k+1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{n+k-1}{2} \rfloor} \binom{n}{j}.$$

Yra bent keli Sperner teoremos įrodymai. Duosime nuorodas tik į du įrodymus, kurie yra geriausiai žinomi. Naudojant atsitiktines grandines, D. Lubell [4] įrodė nelygybę bet kokios aibių šeimos be grandinių k dydžio poaibių svorinei sumai, iš kurios lengvai išplaukia Sperner teorema. Kitas standartinis kelias - galima įrodyti, kad baigtinės aibės poaibių aibę galima išreikšti kaip nesikertančių $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ grandinių sąjungą (simetrinė grandinių dekompozicija). Tuomet bet kokiai šeimai be grandinių, galime paimti ne daugiau kaip vieną aibę iš kiekvienos grandinės ir gausime Sperner teoremą. Šio fakto įrodymą galima rasti knygoje [3]. Visi žinomi įrodymai naudoja ne visai elementarius metodus ir reikalauja didesnio matematinio išprusimo.

Šiame skyrelyje pristatysime elementarų teoremos 8 įrodymą, kuris naudoja tik matematinę indukciją. Šis įrodymas aprašytas disertacijoje [14]. Pagrindinis darbo autoriaus įnašas į temą - elementarus teoremos 8 įrodymas multiaibėms, kuriose elementų kartotinumai ne didesni nei 2. Šio rezultato formuluotė ir įrodymas pateikiami sekančiame skyriuje.

Tarkime kelis žodžius apie elementarų teoremos 8 įrodymą. Jis naudoja tik indukciją per baigtinės aibės $[n]$ dydį ir grandinių ilgio įvertį $k \in [n]$. Įrodyme padalinsime šeimą $\mathcal{F}$ į dvi aibių šeimas, priklausomai nuo to, ar jos turi elementą n , ar ne. Tuomet tam tikrus elementus iš vienos iš dalių pašalinsime ir perkelsime į kitą šeimą. Tuomet pastebėsime, kad viena šeima yra poaibių šeima iš $[n-1]$ ir yra $(k-1)$ -Sperner. Kita dalis turės tiek pat elementų, kaip tam tikra šeima poaibių iš $[n-1]$, kuri yra $(k+1)$ -Sperner. Įrodymą baigsime pasinaudoję rekursija $f(n, k) = f(n-1, k-1) + f(n-1, k+1)$, kurios įrodymą pateikiame skyrelio pabaigoje dėl pilnumo (iš esmės, šis tvirtinimas ekvivalentus Paskalio trikampio savybei).

8 teoremos įrodymas. Rezultatas trivialus kai $n = 1$ visiems k . Todėl toliau laikysime,

kad $n > 1$ ir kad reikiamas įvertis galioja visiems baigtinės aibės dydžiams, mažesniems už n .

Tegul $\mathcal{F}$ yra k -Sperner poaibių iš $[n]$ šeima. Apibrėžkime $\mathcal{F}_n = \{A \in \mathcal{F} : n \in A\}$ ir $\mathcal{F}_n^c = \mathcal{F}/\mathcal{F}_n$. Imkime elementus iš $\mathcal{F}_n$, kurie yra kokios nors k ilgio grandinės apačioje (mažiausia aibė grandinėje aibių įdėjimo tvarkos prasme). Pašalinkime iš visų šių aibių elementą n ir perkeltume gautas aibes į šeimą $\mathcal{F}_n^c$. Pažymėkime padidėjusią šeimą simboliu $\mathcal{G}$. Pastebėkime, kad perkeltos aibės be elemento n nė viena negali priklausyti $\mathcal{F}_n^c$ nes kitaip galėtume gauti $k + 1$ ilgio grandinę pradinėje šeimoje $\mathcal{F}$, kas prieštarautų mūsų prielaidai. Dabar pašalinkime elementą n ir iš visų likusių šeimoje $\mathcal{F}_n$ aibių ir pažymėkime šią šeimą $\mathcal{H}$.

Abi šeimos $\mathcal{G}$ ir $\mathcal{H}$ turi poaibių tik iš aibės $[n - 1]$ ir jose abiejose esančių elementų skaičius yra $|\mathcal{F}|$ (negalėjome perkeldami nieko dubliuoti, o elemento n pašalinimas nekeičia šeimoje $\mathcal{F}_n$ likusių elementų skaičiaus). Pastebėkime, kad pagal konstrukciją $\mathcal{H}$ negali turėti k ilgio grandinių, nes jei tokių buvo - pašalinome jų minimalius elementus. Todėl $\mathcal{H}$ yra $(k - 1)$ -Sperner. Taip pat pastebėkime, kad visos šios „grandinių apačios“ yra įdėjimo prasme nepalyginamos aibės ir todėl jas perkeldami į $\mathcal{F}_n^c$ negalime ten esančių grandinių prailginti daugiau nei per 1, kai jas perkėlėme ir gavome šeimą $\mathcal{G}$. Todėl $\mathcal{G}$ yra $(k + 1)$ -Sperner. Remiantis indukcinę prielaida ir lema 4 gausime

$$|\mathcal{F}| = |\mathcal{H}| + |\mathcal{G}| \leq f(n - 1, k - 1) + f(n - 1, k + 1) = f(n, k).$$

□

Kaip jau minėjome, skyrelio pabaigoje pateikiame reikiamos rekursijos įrodymą.

4 lema. Visiems $1 \leq k \leq n$ turime

$$f(n, k) = f(n - 1, k - 1) + f(n - 1, k + 1).$$

4 lemos įrodymas. Tvirtinimas trivialus, kai $n = 1; 2$. Kai $n > 2$ naudodami Paskalio tapatybę ir grupuodami atitinkamus dėmenis gauname

$$\begin{aligned} f(n - 1, k - 1) + f(n - 1, k + 1) &= \sum_{j=\lfloor \frac{n-k+1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{n+k-3}{2} \rfloor} \binom{n-1}{j} + \sum_{j=\lfloor \frac{n-k-1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{n+k-1}{2} \rfloor} \binom{n-1}{j} \\ &= \sum_{j=\lfloor \frac{n-k+1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{n+k-1}{2} \rfloor} \left(\binom{n-1}{j-1} + \binom{n-1}{j} \right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=\lfloor \frac{n-k+1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{n+k-1}{2} \rfloor} \binom{n}{i} = f(n, k).$$

6 Optimalios nelygybės multiaibių šeimoms su apribotu grandinių ilgiu

Šiame skyriuje nagrinėsime baigtinės aibės $[n]$ multiaibių šeimą, kur kiekvienas elementas pasikartoja ne daugiau kaip du kartus. Aibių atveju konkretų poaibį vienareikšmiškai atitinka jos charakteristinis vektorius iš $\{0, 1\}^n$. Multiaibę, su mažesniu nei 2 kartotinumumu, analogiškai vienareikšmiškai atitinka jos elementų kartotinumų vektorius iš $\{0, 1, 2\}^n$. Todėl nagrinėjamų multiaibių iš viso turime 3^n .

Multiaibės A dydžiu vadinsime jos elementų kartotinumų sumą. Nagrinėjamų multiaibių dydžiai aiškiai neviršija $2n$. Pažymėkime $L_{n,k}$ dydį šeimos, kurią sudaro visos dydžio k multiaibės. Kiekvieną nagrinėjamą multiaibę A atitinka vienareikšmiškas jos papildinys, todėl $L_{n,k} = L_{n,2n-k}$ (Paskalio tapatybės analogas multiaibėms). Žinoma, kad $L_{n,k-1} \leq L_{n,k}$, kai $1 \leq k \leq n$ ir $L_{n,k} \geq L_{n,k+1}$, kai $n \leq k \leq 2n-1$. Kitaip tariant, analogiškai kaip ir aibėms, daugiausiai rinkinių turime vidutinio dydžio.

Elemento x kartotinumą aibėje A žymėsime $m_A(x)$.

Kai $1 \leq k \leq 2n$ pažymėkime $f_2(n, k)$ didžiausią sumą $L_{i_1}, \dots, L_{i_k}$. Tai yra

$$f_2(n, k) = L_{n,n} + L_{n,n+1} + L_{n,n-1} + L_{n,n+2} + \dots$$

Formaliai bus patogiau apibrėžti $f_2(n, k) = 0$ jei $k = 0$ ir $f_2(n, k) = 3^n$ jei $k \geq 2n+1$.

Įrodyme mums svarbus rekurentinis sąryšis, kurio įrodymą galima rasti šio skyriaus gale.

5 lema. Viesiems $n \geq 2$ ir $k \geq 2$ turime

$$f_2(n, k) = f_2(n-1, k-2) + f_2(n-1, k) + f_2(n-1, k+2),$$

o jei $k = 1$, tuomet

$$f_2(n, k) = f_2(n-1, k+2).$$

Dabar suformuluokime pagrindinį šio skyriaus rezultatą, kuris yra teoremos 8 analogas.

9 teorema. Tarkime $\mathcal{F}$ yra k -Sperner multiaibių šeima ($1 \leq k \leq 2n+1$) iš $[n]$, kur elementų kartotinumai ne didesnis už 2. Tuomet

$$|\mathcal{F}| \leq f_2(n, k).$$

9 teoremos įrodymas. Dėl patogumo šiek tiek formaliai praplėsime tvirtinimą ir leisime reikšmes $k = 0$. Tokiu atveju tik tuščią šeimą laikysime k -Sperner ir jos elementų skaičius 0, todėl jai trivialiai galios teoremos nelygybė.

Jei $n = 1$ teiginys trivialis visiems $k \geq 1$. Imkime bet kokią multiaibių iš $[n]$ ($n \geq 2$) su ne didesniu nei 2 elementų kartotinumu šeimą $\mathcal{F}$. Galime ją išskaidyti į tris dalis pagal paskutiniojo elemento kartotinumą, t.y.,

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2,$$

kur

$$\mathcal{F}_i = \{A \subset \mathcal{F} : m_A(x) = i\}.$$

Laikykime, kad $k \geq 2$. Tegul $\mathcal{M}_i$, $i \in \{1, 2\}$, yra multiaibės, esančios tam tikros k ilgio grandinės iš $\mathcal{F}_i$ apačioje. Pašalinsime visus $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ elementus iš atitinkamų dalių ir „ignorodami“ elementą n perkelsime jas visas į $\mathcal{F}_0$. Perkeliame elementai negali jau priklausyti $\mathcal{F}_0$, nes tuomet pradinėje šeimoje $\mathcal{F}$ turėtume $k + 1$ ilgio grandinę, prasidedančią tokiu elementu. Tai yra, tegul $\tilde{\mathcal{M}}_i = \{A \setminus \{n, n\} : A \subset \mathcal{M}_i\}$. Tuomet $\tilde{\mathcal{F}}_0 = \mathcal{F}_0 \cup \tilde{\mathcal{M}}_1 \cup \tilde{\mathcal{M}}_2$ ir $\tilde{\mathcal{F}}_i = \mathcal{F}_i \setminus \mathcal{M}_i$, $i \in \{1, 2\}$. Perkelti elementai negalėjo grandinių, buvusių $\mathcal{F}_0$, pailginti per daugiau nei 2. Jei taip būtų, tai reikštų jog pradinėje šeimoje $\mathcal{F}$ buvo bent viena $k + 1$ ilgio grandinė, o tai prieštarauja prielaidai. Taigi, $\tilde{\mathcal{F}}_0$ yra $(k + 2)$ -Sperner. Tuo tarpu $\tilde{\mathcal{F}}_1$ ir $\tilde{\mathcal{F}}_2$ yra $(k - 1)$ -Sperner, nes jei jose buvo k ilgio grandinių, mes pašalinome jų apatines multiaibes.

Toliau dirbsime tik su $\tilde{\mathcal{F}}_1$ ir $\tilde{\mathcal{F}}_2$. Tegul $\mathcal{N}_2$ yra multiaibės, esančios tam tikros $k - 1$ ilgio grandinės iš $\tilde{\mathcal{F}}_2$ apačioje. Pašalinsime visus $\mathcal{N}_2$ elementus iš $\tilde{\mathcal{F}}_2$ ir „ignorodami“ vieną elementą n perkelsime jas visas į $\tilde{\mathcal{F}}_1$. Perkeliame elementai negali jau priklausyti $\mathcal{F}_1$, nes tuomet šeimoje $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ turėtume k ilgio grandinę, prasidedančią tokiu elementu. Tai yra, tegul $\tilde{\mathcal{N}}_2 = \{A \setminus \{n\} : A \subset \mathcal{N}_2\}$. Tuomet $\bar{\mathcal{F}}_1 = \tilde{\mathcal{F}}_1 \cup \tilde{\mathcal{N}}_2$ ir $\bar{\mathcal{F}}_2 = \tilde{\mathcal{F}}_2 \setminus \mathcal{N}_2$. Taip perkeldami elementus negalėjome prailginti grandinės šeimoje $\tilde{\mathcal{F}}_1$ per daugiau nei 1, todėl $\bar{\mathcal{F}}_1$ yra k -Sperner. Akivaizdu, jog $\bar{\mathcal{F}}_2$ yra $(k - 2)$ -Sperner. Šeimose $\bar{\mathcal{F}}_1$ ir $\bar{\mathcal{F}}_2$ galime „ignoruoti“ elementus n . Taigi, turime tokio pat dydžio kaip $\mathcal{F}$ šeimą $\tilde{\mathcal{F}}_0 \cup \bar{\mathcal{F}}_1 \cup \bar{\mathcal{F}}_2$, todėl

$$|\mathcal{F}| = |\tilde{\mathcal{F}}_0| + |\bar{\mathcal{F}}_1| + |\bar{\mathcal{F}}_2| \leq f_2(n - 1, k - 2) + f_2(n - 1, k) + f_2(n - 1, k + 2) = f_2(n, k).$$

Jei $k = 1$, tuomet šeimos $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ yra 1-Sperner, t.y. jos neturi grandinių. Iš šeimų multiaibių išimkime elementus n su bet koku kartotinumu. Gausime šeimas $\tilde{\mathcal{F}}_0, \tilde{\mathcal{F}}_1, \tilde{\mathcal{F}}_2$, kurios bus nesikertančios. Taip yra todėl, kad jei kurios nors dvi multiaibės sutaptų, tai pradinė šeima $\mathcal{F}$ turėtų grandinių. Šios trys šeimos turi tik multiaibes su elementais iš

$[n - 1]$, kurių kartotinumai neviršija 2. Todėl remiantis indukcinė prielaida ir lema 5 turime

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}| &= |\mathcal{F}_0| + |\mathcal{F}_1| + |\mathcal{F}_2| = |\tilde{\mathcal{F}}_0| + |\tilde{\mathcal{F}}_1| + |\tilde{\mathcal{F}}_2| \\ &\leq f(n - 1, 3) = f(n, 1). \end{aligned}$$

□

5 lemos įrodymas. Visų pirma pereikime nuo multiaibių nagrinėjimo prie jų charakteristinių vektorių nagrinėjimo. Kiekviena multiaibė A su elementais iš $[n]$, kurių kartotinumai neviršija 2, vienareikšmiškai atitinka tos multiaibės kartotinumų vektorius $(x_1, \dots, x_n)$ (čia $x_i \in \{0, 1, 2\}$ yra elemento $i \in [n]$ kartotinumai multiaibėje A). Todėl dydis $L_{n,j}$ yra lygties

$$x_1 + \dots + x_n = j, \quad x_i \in \{0, 1, 2\}$$

sprendinių skaičius.

Tuomet $f_2(n, k)$ yra lygčių

$$x_1 + \dots + x_n \in I_{n,k}, \quad x_i \in \{0, 1, 2\}$$

sprendinių skaičius, kur

$$I_{n,k} = \{n, n - 1, n + 1, n - 2, n + 2, \dots\}$$

yra k reikšmių turintis diskretus intervalas.

Laikykime, kad $k \geq 2$. Įstatę į šią lygtį tris galimas kintamojo $x_n \in \{0, 1, 2\}$ reikšmes gausime tris lygtis

$$x_1 + \dots + x_{n-1} \in I_{n,k} - j, \quad x_i, j \in \{0, 1, 2\}.$$

Pažymėkime šiuos tris intervalus I_j pagal kintamojo x_n atitinkančią reikšmę. Pastebėkime, kad $I_1 = \{n - 1, n - 2, n, \dots\} = I_{n-1,k}$. Intervalo I_2 mažiausi elementai nepriklauso intervalui I_0 . Perkeliame šiuos du elementus į I_0 ir taip gauname du intervalus $\tilde{I}_0, \tilde{I}_2$, kurie atitinkamai turi $k + 2$ ir $k - 2$ elementus. Belieka pastebėti, kad $\tilde{I}_0 = I_{n-1,k+2}$ ir $\tilde{I}_2 = I_{n-1,k-2}$. Todėl turime lygybę

$$f_2(n, k) = f_2(n - 1, k - 2) + f_2(n - 1, k) + f_2(n - 1, k + 2).$$

Jei $k = 1$, tai intervalai I_j yra vientaškės aibės, kurių sąjunga yra $I_{n-1,3}$, todėl

$$f_2(n, 1) = f_2(n - 1, 3).$$

7 Santrauka

Šiame magistro baigiamajame darbe nagrinėjamos dvi pagrindinės temos: Erdős-Turán problemos versija grupėse $\mathbb{Z}_n$ ir Sperner tipo teoremos multiaibėms. Pirmoje darbo dalyje pateikiama Erdős-Turán problemos versijos motyvacija ir įrodoma, kad pakankamai dideliems n visada galime rasti grupės $\mathbb{Z}_n$ adityvią bazę, kurios reprezentacijos funkcija neviršija $C \log(n)$. Įrodome, kad pakankamai dideliems n galime rasti aukštesnės eilės $k > 2$ grupės $\mathbb{Z}_n$ adityvią bazę, kurios reprezentacijos funkcijos reikšmių vidurkiai neviršija $C_k \log(n)$. Antroje darbo dalyje pateikiamas elementarus (tik matematinę indukciją naudojantis) Sperner teoremos įrodymas bei naujai įrodoma analogiška teorema multiaibėms su apribotu elementų kartotinumu.

8 Summary

This master's thesis explores two main topics: a version of the Erdős-Turán problem in groups $\mathbb{Z}_n$ and Sperner-type theorems for multisets. The first part of this thesis is concerned with explaining the motivation behind this version of the Erdős-Turán problem and the proof that for sufficiently large n there always exists an additive base of the group $\mathbb{Z}_n$ with representation function bounded above by $C \log(n)$. We also prove that for n large enough one can find an additive basis of order $k > 2$ of $\mathbb{Z}_n$ with representation function values not exceeding $C_k \log(n)$ on average. The second part of this thesis contains an elementary proof of Sperner's theorem using only mathematical induction, and a new proof of a similar result for families of multisets with bounded element multiplicities.

Literatūra

- [1] A. Dubickas, A Basis of Finite and Infinite Sets with Small Representation Function, *The Electronic Journal of Combinatorics*, 2012, Volume 19, Issue 1, <https://doi.org/10.37236/13>.
- [2] A. Dubickas, G. Šemetulskis, On polynomials with flat squares, *Acta Arithmetica*, 2011, Volume: 146, Issue: 3, p. 247-255, <https://doi.org/10.4064/aa146-3-4>.
- [3] B. Bollobás, Combinatorics: Set Systems, Hypergraphs, Families of Vectors and Combinatorial Probability, *Cambridge University Press*.
- [4] D. Lubell, A short proof of Sperner's lemma, *Journal of Combinatorial Theory*, 1966, Volume 1, Issue 2, p. 299, [https://doi.org/10.1016/S0021-9800\(66\)80035-2](https://doi.org/10.1016/S0021-9800(66)80035-2).
- [5] G. Grekos, L. Haddad, C. Helou, J. Pihko, On the Erdős–Turán conjecture, *Journal of Number Theory*, 2003, Volume 102, Issue 2, p. 339-352, [https://doi.org/10.1016/S0022-314X\(03\)00108-2](https://doi.org/10.1016/S0022-314X(03)00108-2).
- [6] I. Z. Ruzsa, A just basis, *Monatshefte für Mathematik*, 1990, Volume 109, p. 145–151, <https://doi.org/10.1007/BF01302934>.
- [7] M. Goemans, Chernoff bounds, and some applications, *18.310 lecture notes*, 2015, p. 3, <https://math.mit.edu/~goemans/18310S15/chernoff-notes.pdf>.
- [8] N. Alon, R. Yuster, On a Hypergraph Matching Problem, *Graphs and Combinatorics*, 2005, p. 377-384, <https://doi.org/10.1007/s00373-005-0628-x>
- [9] P. Borwein, S. Choi, F. Chu, An Old Conjecture of Erdős-Turán on Additive Bases, *Mathematics of Computation*, 2006, Volume 75, Number 253, p. 475–484, <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-05-01777-1>.
- [10] P. Erdős, On a problem of Sidon in additive number theory, 1954, https://combinatorica.hu/%7ep_erdos/1954-04.pdf.
- [11] P. Erdős, P. Tetali, Representations of integers as the sum of k terms, *Random Structures & Algorithms*, 1990, Volume 1, Issue 3, p. 245-261, <https://doi.org/10.1002/rsa.3240010302>.
- [12] P. Erdős, P. Turán, On a Problem of Sidon in Additive Number Theory, and on some Related Problems, *Journal of the London Mathematical Society*, 1941, Volume s1-16, Issue 4, p. 212-215, <https://doi.org/10.1112/jlms/s1-16.4.212>.

- [13] P. Erdős, On a lemma of Littlewood and Offord, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1945, Volume 51, Number 12, p. 898-902, <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1945-08454-7>.
- [14] T. Juškevičius, Probabilistic inequalities and bootstrap percolation, 2015, PhD thesis, *Memphis University*.