VILNIAUS UNIVERSITETAS

JULIUS DAMARACKAS

SPEKTRINĖS KOVARIACIJOS IR RIBINĖS TEOREMOS TIESINIAMS PROCESAMS IR LAUKAMS SU BEGALINE DISPERSIJA

Daktaro disertacijos santrauka

Fiziniai mokslai, matematika (01P)

Vilnius, 2017

Disertacija rengta 2014–2017 metais Vilniaus universitete.

Mokslinis vadovas – prof. habil. dr. Vygantas Paulauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

Disertacija ginama viešame disertacijos gynimo tarybos posėdyje:

Pirmininkas – prof. habil. dr. Donatas Surgailis (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

Nariai:

prof. habil. dr. Vydas Čekanavičius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P),

prof. habil. dr. Adam Jakubowski (Mikalojaus Koperniko universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P),

prof. habil. dr. Remigijus Leipus (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P),

prof. habil. dr. Rimas Norvaiša (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

Disertacija bus ginama viešame disertacijos gynimo tarybos posėdyje 2017 m. spalio 19 d. 15 val. VU Matematikos ir informatikos fakultete, 103 auditorijoje.

Adresas: Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius, Lietuva.

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2017 m. rugsėjo 19 d.

Su disertacija galima susipažinti Vilniaus universiteto bibliotekoje ir VU interneto svetainėje adresu: *www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius.*

VILNIUS UNIVERSITY

JULIUS DAMARACKAS

SPECTRAL COVARIANCES AND LIMIT THEOREMS FOR INFINITE-VARIANCE LINEAR PROCESSES AND FIELDS

Summary of doctoral dissertation

Physical sciences, mathematics (01P)

Vilnius, 2017

Doctoral dissertation was written in 2014–2017 at Vilnius University.

Scientific supervisor – Prof. Dr. Habil. Vygantas Paulauskas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P).

The dissertation will be defended at the public meeting of the council:

Chairman – Prof. Dr. Habil. Donatas Surgailis (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P).

Members:

Prof. Dr. Habil. Vydas Čekanavičius (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P),

Prof. Dr. Habil. Adam Jakubowski (Nicolaus Copernicus University, Physical sciences, Mathematics – 01P),

Prof. Dr. Habil. Remigijus Leipus (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P),

Prof. Dr. Habil. Rimas Norvaiša (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P).

The dissertation will be defended at the public meeting of the council on October 19th, 2017, 3:00 pm at Vilnius University, Faculty of Mathematics and informatics, lecture room 103.

Address: Naugarduko st. 24, LT-03225 Vilnius, Lithuania.

The summary of the dissertation was distributed on September 19th, 2017.

The dissertation is available at the Vilnius University library and online at *www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius.*

1 Įžanga

Pagrindinis šios disertacijos tikslas yra spektrinių kovariacijų ir ribinių teoremų tiesiniams procesams ir laukams teorijos vystymas.

Darbe tiriamos spektrinių kovariacijų savybės, išnagrinėjama tam tikrų tiesinių procesų ir laukų asimptotinė priklausomybės struktūra. Žinomi rezultatai, susiejantys priklausomybės matų asimptotinį elgesį su stacionarių asocijuotų procesų ribinėmis teoremomis, apibendrinami asocijuotiems stacionariems laukams. Ištiriamas vieno tiesinio lauko dalinių sumų procesų sekos konvergavimas pagal baigtiniamačius skirstinius. Parodoma, kaip parinkti tiesinio proceso $X_n = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \xi_{n-i}$ koeficientų, tenkinančių sąlygas $\sum_{i=0}^{\infty} c_i = 0$, $|c_i| = i^{-\beta}, i \in \mathbb{N}$, su fiksuota parametro β reikšme, ženklus, kad dalinių sumų proceso normuojanti seka augtų greičiu n^{λ}.

2 Disertacijos mokslinė problema ir tyrimo objektai

Įprastinė kovariacija tarp atsitiktinių dydžių (a.d.) X ir Y, apibrėžta formule $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)$, yra plačiai taikoma tikimybių teorijoje, tačiau bendru atveju ji nėra tinkama matuoti priklausomybei tarp a.d., turinčių begalinę dispersiją. Atsitiktiniai dydžiai ir procesai su begaline dispersija yra įdomūs ne tik teorinėje matematikoje. Svarbi a.d., turinčių begalinę dispersiją, klasė yra stabilūs a.d., knygoje [5] aprašoma daug jais paremtų modelių.

Dėl paprastumo čia apsiribosime simetriniais α-stabiliais ($S\alpha S$) atsitiktiniais vektoriais. Vektorius $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ yra simetrinis α-stabilus, jei egzistuoja toks baigtinis simetrinis matas Γ, apibrėžtas ant vienetinės sferos $\mathbb{S}^1 = \{\mathbf{s} = (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2 : s_1^2 + s_2^2 = 1\}$, kad vektoriaus $\mathbf{X}$ charakteristinė funkcija būtų

$$\mathbb{E} \exp\{\mathrm{i}\langle \mathbf{t}, \mathbf{X}\rangle\} = \exp\left\{-\int_{\mathbb{S}^1} |\langle \mathbf{t}, \mathbf{s}\rangle|^{\alpha} \Gamma(\mathrm{d}\mathbf{s})\right\}.$$

Nagrinėjant $S\alpha S$ a.d. dažnai aptinkami du priklausomybės matai – kovariantiškumas (angl. *covariation*) ir kodiferencija (angl. *codifference*). X_1 kovariantiškumas X_2 atžvilgiu žymimas $[X_1, X_2]_\alpha$. Kovariantiškumas apibrėžiamas $S\alpha S$ stabiliems dydžiams su stabilumo indeksu $\alpha > 1$ formule

$$[X_1, X_2]_\alpha = \int_{\mathbb{S}^1} s_1 s_2^{<\alpha-1>} \Gamma(\mathrm{d}\mathbf{s}),$$

čia $x^{<l>} = |x|^l \operatorname{sign}(x)$. X_1 ir X_2 kodiferencija apibrėžiama formule

$$\tau(X_1, X_2) = \int_{\mathbb{S}^1} \left(|s_1|^\alpha + |s_2|^\alpha - |s_1 - s_2|^\alpha\right) \Gamma(\mathrm{d}\mathbf{s}).$$

Vieni pagrindinių disertacijos tyrimo objektų yra spektrinė kovariacija ir α-spektrinė kovariacija, kurios apibrėžiamos, atitinkamai, kaip

$$\rho(X_1, X_2) = \int_{\mathbb{S}^1} s_1 s_2 \Gamma(\mathrm{d}\mathbf{s})$$

ir

$$\rho_\alpha(X_1, X_2) = \int_{\mathbb{S}^1} s_1^{<\alpha/2>} s_2^{<\alpha/2>} \Gamma(\mathrm{d}\mathbf{s}).$$

3 Pagrindiniai uždaviniai

Disertacijoje nagrinėjami šie uždaviniai:

1. **Spektrinės kovariacijos savybių ir asimptotinio elgesio tyrimas bei palyginimas su kitais priklausomybės matais.** Darbe siekiama ištirti asimptotinį spektrinės kovariacijos elgesį tiesiniams procesams su asimptotiškai reguliariai kintančiais koeficientais, tiesiniam trupmeniniam stabiliam triukšmui, log-trupmeniniam stabiliam triukšmui. Bandoma tirti priklausomybės matų savybes, nustatyti galimą sąryšį tarp priklausomybės matų asimptotinio elgesio ir procesų atminties.

2. **Tiesinių laukų su begaline dispersija asimptotinės priklausomybės struktūros tyrimas.** Daugelyje straipsnių nagrinėjama asimptotinė tiesinių procesų priklausomybės struktūra, tačiau trūksta tiesinių laukų tyrimų. Disertacijoje bandoma išnagrinėti tiesinio lauko

$$X_{k,l} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} w_{(i,j)} (1+i)^{-\beta_1} (1+j)^{-\beta_2} \xi_{k-i,l-j}$$

asimptotinę priklausomybės struktūrą, kur $\xi_{i,j}$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę (n.v.p.) stabilūs a.d., o koeficientai $w_{(i,j)}$ tenkina papildomas sąlygas.

3. **Asocijuotų stacionarių laukų priklausomybės matų asimptotinio elgesio susiejimas su ribinėmis teoremomis.** Straipsnyje [2] nagrinėjami vienmačiai stacionarūs asocijuoti procesai, nustatomas ryšys tarp priklausomybės matų asimptotinio elgesio ir ribinių teoremų. Disertacijoje siekiama šiuos rezultatus apibendrinti tiesiniams laukams.

4. **Bandymas pritaikyti kryptinės atminties apibrėžimą tiesiniam laukui su triukšmais, priklausančiais α-stabilaus a.d. traukos sričiai.** Straipsnyje [4] siūlomas naujas būdas klasifikuoti stacionarių laukų atmintį. Disertacijoje siekiama išnagrinėti vieno tiesinio lauko dalinių sumų proceso konvergavimą pagal baigtiniamačius skirstinius, remiantis nustatyta normuojančia seka klasifikuoti šio lauko atmintį.

5. **Atsakymas į [4] iškeltą klausimą apie neigiamą atmintį.** Straipsnyje [4] buvo suformuluotas toks klausimas: Nagrinėkime tiesinių procesų $X_n = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \xi_{n-i}$ dalinių sumų procesą $S_n(t) = \sum_{k=0}^{\lfloor nt \rfloor} X_k$, kur ξ_i yra n.v.p. a.d., priklausantys α-stabilaus a.d. normaliai traukos sričiai, $0 < \alpha \leqslant 2$. Jei

$$|c_k| = k^{-\gamma}, k \in \mathbb{N}, \ \gamma > \max(1/\alpha, 1), \ \text{ir} \ \sum_{k=0}^{\infty} c_k = 0 \tag{1}$$

(stacionarus procesas $\{X_n\}$ turi neigiamą atmintį), yra žinoma, kad normalizuojanti $S_n(1)$ seka gali augti greičiu $n^{1/\alpha-\gamma+1}$, jei koeficientų c_k, $k \in \mathbb{N}$, ženklai yra pastovūs, arba išlikti aprėžta, jei koeficientų ženklai alternuoja. Iškeltas klausimas, ar duotai $\lambda \in (0, 1/\alpha - \gamma + 1)$ reikšmei galima parinkti tokius koeficientų $c_k, k \in \mathbb{N}$, ženklus, kad normalizuojanti seka augtų greičiu n^{λ}.

Disertacijoje parodoma, kokius ženklus galima pasirinkti, kad būtų gautas norimas augimo greitis, bei ištiriamas atitinkamai normuotos dalinių sumų procesų sekos konvergavimas pagal baigtiniamačius skirstinius.

4 Tyrimų metodika

Asimptotiniam priklausomybės matų elgesiui nagrinėti naudojami gerai žinomi matematinės analizės metodai. Vienas pagrindinių įrankių – Lebego teorema apie dominuojamąjį konvergavimą.

Taip pat taikomi žinomi lėtai kintančių funkcijų teorijos rezultatai.

Siekiant įrodyti 5.2.1 ir 5.2.2 teoremas, tiesiniams laukams pritaikomas įrodymas iš [2]. Straipsnyje [2] begalinės dispersijos atvejui buvo pritaikytas Newman'o centrinės ribinės teoremos įrodymas.

Įrodinėjant procesų konvergavimą pagal baigtiniamačius skirstinius naudojamas charakteristinių funkcijų metodas.

5 Moksliniai rezultatai

Toliau pateikiami pagrindiniai disertacijoje gauti rezultatai.

5.1 Spektrinės kovariacijos

Disertacijos 4 skyrius pradedamas įvedant naują priklausomybės matą. Šis priklausomybės matas buvo įvestas pastebėjus, kad nagrinėjant tiesinius laukus spektrinės kovariacijos asimptotinis elgesys yra labai sudėtingas. Tarkime, kad $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ yra α-stabilus vektorius su spektriniu matu Γ. X_1 ir X_2 α-spektrine kovariacija vadiname dydį

$$\rho_\alpha(X_1, X_2) = \int_{\mathbb{S}^1} s_1^{\langle\alpha/2\rangle} s_2^{\langle\alpha/2\rangle} \Gamma(\mathrm{d}\mathbf{s}). \tag{2}$$

Iš tiesų, jei spektrinis matas Γ yra pagrindinis parametras, nusakantis priklausomybę tarp α-stabilaus vektoriaus koordinačių, galima apibrėžti plačią priklausomybės matų šeimą. Tarkime, $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ yra tokia funkcija, kad integralas $\int_{\mathbb{S}^1} g(s_1, s_2)\Gamma(\mathrm{d}\mathbf{s})$ būtų korektiškai apibrėžtas. Tada galime apibrėžti

$$\rho(g; X_1, X_2) = \int_{\mathbb{S}^1} g(s_1, s_2)\Gamma(\mathrm{d}\mathbf{s}), \tag{3}$$

ir šį dydį vadinti priklausomybės matu tarp vektoriaus (X_1, X_2) koordinačių. Reikalaujant, kad funkcija g tenkintų tam tikras sąlygas, galima gauti pageidaujamų priklausomybės mato savybių. Disertacijoje parodoma, kokias pakankamas sąlygas turi tenkinti funkcija g, kad gautas priklausomybės matas būtų simetrinis, nepriklausomiems dydžiams priskirtų reikšmę 0, nepriklausytų nuo spektrinio mato Γ simetrijos. Taip pat disertacijoje aptariama galimybė apibrėžti koreliacijos koeficiento atitikmenis.

Kaip ir spektrinės kovariacijos, anksčiau aprašytų priklausomybės matų apibrėžimus galima praplėsti atsitiktiniams vektoriams, priklausantiems α-stabilaus vektoriaus traukos sričiai.

Bendru atveju nėra įmanoma palyginti α-spektrinės kovariacijos su spektrine kovariacija. Tačiau atskirais atvejais, pavyzdžiui, jei atsitiktinis vektorius (X_1, X_2) yra asocijuotas, priklausomybės matus galima palyginti:

5.1.1 teiginys (Sutrumpintas disertacijos 4.3 teiginys)**.** *Jei stabilus vektorius* (X_1, X_2) *yra asocijuotas, bet kokiai* $0 < \alpha < 2$ *reikšmei galioja nelygybė*

$$\rho(X_1, X_2) \leq \rho_\alpha(X_1, X_2). \tag{4}$$

Jei $1 < \alpha < 2$*, tai*

$$\rho(X_1, X_2) \leq [X_1, X_2]_\alpha. \tag{5}$$

Jei $1 \leq \alpha \leq 2$*, tai egzistuoja tokios konstantos* $c_1, c_2 > 0$*, kad*

$$c_1\rho(X_1, X_2) \leq \tau(X_1, X_2) \leq c_2\rho(X_1, X_2). \tag{6}$$

Asimptotinis spektrinės kovariacijos elgesys pradedamas tirti nagrinėjant tiesinius procesus

$$X(k) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \epsilon_{k-j}, \ k \in \mathbb{Z}, \tag{7}$$

kur $\epsilon_i, \ i \in \mathbb{Z}$ yra n.v.p. α-stabilūs a.d. su charakteristine funkcija

$$\begin{cases} \exp\left(-|t|^\alpha \left(1 - \mathrm{i}\beta \mathrm{sign}(t) \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right)\right), \text{ jei } \alpha \neq 1, \\ \exp\left(-|t|\right), \text{ jei } \alpha = 1, \end{cases}$$

o koeficientai c_j tenkina

$$\sum_{j=0}^{\infty} |c_j|^\alpha < \infty.$$

Nesuformulavus papildomų prielaidų apie koeficientus c_j sudėtinga tirti $\rho(n) := \rho(X(0), X(n))$ nykimo greitį. Disertacijoje daroma prielaida, kad

$$c_i \sim U(i), \text{ kai } i \to \infty, \tag{8}$$

čia U yra reguliariai kintanti su parametru $\eta = -\kappa$ funkcija, $\kappa > 1/\alpha$. Toliau pateikta teorema apibūdina tokio proceso asimptotinį spektrinės kovariacijos elgesį.

5.1.2 teorema (Disertacijoje 4.7 teorema)**.** *Tarkime, tiesinio proceso $X(n)$, apibrėžto* (7)*, koeficientai c_i tenkina* (8)*. Tada*

jei $\alpha \leq 1$ ir $\kappa > 1/\alpha$ arba $1 < \alpha \leqslant 2$ ir $1/\alpha < \kappa < 1/(\alpha - 1)$, tai

$$\rho(n) \sim nU^\alpha(n) \int_0^\infty \frac{\left(t^\kappa(1+t)^\kappa\right)^{1-\alpha}}{\left(t^{2\kappa} + (1+t)^{2\kappa}\right)^{(2-\alpha)/2}} \mathrm{d}t. \tag{9}$$

Jei $\alpha > 1$ ir $\kappa > 1/(\alpha - 1)$, tai

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho(n)}{U(n)} = \sum_{i=0}^{\infty} c_i^{\langle\alpha-1\rangle}. \tag{10}$$

Kai $\alpha > 1$, $\kappa = 1/(\alpha - 1)$, esant griežtesnei prielaidai $c_i \sim i^{-\kappa}$, gauname

$$\rho(n) \sim n^{-\kappa} \ln n. \tag{11}$$

Jei X_t yra slenkančio vidurkio procesas, priklausomybė tarp X_0 ir X_t nyksta didėjant t. Toliau pateikta teorema rodo, kad plati priklausomybės matų klasė turi tokią savybę.

5.1.3 teorema (Disertacijoje 4.8 teorema)**.** *Tarkime, $\rho(g;\cdot,\cdot)$ yra priklausomybės matas, apibrėžtas* (3)*, ir tenkinama nelygybė $|g(s_1, s_2)| \leqslant C\,|s_1 s_2|^{\alpha/2}$. Jei X_t yra α-stabilus slenkančio vidurkio procesas, $0 < \alpha \leqslant 2$, tai*

$$\lim_{t\to\infty} \rho(g; X_t, X_0) = 0.$$

5.1.4 išvada (Disertacijoje 4.9 išvada)**.** *Jei $0 < \alpha \leqslant 2$, o X_t yra α-stabilus slenkančio vidurkio procesas, tai*

$$\lim_{t\to\infty} \rho(X_t, X_0) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \rho_\alpha(X_t, X_0) = 0.$$

Toliau pateiktos teoremos apibūdina asimptotinį spektrinės kovariacijos elgesį log-trupmeniniam stabiliam triukšmui ir tiesiniam trupmeniniam stabiliam triukšmui.

5.1.5 teorema (Disertacijoje 4.10 teorema)**.** *Tegu $Y_2(t)$ yra log-trupmeninis stabilus triukšmas. Tada*

$$\rho(Y_2(0), Y_2(t)) \sim Ct^{1-\alpha}, \quad t \to \infty, \tag{12}$$

kur

$$C = 2\int_0^\infty \frac{\big(y(1+y)\big)^{1-\alpha}}{\big(y^2+(1+y)^2\big)^{\frac{2-\alpha}{2}}}\mathrm{d}y - \int_0^1 \frac{\big(y(1-y)\big)^{1-\alpha}}{\big(y^2+(1-y)^2\big)^{\frac{2-\alpha}{2}}}\mathrm{d}y. \tag{13}$$

Apibrėžkime dvi parametrų aibes $S = S_1 \cup S_2$ ir U, kur

$$S_1 = \{(H,\alpha) : 0 < \alpha \leqslant 1, 0 < H < 1\},$$

$$S_2 = \{(H,\alpha) : 1 < \alpha < 2,\ 1 - 1/(\alpha(\alpha-1)) < H < 1,\ H \neq 1/\alpha\},$$

$$U = \{(H,\alpha) : 1 < \alpha < 2,\ 0 < H < 1 - 1/(\alpha(\alpha-1))\}.$$

5.1.6 teorema (Disertacijoje 4.12 teorema)**.** *Tegu $Y_1(t)$ yra tiesinis trupmeninis stabilus triukšmas. Jei $(\alpha, H) \in S$, tai*

$$\rho(Y_1(0), Y_1(t)) \sim C_1(a,b,\alpha,H)t^{\alpha H-\alpha}, \quad t \to \infty, \tag{14}$$

tuo tarpu jei $(\alpha, H) \in U$, tai

$$\rho(Y_1(0), Y_1(t)) \sim C_2(a,b,\alpha,H)t^{H-1-1/\alpha}, \quad t \to \infty, \tag{15}$$

čia $C_1(a,b,\alpha,H)$ ir $C_2(a,b,\alpha,H)$ yra konstantos, kurių tikslios reikšmės nurodytos disertacijoje.

Toliau disertacijoje nagrinėjami tiesiniai laukai

$$X_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{i}\geqslant\mathbf{0}} c_{\mathbf{i}}\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{i}},\ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d, \tag{16}$$

kur $\epsilon_{\mathbf{i}}$, $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d$, yra n.v.p. a.d., dėl paprastumo teigiant, kad jie turi simetrinį α-stabilų skirstinį. Koeficientai $c_{\mathbf{i}}$, $\mathbf{i} \geqslant \mathbf{0}$, yra realūs skaičiai, tenkinantys sąlygą

$$\sum_{\mathbf{i}\geqslant\mathbf{0}} |c_{\mathbf{i}}|^\alpha < \infty.$$

Tarkime, $(k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{N}_0^d$, o $s_i \in \{-1, 1\}, i = 1, \dots, d$. Darbe gaunama dydžių $\rho(X_{\mathbf{0}}, X_{(s_1k_1,\dots,s_dk_d)})$ ir $\rho_\alpha(X_{\mathbf{0}}, X_{(s_1k_1,\dots,s_dk_d)})$ išraiška koeficientais $\{c_{\mathbf{i}}\}$. Tarkime, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{Z}^d$, ir pažymėkime

$$Q_{\mathbf{a}} = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d : x_i \geq -a_i, i = 1, \dots, d \right\},$$

$\mathbf{a}_+ = ((a_1)_+, \dots, (a_d)_+)$ ir $\mathbf{a}_- = ((a_1)_-, \dots, (a_d)_-)$, kur $(\cdot)_+ = \max(\cdot, 0)$ ir $(\cdot)_- = -\min(\cdot, 0)$.

5.1.7 teiginys (Disertacijoje 4.14 teiginys)**.** *Tiesiniam laukui, apibrėžtam* (16)*, bet kokiai* $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$ *reikšmei gauname*

$$\rho(X_{\mathbf{0}}, X_{\mathbf{k}}) = \rho(X_{\mathbf{k}_-}, X_{\mathbf{k}_+}) = \sum_{\mathbf{j} \in Q_{\mathbf{0}}} \frac{c_{\mathbf{j}+\mathbf{k}_-} c_{\mathbf{j}+\mathbf{k}_+}}{\left(c^2_{\mathbf{j}+\mathbf{k}_-} + c^2_{\mathbf{j}+\mathbf{k}_+}\right)^{(2-\alpha)/2}} \tag{17}$$

ir

$$\rho_\alpha(X_{\mathbf{0}}, X_{\mathbf{k}}) = \rho_\alpha(X_{\mathbf{k}_-}, X_{\mathbf{k}_+}) = \sum_{\mathbf{j} \in Q_{\mathbf{0}}} c^{\langle \alpha/2 \rangle}_{\mathbf{j}+\mathbf{k}_-} c^{\langle \alpha/2 \rangle}_{\mathbf{j}+\mathbf{k}_+}. \tag{18}$$

Nagrinėtų tiesinių procesų (t. y., $d = 1$ atveju) spektrinės kovariacijos asimptotinis elgesys yra gana paprastas. Atveju, kai $d > 1$, situacija yra sudėtingesnė. Pagrindiniai sunkumai jau išryškėja atveju, kai $d = 2$, todėl disertacijoje vietoje bendro atvejo $d > 1$ nagrinėjamas atvejis $d = 2$. Procesas (16) gali būti užrašytas taip:

$$X_{k,l} = \sum_{i,j=0}^{\infty} c_{i,j} \epsilon_{k-i,l-j}, \ (k, l) \in \mathbb{Z}^2. \tag{19}$$

Nagrinėkime dydį $\rho(k, l) := \rho(X_{0,0}, X_{k,l})$. Šio dydžio išraiškos skirtingos $k > 0, l > 0$ ir $k > 0, l < 0$ atvejais: tarkime, $n, m \in \mathbb{N}$, tada

$$\rho(n, m) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_{i,j} c_{i+n,j+m}}{\left(c^2_{i,j} + c^2_{i+n,j+m}\right)^{\frac{2-\alpha}{2}}},$$

$$\rho(n, -m) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_{i+n,j} c_{i,j+m}}{\left(c^2_{i+n,j} + c^2_{i,j+m}\right)^{\frac{2-\alpha}{2}}}.$$

Proceso stacionarumas lemia tai, kad likę du atvejai ($k < 0, \ l > 0$ ir $k < 0, \ l < 0$) gali būti suvesti į jau pateiktus atvejus. Nesuformulavus papildomų prielaidų apie koeficientus $c_{i,j}$, sunku ištirti asimptotinį priklausomybės matų elgesį.

Disertacijoje daroma prielaida, kad lauko (19) koeficientai $c_{i,j}$ turi išraišką

$$c_{i,j} = w_{(i,j)}(1+i)^{-\beta_1}(1+j)^{-\beta_2}, \quad i,j \geq 0, \tag{20}$$

čia $\beta_k > 1/\alpha$, $k = 1, 2$, o koeficientai $w_{(i,j)}$ tenkina šias sąlygas:

(A1) egzistuoja $\lim_{i,j\to\infty} w_{(i,j)} = 1$,

(A2) kiekvienai $i \geq 0$ reikšmei egzistuoja $\lim_{j\to\infty} w_{(i,j)} = w_{(i,\cdot)} > 0$,

(A3) kiekvienai $j \geq 0$ reikšmei egzistuoja $\lim_{i\to\infty} w_{(i,j)} = w_{(\cdot,j)} > 0$.

Asimptotinis spektrinės kovariacijos elgesys anksčiau aprašytam tiesiniam laukui disertaciniame darbe nusakomas dviem teoremomis, kuriose nagrinėjamas dydis $\rho(k,l)$, atskirai, kai $k \to \infty,\ l \to \infty$ ir kai $k \to \infty,\ l \to -\infty$. Dėl patogumo įvedamas žymėjimas

$$V_\alpha(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{2-\alpha}{2}}}.$$

5.1.8 teorema (Disertacijoje 4.15 teorema)**.** *Tarkime, tiesinis laukas* (19) *su koeficientais $c_{i,j}$, turinčiais išraišką* (20)*, tenkina sąlygas* (A1)–(A3)*. Spektrinės kovariacijos $\rho(n,m)$ asimptotinis elgesys yra:*

1. *Jei $1 < \alpha \leqslant 2$ ir $\beta_i > \frac{1}{\alpha-1}$, $i = 1, 2$, tai*

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{\rho(n,m)}{n^{-\beta_1}m^{-\beta_2}} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} w_{(i,j)}^{\langle\alpha-1\rangle}(1+i)^{-\beta_1(\alpha-1)}(1+j)^{-\beta_2(\alpha-1)}. \tag{21}$$

2. *Jei $1 < \alpha \leqslant 2$ ir $\frac{1}{\alpha} < \beta_i < \frac{1}{\alpha-1}$, $i = 1, 2$ arba $0 < \alpha \leqslant 1$ ir $\beta_i > \frac{1}{\alpha}$, $i = 1, 2$, tai*

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{\rho(n,m)}{n^{1-\alpha\beta_1}m^{1-\alpha\beta_2}} = \int_0^\infty\int_0^\infty V_\alpha(t^{-\beta_1}s^{-\beta_2},\ (t+1)^{-\beta_1}(s+1)^{-\beta_2})\mathrm{d}t\mathrm{d}s. \tag{22}$$

3. *Jei $1 < \alpha \leqslant 2$ ir $\beta_1 > \frac{1}{\alpha-1}$, $\frac{1}{\alpha} < \beta_2 < \frac{1}{\alpha-1}$, tai*

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{\rho(n,m)}{n^{-\beta_1}m^{1-\beta_2\alpha}} = \sum_{i=0}^{\infty} w_{(i,\infty)}^{\alpha-1}(1+i)^{-\beta_1(\alpha-1)}\int_0^\infty u^{-\beta_2(\alpha-1)}(1+u)^{-\beta_2}\mathrm{d}u.$$

4. Jei $1 < \alpha \leqslant 2$ *ir* $\beta_1 = \frac{1}{\alpha-1}$, $\frac{1}{\alpha} < \beta_2 < \frac{1}{\alpha-1}$, *tai*

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{\rho(n,m)}{n^{-\beta_1} m^{1-\beta_2\alpha} \ln(n)} = \int_0^\infty v^{-\beta_2(\alpha-1)} (1+v)^{-\beta_2} \mathrm{d}v.$$

5. Jei $1 < \alpha \leqslant 2$ *ir* $\beta_1 = \frac{1}{\alpha-1}$, $\beta_2 > \frac{1}{\alpha-1}$, *tai*

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{\rho(n,m)}{n^{-\beta_1} m^{-\beta_2} \ln(n)} \sum_{j=0}^{\infty} w^{\alpha-1}_{(\infty,j)} (1+j)^{-\beta_2(\alpha-1)}.$$

6. Jei $1 < \alpha \leqslant 2$ *ir* $\beta_1 = \frac{1}{\alpha-1}$, $\beta_2 = \frac{1}{\alpha-1}$, *tai*

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{\rho(n,m)}{n^{-\beta_1} m^{-\beta_2} \ln(n)\ln(m)} = 1.$$

5.1.9 teorema (Disertacijoje 4.16 teorema)**.** *Tarkime, tiesinis laukas* (19) *su koeficientais* $c_{i,j}$*, turinčiais išraišką* (20)*, tenkina sąlygas* (A1)–(A3)*. Spektrinės kovariacijos* $\rho(n,-m)$ *asimptotinis elgesys yra:*

1. Jei $1 < \alpha \le 2$, $\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} > \alpha$ *ir* $\frac{1}{\alpha} < \beta_i < \frac{1}{\alpha-1}$, $i = 1,2$, *arba* $0 < \alpha \le 1$ *ir* $\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} > \alpha$, *tai*

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{\rho(n,-m)}{n^{1-\beta_1\alpha} m^{1-\beta_2\alpha}} = \int_0^\infty\int_0^\infty V_\alpha((1+u)^{-\beta_1} v^{-\beta_2},\ u^{-\beta_1}(1+v)^{-\beta_2}) \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

2. Jei $1 < \alpha \le 2$, $\frac{1}{\alpha-1} < \beta_1$ *ir* $\frac{1}{\alpha} < \beta_2 < 1$, *tai*

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{\rho(n,-m)}{n^{-\beta_1} m^{1-\beta_2\alpha}} = \sum_{i=0}^{\infty} w^{\alpha-1}_{(i,\infty)} (1+i)^{-\beta_1(\alpha-1)} \int_0^\infty v^{-\beta_2}(1+v)^{-\beta_2(\alpha-1)} \mathrm{d}v.$$

3. Jei $1 < \alpha \le 2$, $\beta_1 = \frac{1}{\alpha-1}$ *ir* $\frac{1}{\alpha} < \beta_2 < 1$, *tai*

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{\rho(n,-m)}{n^{1-\beta_1\alpha} m^{1-\beta_2\alpha} \ln(n)} = \int_0^\infty v^{-\beta_2}(1+v)^{-\beta_2(\alpha-1)} \mathrm{d}v\mathrm{d}s.$$

4. Tarkime, $1 < \alpha \le 2$ *ir* $\frac{1}{\alpha-1} < \beta_i$, $i = 1,2$.

a) Jei m_n *yra tokia seka, kad* $\frac{m_n^{-\beta_2}}{n^{-\beta_1}} \to 0$, *tai*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho(n,-m_n)}{n^{-\beta_1(\alpha-1)} m_n^{-\beta_2}} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} w^{\alpha-1}_{(\infty,j)} w_{(i,\infty)} (1+j)^{-\beta_2(\alpha-1)} (1+i)^{-\beta_1}.$$

b) Jei m_n yra tokia seka, kad $\frac{m_n^{-\beta_2}}{n^{-\beta_1}} \to c \in (0;\infty)$, tai

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho(n,-m_n)}{n^{-\beta_1(\alpha-1)}m_n^{-\beta_2}} = \frac{1}{c}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} V_\alpha(w_{(\infty,j)}(1+j)^{-\beta_2},\ cw_{(i,\infty)}(1+i)^{-\beta_1}).$$

c) Jei $m_n \to \infty$ yra tokia seka, kad $\frac{m_n^{-\beta_2}}{n^{-\beta_1}} \to \infty$, tai

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho(n,-m_n)}{n^{-\beta_1}m_n^{-\beta_2(\alpha-1)}} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} w_{(\infty,j)}w_{(i,\infty)}^{\alpha-1}(1+j)^{-\beta_2}(1+i)^{-\beta_1(\alpha-1)}.$$

5. *Tarkime, $1<\alpha<2$, $\frac{1}{\alpha-1}<\beta_1$ ir $1<\beta_2<\frac{1}{\alpha-1}$.*

a) Jei m_n yra tokia seka, kad $\frac{m_n^{-\beta_2}}{n^{-\beta_1}} \to 0$, tai

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho(n,-m_n)}{n^{-\frac{\beta_1}{\beta_2}}m_n^{1-\beta_2\alpha}} = \sum_{i=0}^{\infty}\int_0^{\infty} V_\alpha(v^{-\beta_2}, w_{(i,\infty)}(1+i)^{-\beta_1})\mathrm{d}v.$$

b) Jei m_n yra tokia seka, kad $\frac{m_n^{-\beta_2}}{n^{-\beta_1}} \to c \in (0;\infty)$, tai

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho(n,-m_n)}{n^{-\beta_1}m_n^{-\beta_2(\alpha-1)}} = c\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} V_\alpha(w_{(\infty,j)}c^{-1}(1+j)^{-\beta_2}, w_{(i,\infty)}(1+i)^{-\beta_1}).$$

c) Jei $m_n \to \infty$ yra tokia seka, kad $\frac{m_n^{-\beta_2}}{n^{-\beta_1}} \to \infty$, tai

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho(n,-m_n)}{n^{-\beta_1}m_n^{-\beta_2(\alpha-1)}} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} w_{(\infty,j)}w_{(i,\infty)}^{\alpha-1}(1+j)^{-\beta_2}(1+i)^{-\beta_1(\alpha-1)}.$$

6. *Tarkime, $1<\alpha<2$, $1<\beta_i<\frac{1}{\alpha-1}$, $i=1,2$ ir $\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}<\alpha$ arba $0<\alpha\le 1$ ir $\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}<\alpha$.*

a) Jei m_n yra tokia seka, kad $\frac{m_n^{-\beta_2}}{n^{-\beta_1}} \to 0$, tai

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho(n,-m_n)}{n^{-\frac{\beta_1}{\beta_2}}m_n^{1-\beta_2\alpha}} = \sum_{i=0}^{\infty}\int_0^{\infty} V_\alpha(v^{-\beta_2},\ w_{(i,\infty)}(1+i)^{-\beta_1})\mathrm{d}v.$$

b) Jei m_n yra tokia seka, kad $\frac{m_n^{-\beta_2}}{n^{-\beta_1}} \to c \in (0;\infty)$, tai

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho(n,-m_n)}{n^{-\beta_1(\alpha-1)}m_n^{-\beta_2}} = \frac{1}{c}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} V_\alpha(w_{(\infty,j)}(1+j)^{-\beta_2},\ w_{(i,\infty)}c^2(1+i)^{-\beta_1}).$$

c) Jei $m_n \to \infty$ *yra tokia seka, kad* $\frac{m_n^{-\beta_2}}{n^{-\beta_1}} \to \infty$*, tai*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho(n,-m_n)}{n^{1-\beta_1\alpha} m_n^{-\frac{\beta_2}{\beta_1}}} = \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} V_\alpha(u^{-\beta_1},\ w_{(\infty,j)}(1+j)^{-\beta_2}) \mathrm{d}u.$$

7. Tarkime, $1 < \alpha < 2$*,* $\frac{1}{\alpha-1} < \beta_1$ *ir* $\beta_2 = \frac{1}{\alpha-1}$*.*

a) Jei m_n *yra tokia seka, kad* $\frac{m_n^{-\beta_2}}{n^{-\beta_1}} \to 0$*, tai*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho(n,-m_n)}{n^{-\frac{\beta_1}{\beta_2}} m_n^{1-\beta_2\alpha} \ln\left(n^{-\frac{\beta_1}{\beta_2}} m_n\right)} = \sum_{i=0}^{\infty} w_{(i,\infty)}(1+i)^{-\beta_1}.$$

b) Jei m_n *yra tokia seka, kad* $\frac{m_n^{-\beta_2}}{n^{-\beta_1}} \to c \in (0;\infty)$*, tai*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho(n,-m_n)}{n^{-\beta_1} m_n^{-\beta_2(\alpha-1)}} = c \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} V_\alpha(w_{(\infty,j)} c^{-1}(1+j)^{-\beta_2},\ w_{(i,\infty)}(1+i)^{-\beta_1}).$$

c) Jei $m_n \to \infty$ *yra tokia seka, kad* $\frac{m_n^{-\beta_2}}{n^{-\beta_1}} \to \infty$*, tai*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho(n,-m_n)}{n^{-\beta_1} m_n^{-\beta_2(\alpha-1)}} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} w_{(\infty,j)} w_{(i,\infty)}^{\alpha-1} (1+j)^{-\beta_2} (1+i)^{-\beta_1(\alpha-1)}.$$

8. Tarkime, $1 < \alpha < 2$*,* $\beta_1 = \frac{1}{\alpha-1}$ *ir* $1 < \beta_2 < \frac{1}{\alpha-1}$*.*

a) Jei m_n *yra tokia seka, kad* $\frac{m_n^{-\beta_2}}{n^{-\beta_1}} \to 0$*, tai*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho(n,-m_n)}{n^{-\frac{\beta_1}{\beta_2}} m_n^{1-\beta_2\alpha}} = \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{\infty} V_\alpha(w_{(i,\infty)} \left(1+i\right)^{-\beta_1},\ s^{-\beta_2}) \mathrm{d}s.$$

b) Jei m_n *yra tokia seka, kad* $\frac{m_n^{-\beta_2}}{n^{-\beta_1}} \to c \in (0;\infty)$*, tai*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho(n,-m_n)}{n^{-\beta_1} m_n^{-\beta_2(\alpha-1)}} = c \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} V_\alpha(w_{(\infty,j)} c^{-1}(1+j)^{-\beta_2},\ w_{(i,\infty)}(1+i)^{-\beta_1}).$$

c) Jei $m_n \to \infty$ *yra tokia seka, kad* $\frac{m_n^{-\beta_2}}{n^{-\beta_1}} \to \infty$*, tai*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho(n,-m_n)}{n^{1-\beta_1\alpha} m_n^{-\frac{\beta_2}{\beta_1}} \ln\left(n m_n^{-\frac{\beta_2}{\beta_1}}\right)} = \sum_{j=0}^{\infty} w_{(\infty,j)} \left(1+j\right)^{-\beta_2}.$$

9. Tarkime, $1 < \alpha < 2$ *ir* $\beta_i = \frac{1}{\alpha-1}$, $i = 1, 2$.

a) Jei m_n *yra tokia seka, kad* $\frac{m_n^{-\beta_2}}{n^{-\beta_1}} \to 0$, *tai*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho(n, -m_n)}{n^{-\beta_1/\beta_2} m_n^{1-\beta_2\alpha} \ln\left(n^{-\beta_1/\beta_2} m_n\right)} = \sum_{i=0}^{\infty} w_{(i,\infty)}(1+i)^{-\beta_1}.$$

b) Jei m_n *yra tokia seka, kad* $\frac{m_n^{-\beta_2}}{n^{-\beta_1}} \to c \in (0; \infty)$, *tai*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho(n, -m_n)}{n^{-\beta_1} m_n^{-\beta_2(\alpha-1)}} = c \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} V_\alpha(w_{(\infty,j)} c^{-1}(1+j)^{-\beta_2},\ w_{(i,\infty)}(1+i)^{-\beta_1}).$$

c) Jei $m_n \to \infty$ *yra tokia seka, kad* $\frac{m_n^{-\beta_2}}{n^{-\beta_1}} \to \infty$, *tai*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho(n, -m_n)}{n^{1-\beta_1\alpha} m_n^{-\beta_2/\beta_1} \ln\left(n m_n^{-\beta_2/\beta_1}\right)} = \sum_{j=0}^{\infty} w_{(\infty,j)}(1+j)^{-\beta_2}.$$

Remdamiesi 5.1.1 teiginiu žinome, kad spektrinė kovariacija ir kodiferencija yra ekvivalentūs priklausomybės matai, jei $1 \le \alpha < 2$ ir nagrinėjami asocijuoti a.d. Peršasi išvada, kad nagrinėjamo lauko kodiferencijos asimptotinė priklausomybės struktūra irgi yra sudėtinga.

Toliau pateikta teorema rodo, kad α-spektrinės kovariacijos asimptotinis elgesys yra paprastesnis. Dėl patogumo įvedami žymėjimai $\gamma_k = \beta_k\alpha/2$, $k = 1, 2$, ir

$$K(a) = \int_0^\infty v^{-a}(1+v)^{-a}\,\mathrm{d}v, \quad 1/2 < a < 1.$$

Tegu $n, m \in \mathbb{N}$, $s \in \{-1, 1\}$, ir $\rho_\alpha(k_1, k_2) := \rho_\alpha(X_{0,0}, X_{k_1,k_2})$. Yra šešios pagrindinės parametrų β_1, β_2 aibės, kuriose asimptotinis $\rho_\alpha(n, sm)$ elgesys skiriasi. Likusiose aibėse gaunami simetriniai rezultatai.

5.1.10 teorema (Disertacijoje 4.17 teorema). *Tarkime, tiesinis laukas* (19) *su koeficientais* $c_{i,j}$, *turinčiais išraišką* (20), *tenkina sąlygas* (A1)–(A3). *Tada* α-*spektrinės kovariacijos asimptotinis elgesys yra*

1. Jei $1/2 < \gamma_i < 1, i = 1, 2$, *tai*

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{\rho_\alpha(n, sm)}{n^{1-2\gamma_1} m^{1-2\gamma_2}} = K(\gamma_1)K(\gamma_2). \tag{23}$$

2. Jei $\gamma_1 > 1$ ir $1/2 < \gamma_2 < 1$, tai

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{\rho_\alpha(n, sm)}{n^{-\gamma_1} m^{1-2\gamma_2}} = \sum_{i=0}^{\infty} w_{(i,\cdot)}^{\alpha/2} (1+i)^{-\gamma_1} K(\gamma_2). \tag{24}$$

3. Jei $\gamma_i > 1, i = 1, 2$, tai

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{\rho_\alpha(n, sm)}{n^{-\gamma_1} m^{-\gamma_2}} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} W(i, j, s)^{\langle\alpha/2\rangle} (1+i)^{-\gamma_1} (1+j)^{-\gamma_2}, \tag{25}$$

čia $W(i, j, 1) = w_{(i,j)}$ ir $W(i, j, -1) = w_{(i,\cdot)} w_{(\cdot,j)}$.

4. Jei $1/2 < \gamma_1 < 1, \gamma_2 = 1$, tai

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{\rho_\alpha(n, sm)}{n^{1-2\gamma_1} m^{1-2\gamma_2} \ln m} = K(\gamma_1). \tag{26}$$

5. Jei $\gamma_1 > 1$ ir $\gamma_2 = 1$, tai

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{\rho_\alpha(n, sm)}{n^{1-2\gamma_1} m^{1-2\gamma_2} \ln m} = \sum_{i=0}^{\infty} w_{(i,\cdot)}^{\alpha/2} (1+i)^{-\gamma_1}. \tag{27}$$

6. Jei $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1$, tai

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{\rho_\alpha(n, sm)}{n^{1-2\gamma_1} (\ln n) m^{1-2\gamma_2} (\ln m)} = 1. \tag{28}$$

Disertacijoje taip pat aptariama galimybė 5.1.10 teoremos rezultatus apibendrinti ir $d \geq 3$ atvejui. Dėl paprastumo nagrinėjamas tiesinis laukas (16) su koeficientais

$$c_{\mathbf{i}} = \prod_{k=1}^{d} (1+i_k)^{-\beta_k}, \tag{29}$$

kur $\beta_k > 1/\alpha,\ k = 1, \ldots, d$. Pažymima $\gamma_l = \alpha\beta_l/2,\ l = 1, \ldots, d$ ir įrodomas toks teiginys:

5.1.11 teiginys (Disertacijoje 4.20 teiginys)**.** *Tarkime, kad atsitiktinis tiesinis laukas* (16) *su koeficientais, turinčiais išraišką* (29)*, tenkina sąlygą: egzistuoja tokie sveiki skaičiai* $u, v \geqslant 0$, $0 \leq u+v \leq d$, *kad* $1/2 < \gamma_{l_i} < 1$, *kai* $i = 1, \ldots, u$, $\gamma_{l_i} > 1$, *kai* $i = u+1, \ldots, u+v$, *ir* $\gamma_{l_i} = 1$, *kai* $i = u+v+1, \ldots, d$. *Susitarę, kad* $\prod_{\varnothing} = 1$, *gauname*

$$\frac{\rho_\alpha(X_{\mathbf{0}}, X_{\mathbf{k}})}{\left(\prod_{i=1}^{u} |k_{l_i}|^{1-2\gamma_{l_i}}\right)\left(\prod_{i=u+1}^{u+v} |k_{l_i}|^{-\gamma_{l_i}}\right)\left(\prod_{i=u+v+1}^{d} |k_{l_i}|^{-1}\ln(|k_{l_i}|)\right)} \to \left(\prod_{i=1}^{u} K(\gamma_{l_i})\right)\left(\prod_{i=u+1}^{u+v}\sum_{i=0}^{\infty}(1+i)^{-\gamma_{l_i}}\right), \quad (30)$$

kai $\min_{1\leqslant l\leqslant d} |k_l| \to \infty$.

5.2 Ribinės teoremos

Ribinės teoremos stacionariems asocijuotiems laukams su baigtine dispersija yra plačiai išnagrinėtos, tuo tarpu ribinės teoremos stacionariems atsitiktiniams laukams su begaline dispersija sulaukė mažiau mokslininkų dėmesio, nors ši tema yra gana įdomi. Toliau pateikiamos dvi teoremos, apibendrinančios teoremas, įrodytas [2] straipsnyje.

Disertacijoje nagrinėjamas $d = 2$ atvejis, nors, be sudėtingesnių žymėjimų, nekyla sunkumų nagrinėjant ir bendrą atvejį, kai $d \geqslant 2$. Tegu $\mathbb{X} = \{X_{i,j},\ (i,j) \in \mathbb{Z}^2\}$ yra stacionarus atsitiktinis laukas, pažymėkime $\rho(i,j) = \rho(X_{0,0}, X_{i,j})$ ir

$$S_{n,m} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} X_{i,j}, \quad \bar{S}_{n,m} = \frac{S_{n,m}}{n^{1/\alpha}m^{1/\alpha}}. \quad (31)$$

5.2.1 teorema (Disertacijoje 5.1 teorema)**.** *Tarkime,* $\mathbb{X}$ *yra stacionarus asocijuotas bendrai (angl. jointly)* α*-stabilus laukas.*

Jei $0 < \alpha < 1$, *tai*

$$\bar{S}_{n,m} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mu \quad \textit{kai } n, m \to \infty, \quad (32)$$

čia μ *yra griežtai* α*-stabilus skirstinys.*

Jei $\alpha = 1$, *tai egzistuoja tokios konstantos* $A_{n,m}$*, kad*

$$\bar{S}_{n,m} - A_{n,m} \stackrel{\mathrm{d}}{=} X_1.$$

Jei $1 < \alpha < 2$ *ir*

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} \rho(i,j) < \infty, \tag{33}$$

tai

$$\frac{S_{n,m} - \mathbb{E}S_{n,m}}{n^{1/\alpha}m^{1/\alpha}} = \frac{S_{n,m} - nmb}{n^{1/\alpha}m^{1/\alpha}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mu, \ \ kai \ \ n, m \to \infty, \tag{34}$$

čia μ *yra neišsigimęs griežtai* α*-stabilus skirstinys.*

Šioje teoremoje eilutėje (33) dydis $\rho(i,j)$ gali būti pakeistas kodiferencija $\tau(i,j) := \tau(X_{0,0}, X_{i,j})$, taip būtų gautas ekvivalentus teiginys. Spektrinę kovariaciją pakeitus α-spektrine kovariacija gaunamas silpnesnis teiginys, tačiau, palyginę 5.1.8, 5.1.9 ir 5.1.10 teoremas, matome, kad α-spektrinės kovariacijos asimptotinis elgesys yra paprastesnis.

Tarkime, $\{X_{i,j}, \ i,j \in \mathbb{Z}\}$ yra stacionarus asocijuotas atsitiktinis laukas, o $\{Y_{i,j}, \ i,j \in \mathbb{Z}\}$ yra stacionarus asocijuotas bendrai griežtai α-stabilus atsitiktinis laukas. Pažymėkime

$$\mathbf{X}_{n,m} = (X_{1,1}, X_{1,2}, \ldots, X_{1,m}, X_{2,1}, \ldots, X_{2,m}, \ldots, X_{n,1}, \ldots, X_{n,m}),$$

$$\mathbf{Y}_{n,m} = (Y_{1,1}, Y_{1,2}, \ldots, Y_{1,m}, Y_{2,1}, \ldots, Y_{2,m}, \ldots, Y_{n,1}, \ldots, Y_{n,m}),$$

tegu $\Gamma_{n,m}$ žymi α-stabilaus vektoriaus $\mathbf{Y}_{n,m}$ spektrinį matą, taip pat įveskime žymėjimus

$$I_\alpha^A(X_i, X_j) = \sup_{b\geq A} b^{\alpha-2}\int_{-b}^{b}\int_{-b}^{b} H_{(X_i,X_j)}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{35}$$

$$H_{(X_i,X_j)}(x,y) = \mathbb{P}(X_i \leq x, X_j \leq y) - \mathbb{P}(X_i \leq x)\mathbb{P}(X_j \leq y),$$

$$I_\alpha^A(\mathbf{i},\mathbf{k}) := I_\alpha^A(X_\mathbf{i}, X_\mathbf{k}), \quad I_\alpha^A(\mathbf{k}) := I_\alpha^A(\mathbf{0},\mathbf{k}),$$

$$\bar{Z}_{n,m} = n^{-1/\alpha}m^{-1/\alpha}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} Y_{i,j}.$$

5.2.2 teorema (Disertacijoje 5.3 teorema)**.** *Tarkime, kad* $\{X_{i,j}, \ i,j \in \mathbb{Z}\}$ *yra toks stacionarus asocijuotas laukas, kad visoms* n, m *reikšmėms vektorius* $\mathbf{X}_{n,m}$ *priklauso griežtai normaliai vektoriaus* $\mathbf{Y}_{n,m}$ *traukos sričiai ir* $\Gamma_{n,m}$ *yra simetrinis visiems* n, m*, jei* $\alpha = 1$*.*

Jei

$$\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^2} I_\alpha^A(\mathbf{j}) < \infty \tag{36}$$

kuriai nors $A > 0$ reikšmei, tai egzistuoja toks griežtai α-stabilus skirstinys μ, kad

$$\bar{S}_{n,m} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mu \tag{37}$$

ir

$$\bar{Z}_{n,m} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mu, \ \textit{kai} \ \ n, m \to \infty. \tag{38}$$

5.3 Tiesiniai laukai

Šiame skyriuje nagrinėjamas atitinkamai normuotos dalinių sumų procesų sekos

$$S_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{0} \leqslant \mathbf{k} \leqslant \mathbf{nt}} X_{\mathbf{k}} \tag{39}$$

konvergavimas pagal baigtiniamačius skirstinius, kai $\min(n_1, \ldots, n_d) \to \infty$. Čia $X_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{j} \geqslant \mathbf{0}} c_{\mathbf{j}} \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{j}}$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d$, yra d-matis tiesinis laukas, $\xi_{\mathbf{j}}$, $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d$ yra nepriklausomos a.d. ξ kopijos. Teigiama, kad ξ turi charakteristinę funkciją

$$\mathbb{E} \exp\left(\mathrm{i}x\xi\right) = \exp\left(-h\left(|x|^{-1}\right)\left(|x|^{\alpha} - \mathrm{i}\beta x^{\langle\alpha\rangle}\tau_{\alpha}\right)(1 + r(x)) + \mathrm{i}x\mu\right), \tag{40}$$

čia h yra lėtai kintanti funkcija, $r(x) \to 0$, kai $x \to 0$, $x^{\langle\alpha\rangle} = |x|^{\alpha} \operatorname{sign}(x)$, $\tau_{\alpha} = \tan(\pi\alpha/2)$, jei $\alpha \neq 1$, ir $\tau_1 = 0$. Ši charakteristinės funkcijos išraiška reiškia, kad ξ priklauso α-stabilaus a.d. traukos sričiai (jei $\alpha = 1$, stabilus a.d. yra simetriškas).

Darbe daroma prielaida, kad $c_{\mathbf{j}}$ turi išraišką

$$c_{\mathbf{j}} = c_{(j_1, \ldots, j_d)} = \prod_{l=1}^{d} a_{j_l}(\gamma_l, l), \ \mathbf{j} \geqslant \mathbf{0},$$

čia

$$a_j(\gamma_l, l) \sim (1 + j)^{-\gamma_l} L_l(j), \ \text{kai} \ j \to \infty, \tag{41}$$

su $\gamma_l > 1/\alpha$ ir lėtai kintančiomis funkcijomis L_l, $l = 1, \ldots, d$. Jei $\gamma_l = 1$, daroma prielaida, kad $L_l \equiv 1$.

Pažymėkime

$$s_{n,\gamma_l,l} = \begin{cases} 1, \text{ jei } \gamma_l > \max(1, 1/\alpha) \ \text{ ir } \ \sum_{j=0}^{\infty} a_j(\gamma_l, l) \neq 0, \\ n^{1-\gamma_l} L_l(n), \ \text{ jei} \max(1, 1/\alpha) < \gamma_l < 1 + 1/\alpha \text{ ir } \ \sum_{j=0}^{\infty} a_j(\gamma_l, l) = 0, \\ \ln n, \text{ jei } \gamma_l = 1, \\ n^{1-\gamma_l} L_l(n), \text{ jei } 1/\alpha < \gamma_l < 1, \end{cases} \tag{42}$$

ir

$$A_{\mathbf{n}} = h_{1/\alpha}^{1/\alpha}\left(\prod_{j=1}^{d} n_j\right)\prod_{j=1}^{d}\left(n_j^{\frac{1}{\alpha}} s_{n_j,\gamma_j,j}\right), \tag{43}$$

čia $h_{1/\alpha}$ yra lėtai kintanti funkcija, tenkinanti

$$h\left(x^{1/\alpha}h_{1/\alpha}^{1/\alpha}(x)\right) \sim h_{1/\alpha}(x),\ x \to \infty, \tag{44}$$

su funkcija h iš (40).

Taip pat pažymėkime

$$H_{\gamma_l}(u,t,l) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\gamma_l,l)\mathbb{1}_{[0,t)}(u), \text{ jei } \gamma_l > \max(1,1/\alpha) \text{ ir } \sum_{j=0}^{\infty} a_j(\gamma_l,l) \neq 0, \\ \frac{(t-u)_+^{1-\gamma_l}-(-u)_+^{1-\gamma_l}}{1-\gamma_l}, \text{ jei } \max(1,1/\alpha) < \gamma_l < 1+1/\alpha \text{ ir } \sum_{j=0}^{\infty} a_j(\gamma_l,l) = 0, \\ \mathbb{1}_{[0,t)}(u), \text{ jei } \gamma_l = 1, \\ \frac{(t-u)_+^{1-\gamma_l}-(-u)_+^{1-\gamma_l}}{1-\gamma_l}, \text{ jei } 1/\alpha < \gamma_l < 1, \end{cases}$$

ir

$$\mathcal{H}(\mathbf{u},\mathbf{t}) = \prod_{l=1}^{d} H_{\gamma_l}(u_l,t_l,l).$$

Disertacijoje įrodytas toks rezultatas:

5.3.1 teorema (Disertacijoje 5.5 teorema)**.** *Procesui* $S_{\mathbf{n}}(\mathbf{t})$*, apibrėžtam* (39)*, ir normalizuojančiai sekai* (43) *turime*

$$A_{\mathbf{n}}^{-1}S_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) \xrightarrow{\text{f.d.d.}} I(\mathbf{t}), \tag{45}$$

kur $I(\mathbf{t})$ *yra* α*-stabilus atsitiktinis integralas, apibrėžtas kaip*

$$I(\mathbf{t}) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{H}(\mathbf{u},\mathbf{t})M(\mathrm{d}\mathbf{u}),$$

su Lebego kontroliniu matu ir asimetrijos funkcija $\beta(x) \equiv \beta$*.*

Normalizuojančioje sekoje (43) figūruoja daugiklis $h_{1/\alpha}^{1/\alpha}\left(\prod_{j=1}^{d} n_j\right)$, kurio nėra [4] siūlomame apibrėžime. Šis daugiklis negali būti išreikštas kaip lėtai kintančių funkcijų sandauga $\prod_{j=1}^{d} l_j(n_j)$, taigi, įrodyta teorema atskleidžia [4, 6 apibrėžimas] trūkumą: bendru atveju siūlomas apibrėžimas nėra tinkamas klasifikuoti tiesiniams laukams su triukšmais, priklausančiais α-stabilaus a.d. traukos sričiai.

5.4 Neigiama atmintis

Tarkime, kad $\theta \geqslant 1$, ir pažymėkime $T = T_\theta = \{k : k = 2\left\lfloor l^\theta \right\rfloor - 1$ kuriam nors $l \in \mathbb{N},\ l \geqslant 3\}$. Disertacijoje įrodoma tokia teorema:

5.4.1 teorema (Disertacijoje 5.7 teorema)**.** *Tegu* $\max(1/\alpha, 1) < \gamma < 1 + 1/\alpha$, $1 \leqslant \theta < \alpha/(\alpha\gamma - 1)$, *ir* $n \geqslant 0$. *Pažymėkime*

$$s_n = \begin{cases} 1, \text{ jei } n \in T, \\ (-1)^n, \text{ kitu atveju.} \end{cases}$$

Nagrinėkime tiesinį procesą $X_n = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \xi_{n-i}$, *kur* $b_k = s_k k^{-\gamma}$, $k \in \mathbb{N}$, $b_0 = -\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *ir* ξ_i, $i \in \mathbb{N}$, *yra seka n.v.p. a.d., turinčių charakteristinę funkciją* (40)*.*

Tiesinių procesų seka $\bar{S}_n(t) = A_n^{-1} \sum_{k=0}^{\lfloor nt \rfloor} X_k$ *konverguoja pagal baigtiniamačius skirstinius į tiesinį trupmeninį Lévy judesį*

$$Z_{\alpha, 1/\alpha + 1/\theta - \gamma}\left(-2^{1-1/\theta}/(\gamma\theta - 1), 0; t\right)$$

su asimetrijos funkcija $\beta(u) \equiv \beta$. *Čia* $A_n = n^{1/\alpha + 1/\theta - \gamma} h_{1/\alpha}^{1/\alpha}(n)$ *su funkcija* $h_{1/\alpha}$, *tenkinančia* (44)*.*

Įrodyta teorema atsako į [4] straipsnyje iškeltą klausimą:

5.4.2 išvada (Disertacijoje 5.8 išvada)**.** *Tarkime,* ξ_i *priklauso normaliai* α*-stabilaus a.d. traukos sričiai. Duotoms* $\gamma \in (\max(1/\alpha, 1), 1 + 1/\alpha)$ *ir* $\lambda \in (0, 1/\alpha - \gamma + 1)$ *reikšmėms galima taip parinkti koeficientų* $c_k, k \in \mathbb{N}$, *tenkinančių* (1)*, ženklus, kad* A_n *augtų greičiu* n^λ*.*

6 Darbo mokslinis naujumas ir aktualumas

Spektrinė kovariacija buvo apibrėžta 1976 metais. Nors šis priklausomybės matas turi gerų savybių, jis nepritraukė mokslininkų dėmesio. 2013 metais pasirodė straipsnis [3], kuriuo siekiama atgaivinti susidomėjimą spektrine kovariacija. Galima sakyti, kad pastarajame straipsnyje aprašoma mokslinių tyrimų programa, kurios dalį buvo bandoma įgyvendinti rašant šią disertaciją.

Pagrindiniai disertacijoje pristatyti rezultatai yra nauji, dalis jų buvo publikuota moksliniuose straipsniuose. Dalis rezultatų buvo paviešinta puslapyje arXiv.org.

7 Darbo struktūra ir apimtis

Disertaciją sudaro 7 skyriai: įvadas, skyrius, skirtas supažindinti skaitytoją su teorija, literatūros apžvalga, du skyriai su pagrindinių rezultatų formuluotėmis ir įrodymais, išvados ir literatūros sąrašas. Disertacija parašyta anglų kalba, darbo apimtis yra 161 puslapis.

8 Pagrindinės publikacijos

Disertacijos rezultatai publikuojami 3 moksliniuose straipsniuose:

1. J. Damarackas, V. Paulauskas: Properties of spectral covariance for linear processes with infinite variance, *Lithuanian Mathematical Journal,* **54** (2014) 252–276.
2. J. Damarackas, V. Paulauskas: On spectral covariance for random fields with infinite variance, *Journal of Multivariate Analysis*, **153** (2017) 156–175.
3. J. Damarackas: A note on the normalizing sequences for sums of linear processes in the case of negative memory, *Accepted for publication in Lithuanian Mathematical Journal.*

9 Rezultatų sklaida

Disertacijoje gauti rezultatai buvo pristatyti šiose mokslinėse konferencijose ir seminaruose:

1. J. Damarackas, *Apie alfa-kovariaciją atsitiktiniams dydžiams ir procesams su begaline dispersija*, 55-oji Lietuvos matematikų draugijos konferencija, 2014 m. birželio 26–27 d., Vilnius.

2. J. Damarackas, *Spektrinė kovariacija tiesiniams laukams*, 56-oji Lietuvos matematikų draugijos konferencija, 2015 m. birželio 16–17 d., Kaunas.

3. J. Damarackas, *Apie spektrinę kovariaciją atsitiktiniams dydžiams ir procesams su begaline dispersija / Dviejų sezonų rizikos modelis*, Lietuvos jaunųjų matematikų susitikimas, 2016 m. sausio 2 d., Vilnius.

4. J. Damarackas, *Spektrinė kovariacija tiesiniams laukams su begaline dispersija*, MII seminaras, 2016 m. vasario 24 d., Vilnius.

5. J. Damarackas, *Spectral covariances and limit theorems for random variables with infinite variance*, XI Toruńskie Kolokwium Stochastyczne, 2017 m. gegužės 25–26 d., Torunė, Lenkija.

6. J. Damarackas, *Spektrinės kovariacijos ir ribinės teoremos tiesiniams procesams ir laukams (disertacijos pristatymas)*, Matematinės analizės katedros seminaras, 2017 m. birželio 13 d., Vilnius.

10 Išvados

Disertacijoje padarytos tokios išvados:

- Nagrinėjant tiesinius procesus $X_n = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \epsilon_{n-j}$, $n \in \mathbb{N}$, sąlyga $\sum_i c_i = 0$ neturi įtakos asimptotiniam spektrinės kovariacijos nykimo greičiui, kai $\alpha < 2$; tai paaiškinta po 5.1.2 teoremos formulavimo. Kai $\alpha < 2$, sąryšis tarp spektrinės kovariacijos ir atminties [4, 6 apibrėžimas] nėra toks glaudus kaip baigtinės dispersijos atveju.

- Nagrinėjant tiesinius procesus su asimptotiškai reguliariai kintančiais koeficientais, tiesinį trupmeninį stabilų triukšmą bei log-trupmeninį stabilų triukšmą, spektrinės kovariacijos asimptotinis elgesys panašus į kodiferencijos ir kovariantiškumo asimptotinį elgesį.

- Disertacijoje įvestas naujas priklausomybės matas – α-spektrinė kovariacija – rodo paprastesnę nagrinėtų tiesinių laukų asimptotinę priklausomybės struktūrą.

- Slenkančio vidurkio procesuose didėjant atstumui tarp stebėjimų spektrinė kovariacija ir α-spektrinė kovariacija nyksta, žr. 5.1.4 išvadą.

- Straipsnyje [2] stacionariems asocijuotiems procesams įrodytos teoremos gali būti apibendrintos stacionariems asocijuotiems laukams, žr. 5.2.1 teoremą ir 5.2.2 teoremą.

- 5.2.1 teoremoje ir [2, 2.3 teorema] spektrinę kovariaciją pakeitus kodiferencija galima gauti ekvivalenčius teiginius. Vietoje spektrinės kovariacijos panaudojus α-spektrinę kovariaciją arba kovariantiškumą galima gauti silpnesnius teiginius.

- Straipsnyje [4] siūlomas atminties stacionariems laukams apibrėžimas turėtų būti pataisytas, nes bendru atveju jis negali būti pritaikytas tiesiniams laukams su triukšmais, priklausančiais α-stabilaus a.d. traukos sričiai.

- Tarkime, $X_k = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \xi_{k-j}$ yra tiesinis procesas su triukšmu ξ_i, priklausančiu normaliai α-stabilaus a.d. traukos sričiai. Duotoms $\gamma \in (\max(1/\alpha, 1), 1 + 1/\alpha)$ ir $\lambda \in (0, 1/\alpha - \gamma + 1)$ reikšmėms galima taip parinkti koeficientų $c_k, k \in \mathbb{N}$, tenkinančių
$$|c_k| = k^{-\gamma}, k \in \mathbb{N}, \text{ ir } \sum_{k=0}^{\infty} c_k = 0,$$
ženklus, kad $n^{-\lambda} \sum_{k=1}^{n} X_k$ konverguotų į neišsigimusį a.d.

11 Trumpos žinios apie autorių

Išsilavimas

2009 m. Nemenčinės Gedimino gimnazijos absolventas (su pagyrimu).

2013 m. Vilniaus universiteto statistikos (finansų ir draudimo matematikos) bakalauras (*Cum laude*).

2014 m. Vilniaus universiteto finansų ir draudimo matematikos magistras (*Magna cum laude*).

Mokslinio darbo patirtis

2014–2015 m. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos instituto Atsitiktinių procesų skyriaus specialistas.

Pedagoginio darbo patirtis

2015–2016 m. Vilniaus universiteto lektorius.

12 Summary

One of the main aims of this work is to develop theory of spectral covariances and limit theorems for linear processes and fields. The results established in this dissertation are as follows:

We derive some properties of spectral covariances, investigate asymptotics of the spectral covariance for some infinite-variance linear processes and fields. Namely, we investigate linear process $X_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \xi_{n-k}$ with asymptotically regularly varying filter $c_k,\ k \in \mathbb{N}$, and i.i.d. α-stable innovations $\xi_k,\ k \in \mathbb{Z}$, we also study the asymptotic dependence between one-step increments of linear fractional stable motion and log-fractional stable motion. In addition, we investigate linear field $X_{k,l} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} w_{(i,j)} (1+i)^{-\beta_1} (1+j)^{-\beta_2} \xi_{k-i,l-j}$, where $\beta_i > 1/\alpha,\ i = 1, 2$, $\xi_{i,j},\ i, j \in \mathbb{Z}$, are i.i.d. α-stable random variables, and coefficients $w_{(i,j)}$ have limits $\lim_{i\to\infty} w_{(i,j)} = w_{(\infty,j)}$, $\lim_{j\to\infty} w_{(i,j)} = w_{(i,\infty)}$ and $\lim_{i,j\to\infty} w_{(i,j)} = 1$. Faced with a complicated picture when investigating the asymptotic behaviour of spectral covariance for this linear field, we introduce another measure of dependence – α-spectral covariance – which we use to investigate the asymptotic dependence structure of d-dimensional linear field $X_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{j}\geqslant\mathbf{0}} \left(\prod_{l=1}^{d} (1+j_l)^{-\beta_l} \right) \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{j}}$, where $\beta_l > 1/\alpha,\ l = 1, \ldots, d$, and $\xi_{\mathbf{j}},\ \mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d$ are i.i.d. α-stable random variables.

The results obtained in [2], relating the asymptotic behaviour of dependence measures to the limit theorems, are generalized to the linear fields.

We answer a question, originally proposed in [4], concerning limit theorems in the case of negative memory. Consider a partial sum process $S_n(t) = \sum_{k=0}^{\lfloor nt \rfloor} X_k$ of linear processes $X_n = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \xi_{n-i}$ with independent identically distributed innovations $\{\xi_i\}$ belonging to the normal domain of attraction of α-stable law, $0 < \alpha \leq 2$. If $|c_k| = k^{-\gamma},\ k \in \mathbb{N},\ \gamma > \max(1, 1/\alpha),$ and $\sum_{k=0}^{\infty} c_k = 0$ (the case of negative memory for the stationary sequence $\{X_n\}$), it is known that the normalizing sequence of $S_n(1)$ can grow as $n^{1/\alpha-\gamma+1}$ or remain bounded, if the signs of the coefficients are constant or alternate, respectively. It is of interest to know whether it is possible, given $\lambda \in (0, 1/\alpha - \gamma + 1)$, to change the signs of c_k so that the rate of growth of the normalizing sequence would be n^{λ}. The positive answer is given: we propose a way of choosing the signs and investigate the finite-dimensional convergence of appropriately normalized $S_n(t)$ to linear fractional Lévy motion.

We also generalize (with an additional condition) Theorem 1 in [1] to the case of d-dimensional linear fields. Namely, we investigate convergence in the sense of finite-dimensional distributions of appropriately normalized partial sum processes

$$S_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{0} \leqslant \mathbf{k} \leqslant \mathbf{nt}} X_{\mathbf{k}},$$

when $X_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{i} \geqslant \mathbf{0}} c_{\mathbf{i}} \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{i}}$, $\xi_{\mathbf{i}}$ are independent copies of random variable ξ belonging to the domain of attraction of α-stable law, and coefficients $c_{\mathbf{i}}$ can be expressed as $c_{\mathbf{i}} = \prod_{l=1}^{d} a_{i_l}(\gamma_l, l)$. Here sequences $\{a_{i_l}(\gamma_l, l)\}, l = 1, \ldots, d$ are asymptotically regularly varying with index $-\gamma_l$, $\gamma_l > 1/\alpha$.

Literatūra

[1] A. Astrauskas. Limit theorems for sums of linearly generated random variables. *Lithuanian Mathematical Journal*, 23(2):127–134, 1983.

[2] A. R. Dabrowski and A. Jakubowski. Stable limits for associated random variables. *Ann. Probab.*, 22(1):1–16, 1994.

[3] V. Paulauskas. On α-covariance, long, short, and negative memories for sequences of random variables with infinite variance. *ArXiv:1311.0606v1 [math PR]*, 2013.

[4] V. Paulauskas. Some remarks on definitions of memory for stationary random processes and fields. *Lithuanian Mathematical Journal*, 56(2):229–250, 2016.

[5] V. V. Uchaikin V. M. Zolotarev. *Chance and Stability. Stable Distributions and their Applications.* Modern Probability and Statistics. Walter de Gruyter, 1999.