VILNIAUS UNIVERSITETAS

LAIMONAS MEŠKA

MODIFIKUOTOS UNIVERSALUMO TEOREMOS RYMANO IR HURVICO DZETA FUNKCIJOMS

Daktaro disertacijos santrauka

Fiziniai mokslai, matematika (01P)

Vilnius, 2017

Disertacija rengta 2013–2017 metais Vilniaus universitete.

Mokslinis vadovas:
Prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas
(Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)
Mokslinis konsultantas:
Prof. dr. Ramūnas Garunkštis
(Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Disertacija ginama viešame disertacijos Gynimo tarybos posėdyje:
Pirmininkas – Prof. habil. dr. Eugenijus Manstavičius
(Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Nariai:
Dr. Natalija Budarina (Maynooth universitetas, Airija, fiziniai mokslai, matematika – 01P)
Doc. dr. Paulius Drungilas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)
Prof. habil. dr. Kęstutis Kubilius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)
Prof. dr. Artūras Štikonas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Disertacija bus ginama viešame Gynimo tarybos posėdyje 2017m. spalio 5d. 16 val. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultete, 102a.
Adresas: Naugarduko g. 24, LT-03225, Vilnius, Lietuva.
Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2017m. rugsėjo 1 d.
Su disertacija galima susipažinti Vilniaus universiteto bibliotekoje ir VU interneto svetainėje adresu:
www.vu.lt/naujienos/ivykiu-kalendorius

VILNIUS UNIVERSITY

LAIMONAS MEŠKA

MODIFIED UNIVERSALITY THEOREMS FOR THE RIEMANN AND HURWITZ ZETA-FUNCTIONS

Doctoral dissertation
Physical sciences, mathematics (01P)

Vilnius, 2017

The scientific work was carried out at Vilnius University in 2013–2017.

Scientific supervisor:

Prof. Dr. Habil. Antanas Laurinčikas

(Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

Scientific adviser:

Prof. Dr. Ramūnas Garunkštis

(Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

The dissertation is being defended in the public meeting of the Thesis council:

Chairman - Prof. Dr. Habil. Eugenijus Manstavičius

(Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

Members:

Dr. Nataliya Budarina (Maynooth University, Ireland, Physical sciences, Mathematics – 01P)

Doc. Dr. Paulius Drungilas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

Prof. Dr. Habil. Kęstutis Kubilius (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

Prof. Dr. Artūras Štikonas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

The dissertation will be defended at the public meeting of the Thesis council on October 5, 4 p.m. 2017, in Vilnius University Department of Mathematics and Informatics, room 102.

Adress: Naugarduko str. 24, LT-03225, Vilnius, Lithuania.

The summary of dissertation was distributed on September 1, 2017.

The dissertation is available at the Library of Vilnius University and at VU website address:

www.vu.lt/naujienos/ivykiu-kalendorius

Tyrimo objektas

Tegul $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis, o α, $0 < \alpha \leq 1$ yra fiksuotas parametras. Disertacijoje yra nagrinėjamos klasikinės Rymano ir Hurvico dzeta funkcijos $\zeta(s)$ ir $\zeta(s, \alpha)$, kurios pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiamos Dirichlė eilutėmis

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}$$

ir

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+\alpha)^s}.$$

Be to, abi šios funkcijos yra analiziškai pratęsiamos į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu 1. Iš apibrėžimų matome, kad

$$\zeta(s, 1) = \zeta(s)$$

ir

$$\zeta(s, \frac{1}{2}) = (2^s - 1)\, \zeta(s). \tag{1}$$

Taigi, Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha)$ yra Rymano dzeta funkcijos $\zeta(s)$ apibendrinimas. Funkcija $\zeta(s)$ dar skiriasi nuo funkcijos $\zeta(s, \alpha)$ tuo, kad srityje $\sigma > 1$ ją galima užrašyti Oilerio sandauga

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

pagal pirminius skaičius p. Funkcija $\zeta(s, \alpha)$ Oilerio sandaugą turi tik dviems paramatero reikšmėms $\alpha = 1$ ir $\alpha = \frac{1}{2}$. Rymano dzeta funkcijai galioja funkcinė lygtis

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s),$$

surišanti kintamuosius s ir $s-1$, čia $\Gamma(s)$ yra Oilerio gama funkcija. Be kita ko, ši lygtis yra naudojama funkcijos $\zeta(s)$ analiziniam pratęsimui gauti.

Funkcijai $\zeta(s, \alpha)$, kai $\sigma < 0$, yra teisinga lygybė

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1} \Gamma(1-s) \left(\sin \frac{\pi s}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi m \alpha)}{m^{1-s}} + \cos \frac{\pi s}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi m \alpha)}{m^{1-s}} \right),$$

surišanti kintamuosius s ir $1 - s$.

Funkciją $\zeta(s)$ su realiuoju kintamuoju s jau nagrinėjo L. Oileris (Euler) 18 amžiaus viduryje, o B. Rymanas (Riemann) 19 amžiaus antroje pusėje laikė $\zeta(s)$ kompleksinio kintamojo funkcija ir ją pritaikė pirminių skaičių pasiskirstymo tyrimui. Remdamiesi Rymano idėjomis, Š. J. Pusenas (Vallée Poussin) ir Ž. S. Adamaras (Hadamard) nepriklausomai vienas nuo kito 1896 m. įrodė asimptotinį pirminių skaičių pasiskirstymo dėsnį

$$\sum_{p \leq x} 1 = \int_2^x \frac{du}{\log u} (1 + o(x)), \quad x \to \infty.$$

Šio dėsnio įrodyme lemiamą vaidmenį suvaidino funkcijos $\zeta(s)$ nulių išsidėstymas. Pasirodė, jog (1) sąryšio įrodymui pakanka žinoti, kad $\zeta(s) \neq 0$ pusplokštumėje $\sigma \geq 1$.

Nulių pasiskirstymo problema lieka centrine funkcijos $\zeta(s)$ teorijoje iki šių dienų. Rymano hipotezė tvirtina, kad visi netrivialieji funkcijos $\zeta(s)$ nuliai yra kritinėje tiesėje $\sigma = \frac{1}{2}$, tačiau ši hipotezė nėra nei įrodyta, nei paneigta. Ji yra viena iš 7 svarbiausių tūkstantmečio matematikos problemų. Kol kas yra žinoma tik, kad egzistuoja tokia absoliuti konstanta $c > 0$, kad $\zeta(s) \neq 0$ srityje

$$\sigma > 1 - \frac{c}{\log^{\frac{2}{3}}(|t|+2)\log^{\frac{1}{3}}\log(|t|+2)}.$$

Funkciją $\zeta(s, \alpha)$ 1887 m. apibrėžė A. Hurvicas (Hurwitz). Ji neturi tiesioginio ryšio su pirminiais skaičiais, tačiau yra naudojama Dirichlė L funkcijoje, kurios yra pagrindinis analizinis pirminių skaičių aritmetinėse progresijose tyrimo įrankis.

Funkcijos $\zeta(s, \alpha)$ nulių išsidėstymas priklauso nuo parametro α aritmetinės prigimties ir skiriasi nuo funkcijos $\zeta(s)$ nulių pasiskirstymo. Pvz., gerai žinoma, kad $\zeta(s) \neq 0$ pusplokštumėje $\sigma > 1$, tuo tarpu, funkcija $\zeta(s, \alpha)$ šioje pusplokštumėje turi be galo daug nulių. Be to, funkcija $\zeta(s, \alpha)$ su racionaliuoju arba transcendenčiuoju (nėra jokio polinomo su racionaliaisiais koeficientais šaknis) parametru α turi be galo daug nulių juostoje $\frac{1}{2} < \sigma < 1$.

Nežiūrint minėtų skirtumų, funkcijos $\zeta(s)$ ir $\zeta(s, \alpha)$ su transcendenčiuoju arba racionaliuoju α turi vieną bendrą bruožą: jos abi yra universalios Voronino prasme, t.y. jų postūmiai $\zeta(s + i\tau)$ ir $\zeta(s + i\tau, \alpha)$, $\tau \in \mathbb{R}$, aproksimuoja plačias analizinių funkcijų klases.

Darbo tikslai ir uždaviniai

Darbo tikslas yra modifikuotosios universalumo teoremos Rymano ir Hurvico dzeta funkcijoms bei modifikuotosios jungtinės universalumo teoremos šių funkcijų porai. Šiose teoremose postūmių, aproksimuojančių duotas analizines funkcijas, apatinis tankis yra pakeičiamas tiesiog tankiu.

Uždaviniai yra šie:

1. Modifikuota universalumo teorema Rymano dzeta funkcijai ir jos išvados sudėtinių funkcijų universalumui.

2. Modifikuota diskrečioji universalumo teorema Rymano dzeta funkcijai ir jos išvados sudėtinių funkcijų universalumui.

3. Modifikuota universalumo teorema Hurvico dzeta funkcijai ir jos išvados sudėtinių funkcijų universalumui.

4. Modifikuota diskrečioji universalumo teorema Hurvico dzeta funkcijai ir jos išvados sudėtinių funkcijų universalumui.

5. Modifikuota Mišu teoremos versija.

6. Modifikuota Mišu teoremos diskrečioji versija.

Aktualumas

Mes jau minėjome, kad funkcijų $\zeta(s)$ ir $\zeta(s,\alpha)$ reikšmių pasiskirstymo tyrimas yra vienas iš svarbiausių šiuolaikinės analizinės skaičių teorijos uždavinių. Universalumas yra ne tik įdomi šių funkcijų savybė, bet ir turi visą aibę teorinių ir praktinių pritaikymų. Vienas iš teorinių universalumo pritaikymų yra susijęs su garsiomis Hilberto problemomis. Savo 18-osios problemos aprašyme, Hilbertas paminėjo, kad funkcija $\zeta(s)$ negali tenkinti jokios algebrinės-diferencialinės lygties, ir analogišką problemą iškėlė funkcijai

$$\zeta(s,x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m^s}.$$

Pastarąją problemą sėkmingai išpsrendė Ostrovskis [15]. Tačiau Voroninas, remdamasis funkcijos $\zeta(s)$ universalumu, įrodė žymiai daugiau: jis gavo funkcijos $\zeta(s)$ funkcinį nepriklausomumą. Tai reiškia, kad jei polinomas, kurio koeficientai yra tolydžiosios funkcijos $\zeta(s)$ ir jos išvestinių funkcijos, yra tapatingai lygus nuliui, tai tuomet to polinomo koeficientai taip pat yra tapatingi nuliui. Pasirodė, kad universalumas gali būti naudojamas ir kitų dzeta funkcijų funkcinio nepriklausomumo įrodymui.

Vienas iš svarbiausių dzeta funkcijų teorijos uždavinių yra jų nulių pasiskirstymo problema. Universalumo savybė taip pat yra taikoma šios įdomios ir sudėtingos problemos tyrime, leidžia gauti nulių skaičiaus įvairiose srityse įverčius. Pagaliau, Rymano hipotezė yra teisinga tada ir tik tada, kad postūmiai $\zeta(s+i\tau)$ aproksimuoja pačią funkciją $\zeta(s)$.

Universalumas yra taikomas įvairių aibių tirštumo tyrimui.

Aišku, jog praktiniai universalumo taikymai yra susiję su analizinių funkcijų aproksimavimu. Keletą taikymų pasiūlė netgi fizikai [2], [5].

Minėtos pastabos rodo, kad nėra keista, jog skaičių teorijos specialistai plečia funkcijų universalumo tyrimus. Universalumo tyrimo grupės dirba Japonijoje (K. Matsumotas (Matsumoto), H. Mišu (Mišou), T. Nakamura, H. Nagošis (Nahoshi)), Vokietijoje (J. Staudingas (Steuding), T. Christas (Christ), H. Baueris (Bauer), A. Reichas (Reich), K. Grosė-Erdmanas (Grosse-Erdmann)), Lenkijoje (J. Kačorovskis (Kaczorowski), L. Pankovskis (Pańkowski), M. Kulas ...)... Dzeta funkcijų universalumas yra nagrinėjamas ir Prancūzijoje, Indijoje, Pietų Korėjoje, Kanadoje. Tačiau giliausias tradicijas universalumas turi Lietuvoje (A. Dubickas, R. Garunkštis, V. Garbaliauskienė, R. Kačinskaitė, E. Karikovas, A. Laurinčikas, R. Macaitienė, D. Šiaučiūnas, ...). Todėl yra svarbu tęsti vieną iš populiariausių ir rezultatyviausių analizinės skaičių teorijos krypčių Lietuvoje, išplėsti universalumo tyrimus tikslinant universalumo nelygybę.

Metodai

Modifikuotų universalumo teoremų įrodymui yra taikomi tikimybiniai metodai. Visų pirma, yra gaunamos ribinės teoremos apie tikimybinių matų analizinių funkcijų erdvėje silpnąjį konvergavimą, paskui silpnojo tikimybinių matų konvergavimo ekvivalentas tolydumo aibės terminais yra taikomas. Be to, Mergeliano teorema apie analizinių funkcijų aproksimavimą polinomais atlieka svarbų vaidmenį universalumo įrodyme. Sudėtinių funkcijų universalumo įrodymas naudoja operatorių teorijos elementus.

Naujumas

Disertacijos rašymo metu profesorius R. Garunkštis informavo, kad J.-L. Mokleras (Mauclaire) gavo kai kuriuos rezultatus apie modifikuotą universalumo nelygybę. Iš tikrųjų, modifikuota universalumo teorema Rymano dzeta funkcijai, panaši į 1.1 teoremą, skirtingu metodu buvo gauta viename Moklero darbe. Visos kitos disertacijoje įrodytos teoremos yra visiškai naujos.

Problemos istorija ir rezultatai

Dzeta ir L funkcijų universalumo tematikos pradžia yra laikomas 1975 m. S. M. Voronino paskelbtas straipsnis [17], kuriame jis atrado Rymano dzeta funkcijos universalumą. Šiame darbe jis taip pat paminėjo, jog ir visos Dirichlė L funkcijos turi universalumo savybę. Formuluojame pradinę Voronino teoremos versiją.

A teorema. *Tarkime, kad $0 < r < \frac{1}{4}$. Tegul $f(s)$ yra tolydi, nevirstanti nuliumi skritulyje $|s| \leq r$ ir analizinė skritulyje $|s| < r$ funkcija. Tada su kiekvienu $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks realusis skaičius $\tau = \tau(\varepsilon)$, kad*

$$\max_{|s|\leq r}\left|\zeta(s+\frac{3}{4}+i\tau)-f(s)\right| < \varepsilon.$$

A teorema rodo, kad plati analizinių funkcijų klasė dešiniosios kritinės juostos pusės skrituliuose gali būti norimu tikslumu aproksimuojama Rymano dzeta funkcija. Tokia yra Voronino universalumo prasmė. Pastebime, kad funkcija $\zeta(s)$ buvo pirmasis universalus analizės objektas, duotas išreikštiniu pavidalu. Iki 1975 m. buvo žinomas tik įvairių universalių objektų egzistavimas.

A teorema ir jos taikymai bei plėtiniai sudaro Voronino disertaciją, kuri yra paskelbta [18] knygoje ir yra vienas iš [6] monografijos skyrių.

Voronino [17] straipsnį greitai pastebėjo skaičių teorijos specialistai, įvairūs autoriai ištobulino Voronino universalumo teoremą ir išplėtė ją kitoms dzeta ir L funkcijoms. Šiuolaikinės Voronino teoremos versijos formulavimui reikalingi kai kurie žymenys. Tegul $\mathcal{K}$ yra juostos $D = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$ kompaktinių aibių su jungiaisiais papildiniais klasė, o $H_0(K)$, $K \in \mathcal{K}$, yra funkcijų, tolydžių ir nevirstančių nuliumi aibėje K bei analizinių aibės K viduje, klasė. Simboliu $meas\ A$ žymime mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matą. Tuomet šiuolaikinė A teoremos versija turi tokį pavidalą.

B teorema. *Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H_0(K)$. Tuomet su visais $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\Big\{\tau \in [0;T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

Taigi, B teoremoje, skirtingai nuo A teoremos, analizinės funkcijos postūmiais $\zeta(s+i\tau)$ yra aproksimuojamos ne tik juostos D skrituliuose, bet ir plačioje kompaktinių aibių klasėje $\mathcal{K}$. Be to, turime ne vieną, o be galo daug postūmių, aproksimuojančių duotą analizinę funkciją. B teoremos nelygybė rodo, kad postūmių $\zeta(s+i\tau)$ su aproksimavimo savybe aibė turi teigiamą apatinį tankį.

Iš B teoremos išplaukia natūralus klausimas, ar postūmių $\zeta(s+i\tau)$ aibė, aproksimuojančių duotą klasės $H_0(K)$ funkciją $f(s)$, gali turėti teigiamą tankį? Kitaip tariant, ar galima B teoremoje „liminf" pakeisti į „lim". Pasirodo, jog atsakymas į klausimą iš esmės yra teigiamas, tačiau reikia apsiriboti ne visais $\varepsilon > 0$. Pirmoji disertacijos 1 skyriaus teorema atsako į šį klausimą.

1.1 teorema. *Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H_0(K)$. Tuomet riba*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\Big\{\tau \in [0;T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon\Big\} > 0$$

egzistuoja su visais $\varepsilon > 0$, išskyrus daugiausia skaičią jų aibę.

1.1 teorema gali būti apibendrinta plačiai sudėtinių funkcijų $F(\zeta(s))$ klasei. Tegul G yra sritis kompleksinėje plokštumoje, o $H(G)$ yra analizinių srityje G funkcijų erdvė su tolygaus konvergavimo kompaktinėse aibėse topologija. Šioje topologijoje $g_n(s) \in H(G)$, kai $n \to \infty$, konverguoja į $g(s) \in H(G)$ tada ir tik tada, kai su kiekviena kompaktine aibe $K \subset G$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{s\in K} |g_n(s) - g(s)| = 0.$$

Sudėtinių funkcijų universalumas buvo pradėtas nagrinėti [8] darbe ir pratęstas [9] straipsnyje. Tegul $H(K)$, $K \in \mathcal{K}$, yra tolydžių funkcijų aibėje K ir analizinių aibės K viduje, klasė, ir

$$S = \{g \in H(D) : g(s) \neq 0 \text{ arba } g(s) \equiv 0\}.$$

Tada [8] darbe buvo gautas toks tvirtinimas.

C teorema. *Tarkime, kad $F : H(D) \to H(D)$ yra toks tolydus atvaizdis, kad su kiekviena atvirąja aibe $G \subset H(D)$ aibė $(F^{-1}G) \cap S$ yra netuščia. Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\Big\{\tau \in [0;T] : \sup_{s\in K} |F\big(\zeta(s+i\tau)\big) - f(s)| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

Čia, kaip įprasta, $F^{-1}G$ yra aibės G pirmavaizdis. Pastebime, kad C teoremoje aibė G gali būti pakeista polinomu. Disertacijos 1 skyriuje gautas C teoremos analogas.

1.2 teorema. *Tarkime, kad $F : H(D) \to H(D)$ yra toks tolydus atvaizdis, kad su kiekviena atvirąja aibe $G \subset H(D)$ aibė $(F^{-1}G) \cap S$ yra netuščia. Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$. Tuomet riba*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\Big\{\tau \in [0;T] : \sup_{s\in K} |F\big(\zeta(s+i\tau)\big) - f(s)| < \varepsilon\Big\} > 0$$

egzistuoja su visais $\varepsilon > 0$, išskyrus daugiausia skaičią jų aibę.

Yra paprasčiau vietoje atvirosios aibės imti polinomą.

1.3 teorema. *Tarkime, kad $F : H(D) \to H(D)$ yra toks tolydus atvaizdis, kad su kiekvienu polinomu $p = p(s)$ aibė $(F^{-1}\{p\}) \cap S$ yra netuščia. Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$. Tuomet yra teisingas 1.2 teoremos tvirtinimas.*

Dabar, tegul $a_1, ...a_r$ yra skirtingi kompleksiniai skaičiai, o $F : H(D) \to H(D)$ yra operatorius. Apibrėžiame aibę

$$H_{a_1,...,a_r;F}(D) = \{g \in H(D) : g(s) \neq a_j, j = 1, ..., r\} \cup \{F(0)\}.$$

Kita 1 skyriaus teorema yra skirta aibės $H_{a_1,...,a_r;F}(D)$ analizinių funkcijų aproksimavimui.

1.4 teorema. *Tegul $F : H(D) \to H(D)$ yra toks tolydus atvaizdis, kad $F(S) \supset H_{a_1,...,a_r;F}(D)$. Kai $r = 1$, tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s)$ yra tolydi funkcija $f(s) \neq a_1$ aibėje K, bei analizinė aibės K viduje. Kai $r \geq 2$, tegul $K \subset D$ yra bet kokia kompaktinė aibė ir $f(s) \in H_{a_1,...,a_r;F}(D)$. Tuomet yra teisingas 1.2 teoremos tvirtinimas.*

Pavyzdžiui, jei $r = 1$ ir $a_1 = 0$, tuomet iš 1.4 teoremos išplaukia funkcijos $\zeta^n(s)$, $n \in \mathbb{N}$, universalumas. Jei $r = 2$, $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, tai gauname funkcijų $\sin\zeta(s)$, $\cos\zeta(s)$, $\sinh\zeta(s)$ ir $\cosh\zeta(s)$ universalumą.

B, C ir 1.1–1.4 teoremos yra tolydaus tipo, nes τ postūmiuose $\zeta(s + i\tau)$ gali įgyti bet kurią realią reikšmę. Yra žinomos ir diskrečiosios universalumo teoremos, kai τ įgyja reikšmes iš kurios nors diskrečios aibės, tarkime, iš aritmetinės progresijos $\{kh : k = 0, 1, ...\}$ su $h > 0$. Diskrečiąsias universalumo teoremas dzeta funkcijoms pasiūlė Reichas. Jis įrodė [16] diskrečiąją universalumo teoremą Dedekindo dzeta funkcijai. Diskrečiąją B teoremos versiją gavo [1] B. Bagčis (Bagchi), tiesa, šiek tiek kitokiai, negu $\mathcal{K}$, aibių klasei. Simboliu $\#A$ žymime aibės A elementų skaičių.

D teorema. *Tarkime, kad $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H_0(K)$, o $h > 0$ yra bet koks fiksuotas skaičius. Tuomet su visais $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{0 \leq k \leq N : \sup_{s\in K} |\zeta(s + ikh) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Pastebime, kad D teoremos įrodymas yra sudėtingesnis negu B teoremos. Yra nagrinėjami du skaičiaus h atvejai. Atvejis, kai $\exp\left\{\frac{2\pi r}{h}\right\}$ yra iracionalusis skaičius su visais $r \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, yra analogiškas B teoremai. Tačiau atvejis, kai $\exp\left\{\frac{2\pi r}{h}\right\}$ su kuriuo nors $r \neq 0$ yra racionalusis skaičius, reikalingi papildomi algebriniai samprotavimai.
Disertacijoje gauta tokia D teoremos modifikacija.

1.5 teorema. *Tarkime, kad $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H_0(K)$, o $h > 0$ yra bet koks fiksuotas skaičius. Tuomet riba*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \le k \le N : \sup_{s\in K} |\zeta(s+ikh) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0$$

egzistuoja su visais $\varepsilon > 0$, išskyrus daugiausia skaičią jų aibę.

Diskrečiosios universalumo teoremos sudėtinėms funkcijoms $F(\zeta(s))$ buvo nagrinėjamos J. Rašytės disertacijoje, tačiau tik tuo atveju, kai $\exp\left\{\frac{2\pi r}{h}\right\}$ yra racionalusis skaičius su visais $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Disertacijos 1 skyriuje gautos 4 diskrečiųjų teoremų sudėtinėms funkcijoms $F(\zeta(s))$ modifikacijos.

1.6 teorema. *Tarkime, kad $F : H(D) \to H(D)$ yra toks tolydus atvaizdis, kad su kiekviena atvirąja aibe $G \subset H(D)$ aibė $(F^{-1}G) \cap S$ yra netuščia. Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$. Tuomet riba*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \Big\{ 0 \le k \le N : \sup_{s\in K} |F\big(\zeta(s+ikh)\big) - f(s)| < \varepsilon \Big\} > 0$$

egzistuoja su visais $\varepsilon > 0$, išskyrus daugiausia skaičią jų aibę.

Kita teorema yra 1.3 teoremos diskretusis analogas.

1.7 teorema. *Tarkime, kad $F : H(D) \to H(D)$ yra toks tolydus atvaizdis, kad su kiekvienu polinomu $p = p(s)$ aibė $(F^{-1}\{p\}) \cap S$ yra netuščia. Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$. Tuomet yra teisingas 1.6 teoremos tvirtinimas.*

Gerai žinoma, kad polinomo nevirtimas nuliu aprėžtoje srityje gali būti kontroliuojamas jo laisvuoju nariu. Ši pastaba duoda idėją vietoje juostos D nagrinėti aprėžtą stačiakampį

$$D_V = \left\{ s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1, |t| < V \right\}$$

su bet kuriuo fiksuotu $V > 0$. Tegul

$$S_V = \Big\{ g \in H(D_V) : g^{-1}(s) \in H(D_V) \text{ arba } g(s) \equiv 0 \Big\}.$$

Tuomet turime tokį 1.7 teoremos analogą.

1.8 teorema. *Tarkime, kad $K \in \mathcal{K}$, $f(s) \in H(K)$, $V > 0$ yra toks, kad $K \subset D_V$. Tegul $F : H(D_V) \to H(D_V)$ yra toks tolydus operatorius, kad su kievienu polinomu $p = p(s)$ aibė $(F^{-1}\{p\}) \cap S$ yra netuščia. Tuomet yra teisingas 1.6 teoremos tvirtinimas.*

Pavyzdžiui, 1.8 teoremoje galime imti

$$F(g) = c_1 g' + ... + c_r g^{(r)},\ g \in H(D_V),\ c_1, ..., c_r \in \mathbb{C}\backslash\{0\},$$

o $g^{(j)}$, kaip įprasta, yra funkcijos g j-toji išvestinė.

Dar formuluojame 1.4 teoremos diskretųjį analogą. Naudojame 1.4 teoremos žymenis.

1.9 teorema. *Tarkime, kad $F : H(D) \to H(D)$ yra toks tolydus operatorius, kad $F(S) \supset H_{a_1,...,a_r;F}(D)$. Jei $r = 1$, tegul $K \in \mathcal{K}$, $f(s) \in H(K)$ ir $f(s) \ne a_1$ aibėje K, ir yra analizinė jos viduje. Kai $r \ge 2$, tegul $K \subset D$ yra bet kuri kompaktiška aibė, o $f(s) \in H_{a_1,...,a_r;F}(D)$. Tuomet yra teisingas 1.6 teoremos tvirtinimas.*

Tinka tokie pat, kaip ir 1.4 teoremoje, operatorių pavyzdžiai.

Po Voronino straipsnio [17] dzeta ir L funkcijų universalumo tyrimai plėtėsi. Pasirodė, jog dauguma klasikinių dzeta ir L funkcijų yra universalios Voronino prasme. Paminėsime kelias universalių funkcijų klases.

Tegul

$$SL(2,\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{Z},\ ad-bc=1 \right\}$$

yra pilnoji modulinė grupė. Tarkime, kad funkcija $F(z)$ yra analizinė viršutinėje pusplokštumėje $\Im z > 0$, su visais

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$$

ir kuriuo nors lyginiu κ tenkina funkcinę lygtį

$$F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{\kappa} F(z)$$

ir begalybėje turi Furjė skleidinį

$$F(z) = \sum_{m=1}^{\infty} c(m) e^{2\pi i m z}.$$

Tuomet $F(z)$ yra vadinama svorio κ paraboline forma pilnosios modulinės grupės atžvilgiu. Su forma $F(z)$ yra susiejama dzeta funkcija $\zeta(s,F)$, kuri pusplokštumėje $\sigma > \frac{\kappa+1}{2}$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s,F) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c(m)}{m^s}$$

ir yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą. Dar papildomai reikalaujame, kad forma F būtų visų Hekės (Hecke) operatorių

$$T_m F(z) = m^{\kappa-1} \sum_{a,d>0;\ ad=m} \frac{1}{d^{\kappa}} \sum_{b (\mathrm{mod}\ d)} F\left(\frac{az+b}{d}\right), \quad m \in \mathbb{N},$$

tikrine funkcija. Tada funkciją F galime normuoti, t.y., galime tvirtinti, kad $c(1) = 1$. Šiuo atveju dzeta funkcija $\zeta(s,F)$ pusplokštumėje $\sigma > \frac{\kappa+1}{2}$ turi Oilerio sandaugą pagal pirminius skaičius

$$\zeta(s,F) = \prod_p \left(1 - \frac{\alpha(p)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\beta(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

čia $\alpha(p)$ ir $\beta(p)$ yra jungtiniai kompleksiniai skaičiai, tenkinantys lygybę $\alpha(p) + \beta(p) = c(p)$.

Funkcijos $\zeta(s,F)$ universalumas buvo įrodytas [13] darbe. Šiuo atveju, vietoje juostos D yra nagrinėjama juosta $D_F = \left\{ s \in \mathbb{C} : \frac{\kappa}{2} < \sigma < \frac{\kappa+1}{2} \right\}$. Klasę $\mathcal{K}$ žymime $\mathcal{K}_F$, o funkcijų klasę $H_0(K)$ žymime $H_{0F}(K)$. Turime tokią teoremą [13].

E teorema. *Tarkime, kad $K \in \mathcal{K}_F$, o $f(s) \in H_{0F}(K)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas \left\{ \tau \in [0;T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau, F) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Universalumas buvo nagrinėjamas ir garsiosios Selbergo klasės L funkcijoms. Primename Selbergo klasės S apibrėžimą. Šią klasę sudaro L funkcijos, apibrėžiamos Dirichlė eilutėmis

$$\mathcal{L}(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a(m)}{m^s}, \quad \sigma > 1,$$

ir tenkinančios aksiomas:

1. Ramanudžano hipotezė: $a(m) \ll m^{\varepsilon}$ su kiekvienu $\varepsilon > 0$;

2. Analizinis pratęsimas: egzistuoja toks $k \in \mathbb{N}_0$, su kuriuo funkcija $(s-1)^k \mathcal{L}(s)$ yra baigtinės eilės sveikoji funkcija, t.y., $(s-1)^k \mathcal{L}(s) = O\big(|s|^A\big)$ su kuriuo nors $A > 0$, kai $|s| \to \infty$;

3. Funkcinė lygtis: funkcija $\mathcal{L}$ tenkina funkcinę lygtį

   $$\Lambda_{\mathcal{L}}(s) = \omega \overline{\Lambda_{\mathcal{L}}(1-\overline{s})},$$

   čia

   $$\Lambda_{\mathcal{L}}(s) = \mathcal{L}(s) Q^s \prod_{j=1}^{f} \Gamma(\lambda_j s + \mu_j),$$

   $\Gamma(s)$ yra Oilerio gama funkcija, Q ir λ_j yra teigiami realieji skaičiai, o μ_j ir ω yra kompleksiniai skaičiai, $\Re \mu_j \geq 0$, $|\omega| = 1$;

4. Oilerio sandauga: funkcija $\mathcal{L}(s)$ gali būti užrašyta sandauga pagal pirminius skaičius

   $$\mathcal{L}(s) = \prod_p \mathcal{L}_p(s),$$

   čia

   $$\log \mathcal{L}_p(s) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{b\left(p^{\alpha}\right)}{p^{\alpha s}}$$

   su koeficientais $b\left(p^{\alpha}\right)$, tenkinančiais įvertį $b\left(p^{\alpha}\right) \ll p^{\alpha\theta}$ su $\theta < \frac{1}{2}$.

Klasė S yra gana svarbi analizinėje skaičių teorijoje. Egzistuoja hipotezė, kad visos klasikinės dzeta ir L funkcijos yra tos klasės elementai. Pavyzdžiui, klasei S priklauso Rymano dzeta funkcija, Dirichlė L funkcijos, skaičių kūnų Dedekindo dzeta funkcijos, tikrinių Hekės formų dzeta funkcijos ir kt.

J. Staudingas nagrinėjo [16] klasės S poklasio su polinomine Oilerio sandauga L funkcijų universalumą. Darbe [15] šio reikalavimo buvo atsisakyta. Universalumo teoremos formulavimui yra reikalinga funkcijos $\mathcal{L} \in S$ laipsnio $d_{\mathcal{L}}$ sąvoka

$$d_{\mathcal{L}} = 2 \sum_{j=1}^{f} \lambda_j.$$

Be to, tegul

$$\sigma_{\mathcal{L}} = \max\left\{\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{d_{\mathcal{L}}}\right\}.$$

Šiuo atveju, universalumo juosta turi pavidalą

$$D_{\mathcal{L}} = \{s \in \mathbb{C} : \sigma_{\mathcal{L}} < \sigma < 1\}.$$

Klasę $\mathcal{K}$ žymime $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$, o klasę $H_0(K)$ žymime $H_{0\mathcal{L}}(K)$, $K \in \mathcal{K}_{\mathcal{L}}$. Tegul, kaip įprasta,

$$\pi(x) = \sum_{p \le x} 1.$$

Tuomet turime tokį tvirtinimą [15].

F teorema. *Tarkime, kad klasės S funkcijai $\mathcal{L}(s)$ galioja lygybė*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\pi(x)} \sum_{p \le x} |a(p)|^2 = \kappa,$$

čia κ yra teigiama konstanta, priklausanti nuo $\mathcal{L}$. Tegul $K \in \mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ ir $f(s) \in H_{0\mathcal{L}}(K)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} meas \left\{ \tau \in [0; T] : \sup_{s \in K} |\mathcal{L}(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Šie pavyzdžiai rodo dzeta funkcijų universalumo tyrimų platumą.

Tiek parabolinių formų dzeta funkcijos, tiek Selbergo klasės funkcijos turi Oilerio sandaugas pagal pirminius skaičius. Todėl universalumo teoremose yra aproksimuojamos funkcijos, nevirstančios nuliumi aibėje K. Hurvico dzeta funkcijos $\zeta(s, \alpha)$, $0 < \alpha \le 1$, sudaro paprasčiausią klasę universalių funkcijų be Oilerio sandaugos.

Disertacijos 2 skyrius yra skirtas Hurvico dzeta funkcijų modifikuotoms universalumo teoremoms. Yra gerai žinoma, kad funkcija $\zeta(s, \alpha)$ kai kurioms parametro α klasėms yra universali Voronino prasme. Žinoma tokia teorema.

G teorema. *Tarkime, kad parametras α yra transcendentusis arba racionalusis skaičius $\neq 1, \frac{1}{2}$. Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} meas \Big\{ \tau \in [0; T] : \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau, \alpha) - f(s)| < \varepsilon \Big\} > 0.$$

Šiek tiek kitokios formos G teorema buvo žinoma jau Voroninui bei Gonekui ir Bagčiui. Pastebime, kad algebrinio iracionalaus parametro α atvejis iki šiol yra atvira problema. G teoremoje atvejai $\alpha = 1$ ir $\alpha = \frac{1}{2}$ yra nenagrinėjami, kadangi galioja lygybės $\zeta(s, 1) = \zeta(s)$ ir (1). Šiais atvejais funkcija $\zeta(s, \alpha)$ išlieka universali, tačiau aproksimuojama funkcija $f(s)$ turi neturėti nulių aibėje K. Jungtinė universalumo teorema [7] su $r = 1$ duoda tokį rezultatą.

H teorema. *Tarkime, kad aibė $L(\alpha) = \{log(m + \alpha) : m \in \mathbb{N}_0\}$ yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$. Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$. Tuomet yra teisingas G teoremos tvirtinimas.*

Kaselso (Cassels) teorema [4] tvirtina, kad, jei $0 < \alpha < 1$ yra algebrinis iracionalusis skaičius, tada bent 51 procentas aibės $L(\alpha)$ elementų tankio prasme yra tiesiškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$ Todėl gali būti, kad aibė $L(\alpha)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$ su algebriniu iracionaliuoju α, o funkcija $\zeta(s, \alpha)$ yra universali H teoremos prasme. Deja, tokie α pavyzdžiai nėra žinomi.

G ir H yra tolydžiosios universalumo teoremos. Panašiai funkcijos $\zeta(s)$ atvejui, yra nagrinėjamos ir funkcijos $\zeta(s, \alpha)$ diskrečiosios universalumo teoremos. Paminėsime porą iš jų.

I teorema. *Tarkime, kad parametras α yra trenscendentusis arba racionalusis skaičius $\neq 1, \frac{1}{2}$, $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$. Kai α yra racionalus, tuomet tegul $h > 0$ yra bet koks fiksuotas skaičius, o kai α yra transcendentus, tegul $h > 0$ yra toks, kad* $\exp\left\{\frac{2\pi}{h}\right\}$ *būtų racionalusis skaičius. Tuomet su kiekvienu* $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \le k \le N : \sup_{s\in K} |\zeta(s+ikh,\alpha) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Kai α yra racionalus, I teorema buvo gauta [1] darbe. Transcendentaus α atvejis išplaukia iš teoremos, įrodytos [12] periodinei Hurvico dzeta funkcijai $\zeta(s,\alpha,\mathfrak{a})$, kuri pusplokštumėje $\sigma > 1$ apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s,\alpha,\mathfrak{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(m+\alpha)^s},$$

čia $\mathfrak{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ yra periodinė kompleksinių skaičių seka, ir yra meromorfiškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą.

Viename A. Laurinčiko straipsnyje pateikta tokia I teoremos versija.

J teorema. *Tarkime, kad aibė* $L(\alpha,h,\pi) = \left\{ \left(\log(m+\alpha) : m \in \mathbb{N}_0\right), \frac{\pi}{h} \right\}$ *yra tiesiškai nepriklausoma virš* $\mathbb{Q}$. *Tegul* $K \in \mathcal{K}$ *ir* $f(s) \in H(K)$. *Tuomet yra teisingas I teoremos tvirtinimas.*

Disertacijos 2 skyriuje yra įrodytos kelios modifikuotos universalumo teoremos Hurvico dzeta funkcijai.

2.1 teorema. *Tarkime, kad parametras α yra transcendentusis arba racionalusis skaičius $\neq 1, \frac{1}{2}$. Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$. Tuomet riba*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\left\{ \tau \in [0;T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau,\alpha) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0$$

egzistuoja su visais $\varepsilon > 0$, išskyrus daugiausia skaičią jų aibę.

Kitoje teoremoje naudojama aibė $L(\alpha)$.

2.2 teorema. *Tarkime, kad aibė $L(\alpha)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$. Tuomet yra teisingas 2.1 teoremos tvirtinimas.*

Kitos 2 skyriuje gautos modifikuotos universalumo teoremos yra diskretaus tipo.

2.3 teorema. *Tarkime, kad parametras α yra trenscendentusis arba racionalusis skaičius $\neq 1, \frac{1}{2}$, $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$. Kai α yra racionalus, tuomet tegul $h > 0$ yra bet koks fiksuotas skaičius, o kai α yra transcendentus, tegul $h > 0$ yra toks, kad* $\exp\left\{\frac{2\pi}{h}\right\}$ *būtų racionalusis skaičius. Tuomet riba*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \le k \le N : \sup_{s\in K} |\zeta(s+ikh,\alpha) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0$$

egzistuoja su visais $\varepsilon > 0$, išskyrus daugiausia skaičią jų aibę.

Dar vienoje šio skyriaus teoremoje yra panaudota aibė $L(\alpha,h,\pi)$.

2.4 teorema. *Tarkime, kad aibė $L(\alpha, h, \pi)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$. Tuomet yra teisingas 2.3 teoremos tvirtinimas.*

Disertacijos 3 skyrius tam tikra prasme apjungia 1 ir 2 skyrių rezultatus. Jame gaunamos jungtinės modifikuotos universalumo teoremos Rymano ir Hurvico dzeta funkcijoms. Tokio tipo universalumo teoremos yra dažnai vadinamos mišriomis universalumo teoremomis, nes Rymano dzeta funkcija turi Oilerio sandaugą pagal pirminius skaičius, o Hurvico dzeta funkcija tokios sandaugos neturi.

Pirmąją mišriąją jungtinę universalumo teoremą gavo Mišu [14], ji dabar vadinama Mišu teorema. Jis įrodė tokią teoremą funkcijoms $\zeta(s)$ ir $\zeta(s, \alpha)$ su transcendenčiuoju α.

K teorema. *Tarkime, kad α yra transcentendusis skaičius, $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ ir $f_1(s) \in H_0(K_1)$, $f_2(s) \in H(K_2)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\Big\{\tau \in [0;T] : \sup_{s\in K_1} |\zeta(s+i\tau) - f_1(s)| < \varepsilon, \sup_{s\in K_2} |\zeta(s+i\tau, \alpha) - f_2(s)| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

R. Kačinskaitė ir A. Laurinčikas apibendrino K teoremą periodinei ir periodinei Hurvico dzeta funkcijoms. Tegul $\mathfrak{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ yra periodinė kompleksinių skaičių seka. Primename, kad periodinė dzeta funkcija $\zeta(s, \mathfrak{a})$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s, \mathfrak{a}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}$$

ir yra meromorfiškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą.

Disertacijoje yra gauta išplėsta modifikuota K teoremos versija. Tegul

$$L(\alpha, \mathbb{P}) = \{(\log(m+\alpha) : m \in \mathbb{N}_0), (\log p : p \in \mathbb{P})\}.$$

3.1 teorema. *Tarkime, kad aibė $L(\alpha, \mathbb{P})$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Tegul $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ ir $f_1(s) \in H_0(K_1)$, $f_2(s) \in H(K_2)$. Tuomet riba*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\Big\{\tau \in [0;T] : \sup_{s\in K_1} |\zeta(s+i\tau) - f_1(s)| < \varepsilon, \sup_{s\in K_2} |\zeta(s+i\tau, \alpha) - f_2(s)| < \varepsilon\Big\} > 0$$

egzistuoja su visais $\varepsilon > 0$, išskyrus daugiausia skaičią jų aibę.

Nesunku matyti, kad aibė $L(\alpha, \mathbb{P})$ su transcendenčiuoju α yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Todėl 3.1 teorema išplečia K teoremos sąlygas.

[10] straipsnyje gautos universalumo teoremos sudėtinei funkcijai $F\big(\zeta(s), \zeta(s, \alpha)\big)$ kai kuriems operatoriams $F : H^2(D) \to H(D)$. Pavyzdžiui, tame straipsnyje buvo gautas toks tvirtinimas.

L teorema. *Tarkime, kad α yra transcendentusis skaičius, o $F : H^2(D) \to H(D)$ yra toks tolydus operatorius, kad su kiekviena atvirąja aibe $G \subset H(D)$ aibė $(F^{-1}G) \cap (S \times H(D))$ yra netuščia. Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\Big\{\tau \in [0;T] : \sup_{s\in K} |F\big(\zeta(s+i\tau), \zeta(s+i\tau, \alpha)\big) - f(s)| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

A. Laurinčikas gavo dar bendresnius rezultatus. Jis įrodė universalumo teoremas rinkinių, sudarytų iš periodinių ir periodinių Hurvico dzeta funkcijų, sudėtinėms funkcijoms.

3.2 teorema. *Tarkime, kad aibė* $L(\alpha, \mathbb{P})$ *yra tiesiškai nepriklausoma virš* $\mathbb{Q}$*, o* $F : H^2(D) \to H(D)$ *yra toks tolydus operatorius, kad su kiekviena atvirąja aibe* $G \subset H(D)$ *aibė* $(F^{-1}G) \cap (S \times H(D))$ *yra netuščia. Tegul* $K \in \mathcal{K}$ *ir* $f(s) \in H(D)$*. Tuomet riba*

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} meas\Big\{\tau \in [0;T] : \sup_{s \in K} |F\big(\zeta(s+i\tau), \zeta(s+i\tau,\alpha)\big) - f(s)| < \varepsilon\Big\} > 0$$

egzistuoja su visais $\varepsilon > 0$*, išskyrus daugiausia skaičią jų aibę.*

Dabar tegul D_V ir S_V yra tos pačios aibės, kaip ir 1.8 teoremoje. Be to, tegul

$$H^2(D_V, D) = H(D_V) \times H(D).$$

Tuomet yra teisinga tokia teorema.

3.3 teorema. *Tarkime, kad aibė* $L(\alpha, \mathbb{P})$ *yra tiesiškai nepriklausoma virš* $\mathbb{Q}$*,* K *ir* $f(s)$ *yra tokios pat kaip ir 3.2 teoremoje, o* $V > 0$ *yra toks, kad* $K \subset D_{\mathrm{V}}$*. Tegul* $F : H^2(D_V, D) \to H(D_{\mathrm{V}})$ *yra toks tolydusis operatorius, kad su kiekvienu polinomu* $p = p(s)$ *aibė* $(F^{-1}\{p\}) \cap (S \times H(D_{\mathrm{V}}))$ *yra netuščia. Tuomet yra teisingas 3.2 teoremos tvirtinimas.*

Pavyzdžiui, iš 3.3 teoremos išplaukia funkcijų

$$c_1\zeta(s) + c_2\zeta(s,\alpha) \text{ ir } c_1\zeta'(s) + c_2\zeta'(s,\alpha) \quad \text{su } c_1, c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

universalumas.

Disertacijos 3 skyriuje yra nagrinėjamas ir 1.9 teoremos analogas. Tegul $a_1, ..., a_r$ yra bet kokie skirtingi kompleksiniai skaičiai ir

$$H_{a_1,\dots,a_r}(D) = \big\{g \in H(D) : (g(s) - a_j)^{-1} \in H(D),\ j = 1, ..., r\big\}.$$

Turime tokią teoremą.

3.4 teorema. *Tarkime, kad aibė* $L(\alpha, \mathbb{P})$ *yra tiesiškai nepriklausoma virš* $\mathbb{Q}$*, o* $F : H^2(D) \to H(D)$ *yra toks tolydus operatorius, kad* $F(S \times H(D)) \supset H_{a_1,\dots,a_r}(D)$*. Kai* $r = 1$*, tegul* $K \in \mathcal{K}$*,* $f(s) \in H(K)$ *ir* $f(s) \neq a_1$ *aibėje* K*. Kai* $r \geq 2$*, tegul* $K \subset D$ *yra bet kuri kompaktinė aibė, o* $f(s) \in H_{a_1,\dots,a_r}(D)$*. Tuomet yra teisingas 3.2 teoremos tvirtinimas.*

Atvejis $r = 1$ su $a_1 = 0$ parodo, kad funkcija $F(g_1(s), g_2(s)) = e^{g_1(s)+g_2(s)}$ yra universali 3.4 teoremos prasme. Jei $r = 2$ ir $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, tai, pavyzdžiui, su funkcijomis $F(g_1(s), g_2(s)) = \cos(g_1(s) + g_2(s))$ ir $f(s) \in H_{1,-1}(D)$ 3.2 teoremos riba egzistuoja su visais $\varepsilon > 0$, išskyrus daugiausia skaičią jų aibę.

Paskutinė 3 skyriaus tolydaus tipo teorema yra toks tvirtinimas.

3.5 teorema. *Tarkime, kad aibė* $L(\alpha, \mathbb{P})$ *yra tiesiškai nepriklausoma virš* $\mathbb{Q}$, $F : H^2(D) \to H(D)$ *yra tolydus operatorius,* $K \subset D$ *yra kompaktinė aibė, o* $f(s) \in F(S \times H(D))$. *Tuomet yra teisingas 3.2 teoremos tvirtinimas.*

Kitos 3 skyriaus teoremos yra diskrečiųjų Mišu teoremos versijų modifikacijos. Tegul $h > 0$ ir

$$L(\mathbb{P}, \alpha, h, \pi) = \left\{(\log p : p \in \mathbb{P}), (\log(m + \alpha) : m \in \mathbb{N}_0), \frac{\pi}{h}\right\}.$$

Tuomet E. Buivydas su A. Laurinčiku įrodė [3] tokią K teoremos diskrečiąją versiją.

M teorema. *Tarkime, kad aibė* $L(\mathbb{P}, \alpha, h, \pi)$ *yra tiesiškai nepriklausoma virš* $\mathbb{Q}$. *Tegul* $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ *ir* $f_1(s) \in H_0(K_1)$, $f_2(s) \in H(K_2)$. *Tuomet su kiekvienu* $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{0 \le k \le N : \sup_{s \in K_1} |\zeta(s + ikh) - f_1(s)| < \varepsilon, \sup_{s \in K_2} |\zeta(s + ikh, \alpha) - f_2(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Be to, jie apibendrino M teoremą skirtingoms aritmetinėms progresijoms funkcijų $\zeta(s)$ ir $\zeta(s, \alpha)$ postūmiams. Tegul $h_1 > 0$, $h_2 > 0$ ir

$$L(\mathbb{P}, \alpha, h_1, h_2, \pi) = \{(h_1 \log p : p \in \mathbb{P}), (h_2 \log(m + \alpha) : m \in \mathbb{N}_0), \pi\}.$$

N teorema. *Tarkime, kad aibė* $L(\mathbb{P}, \alpha, h_1, h_2, \pi)$ *yra tiesiškai nepriklausoma virš* $\mathbb{Q}$. *Tegul* $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ *ir* $f_1(s) \in H_0(K_1)$, $f_2(s) \in H(K_2)$. *Tuomet su kiekvienu* $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{0 \le k \le N : \sup_{s \in K_1} |\zeta(s + ikh_1) - f_1(s)| < \varepsilon, \sup_{s \in K_2} |\zeta(s + ikh_2, \alpha) - f_2(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

A. Laurinčikas pakeitė [11] aritmetines progresijas sudėtingesne aibe ir pritaikė sekų, tolygiai pasiskirsčiusių moduliu 1, savybes. Primename, kad realiųjų skaičių seka $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ yra vadinama tolygiai pasiskirsčiusia moduliu 1, jei su kiekvienu intervalu $[a, b) \subset [0, 1)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} I_{[a,b)}\big(\{x_k\}\big) = b - a,$$

čia I_A yra aibės A indikatorius, o $\{x_k\}$ yra skaičiaus x_k trupmeninė dalis.

Yra teisinga tokia teorema.

O teorema. *Tarkime, kad* α *yra trasncendentusis skaičius, o* β, $0 < \beta < 1$, *ir* $h > 0$ *yra fiksuoti skaičiai. Tegul* $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ *irf*$_1(s) \in H_0(K_1)$, $f_2(s) \in H(K_2)$. *Tuomet su kiekvienu* $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{0 \le k \le N : \sup_{s \in K_1} |\zeta(s + ik^{\beta}h) - f_1(s)| < \varepsilon, \sup_{s \in K_2} |\zeta(s + ik^{\beta}h, \alpha) - f_2(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Disertacijos 3 skyriuje M–O teoremose „liminf" yra pakeista į „lim". Yra teisingos tokios teoremos.

3.6 teorema. *Tarkime, kad aibė* $L(\mathbb{P}, \alpha, h, \pi)$ *yra tiesiškai nepriklausoma virš* $\mathbb{Q}$. *Tegul* $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ *ir* $f_1(s) \in H_0(K_1)$, $f_2(s) \in H(K_2)$. *Tuomet riba*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{0 \le k \le N : \sup_{s \in K_1} |\zeta(s + ikh) - f_1(s)| < \varepsilon, \sup_{s \in K_2} |\zeta(s + ikh, \alpha) - f_2(s)| < \varepsilon\right\} > 0$$

egzistuoja su visais $\varepsilon > 0$, *išskyrus daugiausia skaičią jų aibę.*

Kita teorema yra N teoremos analogas.

3.7 teorema. *Tarkime, kad aibė* $L(\mathbb{P}, \alpha, h_1, h_2, \pi)$ *yra tiesiškai nepriklausoma virš* $\mathbb{Q}$. *Tegul* $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ *ir* $f_1(s) \in H_0(K_1)$, $f_2(s) \in H(K_2)$. *Tuomet riba*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \le k \le N : \sup_{s \in K_1} |\zeta(s + ikh_1) - f_1(s)| < \varepsilon, \sup_{s \in K_2} |\zeta(s + ikh_2, \alpha) - f_2(s)| < \varepsilon \right\} > 0$$

egzistuoja su visais $\varepsilon > 0$, *išskyrus daugiausia skaičią jų aibę.*

Paskutinioji 3 skyriaus teorema yra O teoremos modifikacija.

3.8 teorema. *Tarkime, kad* α *yra trasncendentusis skaičius, o* β, $0 < \beta < 1$, *ir* $h > 0$ *yra fiksuoti skaičiai. Tegul* $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ *ir* $f_1(s) \in H_0(K_1)$, $f_2(s) \in H(K_2)$. *Tuomet riba*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \le k \le N : \sup_{s \in K_1} |\zeta(s + ik^\beta h) - f_1(s)| < \varepsilon, \sup_{s \in K_2} |\zeta(s + ik^\beta h, \alpha) - f_2(s)| < \varepsilon \right\} > 0$$

egzistuoja su visais $\varepsilon > 0$, *išskyrus daugiausia skaičią jų aibę.*

Išvados

1. Aibė Rymano dzeta funkcijos postūmių, aproksimuojančių kompaktinėje aibėje duotą analizinę funkciją ε tikslumu, su visais $\varepsilon > 0$, išskyrus daugiausia skaičią jų aibę, turi teigiamą tankį. Tai galioja tiek tolydiesiems, tiek ir diskretiesiems postūmiams.

2. Aibė Hurvico dzeta funkcijos su parametru, tenkinančiu kai kurias natūralias nepriklausomumo sąlygas, postūmių, aproksimuojančių kompaktinėje aibėje duotą analizinę funkciją ε tikslumu, su visais $\varepsilon > 0$, išskyrus daugiausia skaičią jų aibę, turi teigiamą tankį. Tai galioja tiek tolydiesiems, tiek ir diskretiesiems postūmiams.

3. Aibė Rymano dzeta funkcijos ir Hurvico dzeta funkcijos su parametru, tenkinančiu kai kurias natūralias nepriklausomumo sąlygas, postūmių, aproksimuojančių kompaktinėse aibėse tuo pačiu metu dvi duotas analizines funkcijas ε tikslumu, su visais $\varepsilon > 0$, išskyrus daugiausia skaičią jų aibę, turi teigiamą tankį. Tai galioja tiek tolydiesiems, tiek ir diskretiesiems postūmiams.

4. Tvirtinimas, apie tankio teigiamumą galioja ir funkcijų, minimų 1-3 išvadose, plačių klasių sudėtinių funkcijų postūmių aibei.

Aprobacija

Disertacijos rezultatai buvo pristatyti tarptautinėse MMA (Mathematical Modelling and Analysis) konferencijose (MMA2016, birželio 1-4, 2016, Tartu, Estija), (MMA2017, gegužės 30 – birželio 2, 2017, Druskininkai), 11-oje tarptautinėje Vilniaus konferencijoje Tikimybių teorija ir matematinė statistika (birželio 30 – liepos 4, 2014, Vilnius), tarptautinėje konferencijoje Algebra, skaičių teorija ir diskrečioji geometrija: šiuolaikinės problemos ir taikymai (gegužės 25-30, 2015, Tula, Rusija), 6-oje tarptautinėje konferencijoje Analiziniai ir tikimybiniai metodai skaičių teorijoje (rugsėjo 11-17, 2016, Palanga), Lietuvos matematikų draugijos konferencijose (2014, 2015, 2016, 2017) bei Vilniaus universiteto skaičių teorijos seminaruose.

Padėka

Dėkoju moksliniam vadovui prof. Antanui Laurinčikui bei moksliniam konsultantui prof. Ramūnui Garunkščiui už įvairiapusę paramą doktorantūros studijų metu. Esu dėkingas Vilniaus universiteto tikimybių teorijos ir skaičių teorijos katedros bei Šiaulių universiteto matematikos ir informatikos katedros nariams už dalykinę paramą ir naudingas diskusijas. Dėkoju Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetui už finansinę paramą.

Publikacijų disertacijos tema sąrašas

1. A. Laurinčikas and L. Meška, Improvement of the universality inequality, Math. Notes, **96** (2014), N$\underline{o}$ 5-6, 971-976.

2. A. Laurinčikas and L. Meška, On the modification of the universality of the Hurwitz zeta-function, Nonlinear Analysis: Modeling and Control, 21 (2016), N$\underline{o}$4, 564-576.

3. A. Laurinčikas and L. Meška,, A modification of the Mishou theorem, Chebyshevskii sbornik, 17 (2016), N$\underline{o}$ 3, 125-137.

4. A. Laurinčikas and L. Meška, Modification of discrete versions of the Mishou theorem, in: Anal. Probab. Methods Number Theory, Proc. of the 6th Palanga Conf. (to appear).

5. L. Meška, A modification Of universality inequality, Šiauliai Math. Semin., 9(17)(2014), 71-81.

6. L. Meška, Modification Of universality inequality, in: Proc. of the 13th International conference Algebra, Number Theory and Discrete Geometry: Contemporary Issues and Applications, Tula, 2015, pp.236-238.

Summary

In the thesis, the modified universality theorems for the Riemann and Hurwitz zeta-functions are obtained. In the theorems of such a kind, differently from classical ones devoted to the positivity of a lower density of the set of shifts of zeta-functions approximating a given analytic function, the positivity of a density of the latter set is considered.

Let $s = \sigma + it$ be a complex variable, and α, $0 < \alpha \leq 1$, be a fixed parameter. Then the Riemann zeta-function $\zeta(s)$ and the Hurwitz zeta-function $\zeta(s, \alpha)$ are defined, for $\sigma > 1$, by the Dirichlet series

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} \quad \text{and} \quad \zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+\alpha)^s},$$

and can be analytically continued to the whole complex plane, except for a simple pole at the point $s = 1$ with residue 1. Moreover, the function $\zeta(s)$, differently from $\zeta(s, \alpha)$, for $\sigma > 1$, has the Euler product over primes.

We consider the approximation of analytic functions on compact subsets of the strip $\{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$ by shifts $\zeta(s + i\tau)$ and $\zeta(s + i\tau, \alpha)$, $\tau \in \mathbb{R}$, with accuracy ε, and prove that the sets of the above shifts have a positive density for all but at most countably many $\varepsilon > 0$. The following modified universality theorems are obtained.

1. Continuous and discrete universality theorems for the Riemann zeta-function, and their generalizations for composite functions.

2. Continuous and discrete universality theorems for the Hurwitz zeta-function for some classes of the parameter α, and their generalizations for composite functions.

3. Mixed joint continuous and discrete universality theorems for the Riemann and Hurwitz zeta-function for some classes of the parameter α, and their generalizations for composite functions.

For proving of the the above theorems, the probabilistic method based on limit theorems of weakly convergent probability measures in the space of analytic functions is applied.

Cituota literatūra

1. B. Bagchi, The statistical behaviour and universality properties of the Riemann zeta-function and other allied Dirichlet series, Ph. D. Thesis, Indian Statistical Institute, Calcutta, 1981.

2. K. M. Bitar, N. N. Khuri, H. C. Ren, Path integral and Voronin's theorem on the universality of the Riemann zeta-function, Ann, Phys. **211** (1991), 172-196.

3. E. Buivydas, A. Laurinčikas, A discrete version of the Mishou theorem, Ramanujan J. **38** (2015), 338-206.

4. J. W. S. Cassels, Footnote to a note of Davenport and Heilbronn, J. London Math. Soc. **36** (1961), 177-189.

5. M. C. Gutzwiller, Stochastic behavior in quantum scattering, Physica **7D** (1983), 311-319.

6. A. A. Karatsuba, S. M. Voronin, The Riemann zeta-function, Walter de Gruyter, New York, 1992

7. A. Laurinčikas, The joint universality of Hurwitz zeta-functions, Šiauliai Math. Semin. **3**(**11**)(2008), 169-187.

8. A. Laurinčikas, Universality of the Riemann zeta-function, J. Number Theory, **130** (2010), 2323-2331.

9. A. Laurinčikas, Universality of composite functions, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B39** (2002), 191-204.

10. A. Laurinčikas, On joint universality of the Riemann zeta-function and Hurwitz zeta-functions, J. Number Theory **132** (2012), 2842-2853.

11. A. Laurinčikas, A discrete version of the Mishou theorem II, Proc. Steklov Inst. Math. **296**(2017), 172-182.

12. A. Laurinčikas and R. Macaitienė, The discrete universality of the periodic Hurwitz zeta function, Integr. Transf. Spec. Func. **20** (2009), 673-686.

13. A. Laurinčikas, K. Matsumoto, The universality of zeta-functions attached to certain cusp forms Acta Arith. 98(2001), 345-359.

14. H. Mishou, The joint value distribution of the Riemann zeta-function and Hurwitz zeta-functions, Lith. Math. J. **47** (2007), 32-47.

15. H. Nagoshi and J. Steuding, Universality for L-functions in the Selberg class, Lith. Math. J., **50** (2010), 293-311.

16. A. Reich, Werteverteilung von Zeta-funktionen, Arch. Math., **34** (1980), 440-451.

17. S. M. Voronin Theorem on the "universality" of the Riemann zeta-function, Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. matem. **39**(1975), 475-486 (in Russian); Math. USSR Izv. **9** (1975), 443-453.

18. 52 S. M. Voronin, Selected Works. Mathematics, MGTU im. N.E. Baumana, Moscow, 2006.

Trumpos žinios apie autorių

Gimimo data ir vieta:

1984 m. sausio 14 d. Joniškis, Lietuva.

Išsilavinimas:

2002 m. Joniškio „Aušros" gimnazija.

2011 m. Šiaulių universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, bakalauras.

2013 m. Šiaulių universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, magistras.

Darbo patirtis:

2014-09-01 – 2015-06-04 – Kretingos „Pranciškonų" gimnazija, matematikos mokytojas.

2015-10-12 – iki dabar – Neringos gimnazija, matematikos mokytojas.