VILNIAUS UNIVERSITETAS

VYTAUTĖ PILIPAUSKAITĖ

RIBINĖS TEOREMOS ERDVĖS IR LAIKO MODELIAMS SU ILGĄJA ATMINTIMI

Daktaro disertacijos santrauka
Fiziniai mokslai, matematika (01 P)

Vilnius, 2017

Disertacija rengta 2013–2017 metais Vilniaus universitete ir Nanto universitete (Prancūzija).

Mokslinis vadovas – prof. habil. dr. Donatas Surgailis (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P).
Mokslinė konsultantė – prof. habil. dr. Anne Philippe (Nanto universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P).

Disertacija ginama viešame disertacijos gynimo tarybos posėdyje:
Pirmininkas – prof. habil. dr. Vygantas Paulauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P).
Nariai:
prof. habil. dr. Hermine Biermé (Puatjė universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P);
prof. habil. dr. Kęstutis Kubilius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P);
prof. habil. dr. Vigirdas Mackevičius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P);
prof. dr. Jonas Šiaulys (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P).

Disertacija bus ginama viešame disertacijos gynimo tarybos posėdyje 2017 m. spalio 20 d. 10 val. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos instituto 203 auditorijoje.
Adresas: Akademijos g. 4, LT-08663 Vilnius, Lietuva.

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2017 m. rugsėjo 19 d.

Disertaciją galima peržiūrėti Vilniaus universiteto bibliotekoje ir VU interneto svetainėje adresu: www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius.

VILNIUS UNIVERSITY

VYTAUTĖ PILIPAUSKAITĖ

LIMIT THEOREMS FOR SPATIO-TEMPORAL MODELS WITH LONG-RANGE DEPENDENCE

Summary of doctoral dissertation
Physical sciences, Mathematics (01 P)

Vilnius, 2017

The doctoral dissertation was written in 2013–2017 at Vilnius University and University of Nantes.

Scientific supervisors:
Prof. Dr. Habil. Donatas Surgailis (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01 P);
Prof. Dr. Habil. Anne Philippe (University of Nantes, Physical sciences, Mathematics – 01 P).

The dissertation will be defended at the public meeting of the Dissertation Defence Board:
Chairman – Prof. Dr. Habil. Vygantas Paulauskas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01 P).
Members:
Prof. Dr. Habil. Hermine Biermé (University of Poitiers, Physical sciences, Mathematics – 01 P);
Prof. Dr. Habil. Kęstutis Kubilius (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01 P);
Prof. Dr. Habil. Vigirdas Mackevičius (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01 P);
Prof. Dr. Jonas Šiaulys (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01 P).

The dissertation will be defended at the public meeting of the Dissertation Defence Board on 20 October, 2017, 10:00 a.m. at Vilnius University, Institute of Mathematics and Informatics, Room 203.
Address: Akademijos st. 4, LT-08663 Vilnius, Lithuania.

The summary of the dissertation was distributed on 19 September, 2017.

The dissertation is available at the Vilnius University Library and online at www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius.

1. Įvadas

Ilgąja atmintimi (dar kitaip vadinama ilgalaike atmintimi, tolima priklausomybe, stipria priklausomybe) pasižymi įvairių sričių duomenys, pvz., hidrologijos, astronomijos, aplinkotyros, ekonomikos, finansų, duomenų perdavimo tinklų (žr. monografijas [3, 4, 13] ir literatūros nuorodas jose). Ilgoji atmintis nurodo, kad priklausomybė išlieka reikšminga net tarp laike ar erdvėje labai nutolusių stebinių. Atitinkama matematinė sąvoka dažniausiai apibrėžiama taip:

Apibrėžimas. Tegul $X = \{X(t),\ t \in \mathbb{Z}^d\}$ yra stacionarus atsitiktinis procesas (laukas), kurio antrasis momentas baigtinis $\mathrm{E}X^2(0) < \infty$. Sakoma, kad X turi ilgosios atminties savybę, jeigu jo kovariacijų eilutė nėra absoliučiai konverguojanti:

$$\sum_{t\in\mathbb{Z}^d} |\operatorname{Cov}(X(0), X(t))| = \infty.$$

Duomenims, pasižymintiems ilgąja atmintimi, analizuoti, išvadoms daryti reikia statistinių metodų. Daugumos testų statistikų, įvertinių skirstinys bendru atveju yra sunkiai nusakomas, todėl aproksimuojamas. Aproksimacijos remiasi tikimybių teorijos ribinėmis teoremomis. Tačiau atsitiktinio proceso (lauko) su ilgąja atmintimi stebinių sumos ribinis skirstinys gali labai skirtis nuo to, kuris gaunamas, kai sumuojami atsitiktiniai dydžiai yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę.

2. Mokslinė problema ir tyrimo objektas

Disertacijos tyrimo objektas yra įvairūs stochastiniai modeliai, kurie nusako svyravimus laike ($d = 1$ apibrėžime pirmiau) arba erdvėje ($d = 2$) ir pasižymi ilgąja atmintimi: AR(1) su atsitiktiniu koeficientu procesas, netiesinis atsitiktinis laukas, atsitiktinių dalelių modelis. Disertacijos mokslinė problema yra šių atsitiktinių procesų ir laukų ribinio elgesio nustatymas.

3. Uždaviniai

Disertacijoje sprendžiami šie uždaviniai:

1. **Nepriklausomų AR(1) su atsitiktiniu koeficientu procesų agregavimas.** Trečiajame disertacijos skyriuje erdvinis ir laikinis agregavimas taikomas AR(1) su atsitiktiniu koeficientu proceso nepriklausomoms kopijoms – apibrėžiamas jų sumos pataškiui dalinių sumų procesas. Nagrinėjamas jo (baigtiniamačių skirstinių) silpnasis konvergavimas, kai sumuojamų procesų skaičius N ir laiko skalė n didėja kartu neaprėžtai.

Tarus, kad autoregresijos koeficientas turi tankio funkciją, kuri reguliariai kinta vienetinėje šaknyje $a = 1$ esant indeksui $\beta \in (-1, 1)$, parodoma, kad egzistuoja skirtingi ribiniai procesai, jei $N^{1/(1+\beta)}/n$ konverguoja į (i) ∞, (ii) 0, (iii) $\mu \in (0, \infty)$. Iki šiol buvo tirtas duomenų siuntimo modelių erdvinis ir laikinis agregavimas. Disertacijoje gauti rezultatai palyginami su [15, 23], kur nustatyti trys skirtingi duomenų kiekio, sukaupto per laiko intervalą iš N nepriklausomų siuntėjų, ribiniai procesai, kai N ir laiko skalė n didėja neaprėžtai.

2. **Priklausomų AR(1) su atsitiktiniu koeficientu procesų agregavimas.** Ketvirtasis disertacijos skyrius papildo trečiąjį, nes atsako į analogišką klausimą AR(1) procesams, kurių koeficientai yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę, bet triukšmų seka bendra. Autoregresijos koeficiento skirstiniui tenkinant tokią pat sąlygą su $\beta \in (-1/2, 0)$, parodoma, kad egzistuoja skirtingi ribiniai agreguoti procesai, jei $N^{1/(1+\beta)}/n$ konverguoja į (i) ∞, (ii) 0, (iii) $\mu \in (0, \infty)$.

3. **Statistinės išvados apie AR(1) procesą su atsitiktiniu koeficientu.** Penktajame disertacijos skyriuje vertinama autoregresijos koeficiento pasiskirstymo funkcija G remiantis paneliniais duomenimis, gautais vienu metu stebint N AR(1) su atsitiktiniu koeficientu procesų n laiko momentų iš eilės. Kaip ir [5] darbe, pirmiausia nestebimi autoregresijos koeficientai įvertinami atskirų AR(1) procesų empirinėmis autokoreliacijomis, kai vėlavimas 1. Tada G įvertinys apibrėžiamas kaip jų empirinė pasiskirstymo funkcija, t. y. priešingai nei [5, 29], nedarant prielaidos, kad G turi parametrinę formą. Pagrindinis uždavinys – rasti pakankamas G reguliarumo ir $N, n \to \infty$ kitimo greičio sąlygas, kai atitinkamas empirinis procesas silpnai konverguoja į apibendrintąjį *Browno* tiltą. Įrodyta ribinė teorema taikoma su *Kolmogorovo–Smirnovo* statistika tikrinant tiek paprastąją, tiek sudėtinę hipotezę, kad G yra beta pasiskirtymo funkcija. *Kolmogorovo–Smirnovo* testo ir jo parametrinio analogo, kuris remiasi [5] nagrinėtu įvertiniu, elgesys lyginamas simuliacijomis.

4. **Ribinės teoremos netiesiniams atsitiktiniams laukams.** Šeštajame disertacijos skyriuje $\mathbb{Z}^2$-indeksuotas netiesinis atsitiktinis laukas X apibrėžiamas kaip tiesinio atsitiktinio lauko Y transformacija *Appellio* polinomu. Tariama, kad Y yra slenkamasis vidurkis $\mathbb{Z}^2$-indeksuotų nepriklausomų, vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių, turinčių neatsitiktinius svorius, kurie gęsta lėtai (taip, kad Y yra ilgosios atminties) ir galbūt skirtingu greičiu vertikaliai ir horizontaliai. Kiekvienam $\gamma > 0$ tiriamas normuotų X dalinių sumų stačiakampiais, kurių kraštinės ilgėja kaip $O(\lambda)$ ir $O(\lambda^\gamma)$, (baigtiniamačių skirstinių) silpnasis konvergavimas, kai $\lambda \to \infty$. Klausiama, ar egzistuoja toks $\gamma_0 > 0$, kad ribiniai atsitiktiniai laukai nepriklauso nuo γ, bet skiriasi, kai $\gamma > \gamma_0$ ir $0 < \gamma < \gamma_0$, ir jeigu taip, kokioms sąlygoms galiojant. Disertacijos rezultatai papildo [27, 28] darbus, kuriuose kritinis skalės keitimo režimas gautas klasei *Gausso*

atsitiktinių laukų su ilgąja atmintimi, klasei atsitiktinių laukų, kurie yra agreguotų autoregresijos modelių ribos.

5. **Ribinės teoremos atsitiktinių dalelių modeliui.** Septintajame skyriuje nagrinėjamas $\mathbb{R}^2$-indeksuotas laukas X, kuris skaičiuoja tolygiai atsitiktinai plokštumoje išsibarsčiusias begalinės dispersijos ploto aibes. Ši sąlyga lemia, kad X yra ilgosios atminties. Normavus ir centravus, tiriamas X dalinių integralų stačiakampiais, kurių kraštinės ilgėja kaip $O(\lambda)$ ir $O(\lambda^\gamma)$, (baigtiniamačių skirstinių) silpnasis konvergavimas, kai $\lambda \to \infty$, čia $\gamma > 0$ yra laisvai pasirinktas. Gauti rezultatai papildo [19], kur atsitiktinių dalelių modelio X ribinis elgesys buvo nagrinėtas izotropiškai keičiant skalę, t. y. kai $\gamma = 1$. Be to, disertacijoje siūlomas su X susijęs M/G/∞ proceso apibendrinimas. Juo remiantis nagrinėjamas duomenų perdavimo tinkle sukauptos apkrovos ribinis elgesys.

4. Mokslinis naujumas ir aktualumas

Pristatomos disertacijos rezultatai yra nauji. Trejopas konvergavimas erdvinio ir laikinio agregavimo schemoje įrodytas klasei atsitiktinių procesų, kurie savo priklausomybės struktūra labai skiriasi nuo duomenų siuntimo modelių. AR(1) su atsitiktiniu koeficientu eilutėms pasiūlyti neparametriniai statistiniai metodai, pagrįstas jų taikymas. Įrodyta, kad netiesinis laukas gali turėti kritinį skalės keitimo režimą. Pateiktas atsitiktinio lauko pavyzdys, kuriam egzistuoja du kritiniai skalės keitimo režimai. Gauti rezultatai aktualūs asimptotinei statistikai, nes rodo, kad imties vidurkio skirstinio riba gali priklausyti nuo greičio, kuriuo stebėjimo lango kraštinės ilgėja kartu neaprėžtai. Be to, ribinės teoremos atskleidžia nagrinėjamų erdvės ir laiko modelių priklausomybės struktūrą.

5. Tyrimų metodika

Disertacijoje naudojami įvairūs tikimybių teorijos, statistikos ir funkcinės analizės metodai bei rezultatai. Toliau keletą jų išvardysime: *Cramério–Woldo* teorema (atsitiktinių procesų ir laukų baigtiniamačių skirstinių silpnajam konvergavimui), Lévy tolydumo teorema (susieja atsitiktinių dydžių konvergavimą pagal pasiskirstymą su atitinkamų charakteristinių funkcijų konvergavimu pataškiui), *Lebesgue'o* teorema ir *Pratto* lema [25] (perėjimui prie ribos po integralo ženklu), pagalbinės nelygybės (*Hölderio*, *Minkowskio*, *Jenseno* ir kt.), de *Moivre–Laplace'o* teorema (binominio skirstinio aproksimacija normaliuoju), centrinė ribinė teorema trikampiam m-priklausomų atsitiktinių dydžių masyvui, tolydaus atvaizdžio teorema, delta metodas, empirinio proceso silpnasis konvergavimas, Cremers, Kadelka [10] kriterijus atsitiktinių procesų silpnajam konvergavimui erdvėje $L^2(\mathbb{R})$, kriterijus diskretaus daugialypio integralo konvergavimui pagal pasiskirstymą į daugialypį *Itô–Wienerio* integralą [16, 14.3.2. teiginys], tikimybių teorijos nelygybės (*von Bahro–Esséeno*, *Burkholderio–Rosenthalio*, *Hoeffdingo* ir kt.).

6. Darbo struktūra ir apimtis

Disertacija parašyta anglų kalba. Disertaciją sudaro 8 skyriai: įvadas, literatūros apžvalga, 5 moksliniams rezultatams skirti skyriai, išvados ir literatūros sąrašas. Bendra disertacijos apimtis yra 159 puslapiai.

7. Rezultatai

Pristatome svarbiausius disertacijoje gautus rezultatus.

7.1. AR(1) su atsitiktiniu koeficientu procesų agregavimas

Atsitiktinis procesas $X = \{X(t),\, t \in \mathbb{Z}\}$ vadinamas pirmos eilės autoregresijos (arba AR(1)) procesu su atsitiktiniu koeficientu, jeigu jis yra stacionarus ir visiems t tenkina lygtį

$$X(t) = aX(t-1) + \zeta(t), \tag{1}$$

čia triukšmo seką $\{\zeta(t),\, t \in \mathbb{Z}\}$ sudaro nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, $\mathrm{E}\zeta(0) = 0$, $\mathrm{E}\zeta^2(0) = 1$, o autoregresijos koeficientas $a \in [0,1)$ yra atsitiktinis dydis, kuris nepriklauso nuo $\{\zeta(t),\, t \in \mathbb{Z}\}$ ir turi tankio funkciją

$$g(x) = \psi(x)(1-x)^{\beta}, \quad x \in [0,1), \tag{2}$$

jos parametras $\beta > -1$, o funkcija ψ yra integruojama intervale $[0,1)$ ir tenkina $\lim_{x\to 1}\psi(x) = \psi_1 > 0$.

Lygtis (1) turi vienintelį stacionarų sprendinį

$$X(t) = \sum_{s\le t} a^{t-s}\zeta(s), \quad t \in \mathbb{Z},$$

čia eilutė konverguoja su sąlygine tikimybe 1 ir sąlyginio kvadratinio vidurkio prasme atžvilgiu atsitiktinio dydžio $a \in [0,1)$, žr. [26]. Jei $\beta > 0$ sąlygoje (2), tai eilutė konverguoja (nesąlyginio) kvadratinio vidurkio prasme. Tada X vidurkis $\mathrm{E}X(t) = 0$ ir kovariacijos funkcija

$$\mathrm{E}X(0)X(t) = \mathrm{E}\frac{a^{|t|}}{1-a^2}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Jei $\beta \in (0,1)$, tai X yra ilgosios atminties, nes $\mathrm{E}X(0)X(t) \sim \mathrm{const}\, t^{-\beta}$, $t \to \infty$.

Tegul X_i, $i = 1, 2, \ldots$, yra AR(1) su atsitiktiniu koeficientu proceso X kopijos. Disertacijoje apibrėžiame pagal individus ir laiką agreguotą procesą

$$S_{N,n}(\tau) := \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{[n\tau]} X_i(t), \quad \tau \geq 0,$$

ir nagrinėjame jo ribinį elgesį, kai $N, n \to \infty$ kartu taip, kad

$$\frac{N^{1/(1+\beta)}}{n} \to \mu \in [0, \infty], \tag{3}$$

čia galimi trys atvejai:

$$\text{(i): } \mu = \infty, \qquad \text{(ii): } \mu = 0, \qquad \text{(iii): } 0 < \mu < \infty.$$

Beje, disertacijoje (iii) režimą ir jį atitinkantį ribinį atsitiktinį procesą vadiname „tarpiniais“.

Teorema (3.2 teorema, 24 puslapis)**.** *Tegul* X_i*,* $i = 1, 2, \ldots$*, yra nepriklausomos proceso* X *kopijos, čia* X *nusakytas lygtimi* (1) *tenkina prielaidą* (2) *su* $\beta \in (-1, 1)$*. Jei* $N, n \to \infty$ *kartu taip, kad galioja* (3)*, tai*

(i) atveju:

$$\begin{aligned} N^{-1/2} n^{-1+(\beta/2)} S_{N,n}(\tau) &\overset{\text{fdd}}{\to} \sigma B_H(\tau), &\quad \beta \in (0, 1), \\ N^{-1/2(1+\beta)} n^{-1} S_{N,n}(\tau) &\overset{\text{fdd}}{\to} V\tau, &\quad \beta \in (-1, 0), \\ (N \log(N/n))^{-1/2} n^{-1}\, S_{N,n}(\tau) &\overset{\text{fdd}}{\to} V\tau, &\quad \beta = 0, \end{aligned}$$

čia $\{B_H(\tau), \tau \geq 0\}$ *yra standartinis trupmeninis* Browno *judesys su* Hursto *indeksu* $H = 1 - \frac{\beta}{2} \in (\frac{1}{2}, 1)$ *ir* $\sigma^2 := \frac{\psi_1 \Gamma(\beta)}{(2-\beta)(1-\beta)}$*;* $\{V\tau, \tau \geq 0\}$ *yra pustiesė, kurios posvyrio koeficientas* V *yra* $2(1+\beta)$*-stabilus atsitiktinis dydis, kurio charakteristinė funkcija* $\mathrm{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta V} = \exp\{-\frac{\psi_1 \Gamma(-\beta)}{1+\beta} |\frac{\theta}{2}|^{2(1+\beta)}\}$*,* $\theta \in \mathbb{R}$*, jei* $\beta \in (-1, 0)$*, arba* $V \overset{\mathrm{d}}{=} \mathcal{N}(0, \frac{\psi_1}{2})$*, jei* $\beta = 0$*;*

(ii) atveju:

$$N^{-1/(1+\beta)} n^{-1/2} S_{N,n}(\tau) \overset{\text{fdd}}{\to} \mathcal{W}^{1/2} B(\tau),$$

čia $\{\mathcal{W}^{1/2} B(\tau), \tau \geq 0\}$ *yra* $(1+\beta)$*-stabilus procesas, kurį nusako* $\frac{1+\beta}{2}$*-stabilus atsitiktinis dydis* $\mathcal{W} > 0$*, kurio* $\mathrm{E}\mathrm{e}^{-\theta\mathcal{W}} = \exp\{-\frac{\psi_1}{1+\beta}\Gamma(\frac{1-\beta}{2})\,\theta^{\frac{1+\beta}{2}}\}$*,* $\theta \geq 0$*, ir nuo jo nepriklausantis standartinis* Browno *judesys* $\{B(\tau), \tau \geq 0\}$*;*

(iii) atveju:

$$N^{-1/(1+\beta)} n^{-1/2} S_{N,n}(\tau) \overset{\text{fdd}}{\to} \mu^{1/2} \mathcal{Z}(\tau/\mu),$$

čia proceso $\mathcal{Z} := \{\mathcal{Z}(\tau), \tau \geq 0\}$ *baigtiniamačių skirstinių charakteristinė funkcija*

$$\begin{aligned} &\mathrm{E} \exp\Big\{\mathrm{i} \sum_{j=1}^{m} \theta_j \mathcal{Z}(\tau_j)\Big\} \\ &\quad = \exp\Big\{\psi_1 \int_0^\infty \Big(\exp\Big\{-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \Big|\sum_{j=1}^{m} \theta_j \int_0^{\tau_j} \mathrm{e}^{-x(t-s)} \mathbf{1}(s \leq t) \mathrm{d}t\Big|^2 \mathrm{d}s\Big\} - 1\Big) x^\beta \mathrm{d}x\Big\}, \end{aligned}$$

kai $\theta_j \in \mathbb{R}$*,* $\tau_j > 0$*,* $j = 1, \ldots, m$*, kiekvienam* $m \in \mathbb{N}$*.*

$\mathcal{Z}$ reprezentuojamas stochastiniu integralu

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}(\tau) \quad &:= \quad \int_{(0,1)\times C(\mathbb{R})} \Big(\int_{-\infty}^{\tau} \Big\{\int_0^{\tau} \mathrm{e}^{-x(t-s)}\mathbf{1}(s \le t)\mathrm{d}t\Big\}\mathrm{d}B(s)\Big)\mathcal{M}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}B), \\ &+ \int_{[1,\infty)\times C(\mathbb{R})} \Big(\int_{-\infty}^{\tau} \Big\{\int_0^{\tau} \mathrm{e}^{-x(t-s)}\mathbf{1}(s \le t)\mathrm{d}t\Big\}\mathrm{d}B(s)\Big)\widetilde{\mathcal{M}}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}B), \qquad (4)\end{aligned}$$

čia $\mathcal{M}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}B)$ yra atsitiktinis *Poissono* matas, apibrėžtas $\mathbb{R}_+ \times C(\mathbb{R})$, kurio intensyvumo matas $\mu(\mathrm{d}x, \mathrm{d}B) = \psi_1 x^{\beta}\mathrm{d}x \times \mathrm{P}_B(\mathrm{d}B(\cdot))$, o P_B yra standartinio *Browno* judesio $\{B(s),\ s \in \mathbb{R}\}$ skirstinį atitinkantis tikimybinis matas erdvėje $C(\mathbb{R})$; $\widetilde{\mathcal{M}}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}B) := \mathcal{M}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}B) - \mu(\mathrm{d}x, \mathrm{d}B)$ yra atitinkamas centruotas *Poissono* matas.

Disertacijoje tiriame proceso $\mathcal{Z}$ savybes.

Teiginys (3.4, 3.5 teiginiai, 27, 29 puslapiai)**.** *(i) Procesas $\mathcal{Z}$ lygybe* (4) *apibrėžtas korektiškai visiems $\beta \in (-1, 1)$. Procesas $\mathcal{Z}$ turi stacionarius pokyčius ir jo baigtiniamačiai skirstiniai yra neaprėžtai dalūs.*

(ii) $\mathrm{E}|\mathcal{Z}(\tau)|^p < \infty$, $p \in (0, 2(1 + \beta))$, *ir*

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\mathcal{Z}(\tau) &= 0, & \beta &\in (-1/2, 1),\\ \mathrm{E}[\mathcal{Z}(\tau_1)\mathcal{Z}(\tau_2)] &= \sigma^2\mathrm{E}[B_H(\tau_1)B_H(\tau_2)], & \beta &\in (0, 1),\end{aligned}$$

čia σ, B_H yra apibrėžti ankstesnės teoremos (i) atveju.

(iii) Visiems $\beta \in (-\frac{1}{2}, 1)$ egzistuoja tolydi proceso $\mathcal{Z}$ modifikacija.

(iv) Procesas $\mathcal{Z}$ yra lokaliai ir globaliai asimptotiškai savipanašus:

$$\begin{aligned}b^{-H}\mathcal{Z}(b\tau) &\overset{\mathrm{fdd}}{\to} \sigma B_H(\tau), && \textit{kai } b \to 0, && \beta \in (0, 1);\\ b^{-1}\mathcal{Z}(b\tau) &\overset{\mathrm{fdd}}{\to} V\tau, && \textit{kai } b \to 0, && \beta \in (-1, 0);\\ b^{-1}\log^{-1/2}(1/b)\mathcal{Z}(b\tau) &\overset{\mathrm{fdd}}{\to} V\tau, && \textit{kai } b \to 0, && \beta = 0;\\ b^{-1/2}\mathcal{Z}(b\tau) &\overset{\mathrm{fdd}}{\to} \mathcal{W}^{1/2}B(\tau), && \textit{kai } b \to \infty, && \beta \in (-1, 1);\end{aligned}$$

čia ribiniai procesai yra tokie patys kaip ir ankstesnėje teoremoje.

Teorema (4.3 teorema, 50 puslapis)**.** *Tegul X_i, $i = 1, 2, \dots,$ yra AR(1) su atsitiktiniu koeficientu procesai, kurie turi tą pačią triukšmo seką ir kurių autoregresijos koeficientai yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, vienodai pasiskirstę pagal prielaidą* (2) *su $\beta \in (-\frac{1}{2}, 0)$. Tada*

(i) atveju:

$$n^{\beta-1/2}N^{-1}S_{N,n}(\tau) \overset{\mathrm{fdd}}{\to} cB_H(\tau),$$

čia $\{B_H(\tau),\ \tau \ge 0\}$ yra standartinis trupmeninis Browno *judesys su* Hursto *indeksu $H = \frac{1}{2} - \beta \in (\frac{1}{2}, 1)$ ir $c^2 := \frac{\psi_1\beta}{1-2\beta}\Gamma(\beta)\mathrm{B}(-\beta, 1 + 2\beta)$;*

(ii) atveju:

$$N^{-1/(1+\beta)} n^{-1/2} S_{N,n}(\tau) \stackrel{\mathrm{fdd}}{\to} W B(\tau),$$

čia $W > 0$ *yra* $(1+\beta)$*-stabilus atsitiktinis dydis, kurio* $\mathrm{E}\mathrm{e}^{-\theta W} = \exp\{-\frac{\psi_1 \Gamma(-\beta)}{1+\beta}\theta^{1+\beta}\}$, $\theta \ge 0$, *ir kuris nepriklauso nuo standartinio* Browno *judesio* $\{B(\tau),\, \tau \ge 0\}$*;*

(iii) atveju:

$$N^{-1/(1+\beta)} n^{-1/2} S_{N,n}(\tau) \stackrel{\mathrm{fdd}}{\to} \mu^{1/2} Z(\tau/\mu)$$

čia procesas $Z := \{Z(\tau),\, \tau \ge 0\}$ *reprezentuojamas stochastiniu integralu*

$$Z(\tau) := \int_{-\infty}^{\tau} \int_{\mathbb{R}_+} \Big\{ \int_0^{\tau} \mathrm{e}^{-x(t-s)} \mathbf{1}(s \le t) \mathrm{d}t \Big\} \mathrm{d}B(s) N(\mathrm{d}x), \tag{5}$$

kai $N(\mathrm{d}x)$ *yra* Poissono *matas erdvėje* $\mathbb{R}_+$*, kurio intensyvumas* $\psi_1 x^\beta \mathrm{d}x$*, nepriklausantis nuo standartinio* Browno *judesio* $\{B(s),\, s \in \mathbb{R}\}$*.*

Teiginys (4.2 teiginys, 49 puslapis)**.** *Visiems* $\beta \in (-\frac{1}{2}, 0)$ *lygybe* (5) *apibrėžtas procesas* Z *yra lokaliai ir globaliai savipanašus:*

$$\begin{aligned} b^{-H} Z(b\tau) &\stackrel{\mathrm{fdd}}{\to} c B_H(\tau), && \text{kai } b \to 0, \\ b^{-1/2} Z(b\tau) &\stackrel{\mathrm{fdd}}{\to} W B(\tau), && \text{kai } b \to \infty, \end{aligned}$$

čia ribiniai procesai yra tokie patys kaip ir ankstesnėje teoremoje.

Teorema (3.3 teorema, 25 puslapis)**.** *Tegul* X_i, $i = 1, 2, \ldots,$ *yra nepriklausomos proceso* X *kopijos, čia* X *nusakytas lygtimi* (1) *tenkina prielaidą* (2) *su* $\beta > 1$*. Kai* $N, n \to \infty$ *bet kuriuo būdu, tai*

$$N^{-1/2} n^{-1/2} S_{N,n}(\tau) \stackrel{\mathrm{fdd}}{\to} \sigma_1 B(\tau),$$

čia $\{B(\tau),\, \tau \ge 0\}$ *yra standartinis* Browno *judesys,* $\sigma_1^2 := \mathrm{E}(1-a)^{-2}$.

Teorema (4.4 teorema, 50 puslapis)**.** *Tegul* X_i, $i = 1, 2, \ldots,$ *yra AR(1) su atsitiktiniu koeficientu procesai, kurių triukšmo seka yra tokia pati ir kurių autoregresijos koeficientai yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, vienodai pasiskirstę pagal prielaidą* (2) *su* $\beta > 0$*. Kai* $N, n \to \infty$ *bet kuriuo būdu, tai*

$$N^{-1} n^{-1/2} S_{N,n}(\tau) \stackrel{\mathrm{fdd}}{\to} c_0 B(\tau),$$

čia $\{B(\tau),\, \tau \ge 0\}$ *yra standartinis* Browno *judesys,* $c_0 := \mathrm{E}(1-a)^{-1}$.

7.2. Statistinės išvados apie AR(1) procesą su atsitiktiniu koeficientu

Apibrėžkime AR(1) su atsitiktiniu koeficientu procesus X_i, $i = 1, 2, \ldots$ Tegul kiekvienam i procesas $X_i = \{X_i(t),\, t \in \mathbb{Z}\}$ yra stacionarus sprendinys lygties

$$X_i(t) = a_i X_i(t-1) + \zeta_i(t), \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{6}$$

čia triukšmo seka nusakyta lygybe

$$\zeta_i(t) = b_i\eta(t) + c_i\xi_i(t), \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{7}$$

ir, esant parametrams $p > 1$ ir $\varrho \in [0, 1)$, galioja

(B1) prielaida. $\eta(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su $\mathrm{E}\eta(t) = 0$, $\mathrm{E}\eta^2(t) = 1$, $\mathrm{E}|\eta(t)|^{2p} < \infty$.

(B2) prielaida. $\xi_i(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2, \ldots$, yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su $\mathrm{E}\xi_i(t) = 0$, $\mathrm{E}\xi_i^2(t) = 1$, $\mathrm{E}|\xi_i(t)|^{2p} < \infty$.

(B3) prielaida. (b_i, c_i), $i = 1, 2, \ldots$, yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dvimačiai vektoriai, čia koordinatės b_i, c_i yra galbūt priklausomi atsitiktiniai dydžiai ir $\mathrm{P}(b_i^2 + c_i^2 > 0) = 1$, $\mathrm{E}(b_i^2 + c_i^2) < \infty$.

(B4) prielaida. $a_i \in (-1, 1)$, $i = 1, 2, \ldots$, yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, kurių pasiskirstymo funkcijai $G(x) = \mathrm{P}(a_i \le x)$, $x \in [-1, 1]$, galioja $\mathrm{E}(1 - a_i^2)^{-1} < \infty$.

(B5) prielaida. $\{\eta(t)\}$, $\{\xi_i(t)\}$, (b_i, c_i), a_i yra nepriklausomi kiekvienam $i = 1, 2, \ldots$

(B6) prielaida. G yra *Hölderio* funkcija: egzistuoja toks $L > 0$, kad $|G(x) - G(y)| \le L|x - y|^{\varrho}$ visiems $x, y \in [-1, 1]$.

Pažymėtina, kad visoms triukšmo sekoms dedamoji $\{\eta(t),\, t \in \mathbb{Z}\}$ yra bendra, o $\{\xi_i(t),\, t \in \mathbb{Z}\}$ yra individuali. Procesas X_i yra ilgosios atminties, jeigu $\mathrm{E}(1 - a_i^2)^{-1} < \infty$, t. y. galioja (B4) prielaida, ir $\mathrm{E}(1 - a_i^2)^{-2} = \infty$. Jei abi sąlygos tenkinamos, tai pataškiui sumuojant nepriklausomus procesus X_i (kai (7) lygybėje $(b_i, c_i) = (0, 1)$ beveik tikrai), $i = 1, 2, \ldots$, ribinis (pagal individus agreguotas) procesas taip pat yra ilgiosios atminties, nes jo kovariacinė funkcija sutampa su X_i kovariacine funkcija. Antra vertus, pataškiui sumuojant procesus X_i, $i = 1, 2, \ldots$, su bendra triukšmo seka (kai (7) lygybėje $(b_i, c_i) = (1, 0)$ beveik tikrai), ribinis procesas yra ilgosios atminties, jeigu X_i turi begalinę dispersiją, bet tai prieštarauja prielaidai (B4), žr. [26].

Remdamiesi paneliniais duomenimis $\{X_i(t),\, t = 1, \ldots, n,\, i = 1, \ldots, N\}$, apibrėžkime neparametrinį pasiskirstymo funkcijos G įvertinį

$$\widehat{G}_{N,n}(x) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}(\widehat{a}_{i,n} \le x), \quad x \in [-1, 1],$$

čia

$$\widehat{a}_{i,n} := \frac{\sum_{t=1}^{n-1} (X_i(t) - \bar{X}_{i,n})(X_i(t+1) - \bar{X}_{i,n})}{\sum_{t=1}^{n} (X_i(t) - \bar{X}_{i,n})^2},$$

kai $\bar{X}_{i,n} := \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} X_i(t)$, yra nestebimo autoregresijos koeficiento a_i įvertis kiekvienam $i = 1, \ldots, N$. Disertacijoje įrodome atitinkamo empirinio proceso silpnąjį konvergavimą į apibendrintąjį *Browno* tiltą. Pagal šį rezultatą, įvertinys $\widehat{G}_{N,n}$ yra suderintasis ir jo ribinis skirstinys yra normalusis.

Teorema (5.3 teorema, 66 puslapis). *Tegul AR(1) su atsitiktiniu koeficientu procesai, nusakyti* (6), (7) *lygtimis, tenkina (B1)–(B6) prielaidas. Tegul* $N, n \to \infty$ *taip, kad* $Nn^{-\frac{2\varrho}{\varrho+p}(\frac{p}{2}\wedge(p-1))} \to 0$, *tada galioja*

$$N^{1/2}(\widehat{G}_{N,n}(x) - G(x)) \Rightarrow W(x),$$

čia $\{W(x),\, x \in [-1,1]\}$ *yra* Gausso *procesas, kurio vidurkis* 0 *ir kovariacinė funkcija* $\mathrm{Cov}(W(x), W(y)) = G(x \wedge y) - G(x)G(y),\ x, y \in [-1,1]$, *o* $\Rightarrow$ *žymi atitinkamų tikimybinių matų* Skorokhodo *erdvėje* $D[-1,1]$ *su tolygiąja topologija silpnąjį konvergavimą.*

Sąlyga $Nn^{-\frac{2\varrho}{\varrho+p}(\frac{p}{2}\wedge(p-1))} \to 0$ reiškia, kad stebėtos laiko eilutės turi būti pakankamai ilgos, palyginti su jų skaičiumi N. Tada proceso X_i empirinė autokoreliacija, kai vėlavimas 1, $\widehat{a}_{i,n}$ pakankamai tiksliai įvertina autoregresijos koeficientą a_i kiekvienam $i = 1, \ldots, N$ ir atitinkami empiriniai procesai mažai skiriasi. Teoremos įrodymas naudoja greitį, kuriuo $\widehat{a}_{i,n}$ konverguoja pagal tikimybę į a_i.

Teiginys (5.1 teiginys, 64 puslapis). *Tegul AR(1) su atsitiktiniu koeficientu procesas* X_i, *nusakytas lygtimis* (6), (7), *tenkina prielaidas (B1)–(B5) fiksuotam* $i = 1, 2, \ldots$ *Tada kiekvienam* $0 < \gamma < 1$ *ir* $n = 1, 2, \ldots,$ *galioja*

$$\mathrm{P}(|\widehat{a}_{i,n} - a_i| > \gamma) \le C(n^{-(\frac{p}{2}\wedge(p-1))}\gamma^{-p} + n^{-1}),$$

čia konstanta $C > 0$ *nepriklauso nuo* n, γ *reikšmių.*

Disertacijoje gautas rezultatas praverčia darant statistines išvadas apie autoregresijos koeficiento skirstinį iš panelinių duomenų $\{X_i(t),\, t = 1, \ldots, n,\, i = 1, \ldots, N\}$, kai N, n reikšmės didelės. Tikrinti hipotezei

$$H_0 : G = G_0, \quad H_1 : G \ne G_0,$$

čia spėjama pasiskirstymo funkcija G_0 tenkina (B4), (B6), naudojame *Kolmogorovo–Smirnovo* statistiką

$$T_{N,n} := \sqrt{N} \sup_{x \in [-1,1]} |\widehat{G}_{N,n}(x) - G_0(x)|,$$

kurios skirstinį aproksimuojame taikydami tolydaus atvaizdžio teoremą įrodytai atitinkamo empirinio proceso ribai. Taigi fiksuotam lygmeniui $\omega \in (0,1)$ hipotezę H_0 atmetame, jei $T_{N,n} > c(\omega)$, čia $c(\omega)$ yra *Kolmogorovo* skirstinio ω lygmens kritinė reikšmė. Galiojant (B1)–(B6) prielaidoms, *Kolmogorovo–Smirnovo* testo reikšmingumo lygmuo artėja į ω, o galia koverguoja į 1, kai $N, n \to \infty$ taip, kad $Nn^{-\frac{2\varrho}{\varrho+p}(\frac{p}{2}\wedge(p-1))} \to 0$.

Generuodami AR(1) su atsitiktiniu koeficientu panelinius duomenis, lyginame, kaip veikia *Kolmogorovo–Smirnovo* testas ir jo parametrinis analogas, kuris naudoja Beran ir kitų [5] nagrinėtą įvertinį. Tikriname hipotezę, kad autoregresijos koeficientas kvadratu turi beta skirstinį, kurio spėjamas parametras $\theta_0 = (\alpha_0, \beta_0)$. Taikant θ_0 įvertinį ar juo paremtą testą, reikia papildomai parinkti „nupjovimo“ parametrą. Be to, θ_0 įvertinio (atitinkamai ir testo) asimptotines savybes [5] įrodė tik atveju, kai AR(1) su atsitiktiniu koeficientu procesai turi individualias *Gausso* triukšmo sekas (tiksliau, kai (7) lygybėje $(b_i, c_i) = (0, 1)$ beveik tikrai ir $\xi_i(t) \sim \mathcal{N}(0, 1)$), t. y. galiojant daug stipresnėms sąlygoms. Tačiau mūsų modeliavimo rezultatai nerodo didelio galios praradimo, vietoj parametrinio taikant *Kolmogorovo–Smirnovo* testą.

Toliau tikriname ir sudėtinę hipotezę

$$H_0 : G \in \mathcal{G} := \{G_\theta,\, \theta \in (1, \infty)^2\}, \quad H_1 : G \notin \mathcal{G},$$

čia G_θ yra beta pasiskirstymo funkcija, kurios parametras $\theta = (\alpha, \beta)$. Naudojame *Kolmogorovo–Smirnovo* statistiką, esant momentų metodu įvertintam θ,

$$\sqrt{N} \sup_{x \in [-1,1]} |\widehat{G}_{N,n}(x) - G_{\widehat{\theta}_{N,n}}(x)|.$$

Disertacijoje nustatome šios statistikos ribinį skirstinį, taip pat įrodome, kad momento $\mu^{(u)} = \int_{-1}^{1} x^u \mathrm{d}G(x)$, $u = 1, 2, \ldots$, įvertinio

$$\widehat{\mu}_{N,n}^{(u)} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (\widehat{a}_{i,n})^u$$

ribinis skirstinys yra normalusis. *Robinsonas* [29] pasiūlė kitą $\mu^{(u)}$ įvertinį ir tyrė jo asimptotinį normalumą fiksuotam n, kai $N \to \infty$. Tačiau rezultatą gavo tik atveju, kai X_i, $i = 1, 2, \ldots$, yra nepriklausomi (tiksliau, (7) lygybėje $(b_i, c_i) = (0, 1)$ beveik tikrai) ir galioja sąlyga $\mathrm{E}(1 - a_i^2)^{-2} < \infty$, kuri neleidžia procesui X_i turėti ilgosios atminties savybės.

Penktajame disertacijos skyriuje taip pat nagrinėjame branduolinį tankio funkcijos $g(x) = G'(x)$ įvertinį. Įrodome jo asimptotinį normalumą ir integruotos kvadratinės paklaidos konvergavimą į nulį.

7.3. Ribinės teoremos netiesiniams atsitiktiniams laukams

Tegul $X = \{X(t, s),\, (t, s) \in \mathbb{Z}^2\}$ yra stacionarus atsitiktinis laukas. Pasirinkime bet kurį $\gamma > 0$ ir apibrėžkime X dalines sumas stačiakampiais

$$S_{\lambda,\gamma}(x, y) := \sum_{t=1}^{[\lambda x]} \sum_{s=1}^{[\lambda^\gamma y]} X(t, s), \quad (x, y) \in \mathbb{R}_+^2.$$

Nagrinėkime konvergavimą

$$A_{\lambda,\gamma}^{-1} S_{\lambda,\gamma}(x, y) \overset{\mathrm{fdd}}{\to} V_\gamma(x, y), \quad \lambda \to \infty, \tag{8}$$

čia $A_{\lambda,\gamma} \to \infty$ yra normuojanti skaičių seka. Pažymėtina, kad $\gamma \neq 1$ atveju stačiakampio $(0, \lambda x] \times (0, \lambda^\gamma y] \cap \mathbb{Z}^2$ kraštinės ilgėja skirtingais greičiais $O(\lambda)$ ir $O(\lambda^\gamma)$, $\lambda \to \infty$, taigi $\gamma > 0$ nusako skalės keitimo anizotropiją.

Jei kokiam nors $\gamma > 0$ ir $A_{\lambda,\gamma} = \lambda^H \ell(\lambda)$, čia $H > 0$, o $\ell : [1, \infty) \to \mathbb{R}_+$ yra lėtai kintanti funkcija, (8) egzistuoja riba $V_\gamma := \{V_\gamma(x, y),\, (x, y) \in \mathbb{R}^2_+\}$, tai visiems $\lambda > 0$

$$\{V_\gamma(\lambda x, \lambda^\gamma y),\, (x, y) \in \mathbb{R}^2_+\} \overset{\mathrm{fdd}}{=} \{\lambda^H V_\gamma(x, y),\, (x, y) \in \mathbb{R}^2_+\}.$$

Taigi atsitiktinis laukas V_γ yra savipanašus, skalę keičiant operatoriumi. Tai atskiras bendros savybės, kurią apibrėžė ir nagrinėjo Biermé ir kiti [8], atvejis. Be to, V_γ pokyčiai stačiakampiais yra stacionarūs: bet kuriam fiksuotam $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2_+$ galioja

$$\begin{aligned} \{V_\gamma((x_0, x] \times (y_0, y]),\, x > x_0, y > y_0\} &\overset{\mathrm{fdd}}{=} \{V_\gamma((0, x - x_0] \times (0, y - y_0]),\, x > x_0, y > y_0\} \\ &\equiv \{V_\gamma(x - x_0, y - y_0),\, x > x_0, y > y_0\}, \end{aligned}$$

čia $V_\gamma((x_0, x] \times (y_0, y]) := V_\gamma(x, y) - V_\gamma(x_0, y) - V_\gamma(x, y_0) + V_\gamma(x_0, y_0)$ nusako V_γ pokytį stačiakampiu $(x_0, x] \times (y_0, y] \subset \mathbb{R}^2_+$. Abi V_γ savybės įrodytos [28].

Daugeliui neišsigimusių atsitiktinių laukų (8) nusakyta riba V_γ egzistuoja visiems $\gamma > 0$. Tada X ribų aibė $\{V_\gamma,\, \gamma > 0\}$ apibūdina X asimptotines savybes ir priklausomybės struktūrą. Pvz., jei $\{X(t, s),\, (t, s) \in \mathbb{Z}^2\}$ sudaro nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dyžiai ir $\mathrm{E}X(0, 0) = 0$, $\mathrm{E}X^2(0, 0) = 1$, tai riba V_γ yra standartinė *Browno* paklodė su visais $\gamma > 0$, t. y. aibėje $\{V_\gamma,\, \gamma > 0\}$ yra tik vienas elementas. Panašūs rezultatai galioja atsitiktiniams laukams su trumpąja atmintimi, žr., pvz., [9]. Ribinis atsitiktinis laukas nepriklauso nuo to, kokiu būdu sumavimo sritis plečiasi į $\mathbb{Z}^2$ (net jei sritis yra bendros formos). Tačiau atsitiktiniams laukams su ilgąja atminitimi ribinėse teoremose pasirodo netikėtas reiškinys: egzistuoja taškas $\gamma_0 > 0$, kuriame X ribinis elgesys keičiasi taip, kaip nusako apibrėžimas.

Apibrėžimas (Puplinskaitė, Surgailis [28])**.** Sakome, kad atsitiktinis laukas X turi kritinį skalės keitimo režimą, jeigu egzistuoja toks $\gamma_0 > 0$, kad

$$V_\gamma \overset{\mathrm{fdd}}{=} V_+ \quad \text{visiems } \gamma > \gamma_0, \quad V_\gamma \overset{\mathrm{fdd}}{=} V_- \quad \text{visiems } 0 < \gamma < \gamma_0,$$
$$V_+ \overset{\mathrm{fdd}}{\neq} aV_- \quad \text{visiems } a > 0.$$

Jei V_γ nepriklauso nuo $\gamma > 0$, tai X kritinio skalės keitimo režimo neturi.

Panašu, kad tai nauja bendra priklausomybės erdvėje savybė, kurią turi daug izotropinių ir anizotropinių $\mathbb{Z}^2$-indeksuotų atsitiktinių laukų su ilgąja atmintimi. Ji buvo įrodyta *Gausso* laukų su ilgąja atmintimi klasei [27], ribinių agreguotų laukų klasei [28], taip pat laukams, kuriuos sudaro nepriklausomos ON/OFF ar AR(1) su atsitiktiniu koeficientu procesų kopijos, žr. [12, 15, 20, 23, 24] ir [28, 2.3 pastabą]. Bendresnę savybę [6] įrodė tam tikriems atsitiktiniams laukams, indeksuotiems $\mathbb{Z}^d$, kai $d \geq 2$.

Minėti darbai nagrinėja tiesinius laukus, kuriuos reprezentuoja nepriklausomų, vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių suma su koeficientais (neatsitiktinės funkcijos stochastinis integralas pagal triukšmą). Tačiau gerai žinoma, kad netiesinių procesų ir laukų ribinis elgesys gali būti gana sudėtingas, nebūtinai *Gausso*, žr. Dobrushin, Major [11], [1, 2, 16–18, 21, 22, 30, 31] ir literatūros nuorodas šiuose darbuose. Disertacijoje tiriame netiesinio X dalinių sumų stačiakampiais konvergavimą (8).

Iš pradžių apibrėžkime tiesinį lauką.

(A1) prielaida. $\{\varepsilon(t,s),\,(t,s)\in\mathbb{Z}^2\}$ sudaro nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su $\mathrm{E}\varepsilon(0,0)=0$, $\mathrm{E}\varepsilon^2(0,0)=1$.

(A2) prielaida. $Y=\{Y(t,s),\,(t,s)\in\mathbb{Z}^2\}$ yra atsitiktinis laukas, nusakytas slenkamuoju vidurkiu

$$Y(t,s) := \sum_{(u,v)\in\mathbb{Z}^2} a(t-u,s-v)\varepsilon(u,v), \quad (t,s)\in\mathbb{Z}^2, \tag{9}$$

čia koeficientai tenkina

$$a(t,s) = (|t|^2+|s|^{2\frac{q_2}{q_1}})^{-\frac{q_1}{2}}\Big(L\Big(\frac{t}{(|t|^2+|s|^{2\frac{q_2}{q_1}})^{\frac{1}{2}}}\Big)+o(1)\Big), \quad |t|+|s|\to\infty, \tag{10}$$

esant tokiems parametrams $q_i>0$, $i=1,2$, kad

$$1<\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}<2, \tag{11}$$

o $L:[-1,1]\to[0,\infty)$ yra aprėžta, gabalais tolydi funkcija.

Sąlyga (11) užtikrina, kad $\sum_{(t,s)\in\mathbb{Z}^2} a^2(t,s)<\infty$ ir $\sum_{(t,s)\in\mathbb{Z}^2}|a(t,s)|=\infty$, taigi Y yra korektiškai apibrėžtas ir ilgosios atminties. Pažymėtina, kad jei $q_1\neq q_2$, tai $a(t,0)=O(|t|^{-q_1})$, $t\to\infty$, ir $a(0,s)=O(|s|^{-q_2})$, $s\to\infty$, gęsta skirtingu greičiu, o Y yra anizotropinis. Disertacijoje pateikiame anizotropinį ir izotropinį Y pavyzdžius, parodome, kad jie tenkina (10) asimptotiką ir (11).

Remdamiesi Y, kuris tenkina (A1), (A2) prielaidas, apibrėžkime netiesinį lauką $X=\{X(t,s),\,(t,s)\in\mathbb{Z}^2\}$. Prieš tai prisiminkime, kad k-tasis *Appellio* polinomas $A_k(y)$, $y\in\mathbb{R}$, atsitiktinio dydžio ξ, kurioE$|\xi|^k<\infty$, skirstinio atžvilgiu yra nusakytas

$$A_k(y) := (-\mathrm{i})^k\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}u^k}\Big(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}uy}}{\mathrm{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}u\xi}}\Big)\Big|_{u=0}.$$

Pvz., jei $\mathrm{E}\xi=0$, tai $A_1(\xi)=\xi$, $A_2(\xi)=\xi^2-\mathrm{E}\xi^2$, $A_3(\xi)=\xi^3-3\xi\mathrm{E}\xi^2-\mathrm{E}\xi^3$. Jei $\xi\overset{\mathrm{d}}{=}\mathcal{N}(0,1)$, tai *Appellio* ir *Hermite'o* polinomai sutampa.

(A3)$_k$ prielaida. Su kuriuo nors $k\in\mathbb{N}$ galioja $\mathrm{E}|\varepsilon(0,0)|^{2k}<\infty$ ir

$$X(t,s) := A_k(Y(t,s)), \quad (t,s)\in\mathbb{Z}^2, \tag{12}$$

čia A_k yra k-tasis *Appellio* polinomas $Y(0,0)$ skirstinio atžvilgiu.

Prieš suformuluodami sąlygas, kada netiesinis laukas yra ilgosios atminties, apibrėžkime parametrus $p_i := q_i(2-\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2})$, $i=1,2$. Jie tenkina $P:=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}>1 \Longleftrightarrow \frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}>1$.

Teiginys (6.11 išvada, 99 puslapis). *Tegul atsitiktinis laukas* $X = A_k(Y)$ *tenkina (A1), (A2),* $(A3)_k$ *prielaidas. Tegul* $r(t,s) := \mathrm{Cov}(X(0,0), X(t,s))$, $(t,s) \in \mathbb{Z}^2$.

(i) Jei $1 \le k < P$, *tai* $\sum_{(t,s)\in\mathbb{Z}^2} |r(t,s)| = \infty$ *(ilgoji atmintis).*

(ii) Jei $k > P$, *tai* $\sum_{(t,s)\in\mathbb{Z}^2} |r(t,s)| < \infty$ *(trumpoji atmintis).*

Disertacijoje įrodome, kad ilgosios atminties atveju $X = A_k(Y)$ turi kritinį skalės keitimo režimą su

$$\gamma_0 := \frac{q_1}{q_2} = \frac{p_1}{p_2},$$

kuris nepriklauso nuo k. (8) nusakyta riba V_{γ_0} reprezentuojama k-lypiu *Itô–Wienerio* integralu ir yra ne *Gausso* atsitiktinis laukas, jei $k > 1$. Prisiminkime, kad funkcijos $h : \mathbb{R}^{2k} \to \mathbb{R}$ su

$$\|h\|_k := \Big(\int_{\mathbb{R}^{2k}} h^2(u_1, v_1, \ldots, u_k, v_k)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}v_1 \ldots \mathrm{d}u_k\mathrm{d}v_k\Big)^{1/2} < \infty$$

k-lypis *Itô–Wienerio* integralas

$$I(h) := \int_{\mathbb{R}^{2k}} h(u_1, v_1, \ldots, u_k, v_k) W(\mathrm{d}u_1, \mathrm{d}v_1) \ldots W(\mathrm{d}u_k, \mathrm{d}v_k)$$

pagal *Gausso* baltąjį triukšmą $\{W(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v),\ (u,v) \in \mathbb{R}^2\}$, kurio vidurkis nulinis ir dispersija $\mathrm{d}u\mathrm{d}v$, yra korektiškai apibrėžtas ir tenkina $\mathrm{E}I(h) = 0$, $\mathrm{E}|I(h)|^2 \le k!\|h\|_k^2$.

Teorema (6.1 teorema, 91 puslapis). *(i) Jei* $1 \le k < P$, *tai*

$$V_{\gamma_0}(x,y) := \int_{\mathbb{R}^{2k}} h_{x,y}(u_1, v_1, \ldots, u_k, v_k) W(\mathrm{d}u_1, \mathrm{d}v_1) \ldots W(\mathrm{d}u_k, \mathrm{d}v_k), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2_+,$$

yra korektiškai apibrėžtas Itô–Wienerio *integralas, čia*

$$\begin{aligned} h_{x,y}(u_1, v_1, \ldots, u_k, v_k) &:= \int_{(0,x]\times(0,y]} \prod_{i=1}^{k} a_\infty(t - u_i, s - v_i)\mathrm{d}t\mathrm{d}s, \\ a_\infty(t,s) &:= (|t|^2 + |s|^{2\frac{q_2}{q_1}})^{-\frac{q_1}{2}} L\Big(\frac{t}{(|t|^2 + |s|^{2\frac{q_2}{q_1}})^{\frac{1}{2}}}\Big). \end{aligned} \tag{13}$$

(ii) Tegul atsitiktinis laukas $X = A_k(Y)$ *tenkina prielaidas (A1), (A2),* $(A3)_k$, $1 \le k < P$. *Tada*

$$\lambda^{-H(\gamma_0)} S_{\lambda,\gamma_0}(x,y) \overset{\mathrm{fdd}}{\to} V_{\gamma_0}(x,y), \quad \lambda \to \infty,$$

čia $H(\gamma_0) := 1 + \gamma_0 - \frac{kp_1}{2}$.

Teorema (6.2 teorema, 92 puslapis). *(i) Jei* $1 \le k < \frac{1}{p_2}$, *tai*

$$Z(y) := \int_{\mathbb{R}^{2k}} h_y(u_1, v_1 \ldots, u_k, v_k) W(\mathrm{d}u_1, \mathrm{d}v_1) \ldots W(\mathrm{d}u_k, \mathrm{d}v_k), \quad y \in \mathbb{R}_+,$$

yra korektiškai apibrėžtas Itô–Wienerio *stochastinis integralas, čia*

$$h_y(u_1, v_1, \ldots, u_k, v_k) := \int_0^y \prod_{i=1}^{k} a_\infty(u_i, s - v_i)\mathrm{d}s$$

su (13) lygybe nusakyta funkcija a_∞.

(ii) Tegul atsitiktinis laukas $X = A_k(Y)$ *tenkina prielaidas (A1), (A2), (A3)*$_k$, $1 \le k < \frac{1}{p_2}$. *Tada su visais* $\gamma > \gamma_0$

$$\lambda^{-H(\gamma)} S_{\lambda,\gamma}(x, y) \overset{\text{fdd}}{\to} xZ(y), \quad \lambda \to \infty,$$

čia $H(\gamma) := 1 + \gamma H_2$ *su* $H_2 := 1 - \frac{kp_2}{2} \in (\frac{1}{2}, 1)$.

Teorema (6.3 teorema, 93 puslapis)**.** *Tegul atsitiktinis laukas* $X = A_k(Y)$ *tenkina prielaidas (A1), (A2), (A3)*$_k$, $\frac{1}{p_2} < k < P$. *Tada visiems* $\gamma > \gamma_0$

$$\lambda^{-H(\gamma)} S_{\lambda,\gamma}(x, y) \overset{\text{fdd}}{\to} cB_{H_1,\frac{1}{2}}(x, y), \quad \lambda \to \infty,$$

čia $H(\gamma) := H_1 + \frac{\gamma}{2}$ *su* $H_1 := 1 + \frac{\gamma_0}{2} - \frac{kp_1}{2} \in (\frac{1}{2}, 1)$ *ir* $\{B_{H_1,\frac{1}{2}}(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2_+\}$ *yra standartinė trupmeninė* Browno *paklodė su indeksu* $(H_1, \frac{1}{2})$, *t. y.* Gausso *atsitiktinis laukas, kurio vidurkis nulinis ir*

$$\mathrm{E}B_{H_1,\frac{1}{2}}(x_1, y_1)B_{H_1,\frac{1}{2}}(x_2, y_2) = \frac{1}{2}(x_1^{2H_1} + x_2^{2H_1} - |x_1 - x_2|^{2H_1})(y_1 \wedge y_2),$$

o $c^2 := k! \int_{(0,1]^2 \times \mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}^2} a_\infty(u, v)a_\infty(t_1 - t_2 + u, s + v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v)^k \mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\mathrm{d}s > 0$ *su (13) nusakyta funkcija* a_∞.

Kai $\gamma > \gamma_0$, $1 \le k < P$, tai atsitiktinis laukas V_γ (jo skirstinys, pokyčių stačiakampiais priklausomumas) yra dvejopas ir priklauso nuo to, ar $X = A_k(Y)$ turi ilgosios, ar trumposios atminties savybę vertikaliai:

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} |\operatorname{Cov}(X(0, 0), X(0, s))| \begin{cases} = \infty, & 1 \le k < \frac{1}{p_2}, \\ < \infty, & \frac{1}{p_2} < k < P. \end{cases}$$

Kai $0 < \gamma < \gamma_0$, $1 \le k < P$, tai (8) konvergavimas iš esmės išplaukia sukeitus koordinates vietomis, todėl santraukoje jo neapžvelgiame. Kai $\gamma \ne \gamma_0$, $1 \le k < P$, tai V_γ pokyčiai stačiakampiais yra nepriklausomi arba visiškai priklausomi pagal vieną iš koordinačių ašių.

Jei $X = A_k(Y)$ yra trumposios atminties, tai jis neturi kritinio skalės keitimo režimo.

Teorema (6.4 teorema, 93 puslapis)**.** *Tegul* $X = A_k(Y)$ *tenkina prielaidas (A1), (A2), (A3)*$_k$, $k > P$. *Jei* $\sigma^2 := \sum_{(t,s) \in \mathbb{Z}^2} \operatorname{Cov}(X(0, 0), X(t, s)) > 0$, *tai visiems* $\gamma > 0$

$$\lambda^{-(1+\gamma)/2} S_{\lambda,\gamma}(x, y) \overset{\text{fdd}}{\to} \sigma B(x, y), \quad \lambda \to \infty,$$

čia $\{B(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2_+\}$ *yra standartinė* Browno *paklodė.*

Be to, disertacijoje nagrinėjame *Gausso* laukų su ilgąja atmintimi netiesines transformacijas.

(A4)$_k$ prielaida. $\varepsilon(0,0) \overset{\mathrm{d}}{=} Z$ ir $Y(0,0) \overset{\mathrm{d}}{=} Z$ turi standartinį normalųjį skirstinį, t. y. $Z \overset{\mathrm{d}}{=} \mathcal{N}(0,1)$ ir

$$X(t,s) := G(Y(t,s)), \quad (t,s) \in \mathbb{Z}^2,$$

čia $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra mati funkcija, tenkinanti $\mathrm{E}G(Z) = 0$, $\mathrm{E}G^2(Z) < \infty$ ir turinti *Hermite'o* rangą $k \in \mathbb{N}$.

Teorema (6.5 teorema, 93 puslapis)**.** *Tegul $X = G(Y)$ tenkina prielaidas (A1), (A2), (A4)$_k$. Neprarandant bendrumo, tegul G turi skleidinį Hermite'o eilute*

$$G(y) = H_k(y) + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{c_j}{j!} H_j(y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Tada X tenkina visus šio skyriaus teoremų tvirtinimus.

Šio disertacijos skyriaus rezultatai gali praversti darant statistines išvadas apie atsitiktinį lauką Y su ilgąja atmintimi. Parodyta, kad (ne)tiesinės statistikos, kuri remiasi Y stebėjimais stačiakampėje srityje, ribinis skirstinys gali priklausyti nuo γ ir γ_0 santykio.

7.4. Ribinės teoremos atsitiktinių dalelių modeliui

Apibrėžkime atsitiktinį lauką

$$X(t,s) := \sum_i \mathbf{1}\Big(\Big(\frac{t-u_i}{R_i^p}, \frac{s-v_i}{R_i^{1-p}}\Big) \in B\Big), \quad (t,s) \in \mathbb{R}^2, \tag{14}$$

čia $B \subset \mathbb{R}^2$ yra fiksuota mati aprėžta aibė, $\mathrm{Leb}(\partial B) = 0$, $0 < p < 1$ yra fiksuotas parametras, $\{(u_i, v_i), R_i\}$ yra taškinis *Poissono* procesas, apibrėžtas $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$, kurio intensyvumo matas $\mathrm{d}u\mathrm{d}v f(r)\mathrm{d}r$. Tarkime, kad f yra atsitiktinio dydžio, kuris įgyja reikšmes iš $\mathbb{R}_+$, tankio funkcija, tenkinanti

$$f(r) \sim c_f r^{-(1+\alpha)}, \quad r \to \infty, \quad \text{kokiems nors } 1 < \alpha < 2, \ c_f > 0. \tag{15}$$

Taigi $X(t,s)$ skaičiuoja, kiek atsitiktinių dalelių $(u_i, v_i) + R_i^P B$ dengia kiekvieną plokštumos tašką (t,s), čia $R_i^P B := \{(R_i^p u, R_i^{1-p} v) : (u,v) \in B\} \subset \mathbb{R}^2$ yra atsitiktiniais dydžiais R_i^p ir R_i^{1-p} atitinkamai horizontaliai ir vertikaliai išplėsta aibė B. Atvejis $p = 1/2$ nusako izotropinį B plėtimą. Atsitiktinės dalelės plotas $\mathrm{Leb}(R_i^P B) = \mathrm{Leb}(B) R_i$ yra proporcingas R_i ir nepriklauso nuo parametro p reikšmės. Pagal (15) sąlygą turime $\mathrm{E}\,\mathrm{Leb}(R_i^P B) < \infty$ ir $\mathrm{E}|\,\mathrm{Leb}(R_i^P B)|^2 = \infty$. Sąlyga (15) užtikrina, kad $\int_{\mathbb{R}^2} |\operatorname{Cov}(X(0,0), X(t,s))| \mathrm{d}t\mathrm{d}s = \infty$, t. y. X yra ilgosios atminties.

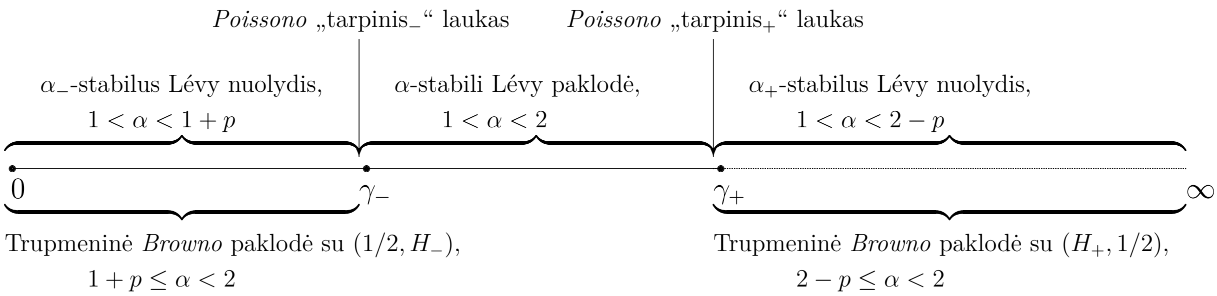
Pasirinkime bet kurį $\gamma > 0$ ir apibrėžkime

$$S_{\lambda,\gamma}(x,y) := \int_{(0,\lambda x] \times (0, \lambda^\gamma y]} (X(t,s) - \mathrm{E}X(t,s)) \mathrm{d}t\mathrm{d}s, \quad (x,y) \in \mathbb{R}_+^2.$$

Nagrinėkime konvergavimą

$$A_{\lambda,\gamma}^{-1} S_{\lambda,\gamma}(x,y) \overset{\mathrm{fdd}}{\to} V_\gamma(x,y), \quad \lambda \to \infty, \tag{16}$$

čia $A_{\lambda,\gamma} \to \infty$ yra normuojanti skaičių seka. Atveju $p = 1/2$ atsitiktinių dalelių erdvėje $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, modelio ribinis elgesys, skalę keičiant izotropiškai, t. y. kai $\gamma = 1$, aprašytas Kaj ir kitų [19], Biermé ir kitų [7]. Diagramoje glaustai pateikiame disertacijos rezultatus, tiksliau, ribas $V_\gamma := \{V_\gamma(x,y), (x,y) \in \mathbb{R}_+^2\}$, gautas (16) ėmus bet kurį $\gamma > 0$.



Pav.: Atsitiktinių dalelių modelio, kai $1 < \alpha < 2$, $0 < p < 1$, ribos V_γ visiems $\gamma > 0$.

Disertacijoje parodome, kad atsitiktinių dalelių modelis turi du kritinius skalės keitimo režimus su

$$\gamma_- := \frac{1-p}{\alpha - (1-p)} < \gamma_+ := \frac{\alpha - p}{p},$$

kurie skiriasi netgi atveju $p = 1/2$. Tai nauja erdvinės priklausomybės savybė, palyginti su [27, 28], kur vienas kritinis režimas nustatytas *Gausso* laukų klasei, ribinių laukų, gautų agreguojant autoregresijos modelius, klasei. Toliau apsiribosime atveju $\gamma > \gamma_-$, nes ribos V_γ, $0 < \gamma \leq \gamma_-$ sutampa su V_γ, $\gamma \geq \gamma_+$, sukeitus $x \leftrightarrow y$, $\gamma \leftrightarrow 1/\gamma$, $p \leftrightarrow 1 - p$ ir atlikus aibės B atspindžio transformaciją.

Teorema (7.1 teorema, 125 puslapis)**.** *Tegul $\gamma_- < \gamma < \gamma_+$, $1 < \alpha < 2$. Tada*

$$\lambda^{-H(\gamma)} S_{\lambda,\gamma}(x,y) \overset{\mathrm{fdd}}{\to} Z((0,x] \times (0,y]), \quad \lambda \to \infty,$$

čia $H(\gamma) := \frac{1+\gamma}{\alpha}$ ir $\{Z((0,x] \times (0,y]), (x,y) \in \mathbb{R}_+^2\}$ yra α-stabili Lévy paklodė, apibrėžta integralu pagal α-stabilų atsitiktinį matą $Z(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v)$ erdvėje $\mathbb{R}^2$, kurio kontrolinis matas $\sigma^\alpha \mathrm{d}u\mathrm{d}v$ ir asimetriškumo parametras 1, t. y. $\mathrm{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta Z(A)} = \exp\{-\operatorname{Leb}(A)\sigma^\alpha|\theta|^\alpha(1 - \mathrm{i}\operatorname{sgn}(\theta)\tan\frac{\pi\alpha}{2})\}$, $\theta \in \mathbb{R}$, bet kuriai mačiai aibei $A \subset \mathbb{R}^2$ su $\operatorname{Leb}(A) < \infty$, $\sigma^\alpha := c_f \frac{\cos(\pi\alpha/2)\Gamma(2-\alpha)}{\alpha(1-\alpha)}(\operatorname{Leb}(A))^\alpha$.

Teorema (7.2, 7.3, 7.4 teoremos, 125, 126 puslapiai)**.** *(i) Tegul $\gamma > \gamma_+$, $1 < \alpha < 2 - p$. Apibrėžkime $\alpha_+ := \frac{\alpha - p}{1-p} \in (1,2)$. Tada*

$$\lambda^{-H(\gamma)} S_{\lambda,\gamma}(x,y) \overset{\mathrm{fdd}}{\to} xL(y), \quad \lambda \to \infty,$$

čia $H(\gamma) := 1 + \frac{\gamma}{\alpha_+}$ *ir* $\{L(y),\, y \in \mathbb{R}_+\}$ *yra* α_+*-stabilus Lévy procesas, kuriam* $\mathrm{E}e^{\mathrm{i}\theta L(1)} := \exp\{-\sigma^{\alpha_+}|\theta|^{\alpha_+}(1 - \mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(\theta)\tan\frac{\pi\alpha_+}{2})\}$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\sigma^{\alpha_+} := c_f \frac{\cos(\pi\alpha_+/2)\Gamma(2-\alpha_+)}{(1-p)\alpha_+(1-\alpha_+)} \int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}((u,s) \in B)\mathrm{d}s)^{\alpha_+}\mathrm{d}u$.

(ii) Tegul $\gamma > \gamma_+$, $2 - p < \alpha < 2$. *Apibrėžkime* $H := \frac{1}{p} - \frac{\gamma_+}{2} = \frac{2-\alpha+p}{2p} \in (\frac{1}{2}, 1)$. *Tada*

$$\lambda^{-H(\gamma)} S_{\lambda,\gamma}(x,y) \stackrel{\mathrm{fdd}}{\to} \sigma B_{H,\frac{1}{2}}(x,y), \quad \lambda \to \infty,$$

čia $H(\gamma) := H + \frac{\gamma}{2}$ *ir* $\{B_{H,\frac{1}{2}}(x,y),\, (x,y) \in \mathbb{R}^2_+\}$ *yra standartinė trupmeninė* Browno *paklodė su indeksu* $(H, \frac{1}{2})$, $\sigma^2 := c_f \int_{\mathbb{R}}[\int_0^\infty |\int_0^1(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}((\frac{t-u}{r^p}, s) \in B)\mathrm{d}s)\mathrm{d}t|^2 r^{1-\alpha-2p}\mathrm{d}r]\mathrm{d}u$

(iii) Tegul $\gamma > \gamma_+$, $\alpha = 2 - p$. *Tada*

$$\lambda^{-H(\gamma)}(\log\lambda)^{-1/2} S_{\lambda,\gamma}(x,y) \stackrel{\mathrm{fdd}}{\to} \tilde{\sigma} B_{1,\frac{1}{2}}(x,y), \quad \lambda \to \infty,$$

čia $H(\gamma) := 1 + \frac{\gamma}{2}$ *ir* $\{B_{1,\frac{1}{2}}(x,y),\, (x,y) \in \mathbb{R}^2_+\}$ *yra standartinė trupmeninė* Browno *paklodė su indeksu* $(1, \frac{1}{2})$, $\tilde{\sigma}^2 := c_f \frac{\gamma-\gamma_+}{2(1-p)} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{Leb}(B \cap (B + (0,u)))\mathrm{d}u$.

Disertacijoje gauname atsitiktinių dalelių modelio kovariacinės funkcijos asimptotiką. Ja remdamiesi matome, kad ilgosios atminties pasikeitimas vertikaliai į trumpąją atmintį: bet kuriam $T > 0$

$$\int_{[-T,T]\times\mathbb{R}} \mathrm{Cov}(X(0,0), X(t,s))\mathrm{d}t\mathrm{d}s \begin{cases} = \infty, & 1 < \alpha \le 2 - p, \\ < \infty, & 2 - p < \alpha < 2, \end{cases}$$

galbūt susijęs su V_γ dvejopumu, kai $\gamma > \gamma_+$.

Teorema (7.5 teiginys, 7.6 teorema, 126, 127 puslapiai). *(i) Bet kuriems* $1 < \alpha < 2$, $0 < p < 1$ *atsitiktinis laukas*

$$I(x,y) := \int_{\mathbb{R}\times(0,y]\times\mathbb{R}_+} \Big\{ \int_{(0,x]\times\mathbb{R}} \mathbf{1}\Big(\Big(\frac{t-u}{r^p}, \frac{s}{r^p}\Big) \in B\Big)\mathrm{d}t\mathrm{d}s\Big\} \widetilde{M}(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v, \mathrm{d}r), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2_+,$$

yra korektiškai apibrėžtas integralu pagal centruotą Poissono *atsitiktinį matą* $\widetilde{M}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v,\mathrm{d}r) := M(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v,\mathrm{d}r) - \mathrm{E}M(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v,\mathrm{d}r)$, *čia* $M(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v,\mathrm{d}r)$ *yra* Poissono *atsitiktinis matas erdvėje* $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$, *kurio intensyvumo matas* $\mathrm{E}M(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v,\mathrm{d}r) := c_f \mathrm{d}u\mathrm{d}v r^{-(1+\alpha)}\mathrm{d}r$. *Visiems* $0 < q < \alpha_+ \wedge 2$ *galioja* $\mathrm{E}|I(x,y)|^q < \infty$; *be to, jei* $2 - p < \alpha < 2$, *tai* $\mathrm{E}|I(x,y)|^2 < \infty$ *ir*

$$\mathrm{E}I(x_1,y_1)I(x_2,y_2) = \sigma^2 \mathrm{E}B_{H,\frac{1}{2}}(x_1,y_1)B_{H,\frac{1}{2}}(x_2,y_2)$$

su ankstesnėje teoremoje apibrėžtais σ, H *ir* α_+.

(ii) Tegul $\gamma = \gamma_+$, $1 < \alpha < 2$. *Tada*

$$\lambda^{-H(\gamma)} S_{\lambda,\gamma}(x,y) \stackrel{\mathrm{fdd}}{\to} I(x,y), \quad \lambda \to \infty,$$

čia $H(\gamma) := \frac{1}{p}$.

Pastaba. Jei (15) sąlygoje $\alpha > 2$, tai X yra trumposios atminties. Tada visiems $\gamma > 0$, $0 < p < 1$ galioja

$$\lambda^{-(1+\gamma)/2} S_{\lambda,\gamma}(x, y) \overset{\text{fdd}}{\to} \sigma_2 B(x, y),$$

čia $\{B(x, y),\ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2\}$ yra standartinė *Browno* paklodė, $\sigma_2^2 := (\mathrm{Leb}(B))^2 \int_{\mathbb{R}_+} r^2 f(r) \mathrm{d}r$.

Disertacijoje taip pat nagrinėjame atsitiktinį procesą $\{W(t),\ t \in \mathbb{R}_+\}$, susijusį su atsitiktinių dalelių modeliu, kai $B = (0, 1]^2$. Tegul $0 < \beta \leq \infty$, $0 < \gamma < \infty$, $0 < p \leq 1$ ir $T > 0$. Apibrėžkime

$$W(t) := \sum_i (R_i^{1-p} \wedge T^\beta) \mathbf{1}(u_i < t \leq u_i + R_i^p), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{17}$$

čia $\{u_i, R_i\}$ yra *Poissono* taškinis procesas erdvėje $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, kurio intensyvumo matas $T^\gamma \mathrm{d}u\, f(r)\mathrm{d}r$, o f yra atsitiktinio dydžio, įgyjančio reikšmes iš $\mathbb{R}_+$, tankio funkcija, kuri tenkina (15). Tada $W(t)$ nurodo duomenų perdavimo tinklo apkrovą laiko momentu t, jei kiekvienas i-tasis duomenų siuntimas vyksta laiko intervale $(u_i, u_i + R_i^p]$ greičiu $R_i^{1-p} \wedge T^\beta$. Pažymėtina, kad visų siuntimų greitis yra apribotas neatsitiktiniu dydžiu T^β ir yra pastovus atveju $p = 1$ (tada (17) žymi M/G/∞ procesą eilių teorijoje). T^γ nurodo duomenų siuntėjų intensyvumą tinkle. Nagrinėkime per laiko intervalą $(0, Tx]$ sukauptos tinklo apkrovos svyravimus apie vidurkį

$$\int_0^{Tx} (W(t) - \mathrm{E}W(t)) \mathrm{d}t, \quad x \geq 0.$$

Atitinkamai normavę, disertacijoje įrodome šio atsitiktinio proceso (baigtiniamačių skirstinių) silpnąjį konvergavimą, kai $T \to \infty$, visiems β, γ, p. Gauti rezultatai susiję su [12, 15, 20, 23], kur, pvz., M/G/∞ ir įvairiems kitiems procesams parodyta, kad sukauptos apkrovos ribinis skirstinys priklauso nuo santykinio greičio, kuriuo laiko skalė ir duomenų siuntėjų intensyvumas didėja neaprėžtai kartu.

8. Išvados

Pateikiame disertacijos tyrimų išvadas.

- AR(1) su atsitiktiniu koeficientu proceso nepriklausomoms kopijoms taikėme erdvinį ir laikinį agregavimą. Įrodėme trejopą agreguoto proceso (baigtiniamačių skirstinių) silpnąjį konvergavimą. Nustatėme „tarpiniu“ režimu gauto ribinio proceso reprezentaciją integralu pagal *Poissono* atsitiktinį matą. Be to, parodėme, kad jis sieja kitus du ribinius procesus. Nors nagrinėjant duomenų siuntimo modelių erdvinį ir laikinį agregavimą „tarpiniu“ režimu [12, 14, 15, 20] gauta riba skiriasi, jos savybės yra panašios.

- AR(1) su atsitiktiniu koeficientu procesams, kurių triukšmo seka yra bendra, taikėme erdvinį ir laikinį agregavimą. Įrodėme trejopą agreguoto proceso (baigtiniamačių skirstinių) silpnąjį konvergavimą. Parodėme, kad „tarpiniu“ režimu gautas ribinis procesas sieja kitus du ribinius procesus.

- Nustatėme pakankamas sąlygas, kada empirinis procesas, kuris remiasi AR(1) su atsitiktiniu koeficientu procesų empirinėmis autokoreliacijomis, kai vėlavimas 1, silpnai konverguoja į apibendrintąjį *Browno* tiltą. Remdamiesi šiuo rezultatu, pagrindėme, jog pakankamai ilgoms AR(1) su atsitiktiniu koeficientu eilutėms galima taikyti *Kolmogorovo–Smirnovo* testą tikrinti paprastai ir sudėtinei hipotezei, kad autoregresijos koeficientas turi beta skirstinį.

- Įrodėme, kad netiesinis laukas X su ilgąja atmintimi, nusakytas (galbūt anizotropinio) tiesinio lauko transformacija k-tojo laipsnio *Appellio* polinomu, turi kritinį skalės keitimo režimą su $\gamma_0 > 0$, kuris nepriklauso nuo k. Nors visiems $\gamma > \gamma_0$ (visiems $0 < \gamma < \gamma_0$) ribinis X elgesys yra vienodas, jis priklauso nuo to, ar X pasižymi ilgąja, ar trumpąja atmintimi vertikaliai (horizontaliai).

- Įrodėme, kad atsitiktinių dalelių modelis X su ilgąja atmintimi turi du kritinius skalės keitimo režimus su $\gamma_+ > \gamma_- > 0$. Nors visiems $\gamma > \gamma_+$ (visiems $0 < \gamma < \gamma_-$) ribinis X elgesys yra vienodas, bet priklauso nuo to, ar X pasižymi ilgąja ar trumpąja atmintimi vertikaliai (horizontaliai).

9. Publikacijos

Disertacijos rezultatai yra publikuoti šiuose straipsniuose:

1. V. Pilipauskaitė, D. Surgailis. Joint temporal and contemporaneous aggregation of random-coefficient AR(1) processes. *Stochastic Process. Appl.* 124(2):1011–1035, 2014.

2. V. Pilipauskaitė, D. Surgailis. Joint aggregation of random-coefficient AR(1) processes with common innovations. *Statist. Probab. Lett.* 101:73–82, 2015.

3. V. Pilipauskaitė, D. Surgailis. Anisotropic scaling of the random grain model with application to network traffic. *J. Appl. Probab.* 53(3):857–879, 2016.

4. R. Leipus, A. Philippe, V. Pilipauskaitė, D. Surgailis. Nonparametric estimation of the distribution of the autoregressive coefficient from panel random-coefficient AR(1) data. *J. Multivar. Anal.* 153:121–135, 2017.

5. V. Pilipauskaitė, D. Surgailis. Scaling transition for nonlinear random fields with long-range dependence. *Stochastic Process. Appl.* 127(8):2751–2779, 2017.

10. Rezultatų sklaida

Disertacijos rezultatai buvo pristatyti šiose konferencijose ir seminaruose:

- *Lietuvos matematikų draugijos 55-oji konferencija, Vilnius*, 2014 m. birželio 26–27 d.
- *11th International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics*, Vilnius, 2014 m. birželio 30 d.–liepos 4 d.
- *Zürich Spring School on Lévy Processes*, Ciurichas, Šveicarija, 2015 m. kovo 29 d.–balandžio 2 d.
- *Journée des Doctorants de l'ED STIM*, Nantas, Prancūzija, 2016 m. balandžio 21 d.
- *Lietuvos matematikų draugijos 57-oji konferencija, Vilnius*, 2016 m. birželio 20–21 d.
- *Conference on Ambit Fields and Related Topics*, Orhusas, Danija, 2016 m. rugpjūčio 15–18 d.
- *Taikomosios matematikos seminaras*, Nanto universitetas, Prancūzija, 2016 m. lapkričio 10 d.
- *Tikimybių, statistikos ir taikymų seminaras*, Puatjė universitetas, Prancūzija, 2016 m. lapkričio 17 d.
- *9th International Conference of the ERCIM WG on Computational and Methodological Statistics*, Sevilija, Ispanija, 2016 m. gruodžio 9–11 d.
- *Thiele seminaras*, Orhuso universitetas, Danija, 2017 m. sausio 19 d.
- *2nd Conference on Ambit Fields and Related Topics*, Orhusas, Danija, 2017 m. rugpjūčio 14–16 d.
- *34th International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models*, Debrecenas, Vengrija, 2017 m. rugpjūčio 25–29 d.

Literatūra

[1] V. V. Anh, N. N. Leonenko, and M. D. Ruiz-Medina. Macroscaling limit theorems for filtered spatiotemporal random fields. *Stochastic Anal. Appl.*, 31(3):460–508, 2013.

[2] F. Avram and M. S. Taqqu. Noncentral limit theorems and Appell polynomials. *Ann. Probab.*, 15(2):767–775, 1987.

[3] J. Beran. *Statistics for Long-Memory Processes.* Chapman & Hall, New York, 1994.

[4] J. Beran, Y. Feng, S. Ghosh, and R. Kulik. *Long-Memory Processes: Probabilistic Properties and Statistical Methods.* Springer, Berlin Heidelberg, 2013.

[5] J. Beran, M. Schützner, and S. Ghosh. From short to long memory: Aggregation and estimation. *Comput. Statist. Data Anal.*, 54(11):2432–2442, 2010.

[6] H. Biermé, O. Durieu, and Y. Wang. Invariance principles for operator-scaling Gaussian random fields. *Ann. Appl. Probab.*, 27(2):1190–1234, 2017.

[7] H. Biermé, A. Estrade, and I. Kaj. Self-similar random fields and rescaled random balls models. *J. Theoret. Probab.*, 23(4):1110–1141, 2010.

[8] H. Biermé, M. M. Meerschaert, and H.-P. Scheffler. Operator scaling stable random fields. *Stochastic Process. Appl.*, 117(3):312–332, 2007.

[9] E. Bolthausen. On the central limit theorem for stationary mixing random fields. *Ann. Probab.*, 10(4):1047–1050, 1982.

[10] H. Cremers and D. Kadelka. On weak convergence of integral functionals of stochastic processes with applications to processes taking paths in L_p^E. *Stochastic Process. Appl.*, 21(2):305–317, 1986.

[11] R. L. Dobrushin and P. Major. Non-central limit theorems for non-linear functional of Gaussian fields. *Z. Wahrsch. verw. Geb.*, 50(1):27–52, 1979.

[12] C. Dombry and I. Kaj. The on–off network traffic model under intermediate scaling. *Queueing Syst.*, 69(1):29–44, 2011.

[13] P. Doukhan, G. Oppenheim, and M. Taqqu, editors. *Theory and Applications of Long-Range Dependence.* Birkhäuser Boston, 2003.

[14] R. Gaigalas. A Poisson bridge between fractional Brownian motion and stable Lévy motion. *Stochastic Process. Appl.*, 116(3):447–462, 2006.

[15] R. Gaigalas and I. Kaj. Convergence of scaled renewal processes and a packet arrival model. *Bernoulli*, 9(4):671–703, 2003.

[16] L. Giraitis, H. L. Koul, and D. Surgailis. *Large Sample Inference for Long Memory Processes*. Imperial College Press, London, 2012.

[17] L. Giraitis and D. Surgailis. CLT and other limit theorems for functionals of Gaussian processes. *Z. Wahrsch. verw. Geb.*, 70(2):191–212, 1985.

[18] H.-C. Ho and T. Hsing. Limit theorems for functionals of moving averages. *Ann. Probab.*, 25(4):1636–1669, 1997.

[19] I. Kaj, L. Leskelä, I. Norros, and V. Schmidt. Scaling limits for random fields with long-range dependence. *Ann. Probab.*, 35(2):528–550, 2007.

[20] I. Kaj and M. S. Taqqu. Convergence to fractional Brownian motion and to the Telecom process: the integral representation approach. In V. Sidoravicius and M. E. Vares, editors, *In and Out of Equilibrium 2*, pages 383–427. Birkhäuser Basel, 2008.

[21] F. Lavancier. Invariance principles for non-isotropic long memory random fields. *Statist. Inference Stoch. Process.*, 10(3):255–282, 2007.

[22] N. Leonenko. *Random Fields with Singular Spectrum*. Kluwer, Dordrecht, 1999.

[23] T. Mikosch, S. Resnick, H. Rootzén, and A. Stegeman. Is network traffic approximated by stable Lévy motion or fractional Brownian motion? *Ann. Appl. Probab.*, 12(1):23–68, 2002.

[24] V. Pilipauskaitė and D. Surgailis. Joint temporal and contemporaneous aggregation of random-coefficient AR(1) processes. *Stochastic Process. Appl.*, 124(2):1011–1035, 2014.

[25] J. W. Pratt. On interchanging limits and integrals. *Ann. Math. Statist.*, 31(1):74–77, 1960.

[26] D. Puplinskaitė and D. Surgailis. Aggregation of random coefficient AR(1) process with infinite variance and common innovations. *Lith. Math. J.*, 49(4):446–463, 2009.

[27] D. Puplinskaitė and D. Surgailis. Scaling transition for long-range dependent Gaussian random fields. *Stochastic Process. Appl.*, 125(6):2256–2271, 2015.

[28] D. Puplinskaitė and D. Surgailis. Aggregation of autoregressive random fields and anisotropic long-range dependence. *Bernoulli*, 22(4):2401–2441, 2016.

[29] P. M. Robinson. Statistical inference for a random coefficient autoregressive model. *Scand. J. Stat.*, 5(3):163–168, 1978.

[30] D. Surgailis. Zones of attraction of self-similar multiple integrals. *Lith. Math. J.*, 22(3):185–201, 1982.

[31] M. S. Taqqu. Convergence of integrated processes of arbitrary Hermite rank. *Z. Wahrsch. verw. Geb.*, 50(1):53–83, 1979.

Summary

The thesis is devoted to limit theorems for stochastic models with long-range dependence. We first consider a random-coefficient AR(1) process, which can have long memory provided the distribution of autoregressive coefficient concentrates near the unit root. We identify three different limit regimes in the scheme of joint temporal-contemporaneous aggregation for independent copies of random-coefficient AR(1) process and for its copies driven by common innovations. Next, we discuss nonparametric estimation of the distribution of the autoregressive coefficient given multiple random-coefficient AR(1) series. We prove the weak convergence of the empirical process based on estimates of unobservable autoregressive coefficients to a generalized Brownian bridge and apply this result to draw statistical inference from panel AR(1) data. In the second part of the thesis we focus on spatial models in dimension 2. We define a nonlinear random field as the Appell polynomial of a long-range dependent linear random field whose moving average coefficients decay at possibly different rate in the horizontal and vertical directions. For the nonlinear random field, we investigate the limit distribution of its normalized partial sums over rectangles and prove the existence of scaling transition. Finally, we study suchlike scaling of the random grain model with long-range dependence and obtain two-change points in its limits.

Trumpos žinios apie autorę

Išsilavinimas

2013 Vilniaus universiteto finansų ir draudimo matematikos magistras

2011 Vilniaus universiteto *Cum laude* statistikos bakalauras

2007 Pakruojo „Atžalyno“ gimnazija (su pagyrimu)

Mokslinio darbo patirtis

2012– Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos instituto specialistė

2013–2015 Vilniaus universiteto projekto jaunesnioji mokslinė darbuotoja

Pedagoginio darbo patirtis

2017 Vilniaus universiteto lektorė

2013 ISM vadybos ir ekonomikos universiteto lektorė