VILNIAUS UNIVERSITETAS

IEVA GRUBLYTĖ

NETIESINIAI ILGOS ATMINTIES MODELIAI

Daktaro disertacijos santrauka
Fiziniai mokslai, matematika (01P)

Vilnius, 2017

Disertacija rengta 2013-2017 metais Vilniaus Universitete ir Cergy-Pontoise Universitete (Prancūzija).

Mokslinis vadovas - prof. habil. dr. Donatas Surgailis (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).
Mokslinis konsultantas - prof. dr. Paul Doukhan (Cergy-Pontoise universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).

Disertacija ginama viešame disertacijos gynimo tarybos posėdyje:

Pirmininkas - prof. habil. dr. Vygantas Paulauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).
Nariai:
prof. dr. Konstantinos Fokianos (Kipro universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P);
prof. dr. Vytautas Kazakevičius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P);
prof. habil. dr. Kęstutis Kubilius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P);
prof. habil. dr. Vigirdas Mackevičius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).

Disertacija bus ginama viešame disertacijos gynimo tarybos posėdyje 2017 m. spalio 20 d. 14 val. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institute, 203 auditorijoje.
Adresas: Akademijos g. 4, LT-04812, Vilnius, Lietuva.

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2017 m. rugsėjo mėn. 19 d.

Disertaciją galima peržiūrėti Vilniaus universiteto bibliotekoje ir VU internetinėje svetainėje adresu www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius.

VILNIUS UNIVERSITY

IEVA GRUBLYTĖ

MODELLING OF NONLINEAR LONG MEMORY

Summary of Doctoral Dissertation
Physical Sciences, Mathematics (01P)

Vilnius, 2017

The scientific work was carried out in 2013-2017 at Vilnius University and University of Cergy-Pontoise (France).

Scientific Supervisor - Prof. Dr. Habil. Donatas Surgailis (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics - 01P).
Scientific Advisor - Prof. Dr. Paul Doukhan (University of Cergy-Pontoise, Physical Sciences, Mathematics - 01P).

Dissertation will be defended at the Council of Scientific Field of Mathematics at Vilnius University:

Chairman Prof. Dr. Habil. Vygantas Paulauskas (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics - 01P).
Members:
Prof. Dr. Konstantinos Fokianos (University of Cyprus, Physical Sciences, Mathematics - 01P);
Prof. Dr. Vytautas Kazakevičius (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics - 01P);
Prof. Dr. Habil. Kęstutis Kubilius (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics - 01P);
Prof. Dr. Habil. Vigirdas Mackevičius (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics - 01P).

The dissertation will be defended at the public meeting of the Council of Scientific Field of Mathematics on October 20, 2017, at 14 p.m. at Vilnius University, Institute of Mathematics and Informatics, room 203.
Address: Akademijos st. 4, LT-04812, Vilnius, Lithuania.

The summary of the dissertation was distributed on September 19, 2017.
The dissertation is available at the library of Vilnius University.

Disertacinio darbo aprašymas

Tyrimo objektas: ilgoji atmintis

Diskretaus laiko silpnai stacionarus procesas $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ yra vadinamas *ilgos atminties* procesu, jeigu jo kovariacijos $\gamma(k) = \mathrm{Cov}(X_0, X_k)$, kai $k \to \infty$, gęsta tokiu greičiu, kad jo absoliutinių kovariacijų eilutė diverguoja

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma(k)| = \infty. \tag{1}$$

Tuo atveju, kai

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma(k)| < \infty \quad \text{ir} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \gamma(k) \neq 0, \tag{2}$$

procesas $\{X_t\}$ yra vadinamas *trumpos atminties* procesu. Procesas vadinamas *neigiamos atminties* procesu, kai

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma(k)| < \infty \quad \text{ir} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \gamma(k) = 0. \tag{3}$$

Ilgos ir trumpos atminties procesai pasižymi skirtingomis savybėmis. Ilgos atminties procesai yra stebimi įvairiuose fiziniuose, socialiniuose reiškiniuose ir buvo nagrinėti daugelyje monografijų, pavyzdžiui Beran (1997), Doukhan ir kt. (2003), Giraitis ir kt. (2012), Beran ir kt. (2013) ir t.t.

Ilgą, trumpą ir neigiamą atmintį apibrėžiančios (1)-(3) sąlygos yra labai bendros. Asimptotinei teorijai ir statistinėms išvadoms gauti dažnai papildomai apibrėžiamas dar ir proceso kovariacijų $\gamma(k)$ gesimo greitis laikui augant į begalybę. Tiksliau, dažnai yra reikalaujama, kad proceso kovariacijos gestų hiperboliškai, t.y.

$$\gamma(k) = |k|^{-1+2d} L_\gamma(|k|), \quad |k| \geq 1, \qquad 0 < d < 1/2 \tag{4}$$

arba

$$\gamma(k) \ \sim \ c_\gamma |k|^{-1+2d}, \quad k \to \infty, \quad 0 < d < 1/2, \quad c_\gamma > 0, \tag{5}$$

čia $L_\gamma : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ yra lėtai begalybėje kintanti funkcija. (4) ir (5) formulėse esantis parametras $d \in (0, 1/2)$ vadinamas proceso $\{X_t\}$ *ilgos atminties parametru.* Jis apibūdina proceso $\{X_t\}$ ilgos atminties intensyvumą: mažam $d > 0$ kovariacinė funkcija gęsta sąlyginai greitai ir ilgos atminties intensyvumas nėra didelis, tuo tarpu, kai parametras d yra arti $1/2$, kovariacinės funkcijos gęsta labai lėtai, nes laipsnio rodiklis $-1+2d$ yra arti nulio, ir atitinkamas procesas $\{X_t\}$ pasižymi labai stipria atmintimi.

Vienas svarbiausių ilgos atminties modelių yra *tiesinis* arba slenkančio vidurkio procesas

$$X_t \;=\; \sum_{s\le t} b_{t-s}\zeta_s, \qquad t\in\mathbb{Z}, \tag{6}$$

čia $\{\zeta_s, s\in\mathbb{Z}\}$ yra standartizuotų n.v.p. atsitiktinių dydžių seka, o slenkančio vidurkio koeficientai b_j gęsta tokiu greičiu, kad $\sum_{j=0}^{\infty}|b_j| = \infty$ ir $\sum_{j=0}^{\infty} b_j^2 < \infty$. Šios sąlygos užtikrina (6) eilutės konvergavimą kvadratinio vidurkio prasme, be to $\mathrm{E}X_t = 0$, $\mathrm{E}X_t^2 = \sum_{j=0}^{\infty} b_j^2 < \infty$. Literatūroje dažnai laikoma, kad koeficientai b_j gęsta tokiu greičiu

$$b_j \sim \kappa j^{d-1}, \qquad j\to\infty \qquad (\exists\ \kappa>0,\ 0<d<1/2). \tag{7}$$

Iš (7) sąlygos išplaukia (5), t.y.

$$\gamma(k) \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} b_j b_{k+j} \;\sim\; \kappa^2 B(d,1-2d)k^{-1+2d}, \qquad k\to\infty, \tag{8}$$

tuo pačiu ir $\sum_{k=1}^{\infty}|\gamma(k)| = \infty$. Taigi, (7) formulėje esantis parametras d yra proceso $\{X_t\}$ ilgos atminties parametras.

Parametrinių ARFIMA (p,d,q) modelių klasė yra atskiras (6)-(7) tiesinio proceso atvejis, kuriam parametras $d\in(0,1/2)$ nurodo trupmeninio integravimo eilę. Šią klasę sudaro tiesiniai procesai su taip apibrėžtais koeficientais:

$$\sum_{j=0}^{\infty} z^j b_j = (1-z)^{-d}\theta(z)/\varphi(z), \qquad |z|<1, \tag{9}$$

čia $\theta(z) = 1+\theta_1 z+\cdots+\theta_q z^q$ ir $\varphi(z) = 1-\varphi_1 z-\cdots-\varphi_p z^p$ yra $p,q\ge 0$ laipsnio bendrų nulių neturintys polinomai, o $\psi(z)$ - polinomas, neturintis nulių vienetiniame skritulyje $|z|\le 1$.

Atitinkamai normuotas (6)-(7) tiesinio proceso dalinių sumų procesas $S_n(\tau) := \sum_{j=1}^{[nt]} X_j$, $\tau \ge 0$ artėja į trupmeninį Brauno judesį (Davydov (1970)), t.y.,

$$n^{-d-1/2}S_n(\tau) \;\to_{D[0,1]}\; \sigma(d)B_H(t), \tag{10}$$

čia $H = d+\frac{1}{2}$ yra Hursto parametras, $\sigma(d)^2 := \kappa^2 B(d,1-2d)/d(1+2d) > 0$, o $\to_{D[0,1]}$ žymi atsitiktinio proceso silpną konvergavimą Skorochodo erdvėje $D[0,1]$. Pagal apibrėžimą, trupmeninis Brauno judesys B_H yra Gauso procesas su nuliniu vidurkiu ir kovariacine funkcija

$$\mathrm{E}B_H(s)B_H(t) = \frac{1}{2}(t^{2H}+s^{2H}-|t-s|^{2H}), \qquad t,s\ge 0. \tag{11}$$

Pastebėsime, kad normavimas (10) formulėje skiriasi nuo įprasto normavimo iš $n^{1/2}$ silpnai priklausimų dydžių atveju, be to, ribinis procesas B_H, kitaip nei paprastas Brauno judesys, turi *priklausomus prieauglius.* Trupmeninis Brauno judesys yra H-savipanašus ir užima svarbų vaidmenį daugelyje stochastinių procesų taikymų. Aukščiau aptartos dalinių sumų proceso savybės charakterizuoja ilgąją atmintį, tačiau bendru atveju kovariacijų gesimas (5) formulėje nurodytu greičiu dar negarantuoja, kad ribinis dalinių sumų procesas bus trupmeninis Brauno judesys.

Motyvacija ir disertacijos tikslai

Nepaisant paprastumo ir populiarumo, tiesinis procesas turi ir trūkumų. Tiksliau, tiesinis procesas ne visada pasižymi kai kuriomis empirinėse laiko eilutėse stebimomis savybėmis, literatūroje dar vadinamomis “stilizuotais faktais”, pavyzdžiui, asimetrija, klasterizacija, ilga atmintimi ir įvairiais kitais netiesiškumais. Dar vienas svarbus finansinių grąžų “stilizuotas faktas” yra *sąlyginis heteroskedastiškumas* arba tai, jog sąlyginė proceso dispersija

$$\mathrm{Var}[X_{t+1}|\mathcal{F}_t] = \mathrm{E}[(X_{t+1} - \mathrm{E}[X_{t+1}|\mathcal{F}_t])^2|\mathcal{F}_t]$$

yra atsitiktinis procesas. Čia $\mathcal{F}_t$ yra “istorinis” σ-laukas sudarytas iš “visos turimos informacijos” laiko momentu t, o $\mathrm{E}[X_{t+1}|\mathcal{F}_t]$ yra geriausia proceso X_{t+1} prognozė turint šią “informaciją” $\mathcal{F}_t$. (6) tiesinio proceso atveju geriausia prognozė, turint “informaciją” $\mathcal{F}_t = \sigma\{\zeta_s, s \le t\}$, yra $\mathrm{E}[X_{t+1}|\mathcal{F}_t] = b_1\zeta_t + b_2\zeta_{t-2} + \dots$. Taigi $X_{t+1} - \mathrm{E}[X_{t+1}|\mathcal{F}_t] = b_0\zeta_{t+1}$ nepriklauso nuo $\mathcal{F}_t$ ir sąlyginė tiesinio proceso dispersija $\mathrm{Var}[X_{t+1}|\mathcal{F}_t] = b_0^2\mathrm{E}\zeta_t^2$ yra konstanta. Kitaip tariant, modelis yra sąlyginai homoskedastinis. Dėl šios priežasties netiesinių ilgos atminties modelių nagrinėjimas yra labai svarbus uždavinys.

Uždaviniai ir pagrindiniai rezultatai

Pagrindinis disertacijos uždavinys yra pasiūlyti *naujų netiesinių ilgos atminties modelių* ir išplėtoti jų teoriją. Šie procesai pažymi ne tik ilga atmintimi, bet ir kitomis “stilizuotų faktų” savybėmis, pavyzdžiui asimetrija ir sverto savybe, ir galėtų būti naudojami finansinių grąžų modeliavimui. Disertacijoje nagrinėjami procesai yra apibrėžiami kaip stacionarūs tam tikrų *netiesinių stochastinių skirtuminių lygčių* su n.v.p. “triukšmais” sprendiniai. Nagrinėjamas ne tik lygčių išsprendžiamumo klausimas, kuris savaime nėra paprastas, bet ir parodoma, kad esant tam tikroms sąlygoms šie procesai pasižymi (5) ir (10) formulėmis apibrėžtomis ilgos atminties savybėmis. Galiausiai, atskiru netiesinio parametrinio ilgos atminties modelio (GQARCH) atveju parodoma, kad kvazi-didžiausio tikėtinumo metodu gauti parametrų įvertiniai yra suderinti ir asimptotiškai normalūs.

Projekcinės stochastinės lygtys (3 skyrius)

Apibrėžimai ir stacionarus sprendinys

Projekciniu slenkančiuoju vidurkiu vadiname procesą

$$X_t \;=\; \sum_{s\le t} g_{s,t}\zeta_s, \qquad t\in\mathbb{Z}, \tag{12}$$

čia $\{\zeta_s\}$ yra standartizuota n.v.p. atsitiktinių dydžių seka, $g_{t,t}\equiv g_0$ yra konstanta, $g_{s,t}$, $s<t$ yra atsitiktiniai dydžiai priklausantys tik nuo $\zeta_{s+1},\dots,\zeta_t$ ir tenkinantys sąlygą

$$g_{s,t} = g_{t-s}(\zeta_{s+1},\dots,\zeta_t), \qquad s<t,$$

čia $g_j:\mathbb{R}^j\to\mathbb{R}$, $j=1,2,\dots$ yra *deterministinės* funkcijos, kurioms $\sum_{s\le t}\mathrm{E}g_{s,t}^2 < \infty$. Projekcinis slenkantis vidurkis yra griežtai stacionarus ergodinis procesas.

Tegu $Q_{s,t}=Q_{s,t}(x_{u,v}, s<u\le v\le t)$, $s,t\in\mathbb{Z}, s<t$ yra mačios deterministinės funkcijos, priklausančios tik nuo $(t-s)(t-s+1)/2$ realių kintamųjų $x_{u,v}$, $s<t$, o μ_t, $Q_{t,t}$, $t\in\mathbb{Z}$ yra konstantos. *Projekcinėmis stochastinėmis lygtimis* vadiname tokio pavidalo lygtis:

$$X_t \;=\; \mu_t + \sum_{s\le t}\zeta_s Q_{s,t}(\mathrm{E}_{[u,v]}X_v, s<u\le v\le t). \tag{13}$$

Toliau disertacijoje apsiribojame siauresne projekcinių stochastinių lygčių klase:

$$X_t \;=\; \mu + \sum_{s\le t}\zeta_s Q\Big(\alpha_{t-s} + \sum_{s<u\le t}\beta_{t-u,u-s}\left(\mathrm{E}_{[u,t]}X_t - \mathrm{E}_{[u+1,t]}X_t\right)\Big), \tag{14}$$

čia $\{\alpha_i, i\ge 0\}$, $\{\beta_{i,j}, i\ge 0, j\ge 1\}$ yra žinomos realiųjų skaičių sekos, $\mu\in\mathbb{R}$ yra konstanta, o $Q=Q(x)$ mati vieno kintamojo $x\in\mathbb{R}$ funkcija.

1 teoremoje nagrinėjamas (14) projekcinių lygčių išsprendžiamumo klausimas. Tarkime, kad branduolys Q yra aprėžtas tokiu būdu: egzistuoja konstanta $c_Q>0$, kad

$$|Q(x)| \;\le\; c_Q|x|, \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}. \tag{15}$$

Teorema 1 *(3 skyrius, 3.3.1 teorema) (i) Tarkime, kad tenkinama* (15) *sąlyga ir*

$$K_Q \;:=\; \sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i^2\sum_{k=0}^{\infty}c_Q^{2k+2}\sum_{j_1=1}^{\infty}\beta_{i,j_1}^2\cdots\sum_{j_k=1}^{\infty}\beta_{i+j_1+\dots+j_{k-1},j_k}^2<\infty. \tag{16}$$

Tuomet egzistuoja vienintelis (14) *lygties sprendinys* $\{X_t\}$*. Be to, jis užrašomas kaip projekcinis* *slenkantis vidurkis su rekurentiškai apibrėžtais koeficientais $g_{t-k,t}$:*

$$g_{t-k,t} \quad := \quad \begin{cases} Q\Big(\alpha_k + \sum_{i=0}^{k-1} \beta_{i,k-i}\zeta_{t-i} g_{t-i,t}\Big), & k = 1, 2, \ldots, \\ Q(\alpha_k), & k = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Tiksliau,

$$\begin{aligned} X_t \quad &= \quad \mu + Q(\alpha_0)\zeta_t + Q\Big(\alpha_1 + \beta_{0,1}\zeta_t Q(\alpha_0)\Big)\zeta_{t-1} \\ &+ \quad Q\Big(\alpha_2 + \beta_{0,2}\zeta_t Q(\alpha_0) + \beta_{1,1}\zeta_{t-1} Q\Big(\alpha_1 + \beta_{0,1}\zeta_t Q(\alpha_0)\Big)\Big)\zeta_{t-2} + \ldots. \end{aligned}$$

(ii) Tiesinės funkcijos $Q(x) = c_Q x$ atveju (16) *sąlyga yra ir būtina* (14) *lygties sprendinio egzistavimo sąlyga.*

Bendru atveju (16) formulėje esanti sąlyga atrodo sudėtingai. Nagrinėjant atskirus (14) lygties atvejus, atitinkančius $\beta_{i,j} = \beta_{i+j}$ ir $\beta_{i,j} = \beta_j$, (16) sąlyga įgyja paprastesnį pavidalą. Pažymėkime $A^2 := \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^2$.

Teiginys 1 *(i) Tegu $A^2 > 0$, $\beta_{i,j} = \beta_{i+j}$, $i \geq 0$, $j \geq 1$ ir $B^2 := \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i^2$. Tuomet $K_Q < \infty$ yra ekvivalentu $A^2 < \infty$ ir $B^2 < \infty$.*

(ii) Tegu $A^2 > 0$, $\beta_{i,j} = \beta_j$, $i \geq 0$, $j \geq 1$ ir $B^2 := \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^2$. Tuomet $K_Q < \infty$ yra ekvivalentu $A^2 < \infty$ ir $c_Q^2 B^2 < 1$. Be to, $K_Q = c_Q^2 A^2/(1 - c_Q^2 B^2)$.

Pavyzdžiai

1. Baigtinai priklausomos projekcinės lygtys. Nagrinėkime (14) lygtį su koeficientais $\alpha_i = \beta_{i,j} = 0$ visiems $i > m$ tam tikram $m \geq 0$. Kadangi $Q(0) = 0$, minėta lygtis turi tokį pavidalą

$$X_t \quad = \quad \mu + \sum_{t-m<s\leq t} \zeta_s Q\Big(\alpha_{t-s} + \sum_{s<u\leq t} \beta_{t-u,u-s}\left(\mathrm{E}_{[u,t]}X_t - \mathrm{E}_{[u+1,t]}X_t\right)\Big), \tag{18}$$

čia dešinė lygties pusė yra $\mathcal{F}_{[t-m+1,t]}$-mati. Kitaip tariant, (18) lygtimi apibrėžtas procesas $\{X_t\}$ yra m-priklausomas.

2. Tiesinis branduolys Q. Tiesinio branduolio $Q(x) = c_Q x$ atveju (14) lygties sprendinys yra užrašomas tokiu būdu:

$$X_t = \mu + \sum_{k=1}^{\infty} X_t^{(k)},$$

čia $X_t^{(1)} = c_Q \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \zeta_{t-i}$ yra tiesinis procesas, o kiekvienam $k \geq 1$

$$X_t^{(k+1)} \quad = \quad c_Q^{k+1} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{\infty} \beta_{i,j_1} \cdots \beta_{i+j_1+\cdots+j_{k-1},j_k} \zeta_{t-i}\zeta_{t-i-j_1} \cdots \zeta_{t-j_1-\cdots-j_k}$$

yra $k+1$ eilės Volterra eilutė (žr. Dedecker ir kt. (2007), p.22). Be to, eilutės $X_t^{(k)}, k \geq 1$ yra ortogonalios ta prasme, kad $\mathrm{E}X_t^{(k)}X_s^{(\ell)} = 0$, $t, s \in \mathbb{Z}$, $k, \ell \geq 1$, $k \neq \ell$.

3. LARCH modelis. Robinson (1991) įvestas tiesinis ARCH (LARCH) modelis yra užrašomas lygtimis

$$r_t = \sigma_t \zeta_t, \quad \sigma_t = \alpha + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j r_{t-j}, \tag{19}$$

čia $\{\zeta_t\}$ yra standartizuota n.v.p. atsitiktinių dydžių seka, koeficientai β_j tenkina sąlygą $B := \Big\{\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^2\Big\}^{1/2} < \infty$. Finansiniuose modeliavimuose r_t atitinka finansines grąžas, o σ_t žymi jų kintamumus. LARCH modelis buvo nagrinėtas Berkes ir Horváth (2003), Giraitis ir kt. (2000), Giraitis ir Surgailis (2002), Giraitis ir kt. (2004) ir kituose darbuose. Ypatingai įdomus atvejis yra kuomet β_j koeficientai (19) modelyje yra proporcingi ARFIMA modelio koeficientams - šiuo atveju galima griežtai įrodyti, kad kintamumo ir grąžų kvadratų procesai pasižymi ilga atmintimi. Yra žinoma (Giraitis ir kt. (2000)), kad griežtai stacionarus (19) lygties sprendinys $\{r_t\}$ su baigtiniu antruoju momentu egzistuoja tada ir tik tada, kai

$$B \ < \ 1. \tag{20}$$

Be to, šiuo atveju modelio sprendinys yra užrašomas konverguojančia ortogonalia Volterra eilute

$$r_t = \sigma_t \zeta_t, \quad \sigma_t = \alpha\Big(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{\infty} \beta_{j_1} \cdots \beta_{j_k} \zeta_{t-j_1} \cdots \zeta_{t-j_1-\dots-j_k}\Big).$$

Ši eilutė yra atskiras Volterra eilučių, nagrinėtų ankstesniame pavyzdyje, atvejis. Tai leidžia daryti išvadą, kad galiojant (20) sąlygai, LARCH modelio kintamumo procesas $\{X_t = \sigma_t\}$ tenkina (14) projekcinę lygtį su tiesiniu branduoliu $Q(x) = x$ ir $\alpha_j = \alpha\beta_j$. Be to, (20) sąlyga sutampa su 1 teiginio (ii) dalies sąlyga $c_Q^2 B^2 < 1$, garantuojančia (14) lygties sprendinio egzistavimą.

4. Projekcinės "slenksčio" lygtys. Nagrinėkime projekcinę lygtį

$$X_t \ = \ \zeta_t + \sum_{j=1}^{p} \zeta_{t-j} Q\Big(\mathrm{E}_{[t-j+1,t]} X_t\Big), \tag{21}$$

čia $1 \leq p < \infty$, Q yra aprėžta mati funkcija tenkinanti sąlygą $Q(0) = 1$. Tarkime, kad Q yra laiptinė funkcija $Q(x) = \sum_{k=1}^{q} c_k \mathbf{1}(x \in I_k)$, čia $\cup_{k=1}^{q} I_k = \mathbb{R}$ yra $\mathbb{R}$ skaidinys į nesikertančius intervalus $I_k, 1 \leq k \leq q$. Tuomet (21) lygtimi apibrėžtas procesas pasižymi skirtingais "slenkančio vidurkio režimais" skirtinguose regionuose $\mathrm{E}_{[t-j+1,t]} X_t \in I_k, 1 \leq j \leq p$ ir sukuria "projekcinį slenksčio efektą".

Ilgoji atmintis

Žemiau esančioje teoremoje nagrinėjamos (14) lygtimi apibrėžtų projekcinių procesų ilgos atminties savybės (lėtas kovariacijų gesimas ir dalinių sumų ribinis procesas) tuo atveju, kai koeficientai α_j gęsta laipsniškai greičiu $j^{d-1}, 0 < d < 1/2$.

Teorema 2 *(3 skyrius, 3.7.1 teorema) Tegu $\{X_t\}$ yra (14) projekcinės lygties sprendinys, tenkinantis 1 teoremos sąlygas ir turintis vidurkį $\mu = \mathrm{E}X_t = 0$. Taip pat tarkime, kad Q yra Lipšico funkcija, t.y. egzistuoja tokia konstanta $c_L > 0$, kad*

$$|Q(x) - Q(y)| \;<\; c_L|x-y|, \qquad x, y \in \mathbb{R}, \tag{22}$$

ir egzistuoja tokie $\kappa > 0$ ir $0 < d < 1/2$, kad $b_j := Q(\alpha_j) \;\sim\; \kappa\, j^{d-1}$, kai $j \to \infty$, ir $\bar{\beta}_j := \max_{0 \le i < j} |\beta_{i,j-i}| = o(b_j)$, kai $j \to \infty$. Tuomet, kai $t \to \infty$,

$$\mathrm{E}X_0X_t \;\sim\; \sum_{k=0}^{\infty} b_k b_{t+k} \;\sim\; \kappa_d^2 t^{2d-1}, \tag{23}$$

čia $\kappa_d^2 := \kappa^2 B(d, 1-d)$, $B(d, 1-d)$ yra beta funkcija. Be to, kai $n \to \infty$,

$$n^{-1/2-d} \sum_{t=1}^{[n\tau]} X_t \;\longrightarrow_{D[0,1]}\; c_{\kappa,d} B_H(\tau), \tag{24}$$

čia $c_{\kappa,d}^2 := \frac{\kappa^2 B(d,1-d)}{d(1+2d)}$, B_H yra trupmeninis Brauno judesys su parametru $H = d+1/2$ ir dispersija $\mathrm{E}B_H^2(t) = t^{2H}$.

Atskiru atveju, kai $\beta_{i,j} \equiv 0$, procesas X_t sutampa su tiesiniu procesu $Y_t := \sum_{s \le t} b_{t-s}\zeta_s$, kuriam 2 teoremos teiginiai yra gerai žinomi. Bendru atveju (23) ir (24) savybių įrodymuose remiamasi tuo, kad procesas $\{X_t\}$ gali būti aproksimuotas tiesiniu procesu $\{Y_t\}$ taip, kad $\mathrm{Cov}(X_t - Y_t, X_s - Y_s) = o((t-s)^{2d-1})$, $|t-s| \to \infty$. Įrodymas $D[0,1]$ erdvėje seka iš (23) ir Kolmogorovo kriterijaus.

Netiesinis sąlyginio heteroskedastiškumo modelis su ilga atmintimi (4 skyrius)

Engle (1982) straipsnyje (taip pat žr. Bollerslev ir kt. (1992)) ARCH modelis yra apibrėžiamas kaip atsitiktinis procesas, turintis tokį pavidalą

$$r_t = \zeta_t \sigma_t, \tag{25}$$

čia $\{\zeta_t, t \in \mathbb{Z}\}$ yra standartizuota n.v.p. atsitiktinių dydžių seka, σ_t yra laike kintanti teigiama mati funkcija, priklausanti nuo informacijos laiko momentu $t-1$. Kai turima visa praeities informacija $r_s, s < t$, kintamumas yra mati funkcija, priklausanti nuo $r_s, s < t$: $\sigma_t = V(r_s, s < t)$.

ARCH(∞) modelį atitinka $V(x_1, x_2, \cdots) = \left(a + \sum_{j=1}^{\infty} b_j x_j^2\right)^{1/2}$ arba

$$\sigma_t^2 = a + \sum_{j=1}^{\infty} b_j r_{t-j}^2, \tag{26}$$

čia $a \geq 0$, $b_j \geq 0$ yra koeficientai. ARCH(∞) modeliai apima gerai žinomus ARCH(p) ir GARCH(p, q) modelius, nagrinėtus Engle (1982) ir Bollerslev (1986). Nepaisant milžiniškos sėkmės, GARCH modeliai negali atvaizduoti kai kurių empirinėse grąžose stebimų faktų, pavyzdžiui asimetrijos, sverto efekto, kuris buvo pirmą kartą paminėtas Black (1976), ir lėto gražų kvadratų proceso $\{r_t^2\}$ autokoreliacijų gesimo (ilgos atminties grąžų kvadratuose). Giraitis ir Surgailis (2002) parodė, kad stacionaraus ARCH(∞) modelio, aprašomo (26) lygtimi su $a > 0$, sprendinio kvadratų procesas visada turi trumpą atmintį ta prasme, kad $\sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{Cov}(r_0^2, r_j^2) < \infty$.

Šie ARCH(∞) modelio trūkumai paskatino daugybę tyrimų, kuriuose buvo mėginama pasiūlyti alternatyvias sąlyginio kintamumo ir funkcijos $V(x_1, x_2, \cdots)$ formas. Sentana (1995) nagrinėjo QARCH modelių klasę, kuriai σ_t^2 yra užrašomas kvadratine forma, sudaryta iš praeities grąžų $r_{t-1}, \cdots, r_{t-p}$. Sentanos nagrinėjamas σ_t^2 apima daug ARCH tipo modelių, pavyzdžiui, Engle (1990) pasiūlytą asimetrinį ARCH modelį ir Robinson (1991) įvestą "tiesinės standartinės deviacijos" modelį. Ribiniu pastarojo modelio atveju (imdami $p = \infty$) gauname (19) lygtimis užrašomą LARCH modelį, kuris atitinka $V(x_1, x_2, \cdots) = a + \sum_{j=1}^{\infty} b_j x_j$. Kaip jau minėjome, stacionaraus LARCH modelio su lėtai gęstančiais koeficientais b_j ($b_j \sim c j^{d-1}, 0 < d < 1/2$) sprendinio kvadratų procesas $\{r_t^2\}$ gali turėti ilgos atminties autokoreliacijas. Giraitis ir kt. (2004) detaliai nagrinėjo sverto savybę LARCH modelyje. Nepaisant šių teigiamų modelio savybių, σ_t procesas LARCH modelyje neatitinka įprastinės kintamumo interpretacijos, kadangi gali įgyti neigiamas reikšmes.

Disertacijoje nagrinėjama (25) formule apibrėžta sąlyginio heteroskedastiškumo modelių klasė su tokio pavidalo funkcija V:

$$V(x_1, x_2, \cdots) = Q(a + \sum_{j=1}^{\infty} b_j x_j), \tag{27}$$

čia $Q(x), x \in \mathbb{R}$ yra (netiesinė) vieno kintamojo $x \in \mathbb{R}$ funkcija, kuri gali būti atskirta nuo nulio teigiama konstanta: $Q(x) \geq c > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Pastebėsime, kad tiesinė funkcija $Q(x) = x$ atitinka LARCH modelį (19) formulėje. Turbūt įdomiausia ir modelio savybių analizei labiausiai tinkama netiesinė funkcija Q (27) formulėje yra

$$Q(x) = \sqrt{c^2 + x^2},$$

čia $c \geq 0$ yra parametras. Šiuo atveju modelis yra užrašomas lygtimis

$$r_t \;=\; \zeta_t \sigma_t, \qquad \sigma_t^2 \;=\; c^2 + \Big(a + \sum_{s<t} b_{t-s} r_s\Big)^2, \tag{28}$$

o kintamumas $\sigma_t \geq c \geq 0$ (28) modelyje yra neneigiamas ir atskirtas nuo 0, kai $c > 0$. (28) modelis yra vadinamas *kvadratiniu ARCH (QARCH) modeliu.* Šis modelis ir apibendrinta jo versija, į kurią papildomai įtraukiamas ir praeities kintamumas σ_{t-1}^2, yra detaliai nagrinėjami disertacijoje.

Stacionarus sprendinys

Pirmiausia nagrinėjame (25), (27) modelį su bendro pavidalo funkcija Q, t.y.

$$r_t = \zeta_t Q\Big(a + \sum_{s<t} b_{t-s} r_s\Big), \qquad t \in \mathbb{Z}. \tag{29}$$

Apibrėžkime

$$B_p := \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^p, & 0 < p < 2, \\ \big(\sum_{j=1}^{\infty} b_j^2\big)^{p/2}, & p \geq 2. \end{cases} \tag{30}$$

Žemiau pateiktoje teoremoje gaunama pakankama (29) lygties stacionaraus sprendinio su $\mathrm{E}|r_t|^p < \infty$ egzistavimo sąlyga (31). Į (31) išraišką įeina proceso inovacijų p-tos eilės momentai $|\mu|_p := \mathrm{E}|\zeta_t|^p$, Lipšičo konstanta Lip_Q, (30) formule apibrėžta eilutė B_p ir Rosenthal konstanta K_p (žr. disertacijos 4 skyrių, (4.13) formulę 4.2.1 teiginyje). 3 teoremos (ii) dalyje parodoma, kad, kai $p = 2$, (31) sąlyga yra beveik optimali – kvadratinės funkcijos $Q^2(x) = c_1^2 + c_2^2 x^2$ atveju ji tampa ir būtina sprendinio egzistavimo sąlyga.

Teorema 3 *(4 skyrius, 4.2.1 teorema) Tarkime, kad Q yra Lipšico funkcija, o $p > 0$ laisvai pasirenkamas.*

(i) Tarkime, kad

$$K_p |\mu|_p \mathrm{Lip}_Q^p B_p < 1. \tag{31}$$

Tuomet egzistuoja vienintelis (29) *lygčių stacionarus L^p-sprendinys $\{r_t\}$ ir*

$$\mathrm{E}|r_t|^p \;\leq \frac{(1 + C(p,Q))|\mu|_p B_p}{1 - K_p |\mu|_p \mathrm{Lip}_Q^p B_p}, \tag{32}$$

čia $C(p,Q) < \infty$ priklauso tik nuo $p, Q(0)$ ir Lip_Q.

(ii) Papildomai tarkime, kad $Q^2(x) = c_1^2 + c_2^2 x^2$, čia $c_i \geq 0, i = 1,2$, $\mu_2 = \mathrm{E}\zeta_0^2 = 1$. Tuomet $c_2^2 B_2 < 1$ yra būtina ir pakankama (29) *lygčių $a \neq 0$ stacionaraus L^2-sprendinio $\{r_t\}$ egzistavimo sąlyga.*

Silpna priklausomybė

Literatūroje yra pasiūlyta daug įvairių stacionarių procesų $\{y_t\} = \{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ silpnos priklausomybės matų, žr. pvz. Dedecker ir Prieur (2007). Dažniausiai priklausomybė tarp dabarties ($t \geq 0$) ir praeities ($t \leq -n$) reikšmių yra matuojama tam tikrais priklausomybės koeficientais, kurie gęsta, kai $n \to \infty$. Koeficientų gesimo greitis atlieka svarbų vaidmenį nagrinėjant asimptotikas. Disertacijoje nagrinėjama (29) lygčių stacionaraus sprendinio $\{r_t\}$ silpna priklausomybė naudojant du silpnos priklausomybės matus - Wu ir Min (2005) pasiūlytus projekcinius silpnos priklausomybės koeficientus $\delta_p(k;\{r_t\})$ ir τ-priklausomybės koeficientus $\delta_p(k;\{r_t\})$, pasiūlytus Dedecker ir Prieur (2004), Dedecker ir Prieur (2005). Disertacijoje parodoma, kad minėtu atveju šių silpnos priklausomybės koeficientų gesimo greitis priklauso nuo slenkančio vidurkio koeficientų b_j.

Teiginys 2 *Tarkime, kad Q tenkina Lipšico sąlygą, $p \geq 1$, $K_p|\mu|_p \mathrm{Lip}_Q^p B_p < 1$ (žr.* (31)*), ir $\{r_t\}$ yra* (29) *lygties stacionarus L^p-sprendinys.*
(i) (4 skyrius,4.3.1 teiginys) Be to, tarkime, kad b_j yra tokie, kad

$$\exists \gamma > 0,\ c > 0 : \qquad |b_j| < cj^{-\gamma}, \quad \forall\ j \geq 1, \tag{33}$$

čia $\gamma > \max\{1/2, 1/p\}$.
Tuomet

$$\delta_p(k;\{r_t\}) = O(k^{-\gamma}). \tag{34}$$

(ii) (4 skyrius,4.3.2 išvada) Be to, tarkime, kad b_j tenkina (33) *sąlygą su $\gamma > 1$. Tuomet*

$$\tau_p(k;\{r_t\}) = O(k^{-\gamma+1}). \tag{35}$$

Stipri priklausomybė

Netiesinio (29) ARCH modelio su laipsniškai gęstančiais koeficientais b_j:

$$b_j \ \sim\ \beta\, j^{d-1} \qquad (\exists\ 0 < d < 1/2,\ \beta > 0) \tag{36}$$

atveju galima tikėtis stiprios priklausomybės (ilgos atminties). Šia savybe turėtų pasižymėti kintamumas $\sigma_t = Q(a + X_t)$, nes pačios grąžos $\{r_t = \zeta_t Q(a + X_t)\}$ sudaro nekoreliuotų martingalinių skirtumų seką. Kadangi ilgos atminties įrodymas bendro pavidalo funkcijai Q yra nelengvas uždavinys, toliau apsiribojame QARCH modeliu, apibrėžtu (28) lygtimi.

Teorema 4 *(4 skyrius, 4.4.2 teorema) Tarkime, kad $\{r_t\}$ yra* (28) *lygčių sistemos stacionarus L^2-sprendinys su koeficientais b_j, tenkinančiais* (36) *sąlygą ir $B^2 = \sum_{j=1}^{\infty} b_j^2 < 1$. Be to,* *tarkime, kad* $\mu_4 = \mathrm{E}[\zeta_0^4] < \infty$ *ir* $\mathrm{E}r_t^4 < \infty$*. Tuomet*

$$\mathrm{Cov}(r_0^2, r_t^2) \ \sim \ \kappa_1^2 t^{2d-1}, \qquad t \to \infty, \tag{37}$$

čia $\kappa_1^2 := \left(\frac{2a\beta}{1-B^2}\right)^2 B(d, 1-2d)\mathrm{E}r_0^2$*. Be to,*

$$n^{-d-1/2} \sum_{t=1}^{[n\tau]} (r_t^2 - \mathrm{E}r_t^2) \ \to_{D[0,1]} \ \kappa_2 B_{d+(1/2)}(\tau), \qquad n \to \infty, \tag{38}$$

čia $B_{d+1/2}$ *yra trupmeninis Brauno judesys,* $\kappa_2^2 := \kappa_1^2/(d(1+2d))$*.*

Sverto savybė

Nagrinėjant stacionarias sąlyginio heteroskedaškumo laiko eilutes $\{r_t\}$ su $\mathrm{E}|r_t|^3 < \infty$, sverto savybė (tendencija, jog σ_t^2 ir r_s, $s < t$, juda priešingomis kryptimis) dažniausiai yra apibrėžiama naudojant kovariacijas $h_{t-s} = \mathrm{Cov}(\sigma_t^2, r_s)$. Sekdami Giraitis ir kt. (2004), sakome, kad $\{r_t\}$ pasižymi k *eilės sverto savybe* ($1 \le k < \infty$) (žymime $\{r_t\} \in \ell(k)$), jei

$$h_j < 0, \qquad 1 \le j \le k. \tag{39}$$

Žemiau esančioje teoremoje sverto savybė nagrinėjama QARCH modeliui su $\mu_3 = \mathrm{E}[\zeta_0^3] = 0$, jos rezultatai analogiški Giraitis ir kt. (2004) 2.4 teoremos rezultatams LARCH modelio atveju.

Teorema 5 *(4 skyrius, 4.5.1 teorema) Tarkime,* $\{r_t\}$ *yra* (28) *formule užrašomo QARCH modelo su* $\mathrm{E}|r_0|^3 < \infty, |\mu|_3 < \infty$ *stacionarus* L^2*-sprendinys. Be to, tarkime, kad* $B^2 < 1/5$ *ir* $\mu_3 = \mathrm{E}\zeta_0^3 = 0$*. Tuomet visiems* k*,* $1 \le k \le \infty$ *teisinga*

(i) jei $ab_1 < 0$*,* $ab_j \le 0$*,* $j = 2, \cdots, k$*, tai* $\{r_t\} \in \ell(k)$*,*

(ii) jei $ab_1 > 0$*,* $ab_j \ge 0$*,* $j = 2, \cdots, k$*, tai* $h_j > 0$*,* $j = 1, \cdots, k$*.*

Apibendrinimas: GQARCH modelis

Analogiškus skyriaus rezultatus gauname ir apibendrintai kintamumų klasei

$$r_t \ = \ \zeta_t \sigma_t, \qquad \sigma_t^2 \ = \ Q^2\Big(a + \sum_{j=1}^{\infty} b_j r_{t-j}\Big) + \gamma \sigma_{t-1}^2, \tag{40}$$

čia $\{\zeta_t\}, a, b_j, Q(x)$ tokie patys, kaip (25),(27) lygtyse, o $0 < \gamma < 1$ yra parametras. Praeities kintamumo σ_{t-1}^2 įtraukimas į (40) formulę padeda sušvelninti volatilumo klasterizaciją ir labai aštrias viršūnes proceso trajektorijose. (25),(27) modelio apibendrinimas (40) modeliu yra analogiškas ARCH ir GARCH modeliams, žr. Engle (1982), Bollerslev (1986).

(40) modelio atveju 3, 4 ir 5 teoremoms analogiški rezultatai yra gaunami konstantą B_p pakeičiant dydžiu

$$B_{p,\gamma} := \begin{cases} B_p/(1-\gamma^{p/2}), & 0 < p < 2, \\ B_p/(1-\gamma)^{p/2}, & p \geq 2, \end{cases}$$

čia B_p apibrėžta (30) formule. Be to, $B_p = B_{p,0}$.

Pagrindinis 3 teoremos (ir apibendrinto jos analogo) trūkumas yra tai, kad teoremos formuluotėje naudojama universali Burkholder-Rosenthal konstanta K_p (žr. (31) sąlygą), kurios tiksli reikšmė nėra žinoma. Kai $p > 2$, Osękowski (2012) gautas viršutinis K_p konstantos rėžis reikalauja labai griežtų sąlygų konstantai $B_{p,\gamma}$ ir kitiems dyžiams (31) sąlygoje, užtikrinančioje L^p-sprendinio egzistavimą.

Dauguma disertacijos rezultatų (taip pat ir statistinės išvados, kurios remiasi “stebimais” grąžų kvadratais $r_t^2, 1 \leq t \leq n$) reikalauja, kad egzistuotų $\mathrm{E}r_t^4$ arba aukštesnės eilės proceso r_t momentai (žr. pvz. Grublytė ir kt. (2017)). Taigi, labai svarbu rasti kuo silpnesnes sąlygas šių momentų egzistavimui, kurios neįtrauktų Rosentalio konstantos K_p. Tai buvo pasiekta 6 teoremoje.

Teorema 6 *(4 skyrius, 4.6.2 teorema) Tarkime, kad* $\{\zeta_t\}$ *ir funkcija* Q *tenkina 3 teoremos sąlygas. Tegu* $p = 2, 4, \ldots$ *ir*

$$\sum_{j=2}^{p} \binom{p}{j} |\mu_j| \mathrm{Lip}_Q^j \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^j \ < \ (1-\gamma)^{p/2}. \tag{41}$$

Tuomet egzistuoja vienintelis (40) *lygties stacionarus sprendinys* $\{r_t\}$*, kuriam* $\mathrm{E}|r_t|^p < \infty$*.*

Atskiru atveju, kai $\gamma = 0$ ir $\mathrm{Lip}_Q = 1$, pakankama stacionaraus sprendinio su baigtiniu $\mathrm{E}r_t^p, p \geq 2$ egzistavimo sąlyga (41) formulėje tampa

$$\sum_{j=2}^{p} \binom{p}{j} |\mu_j| \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^j \ < \ 1. \tag{42}$$

(42) sąlyga sutampa su atitinkama LARCH modelio sąlyga (Giraitis ir kt. (2004), 3 teiginys). Be to, (42) ir (41) galioja ir (40) bendro pavidalo ARCH modeliams, kuriems neveikia Volterra eilutėmis pagrįsti metodai, naudojami Giraitis ir kt. (2000), Giraitis ir kt. (2004).

Parametrų vertinimas kvazi-didžiausio tikėtinumo metodu GQARCH modelyje su ilga atmintimi (5 skyrius)

Disertacijoje nagrinėjamas apibendrinto QARCH modelio (GQARCH) parametrų vertinimas kvazi-didžiausio tikėtinumo metodu. Tiksliau, nagrinėjamas (40) modelis su $Q(x) = \sqrt{\omega^2 + x^2}$

ir lėtai gęstančiais koeficientais $b_j = cj^{d-1}$

$$r_t = \zeta_t \sigma_t, \quad \sigma_t^2 = \omega^2 + \Big(a + c\sum_{j=1}^{\infty} j^{d-1} r_{t-j}\Big)^2 + \gamma\sigma_{t-1}^2, \tag{43}$$

priklausantis nuo parametrų $\theta = (\gamma, \omega, a, d, c),\ 0 < \gamma < 1,\ \omega > 0,\ a \neq 0,\ c \neq 0$ ir $d \in (0, 1/2)$. Be to, reikalaujama, kad (43) modelis tenkintų (A) ir (B) prielaidas:

(A) prielaida. $\{\zeta_t\}$ yra standartizuota n.v.p. atsitiktinių dydžių seka, kuriai $\mathrm{E}\zeta_t = 0, \mathrm{E}\zeta_t^2 = 1$.

(B) prielaida. $\Theta \subset \mathbb{R}^5$ yra kompaktiška parametrų $\theta = (\gamma, \omega, a, d, c)$ aibė, kuriai galioja

(i) $\gamma \in [\gamma_1, \gamma_2]$, $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < 1$;

(ii) $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$, $0 < \omega_1 < \omega_2 < \infty$;

(iii) $a \in [a_1, a_2]$, $-\infty < a_1 < a_2 < \infty$;

(iv) $d \in [d_1, d_2]$, $0 < d_1 < d_2 < 1/2$;

(v) $c \in [c_1, c_2]$, čia $0 < c_i = c_i(d, \gamma) < \infty,\ c_1 < c_2$ yra tokie, kad $B_2 = c^2 \sum_{j=1}^{\infty} j^{2(d-1)} < 1 - \gamma$ su visais $c \in [c_1, c_2], \gamma \in [\gamma_1, \gamma_2], d \in [d_1, d_2]$.

Papildoma sąlyga parametrui c (v) dalyje atsiranda iš (41) sąlygos, kai $p = 2$.

Tegu toliau $\{r_t, 1 \leq t \leq n\}$ yra (43) modelio su parametru $\theta_0 = (\gamma_0, \omega_0, a_0, d_0, c_0)$, priklausančiu Θ srities vidui Θ_0, stebėjimai.

Analogiškai Beran ir Schützner (2009) nagrinėjame kvazi-didžiausio tikėtinumo (QML) įvertinį $\widehat{\theta}_n := \arg\min_{\theta\in\Theta} L_n(\theta)$, $L_n(\theta) := \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\Big(\frac{r_t^2}{\sigma_t^2(\theta)} + \log\sigma_t^2(\theta)\Big)$, kurį sudaro tikslios sąlyginių kintamumų (43) formulėje išraiškos, priklausančios nuo be galo daug praeities grąžų $r_s, -\infty < s < t$, ir realistiškesnę jo versiją $\widetilde{\theta}_n := \arg\min_{\theta\in\Theta} \widetilde{L}_n(\theta)$, kuri gaunama $\sigma_t^2(\theta)$ kintamumus (43) formulėje pakeičiant $\widetilde{\sigma}_t^2(\theta)$ kintamumais, kurie priklauso tik nuo baigtinio skaičiaus grąžų $r_s, 1 \leq s < t$. Ilga atmintis, kuria pasižymi kintamumo procesas, lemia, kad $\widetilde{\theta}_n$ konvergavimo greitis yra per lėtas užtikrinti asimptotinį normalumą. Dėl šios priežasties apibrėžiamas "nukirptas" įvertinys $\widetilde{\theta}_n^{(\beta)}$, kuriame naudojama tik $O(n^\beta)$ paskutinių kvazi-tikėtinumo funkcijų: $\widetilde{\theta}_n^{(\beta)} := \arg\min_{\theta\in\Theta} \widetilde{L}_n^{(\beta)}(\theta)$, $\widetilde{L}_n^{(\beta)}(\theta) := \frac{1}{[n^\beta]}\sum_{t=n-[n^\beta]+1}^{n}\Big(\frac{r_t^2}{\widetilde{\sigma}_t^2(\theta)} + \log\widetilde{\sigma}_t^2(\theta)\Big)$, čia $0 < \beta < 1$ yra "lango" parametras.

7 ir 8 teoremų rezultatai yra analogiški Beran ir Schützner (2009) 1-4 teoremose gautiems rezultatams parametrinio (19) LARCH modelio su $b_j = cj^{d-1}$ atveju, tik Beran ir Schützner (2009) nagrinėja modifikuotą QML įvertinį, į kurio tikėtinumo funkcijas dar papildomai įeina "labai mažas" parametras $\epsilon > 0$.

Pažymėkime

$$B(\theta) \ = \ \mathrm{E}[\sigma_t^{-4}(\theta)\nabla^T\sigma_t^2(\theta)\nabla\sigma_t^2(\theta)] \quad \text{ir} \quad A(\theta) = \kappa_4 B(\theta), \tag{44}$$

čia $\kappa_4 := \mathrm{E}(\zeta_0^2 - 1)^2 > 0$, $\nabla = (\partial/\partial\theta_1, \cdots, \partial/\partial\theta_5)$, o indeksas T žymi transponuotą vektorių.

Teorema 7 *(5 skyrius, 5.3.1 teorema) (i) Tarkime, kad* $\mathrm{E}|r_t|^3 < \infty$. *Tuomet* $\widehat{\theta}_n$ *yra suderintas parametro* θ_0 *įvertinys, t.y.*

$$\widehat{\theta}_n \overset{b.t.}{\to} \theta_0.$$

(ii) Tarkime, kad $\mathrm{E}|r_t|^5 < \infty$. *Tuomet* $\widehat{\theta}_n$ *yra asimptotiškai normalus:*

$$n^{1/2}\Big(\widehat{\theta}_n - \theta_0\Big) \overset{dist.}{\to} N(0, \Sigma(\theta_0)), \tag{45}$$

čia $\Sigma(\theta_0) := B^{-1}(\theta_0)A(\theta_0)B^{-1}(\theta_0) = \kappa_4 B^{-1}(\theta_0)$, *matricos* $A(\theta), B(\theta)$ *apibrėžtos* (44) *formulėmis.*

Teoremoje žemiau gaunami asimptotiniai rezultatai “baigtinės praeities” įvertiniams $\widetilde{\theta}_n$ ir $\widetilde{\theta}_n^{(\beta)}$.

Teorema 8 *(5 skyrius, 5.3.2 teorema) (i)Tarkime, kad* $\mathrm{E}|r_t|^3 < \infty$ *ir* $0 < \beta < 1$. *Tuomet*

$$\mathrm{E}|\widetilde{\theta}_n - \theta_0| \;\to\; 0 \qquad ir \qquad \mathrm{E}|\widetilde{\theta}_n^{(\beta)} - \theta_0| \;\to\; 0.$$

(ii) Tarkime, kad $\mathrm{E}|r_t|^5 < \infty$ *ir* $0 < \beta < 1 - 2d_0$. *Tuomet*

$$n^{\beta/2}(\widetilde{\theta}_n^{(\beta)} - \theta_0) \overset{dist.}{\to} N(0, \Sigma(\theta_0)), \tag{46}$$

čia $\Sigma(\theta_0)$ *apibrėžta taip pat, kaip 7 teoremoje.*

7 ir 8 teoremose esantis reikalavimas, kad egzistuotų atitinkami baigtiniai momentai, yra analogiškas LARCH modeliui naudotiems reikalavimams Beran ir Schützner (2009) darbe. Šiuo atveju, situacija labai skiriasi nuo GARCH modelių, kuriems QML įvertinių suderinamumas ir asimptotinis normalumas įrodomi iš esmės nenaudojant jokių sąlygų stebimų procesų momentų egzistavimui (žr. pvz. Francq ir Zakoian (2010), 7 skyrių). Minėti skirtumai atsiranda daugiausia dėl to, kad parametro d atžvilgiu diferencijuojant procesą $Y_t(d) := \sum_{j=1}^{\infty} j^{d-1} r_{t-j}$, esantį (43) kintamumo formoje, veikiami visi eilutės nariai ir gaunamas “naujas” ilgos atminties procesas $\partial^i Y_t(d)/\partial d^i = \sum_{j=1}^{\infty} j^{d-1}(\log j)^i r_{t-j}, i = 1, 2, 3$. Rasti šių naujų procesų viršutinius rėžius yra nelengva užduotis ir dėl šios priežasties kontroliuoti tikėtinumo funkcijų išvestines GQARCH atveju tampa žymiai sudėtingiau negu GARCH atveju.

Išvados

Disertacijoje nagrinėti nauji netiesiniai ilgos atminties modeliai, kurie gali būti naudojami finansinių grąžų modeliavimui. Šie procesai apibrėžti kaip stacionarūs tam tikrų netiesinių stochastinių skirtuminių lygčių su n.v.p. “triukšmais” sprendiniai. Nagrinėtas sprendinio egzistavimas ir įrodytos ilgos atminties savybės. Galiausiai, atskiru netiesinio parametrinio ilgos atminties GQARCH modelio atveju parodytas kvazi-didžiausio tikėtinumo metodu gautų parametrų įverčių suderinamumas ir asimptotinis normalumas.

Rezultatų sklaida

Pranešimai

Disertacijos rezultatai buvo pristatyti šiose mokslinėse konferencijose ir seminaruose:

- 54-oji Lietuvos matematikų draugijos konferencija (Vilnius, Lietuva) 2013 m. birželio 19-20 d.
- 55-oji Lietuvos matematikų draugijos konferencija (Vilnius, Lietuva) 2014 m. birželio 26-27 d.
- 11-oji Tarptautinė Vilniaus tikimybių teorijos ir matematinės statistikos konferencija (Vilnius, Lietuva) 2014 m. birželio 30 d. - liepos 4 d.
- “Statistique, Analyse et Modélisation Multidisciplinaire” seminaras Sorbonos universitete (Paryžius, Prancūzija) 2015 m. lapkričio 28 d.
- 8-oji kasmetinė SoFie konferencija (Aarhus, Danija) 2015 m. birželio 23-26 d.
- Konferencija “Stochastic Processes” (Luminy, Prancūzija) 2016 m. vasario 15-19 d.
- “Workshop on Dependence” seminaras Henri Poincaré institute (Paryžius, Prancūzija) 2016 m. rugsėjo 27 d.

Publikacijos

Disertacijos rezultatai yra publikuoti šiuose straipsniuose:

- I. Grublytė, D. Surgailis (2014). Projective stochastic equations and nonlinear long memory, Adv. Appl. Probab. 46(4):1-22.
- P. Doukhan, I. Grublytė, D. Surgailis (2016). A nonlinear model for long memory conditional heteroscedasticity, Lith. Math. J., 56(2):164-188.
- I. Grublytė, A. Škarnulis (2017). A generalized nonlinear model for long memory conditional heteroscedasticity, Statistics, 51(1):123-140.
- I. Grublytė, D. Surgailis, A. Škarnulis (2017). QMLE for quadratic ARCH model with long memory. Journal of Time Series Analysis, 38(4):535-551.

Disertacijos struktūra

Disertaciją sudaro įvadas, literatūros apžvalga, trys skyriai, išvados, du priedai ir literatūros sąrašas. Įvade apžvelgiami disertacijos tikslai ir uždaviniai. Toliau trumpai apžvelgiami tyrimai disertacijos tema. 3 skyriuje nagrinėjami netiesiniai procesai, kurie apibrėžiami kaip projekcinių stochastinių lygčių sprendiniai. 4 skyriuje nagrinėjama bendra netiesinių sąlyginio heteroskedastiškumo modelių klasė. Detaliai nagrinėjamas šiai klasei priklausantis QARCH modelis ir apibendrinta jo versija. 5 skyriuje nagrinėjamas apibendrinto QARCH modelio parametrų vertinimas didžiausio tikėtinumo metodu. Disertacijos rezultatai apibendrinti išvadose. Disertacija parašyta anglų kalba, bendra darbo apimtis 125 puslapiai.

Summary

The thesis develops *new nonlinear models with long memory* which can be used for modelling of financial returns and statistical inference. Apart from long memory, these models are capable to exhibit other stylized facts such as asymmetry and leverage. The processes studied in the thesis are defined as stationary solutions of certain *nonlinear stochastic difference equations* involving a given i.i.d. "noise". Apart from solvability issues of these equations which are not trivial by itself, we prove that their solutions exhibit long memory properties as in (5) and (10). Finally, for a particularly tractable nonlinear parametric model with long memory (GQARCH) we prove consistency and asymptotic normality of quasi-ML estimators.

First we introduce a new class of nonlinear processes which generalize the linear model in (6)-(7) and enjoy similar long memory properties to (8) and (10). For this, we define projective moving averages $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$, where X_t is a Bernoulli shift written as a backward martingale transform of the innovation sequence. We introduce a new class of nonlinear stochastic equations for projective moving averages, termed *projective equations*, involving a (nonlinear) kernel Q and a linear combination of projections of X_t on "intermediate" lagged innovation subspaces with given coefficients $\alpha_i, \beta_{i,j}$. We obtain conditions for solvability of these equations. We also show that under certain conditions on kernel and coefficients, the solution exhibits covariance and distributional long memory, with fractional Brownian motion as the limit of the corresponding partial sums process.

Next we discuss a general class of conditionally heteroscedastic processes satisfying the ARCH-type equation $r_t = \zeta_t \sigma_t$, where ζ_t is a noise sequence and the conditional standard deviation σ_t is a nonlinear function Q depending on a linear combination of past values $r_s, s < t$ with coefficients b_j. We obtain the conditions for the existence of stationary solution r_t with finite p-th moment, $0 < p < \infty$. Weak dependence properties of r_t are studied, including the invariance principle for partial sums of Lipschitz functions of r_t. The case when Q is the square root of a quadratic polynomial corresponds to a quadratic ARCH (QARCH) model and is of special interest. We prove that in this case r_t can exhibit a leverage effect and long memory, in the sense that the squared process r_t^2 has long memory autocorrelation and its normalized partial sums process converges to a fractional Brownian motion. Analogous results are obtained for generalized QARCH where the volatility form involves lagged volatilities from the past. We also obtain a (nearly optimal) condition for the existence of higher moments of r_t which does not include the Rosenthal constant.

Finally, the asymptotic results for quasi-maximum likelihood estimators in parametric version of generalized QARCH model with long memory are provided. Similarly as in Beran and Schützner (2009) we discuss several QML estimators: the estimator involving exact conditional variance depending on infinite past and its more realistic version where the volatilities depend only finite number of returns from past. Under certain moment conditions we prove consis-

tency and asymptotic normality of the corresponding QML estimators, including the estimator of long memory parameter $0 < d < 1/2$.

Literatūra

Beran, J. (1997). *Statistics for Long Memory Processes*, volume 61 of *Monographs on Statistics and Applied Probability*. Chapman and Hall, New York.

Beran, J., Feng, Y., Gosh, S., and Kulik, R. (2013). *Long Memory Processes: Probabilistic Properties and Statistical Methods*. Springer, Heidelberg.

Beran, J. and Schützner, M. (2009). On approximate pseudo-maximum likelihood estimation for LARCH-processes. *Bernoulli*, 15:1057–1081.

Berkes, I. and Horváth, L. (2003). Asymptotic results for long memory LARCH sequences. *Ann. Appl. Probab.*, 13:641–668.

Black, F. (1976). Studies in stock price volatility changes. In *1976 Business Meeting of the Business and Economics Statist. Sec.*, pages 177–181. Amer. Statist. Assoc.

Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity. *J. Econometrics*, 31:307–327.

Bollerslev, T., Chou, R., and Kroner, K. (1992). ARCH modeling in finance. A review of the theory and empirical evidence. *J. Econometrics*, 52:5–59.

Davydov, Y. (1970). The invariance principle for stationary process. *Theory Probab. Appl.*, 15:145–180.

Dedecker, J., Doukhan, P., Lang, G., León, J. R., Louhichi, S., and Prieur, C. (2007). *Weak Dependence: With Examples and Applications*, volume 190 of *Lecture Notes in Statistics*. Springer, New York.

Dedecker, J. and Prieur, C. (2004). Coupling for $\tau-$dependent sequences and applications. *J. Theoretical Probab.*, 17:861–885.

Dedecker, J. and Prieur, C. (2005). New dependence coefficients. Examples and applications to statistics. *Probab. Th. Relat. Fields.*, 132:203–236.

Dedecker, J. and Prieur, C. (2007). An empirical central limit theorem for dependent sequences. *Stoch. Process. Appl.*, 117:121–142.

Doukhan, P., Oppenheim, G., and Taqqu, M. (2003). *Theory and Applications of Long-Range Dependence*. Birkhäuser, Boston.

Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heterosckedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, 50:987–1008.

Engle, R. F. (1990). Stock volatility and the crash of '87. Discussion. *Rev. Financial Studies*, 3:103–106.

Francq, C. and Zakoian, J.-M. (2010). *GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications*. Wiley, New York.

Giraitis, L., Koul, H. L., and Surgailis, D. (2012). *Large Sample Inference for Long Memory Processes*. Imperial College Press, London.

Giraitis, L., Leipus, R., Robinson, P. M., and Surgailis, D. (2004). LARCH, leverage and long memory. *J. Financial Econometrics*, 2:177–210.

Giraitis, L., Robinson, P. M., and Surgailis, D. (2000). A model for long memory conditional heteroskedasticity. *Ann. Appl. Probab.*, 10:1002–1024.

Giraitis, L. and Surgailis, D. (2002). ARCH-type bilinear models with double long memory. *Stoch. Process. Appl.*, 100:275–300.

Grublytė, I., Surgailis, D., and Škarnulis, A. (2017). QMLE for quadratic ARCH model with long memory. *Journal of Time Series Analysis*, 38(4):535–551.

Osękowski, A. (2012). A note on Burkholder-Rosenthal inequality. *Bull. Polish Acad. Sci. Mathematics*, 60:177–185.

Robinson, P. M. (1991). Testing for strong serial correlation and dynamic conditional heteroskedasticity in multiple regression. *J. Econometrics*, 47:67–84.

Sentana, E. (1995). Quadratic ARCH models. *Rev. Econom. Stud.*, 3:77–102.

Wu, W. and Min, W. (2005). On linear processes with dependent innovations. *Stoch. Process. Appl.*, 115:939–958.

Trumpos žinios apie autorių

Išsilavinimas

- 2007 - 2011 Statistikos bakalauras, Vilniaus Universitetas,
- 2011 - 2013 Matematikos magistras, Vilniaus Universitetas,
- 2013 - 2017 Matematikos doktorantūros studijos, Vilniaus universitetas, Cergy-Pontoise universitetas.

Stažuotės

- 2014 09 15 - 2014 12 14 Cergy-Pontoise Universitetas, Prancūzija,
- 2015 09 14 - 2015 12 14 Cergy-Pontoise Universitetas, Prancūzija,
- 2016 09 19 - 2016 12 18 Cergy-Pontoise Universitetas, Prancūzija.

Akademinio darbo patirtis

- 2013 - 2015 Jaunesnioji mokslo darbuotoja LMT projekte "Netiesinė ilgoji atmintis, sunkios uodegos ir agregavimas" (Nr. MIP–063/2013),
- 2012 - 2017 Asistentė, Vilniaus universitetas.