

VILNIAUS UNIVERSITETAS  
FIZINIŲ IR TECHNOLOGIJOS MOKSLŲ CENTRAS

RYTIS KAZAKEVIČIUS

SUDĖTINGOS NETIESINĖS SISTEMOS VEIKIAMOS  
SPALVOTO IR NE GAUSO IŠORINIO TRIUKŠMO

Daktaro disertacijos santrauka  
Fiziniai mokslai, fizika (02 P)

Vilnius, 2017

Disertacija rengta 2013–2017 m. Vilniaus universitete, Teorinės fizikos ir astronomijos institute.

**Mokslinis vadovas:**

dr. Julius Ruseckas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, fizika – 02 P)

**Disertacija bus ginama viešame disertacijos gynimo tarybos posėdyje:**

**Pirmininkas:**

dr. Vygintas Gontis (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, fizika – 02 P)

**Nariai:**

prof. dr. Darius Abramavičius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, fizika – 02 P),

habil. dr. Evaldas Tornau (Fizinių ir technologijos mokslų centras, fiziniai mokslai, fizika – 02 P),

prof. habil. dr. Kęstutis Pyragas (Fizinių ir technologijos mokslų centras, fiziniai mokslai, fizika – 02 P),

prof. habil. dr. Kęstutis Staliūnas (Katalonijos politechnikos universitetas, Ispanija, fiziniai mokslai, fizika – 02 P)

Disertacija bus ginama viešame disertacijos gynimo tarybos posėdyje 2017 m. lapkričio 28 d. 14 val. Nacionaliniame fizinių ir technologijos mokslų centre (Saulėtekio al. 3, D401 auditorijoje, LT-10222 Vilnius).

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2017 m. spalio 27 d.

Disertaciją galima peržiūrėti Vilniaus universiteto bibliotekoje, Fizinių ir technologijos mokslų centro bibliotekoje ir VU interneto svetainėje adresu: <http://www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius>.

VILNIUS UNIVERSITY  
CENTER FOR PHYSICAL SCIENCES AND TECHNOLOGY

RYTIS KAZAKEVIČIUS

COMPLEX NONLINEAR SYSTEMS AFFECTED BY COLORED  
AND NON-GAUSSIAN EXTERNAL NOISE

Summary of Doctoral Dissertation  
Physical Sciences, Physics (02P)

Vilnius, 2017

The research was performed in 2013–2017 at Vilnius university, Institute of Theoretical Physics and Astronomy

**Scientific supervisor:**

dr. Julius Ruseckas (Vilnius University, physical sciences, physics – 02 P)

**Dissertation will be defended at the public meeting of the dissertation defence board:**

**Chairman:**

dr. Vygintas Gontis (Vilnius University, physical sciences, physics – 02 P)

**Members:**

prof. dr. Darius Abramavičius (Vilnius University, physical sciences, physics – 02 P),

habil. dr. Evaldas Tornau (Center for Physical Sciences and Technology, physical sciences, physics – 02 P),

prof. habil. dr. Kęstutis Pyragas (Center for Physical Sciences and Technology, physical sciences, physics – 02 P),

prof. habil. dr. Kęstutis Staliūnas (Universitat Politècnica de Catalunya (Spain), physical sciences, physics – 02 P)

Doctoral Dissertation will be defended at the public meeting of the dissertation defence board, which will be held at National Center for Physical Sciences and Technology (Saulėtekio al st. 3, D401 auditorium, LT-10222 Vilnius) on November 28, 2017, 14:00.

Summary of Doctoral Dissertation was sent out on October 27, 2017.

Dissertation is available at libraries of Vilnius University and Center for Physical Sciences and Technology, as well as on Vilnius University website: <http://www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius>.

# Turinys

<b>1 Įvadas.....</b>	<b>7</b>
1.1 Disertacijos tikslas .....	9
1.2 Disertacijos uždaviniai .....	9
1.3 Darbo naujumas .....	10
1.4 Ginamieji teiginiai .....	10
<b>2 Disertacijos struktūra ir turinys.....</b>	<b>15</b>
2.1 Įvadas .....	15
2.2 Lygčių generuojančių $1/f$ triukšmą kilmė .....	15
2.2.1 Netiesinės stochastinės diferencialinės lygties išvedimas iš Lanžveno lygčių aprašančių difuziją nehomogeninėje aplinkoje .....	15
2.2.2 Sukabintos stochastinės diferencialinės lygtys generuojančios signalus su Gauso $1/f$ triukšmu .....	18
2.2.3 Skaitmenimis pavyzdys .....	19
2.2.4 Sukabintos Lanžveno lygtys ir dalelės šuoliai per potencialų barjerą su fluktuojančių aukščiu.....	21
2.3 Spalvotojo triukšmo įtaka Brauno judėjimui.....	21
2.3.1 Adiabatinė aproksimacija sistemoms veikiamoms spalvotojo triukšmo....	21
2.3.2 Spalvotojo triukšmo įtaka stochastinėms diferencialinėms lygtims generuojančioms signalus pasižyminčius $1/f$ spektru .....	22
2.3.3 Skaitmeninis modeliavimas .....	23
2.4 Stochastinės diferencialinės lygties generuojančios $1/f$ triukšmą apibendrinimas.	23
2.4.1 Stochastinė diferencialinė lygtis su Levio triukšmu .....	24
2.4.2 Galios spektrinio tankio parametrų nustatymas.....	25
2.4.3 Skaitmeninio sprendimo metodas .....	25
2.5 Signalų, generuojamų laike subordinuojamų netiesinių Lanžveno lygčių, galios spektrinis tankis .....	26
2.5.1 Trumpmeninė Fokerio-Planko lygtis aprašanti difuziją heterogeninėje aplinkoje.....	26
2.5.2 Nuo dalelės padėties priklausomas įkalinimo laikas.....	26
2.5.3 Galios spektrinis tankis ir laike trupmeninė Fokerio ir Planko lygtis.....	26
2.5.4 Laike trupmeninė Fokerio ir Planko lygtis su laipsniniais koeficientais....	26
2.5.5 Galios spektrinis tankis ir signalo skalės pakeitimo savybės .....	27
2.5.6 Skaitmeninė aproksimacija trajektorijoms skaičiuoti.....	27
2.5.7 Galios spektrinis tankis .....	27
2.6 Anomalioji difuzija .....	28

2.6.1	Heterogeninės difuzijos procesas .....	28
2.6.2	Išorinio potencialo įtaka heterogeninės difuzijos procesui .....	28
2.6.3	Eksponentinis difuzijos apribojimas .....	30
2.6.4	Anomalioji difuzija ir $1/f$ triukšmas.....	31
<b>3</b>	<b>Išvados .....</b>	<b>33</b>
	<b>Literatūra .....</b>	<b>34</b>
	<b>Summary .....</b>	<b>37</b>
	<b>Trumpos žinios apie disertacijos autorių .....</b>	<b>38</b>
	<b>Padėka.....</b>	<b>39</b>

# 1 Įvadas

Tiriant pernašos reiškinius sudėtingose medžiagose buvo pastebėta, kad signalo dispersijai (standartinio nuokrypio kvadratui  $\sigma^2$ ) būdingas netiesinis augimas laikui bėgant,  $\sigma^2(t) \sim t^\mu$ . Pastarasis reiškinys yra vadinamas anomalioja difuzija. Paprastos difuzijos atveju dalelės pozicijų dispersija pasižymi tiesine priklausomybe nuo laiko. Dispersija  $\sigma^2$  parodo difunduojančios dalelės iširtą sistemos dalį duotu laiko momentu  $t$ . Anomalioji difuzija klasifikuojama pagal laipsnio rodiklio  $\mu$  vertę. Jeigu  $\mu > 1$ , tai turime superdifuziją. Jeigu  $\mu < 1$ , turime subdifuziją.

Superdifuzija buvo aptikta stebint mikrosferų difuziją ant besisukančios plokštelės [1]. Atlikus teorinį modeliavimą buvo parodyta, kad superdifuzija gali atsirasti dėl Levio (Lévy) skrydžių [2]. Superdifuzija gali būti modeliuojama pasinaudojant trupmeninę Fokerio ir Planko lygtimi [3] ar pasinaudojant Lanževano lygtimi su Levio  $\alpha$  stabiliumu triukšmu. Lanževano lygtys su multiplikatyviuoju Levio triukšmu buvo panaudotos modeliuojant difuziją nehomogeninėje aplinkoje [4]. Lanževano lygčiai su multiplikatyviuoju triukšmu galima užrašyti atitinkamą trupmeninę Fokerio ir Planko lygtį [5]. Jeigu pastaroji lygtis interpretuojama pagal Ito (Itô) interpretaciją [6]. Kartais stochastinių diferencialinių lygčių su Levio triukšmu generuojamų signalų statistinės savybės idealiai atkartoja eksperimentinius duomenis. Pavyzdžiui, laiko eilučių aprašančių klimato pokyčius (užregistruotus Grenlandijos ledo įšale) statistinės savybės buvo atkartotos pasinaudojant netiesinėmis stochastinėmis diferencialinėmis lygtimis su Levio triukšmu [7]. Tačiau dažnai eksperimentiškai galima nustatyti, tik tai, kad išmatuotų signalų skirstiniams būdingos Levio uodegos [8].

Kita svarbi anomaliosios difuzijos klasė yra subdifuzija charakterizuojama pagal laipsnio rodiklio  $\mu$  vertę. Šiuo atveju  $\mu$  kinta tarp  $0 < \mu < 1$ . Procesai, pasižymintys subdifuzija, dažnai sutinkami daugelyje mokslo sričių. Pavyzdžiui kondensuotųjų medžiagų fizikoje [2], ekologijoje [9], bei biologijoje [10]. Padarius prielaidą, kad difunduojanti dalelė yra įkalinama įvairiems laiko tarpams pasiskirsčiusiais pagal laipsninį skirstinį,  $p(t) \sim 1/t^{1+m}$ ,  $0 < m < 1$ , subdifuzija gali būti aprašoma pasinaudojant (laike) trupmenine Fokerio ir Planko lygtimi [11]. Situacijose, kai negalima priimti prielaidos, kad egzistuoja dalelės difuziją stabdantis mechanizmas, subdifuzija gali būti modeliuojama pasinaudojant netiesinėmis stochastinėmis diferencialinėmis lygtimis su Levio triukšmu [12].

Neseniai buvo pasiūlyta, kad anomalioji difuzija gali būti aprašoma pasinaudojant heterogeninės difuzijos procesu [13], kuris pasižymi difuzijos koeficientu priklausančiu nuo difunduojančios dalelės pozicijos. Nuo dalelės pozicijos erdvėje priklausanti difuzija pasireiškia heterogeninėse sistemose. Pavyzdžiui, pasinaudojant heterogeninės difuzijos procesu buvo aprašyta Ričerdsono (Richardson) difuzija turbolentinėje terpėje [14]. Dalelių difuzija ant atsiktinai

besikeičiančių fraktalų buvo modeliuojama, pasinaudojant modeliais su difuzijos koeficientu, kuriam buvo būdinga laipsninė priklausomybė nuo dalelės pozicijos [15]. Vandens prasiskverbimas į purius žemės sluoksnius buvo modeliuojamas, kaip nehomogeninis atsitiktinis klaidžiojimas [16]. Heterogeninės difuzijos procesas gali būti panaudotas modeliuojant anomaliją difuziją ankščiau išvardintose sistemose.

Spalvotojo triukšmo įvedimas vietoje baltojo triukšmo gali smarkiai pakeisti tiriamos sistemos savybes. Spalvoto triukšmo indukuotos sinchronizacijos chaotiškose sistemose tyrimas parodė, kad kritinė amplitudė reikalinga pasiekti sinchronizavimą paprastai yra mažesnė baltajam triukšmui palyginus su spalvotu triukšmu [17]. Todėl praktinėse situacijose, kai sinchronizacija yra nepageidaujama, yra pasirenkama įdiegti filtrus į sistemą, kad triukšmo šaltinis pasižymėtų kuo didesne koreliacijos trukme t.y. pasirenkama, kad triukšmo šaltinis būtų kuo labiau spalvotas. Sistemoms pasižyminčiomis stochastiniu rezonansu eksponentiškai koreliuoto (raudonojo) triukšmo poveikis nulemia sumažėjusį signalo stiprinimą ir rezonanso pikas pasislenka į didesnius triukšmo intensyvumus didinant triukšmo koreliacijos trukmę [18]. Rožinio triukšmo (dar kitaip vadinamo  $1/f$  triukšmu) poveikis taip pat nulemia sumažėjusį signalo stiprinimą, tačiau rezonanso pikas pasislenka į mažesnius triukšmo intensyvumus [19]. Spalvotojo triukšmo įvedimas vietoje baltojo gali būti svarbus analizuojant silpnų signalų perdavimą triukšmingoje aplinkoje.

Signalai pasižymintys galios spektriniu tankiu žemų dažnių srityje besielgiančiu kaip laipsninė funkcija,  $S(f) \sim 1/f^\beta$ , dažniausiai  $\beta$  yra artimas 1, vadinami  $1/f$  fliktuacijomis, rožiniu triukšmu ar tiesiog  $1/f$  triukšmu. Tokie signalai dažnai sutinkami fizikoje ir daugelyje kitų sričių [20, 21]. Nuo  $1/f$  triukšmo atradimo buvo pasiūlyta daugybė teorijų ir modelių aiškinančių jo atsiradimą [22]. Dažniausiai laikoma, kad  $1/f$  triukšmas yra Gauso (Gauss) procesas [23, 24], tačiau buvo aptiktos ir ne Gauso  $1/f$  fliktuacijos [25, 26]. Buvo pasiūlyta, kad  $1/f$  triukšmas gali atsirasti iš atsitiktinio klaidžiojimo atsitiktinai besikeičiančioje aplinkoje [27]. Pasinaudojant taškinio proceso, pasižyminčiu atsitiktinai kintančia laiko trukme tarp įvykių, modeliu [28] buvo išvestos netiesinės stochastinės diferencialinės lygtys generuojančios signalus, pasižyminčius  $1/f$  triukšmu ir laipsnine statistika [29–31]:

$$dx = \sigma^2 \left( \eta - \frac{1}{2} \lambda \right) x^{2\eta-1} dt + \sigma x^\eta dW_t. \quad (1)$$

Pastaroji lytis užrašyta Itô interpretacijoje. Ši lygtis turi būti sprendžiama su kraštinėmis atspindinčiomis sąlygomis  $x \in [x_{min}, x_{max}]$ . Čia  $x$  yra signalas,  $\sigma$  nustato proceso laiko mastelį,  $\eta \neq 1$  - triukšmo multiplikatyvumo laipsnio rodiklis. Parametras  $\lambda$  - signalo intensyvumų stacionariojo skirstinio,  $P_0(x) \sim x^{-\lambda}$ , laipsnio rodiklis, o  $W_t$  yra Vynerio (Wiener) procesas (standartinis vienmatis Brauno judėjimas). Atskiras stochastinės diferencialinės lyties atvejis buvo



išvestas pasinaudojant Kirmano (Kirman) agentų modeliu [32] ir buvo panaudotas modeliuoti socio-ekonominės sistemas [33,34]. (1) lygtis generuoja signalus pasižyminčius galios spektriniu tankiu atvirksčiai proporcingu dažniui  $f$  laipsnyje  $\beta$ :

$$S(f) \sim \frac{1}{f^\beta}, \quad \beta = 1 + \frac{\lambda - 3}{2(\eta - 1)}. \quad (2)$$

Kadangi (1) lygtis sprendžiama su kraštinėmis sąlygomis t.y.  $x$  gali kisti tik intervale tarp  $x = x_{\min}$  ir  $x = x_{\max}$ . Tuomet galios spektrinis tankis yra atvirksčiai proporcingas dažniui ribotame dažnių intervale  $f_{\min} \ll f \ll f_{\max}$ . Buvo parodyta, kad šio intervalo plotis priklauso nuo parametrų  $x = x_{\min}$ ,  $x = x_{\max}$  ir  $\eta$  pasirinkimo [35].

$$\begin{aligned} \sigma^2 x_{\min}^{2(\eta-1)} \ll 2\pi f \ll \sigma^2 x_{\max}^{2(\eta-1)}, & \quad \eta > 1, \\ \sigma^2 x_{\max}^{-2(1-\eta)} \ll 2\pi f \ll \sigma^2 x_{\min}^{-2(1-\eta)}, & \quad \eta < 1. \end{aligned} \quad (3)$$

## 1.1 Disertacijos tikslas

Disertacijos tikslas - tirti  $1/f$  triukšmo kilmę ir sudėtingas netiesines sistemas, pasižyminčias anomalija difuzija ir veikiamas spalvoto ir ne Gauso išorinio triukšmo

## 1.2 Disertacijos uždaviniai

1. Ištirti kaip  $1/f$  fliktuacijos gali atsirasti iš atsitiktinio klaidžiojimo nehomogeninėje aplinkoje.
2. Išanalizuoti spalvotojo triukšmo poveikį Brauno (Brown) dalelės judėjimui nehomogeninėje aplinkoje.
3. Apibendrinti netiesinę stochastinę diferencialinę lygtį, generuojančią signalus pasižyminčius laipsniniu signalo intensyvumo skirstiniu ir laipsniniu galios spektriniu tankiu, pakeičiant Gauso triukšmą Levio (Lévy) triukšmu.
4. Pasiūlyti laike trupmeninę Fokerio ir Planko lygtį kaip subdifuzijos nehomogeninėje aplinkoje modelį.
5. Ištirti išorinio potencinio lauko įtaką anomalijai difuzijai
6. Studijuoti Brauno dalelės, patiriančios Levio skrydžius, anomaliją difuziją nehomogeninėje aplinkoje.

## 1.3 Darbo naujumas

1. Mēs išvedėme netiesinę stochastinę diferencialinę lygtį, generuojančią signalus pasižyminčius laipsnine statistika ir  $1/f$  triukšmu, plačiame dažnių intervale, pasinaudodami Laževano lygtimis aprašančiomis Brauno dalelės difuziją nehomogeninėje aplinkoje.
2. Buvo parodyta, kad sukabintų stochastinių diferencialinių lygčių sistema, nepriklausomai nuo pasirinkto stacionaraus intensyvumo skirstinio, gali generuoti signalus, pasižyminčius laipsniniu galios spektriniu tankiu, plačiame dažnių intervale.
3. Ištirta spalvotojo triukšmo įtaka Brauno dalelės judėjimui nehomogeninėje aplinkoje. Spalvoto triukšmo įvedimas, nulemia papildomą dalelės difuzijos ribojimą, kuris pasireiškia, kaip eksponentinis nuplovimas galimų dalelės pozicijų skirstinyje ir kaip susiaurėjęs dažnių intervalas, kuriame pasireiškia  $1/f$  triukšmas.
4. Mēs apibendrinome netiesinę stochastinę diferencialinę lygtį, generuojančią signalus pasižyminčius laipsnine statistika ir laipsniniu galios spektriniu tankiu, joje pakeisdami Gauso triukšmą Levio triukšmu.
5. Mēs pasiūlėme, kad dėl nehomogeninio spąstų pasiskirstymo aplinkoje atsirandanti, subdifuzija gali būti aprašoma laike trupmenine Fokerio ir Planko lygtimi. Mēs analitiškai išsprendėme pasiūlytą lygtį ir suskaičiavome analitinę galios spektrinio tankio išraišką.
6. Analizavome išorinės jėgos poveikį heterogeninės difuzijos procesui. Suskaičiuotos perėinamosios tikimybės, pirmojo ir antrojo momento analitinės išraiškos. Pasinaudojant pastarosiomis išraiškomis suskaičiuota vidutinio kvadratinio nuokrypio priklausomybės nuo laiko analitinė išraiška.

## 1.4 Ginamieji teiginiai

1. Netiesinė stochastinė diferencialinė lygtis, generuojanti signalus pasižyminčius laipsnine statistika ir laipsniniu galios spektriniu tankiu, plačiame dažnių intervale, gali būti išvesta iš Laževano lygčių aprašančių Brauno dalelės difuziją nehomogeninėje aplinkoje.
2. Signalai, pasižymintys laipsniniu galios spektriniu tankiu, plačiame dažnių intervale, nepriklausomai nuo pasirinkto stacionaraus intensyvumo skirstinio, gali būti generuojami pasinaudojant netiesiškai sukabintomis stochastinėmis diferencialinėmis lygtimis.

3. Spalvotojo triukšmo įvedimas vietoje baltojo triukšmo Lanževano lygtyje, aprašančioje Brauno judėjimą, nulemia papildomą dalelės difuzijos ribojimą, kuris pasireiškia, kaip eksponentinis nuplovimas galimų dalelės pozicijų skirstinyje. Dėl skirstinio laipsninės dalies pločio sumažėjimo turime susiaurėjusią dažnių sritį, kurioje stebimas laipsninis galios spektrinis tankis.
4. Netiesinės stochastinės diferencialinės lygtys su Levio (Lévy) triukšmu gali generuoti signalus, pasižyminčius laipsnine statistika ir laipsniniu galios spektriniu tankiu, pasirinkto pločio dažnių intervale.
5. Laike subordinuotos netiesinės Lanževano lygtys, skirtingai nuo tiesinių Lanževano lygčių, generuoja signalus, pasižyminčius galios spektriniu tankiu besielgiančiu kaip laipsninė funkcija,  $S(f) \sim f^{-\beta}$ , su laipsnio rodikliu  $\beta$  didesniu ar lygiu vienetui.
6. Išorinės jėgos poveikio įvedimas į heterogeninės difuzijos procesą pakeičia anomaliosios difuzijos koeficientą, bet nepakeičia anomaliosios difuzijos laipsnio rodiklio.

## Mokslinės publikacijos

Šioje disertacijoje aprašomi tyrimai buvo paskelbti 8 straipsniuose. 7 darbai publikuoti *ISI Web of Science* indeksuojamuose žurnaluose [A1–A7]. [A8] darbas buvo publikuotas ISI indeksuojamame konferencijos darbų rinkinyje. Toliau pateikiamas publikacijų sąrašas chronologine tvarka.

- A1. **R. Kazakevicius**, J. Ruseckas, Lévy flights in inhomogeneous environments and  $1/f$  noise, *Physica A* **411**, 95-103 (2014).
- A2. **R. Kazakevicius**, J. Ruseckas, Power law statistics in the velocity fluctuations of Brownian particle in inhomogeneous media and driven by colored noise, *J. Stat. Mech.* **2015**, 02021 (2015).
- A3. **R. Kazakevicius**, J. Ruseckas, Anomalous diffusion in nonhomogeneous media: Power spectral density of signals generated by time-subordinated nonlinear Langevin equations, *Physica A* **438**, 210-222 (2015).
4. **R. Kazakevicius**, J. Ruseckas, Power-law statistics from nonlinear stochastic differential equations driven by Lévy stable noise, *Chaos, Solitons & Fractals* **81**, Part B, 432-442 (2015).

- A5. J. Ruseckas, **R. Kazakevicius**, B. Kaulakys,  $1/f$  noise from point process and time-subordinated Langevin equations, *J. Stat. Mech.* **2016** 054022 (2016).
- A6. J. Ruseckas, **R. Kazakevicius**, B. Kaulakys, A Coupled nonlinear stochastic differential equations generating arbitrary distributed observable with  $1/f$  noise, *J. Stat. Mech.* **2016**, 043209 (2016).
- A7. **R. Kazakevicius**, J. Ruseckas, Influence of external potentials on heterogeneous diffusion processes, *Phys. Rev. E* **94**, 032109 (2016).
- A8. **R. Kazakevicius**, J. Ruseckas, Influence of external potentials on heterogeneous diffusion processes, in *Noise and Fluctuations (ICNF), 2017 24th International Conference on* (Vilnius, Lithuania, 2017), 1–4.

## Pranešimai konferencijose ir konferencijų tezės

Šioje disertacijoje aprašomi tyrimai buvo pristatyti 15 pranešimų mokslinėse konferencijose. Iš jų 7 žodiniai ir 6 standiniai pranešimai buvo pristatyti disertacijos autoriaus. Likusių pranešimų – tezių bendraautorius. Toliau pateikiamas pranešimų sąrašas chronologine tvarka. Prie kiekvieno pranešimo yra nurodytas pranešėjas ir pranešimo tipas.

- C1. R. Kazakevicius, J. Ruseckas,  $1/f$  noise from nonlinear stochastic differential equations driven by Levy noise, in *DPG-frühjahrstagung* (Dresden, Germany, 2014) DY 10.8. // Talk given by R. Kazakevicius
- C2. R. Kazakevicius and J. Ruseckas, Lévy flights in non-homogeneous media and  $1/f$  noise, in *Open Readings 2014* (Vilnius, Lithuania, 2014), 196. // Poster by R. Kazakevicius
- C3. J. Ruseckas, R. Kazakevicius, B. Kaulakys, Power-law statistics from nonlinear stochastic differential equations driven by Lévy stable noise, in *International Conference on Statistical Physics* (Rhodes, Greece, 2014), 143. // Talk given by J. Ruseckas
- C4. R. Kazakevicius, J. Ruseckas, Lévy flights in non-homogeneous media and  $1/f$  noise, in *Naujametė fizikos konferencija LTΦ* (Vilnius, Lithuania, 2015), 42. // Poster by R. Kazakevicius
- C5. R. Kazakevicius, J. Ruseckas, Brauno judėjimas nehomogeninėje aplinkoje ir  $1/f$  triukšmas, in *LMA penktoji jaunuųjų mokslininkų konferencija, Fizinių ir technologijos mokslų tarpdalykiniai tyrimai* (Vilnius, Lietuva, 2015). // Talk given by R. Kazakevicius

- C6. R. Kazakevicius, J. Ruseckas, Velocity fluctuations of Brownian particle in inhomogeneous media and driven by colored noise as a source of  $1/f$  fluctuations, in *DPG-frühjahrstagung* (Dresden, Germany, 2015), DY 9.3. // Talk given by R. Kazakevicius
- C7. R. Kazakevicius and J. Ruseckas, Fluctuations of Brownian particle in inhomogeneous media as a source of  $1/f$  noise, in *Open Readings 2015* (Vilnius, Lithuania, 2015), 245. // Poster by R. Kazakevicius
- C8. R. Kazakevicius, J. Ruseckas, Spalvotojo triukšmo įtaka Brauno judėjimui nehomogeninėje aplinkoje, Brownian motion in inhomogeneous media: influence of colored noise, in *41-oji Lietuvos nacionalinė fizikos konferencija: Programa ir pranešimų tezės* (Vilnius, Lietuva, 2015), 72. // Talk given by R. Kazakevicius
- C9. R. Kazakevicius, J. Ruseckas, Laipsninė statistika ir anomalioji difuzija, Power-law statistics and anomalous diffusion, in *41-oji Lietuvos nacionalinė fizikos konferencija: Programa ir pranešimų tezės* (Vilnius, Lietuva, 2015), 356. // Poster by R. Kazakevicius
- C10. R. Kazakevicius, J. Ruseckas, in *LMA šeštoji jaunuųjų mokslininkų konferencija, Fizinių ir technologijos mokslų tarpdalykiniai tyrimai* (Vilnius, Lietuva, 2016). // Talk given by R. Kazakevicius
- C11. R. Kazakevicius, J. Ruseckas, Anomalous diffusion and power law statistics, in *Open Readings 2015* (Vilnius, Lithuania, 2015), 291. // Poster by R. Kazakevicius
- C12. R. Kazakevicius, J. Ruseckas, Sub-diffusion in nonhomogeneous media: Power spectral density of signals generated by time-subordinated nonlinear Langevin equations, in *Complex Transport with Lévy Walks: From Cold Atoms to Humans and Robots* (Bonn, Germany, 2016). // Poster by R. Kazakevicius
- C13. R. Kazakevicius, B. Kaulakys, J. Ruseckas, Influence of external potentials on heterogeneous diffusion processes, in *Ergodicity Breaking and Anomalous Dynamics* (Coventry, England 2016). // Poster by B. Kaulakys
- C14. R. Kazakevicius and J. Ruseckas, Diffusion in heterogeneous media *Open Readings 2017* (Vilnius, Lithuania, 2017), 41. // Talk given by R. Kazakevicius
- C15. R. Kazakevicius, J. Ruseckas, Influence of external potentials on heterogeneous diffusion processes, in *24<sup>th</sup> International Conference on Noise and Fluctuations* (Coventry, England 2016), A5.5. // Talk given by R. Kazakevicius

## **Asmeninis disertacijos autoriaus indėlis**

Disertacijos autorius atliko daugumą disertacijoje aprašytų analizinių išvedimų ir visus aprašytus skaitmeninius skaičiavimus.

## 2 Disertacijos struktūra ir turinys

Šiame santraukos skyriuje pristatomos atskirų disertacijos skyrių santraukos. Šiame skyriuje atskiros disertacijos struktūrinės dalys yra numeruojamos ta pačia tvarka kaip numeruojami skyriai disertacijoje – t.y. 2.2 skyrelis atitinka 2 disertacijų skyrių, o 2.6 skyrelis – 6 skyrių. Disertacijos skyrių aptarimai, esantys kiekvieno disertacijos skyriaus pabaigoje, šioje santraukoje nėra atskirai aptariami. Disertaciją taip pat sudaro vartojamų trumpinių sąrašas, išvados, literatūros sąrašas ir disertacijos autoriaus doktorantūros metu publikuotų straipsnių ir konferencijų pranešimų sąrašai. O disertacijos išvados yra pateiktos 3 santraukos skyriuje.

### 2.1 Įvadas

Pirmame disertacijos skyriuje aptariamas tyrimų kontekstas, suformuluojamas disertacijos tikslas, ginamieji teiginiai. Aptariama disertacijos struktūra, bei mokslinis naujumas.

### 2.2 Lygčių generuojančių $1/f$ triukšmą kilmė

Antrame disertacijos skyriuje tyrėme  $1/f$  triukšmo pasižyminčio laipsniniu skirstiniu atsiradimo priežastis. Parodyta, kad būtent tokiomis statistinėmis savybėmis pasižymi Brauno dalelės pozicijos fluktuacijos. Dažnai  $1/f$  triukšmui būdingas Gauso skirstinys. 2.2 skyriuje buvo parodyta, kad panaudojant dvi sukabintas stochastines diferencialines lygtis, vietoje vienos, galima sugeneruoti signalą su pasirinktu skirtiniu turinčiu analitinę išraišką.

#### 2.2.1 Netiesinės stochastinės diferencialinės lygties išvedimas iš Lanževeno lygčių aprašančių difuziją nehomogeninėje aplinkoje

Disertacijos 2.1 skyriuje tyrėme makroskopinės dalelės judėjimą nehomogeninėje aplinkoje. Buvo padaryta prielaida, kad aplinka yra nepusiausviroje būsenoje globaliai tačiau yra pasiekus lokalią termodinaminę pusiausvyrą. Todėl temperatūra gali būti aprašoma kaip koordinatės funkcija. Lanževeno lygtis aprašančios vienmatį Brauno judėjimą [36]:

$$\frac{d}{dt}v(t) = -\gamma v(t) + \frac{1}{m}F(x) + \sqrt{\frac{2\gamma}{m} \frac{1}{\beta(x)}}\xi(t), \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = v(t) \quad (5)$$

Čia  $x$  yra Brauno dalelės koordinatė,  $v$  - dalelės greitis,  $m$  - dalelės masė,  $\gamma$  - relaksacijos sparta ir  $\xi(t)$  yra  $\delta$ -koreliuotas baltasis triukšmas. Kadangi laikome, kad aplinkoje egzistuoja temperatūros gradientas, tai atvirkštinė temperatūra  $\beta(x)$  yra funkcija nuo Brauno dalelės pozicijos  $x$ . Jeigu laikytume, kad  $\beta(x) \equiv \beta = \text{const}$ , tai (4) and (5) lygtys aprašytų Brauno judėjimą aplinkoje su pastovia temperatūra  $T = k_B^{-1}/\beta$ . Čia  $k_B$  yra Bolcmano (Boltzmann) konstanta. Didelės trinties (arba perslopinimo) riboje [37], kai relaksacijos sparta yra labai didelė galima atlikti adiabatinę aproksimaciją t.y. eliminuoti greitai kintantį kintamąjį šiuo atveju greitį. Atlikus adiabatinę aproksimaciją turime [38]

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{1}{\gamma m}F(x) + \frac{1}{2\gamma m} \frac{\beta'(x)}{\beta(x)^2} + \sqrt{\frac{2}{\gamma m} \frac{1}{\beta(x)}} \circ \xi(t). \quad (6)$$

Čia  $\beta'(x) \equiv d\beta(x)/dx$ . Ši stochastinė diferencialinė lygtis yra užrašyta Stratonovičiaus (Stratonovich) interpretacijoje. Antrasis narys dėšneje (6) lygties pusėje reprezentuoja dreifą atsirandantį dėl dalelę veikiančio temperatūros gradiento [38]. Ito (Itô) lygtis atitinkanti lygtį (6) yra

$$dx = \frac{1}{\gamma m}F(x) dt + \sqrt{\frac{2}{\gamma m} \frac{1}{\beta(x)}} dW_t. \quad (7)$$

Šioje lygtyje dreifas atsirandantis dėl gradiento į įtraukiamas į difuzijos koeficientą. Laikykime, kad atvirkštinė temperatūra yra laipsninė funkcija

$$\beta(x) = bx^{-\theta}. \quad (8)$$

Čia  $\theta$  yra laipsnio rodiklis ir  $b$  - konstanta. (8) lygtis turi būti sprendžiama su kraštinėmis atspindinčiomis sąlygomis tiek  $x_{\min}$  ir  $x_{\max}$  t.y. Brauno dalelės judėjimas turi būti apribojamas tarp  $x_{\min}$  ir  $x_{\max}$ . Jeigu  $\theta = 1$ , tai (6) lygtis aprašo Brauno judėjimą aplinkoje, kurioje teka šilimos srautas dėl temperatūros skirtumo  $T_2 - T_1$  tarp jos galų. O temperatūros vertės ties sistemos galais turi tenkinti sąryšį  $T_2/T_1 = x_{\max}/x_{\min}$ . Tuomet koeficientas  $b$  yra lygus  $b = (x_{\max} - x_{\min})/k_B(T_2 - T_1)$ .

Išorinė jėga veikianti dalelę  $F(x)$  yra:

$$F(x) = -\frac{d}{dx}V(x). \quad (9)$$

Tegul dalelę veikiantis potencialas yra proporcingas temperatūrai:

$$V(x) = \left(\frac{\lambda}{\theta} - 1\right) \frac{1}{\beta(x)}, \quad (10)$$



tuomet dalelę veikianti išorinė jėga yra lygi

$$F(x) = \frac{\theta}{b} x^{\theta-1} \left(1 - \frac{\lambda}{\theta}\right). \quad (11)$$

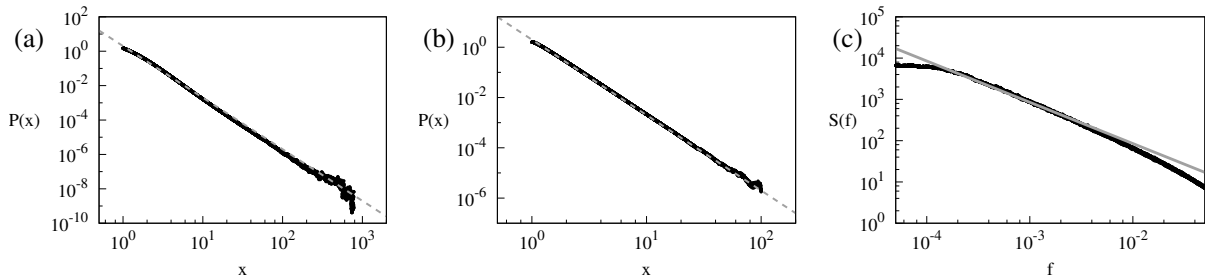
Ištačius (11) į (6) turime, kad lygtis aprašanti Brauno dalelės difuziją yra:

$$\frac{d}{dt} x(t) = \frac{\theta}{\gamma m b} \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{\theta}\right) x^{\theta-1} + x^{\frac{\theta}{2}} \sqrt{\frac{2}{\gamma m b}} \xi(t). \quad (12)$$

Buvo parodyta, kad (12) dalelių pasiskirstymas yra laipsninė funkcija

$$P_0(x) = \frac{\lambda - 1}{x_{\min}^{1-\lambda} - x_{\max}^{1-\lambda}} x^{-\lambda}. \quad (13)$$

Atliekant skirstinio skaičiavimą buvo laikoma, kad dalelės judėjimas yra apribotas tarp  $x_{\min}$  ir  $x_{\max}$ .



1 pav. Signalų  $x$ , sugeneruoto skaitmeniškai sprendžiant (16) ir (17) lygtis, intensyvumo skirstiniai: (a)  $\theta = 1$ ,  $\lambda = 3$ ,  $\tilde{x}_{\min} = 1$ ,  $\tilde{x}_{\max} = 1000$ , (b)  $\theta = 0$ ,  $\lambda = 3$ ,  $\tilde{x}_{\min} = 1$ ,  $\tilde{x}_{\max} = 100$ . Taškinė linija parodo laipsninį polinkį su eksponente lygia  $-3$ . (c) Galios spektrinis tankis esant tomis pačiomis vertėms kaip ir (a) atveju. Pilka linija parodo polinkį proporcingą  $f^{-1}$ .

Patikrinsime adiabatinio greičio eliminavimo galiojimo ribas skaitmeniškai spęsdami Lannževano lygtis (4) ir (5). Skaitmeniniam sprendimui patogų įvesti bedimensius dydžius:  $\tilde{t}$ ,  $\tilde{x}$  ir  $\tilde{v}$ . Kuomet atvirkštinė temperatūra  $\beta(x)$  ir  $F(x)$  išorinė jėga aprašoma atitinkamai (8) ir (11) lygtimis, patogų įvesti bedimensį laiką pavidalu  $\tilde{t} = \gamma t$ . Tuomet kiti bedimensiai kintamieji:

$$\tilde{x} = (\gamma^2 m b)^{\frac{1}{2-\theta}} x, \quad (14)$$

$$\tilde{v} = \gamma^{-1} (\gamma^2 m b)^{\frac{1}{2-\theta}} v. \quad (15)$$

(4) ir (5) lygtys bedimensiniame pavidale:

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \tilde{v} = -\tilde{v} + (\theta - \lambda) \tilde{x}^{\theta-1} + \sqrt{2\tilde{x}^\theta} \xi(\tilde{t}), \quad (16)$$

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \tilde{x} = \tilde{v}. \quad (17)$$

Vietoje kraštinių sąlygų  $x_{\min}$  ir  $x_{\max}$  turime, kad

$$\tilde{x}_{\min} = (\gamma^2 m b)^{\frac{1}{2-\theta}} x_{\min}, \quad (18)$$

$$\tilde{x}_{\max} = (\gamma^2 m b)^{\frac{1}{2-\theta}} x_{\max}. \quad (19)$$

Įsivedus bedimensius kintamuosius reikalavimas, kad  $\gamma \gg 1$ , kuris reikalingas kad adiabatinė aproksimacija galiotų, patenkinamas jeigu  $\tilde{x}_{\min}, \tilde{x}_{\max} \gg 1$  ir  $\theta < 2$ . Kaip pavyzdį išsprendėme Lanževano ((16) ir (17)) lygtis dvejais skirtingais atvejais, kai  $\theta = 1$  ir kai  $\theta = 0$ . Kuomet  $\theta = 0$  turime atvejį su pastovia temperatūra. Stacionarus signalo  $x$  intensyvumo skirstinys  $P_0(\tilde{x})$  ir galios spektrinis tankis  $S(\tilde{f})$  pavaizduoti 1 paveikslėlyje. Kaip matome iš šio paveikslėlio, analitinė aproksimacija (13) sutampa su skaitmeniniais rezultatais didelės trinties riboje. Taigi skaitmeniniai rezultatai patvirtina, kad adiabatinė greičio eliminavimo procedūra atlikta teisingai. 1c pav. patvirtina, kad Brauno dalelės koordinatės fliuktuacijų galios spektriniame tankyje egzistuoja sritis, kurioje pasireiškia  $1/f$  triukšmas. Galios spektrinis tankis atvirkščiai proporcingas dažniui apytiksliai srityje tarp  $\tilde{f}_{\min} \approx 10^{-4}$  ir  $\tilde{f}_{\max} \approx 10^{-2}$ .

## 2.2.2 Sukabintos stochastinės diferencialinės lygtys generuojančios signalus su Gauso $1/f$ triukšmu

Disertacijos 2.2 skyriuje buvo parodyta, kad naudojant dvi sukabintas stochastines diferencialines lygtis, galima generuoti signalą, pasižymintį laipsniniu galios spektriniu tankiu, su pasirinktu skirtiniu, turinčiu analitinę išraišką.

Buvo parodyta, sukabintų stochastinių diferencialinių lygčių sistema

$$d x_t = a(x_t) y_t^{2\eta} dt + b(x_t) y_t^\eta d W_t, \quad (20)$$

$$d y_t = \sigma^2 \left( \eta + 1 - \frac{\lambda}{2} \right) y_t^{2\eta+1} dt + \sigma y_t^{\eta+1} d W'_t. \quad (21)$$

generuoja signalus pasižymintį  $1/f^\beta$  triukšmu. (20) lygtis aprašo signalo  $x_t$  fliuktuacijas. (21) lygtis aprašo signalo  $x_t$  kitimo spartą  $y_t$ .

Stacionarusis  $y_t$  intensyvumų skirstinys yra laipsninė funkcija

$$P_0(x, y) \sim p(x) y^{-\lambda}, \quad (22)$$

bei nuo laiko priklausanti sąlyginė tikimybė tenkina savybę [A6]

$$aP(x', ay, t|x, ay, 0) = P(x', y', a^\nu t|x, y, 0). \quad (23)$$

Čia  $\nu$  yra laiko skalę nusakantis parametras. Parametras  $\lambda$  - signalo intensyvumų stacionariojo skirstinio,  $P_0(y) \sim y^{-\lambda}$ , laipsnio rodiklis. Kad išvengti divergavimo ties mažomis  $y_t$  vertėmis, (21) lygtis turi būti sprendžiama su kraštinėmis atspindinčiomis sąlygomis t.y.  $y_t$  gali kisti tik intervale tarp  $y = y_{\min}$  ir  $y = y_{\max}$ .

(23) savybė turi būti tenkinama, kad (20) ir (21) lygčių sistemos generuojamas signalas  $x_t$  pasižymėtų laipsniniu galios spektriniu tankiu.

Funkcija  $p(x)$  esanti (22) lygtyje tenkina lygtį

$$a(x)p(x) - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} b^2(x)p(x) = 0. \quad (24)$$

Pastaroji lygybė užtikrina, kad signalo  $x_t$  intensyvumų stacionariojo skirstinio pavidalą nulemia tik koeficientų  $a(x)$  ir  $b(x)$  pasirinkimas.

Buvo parodyta [A6], kad (20) ir (21) lygčių sistemos generuojamo signalo  $x_t$  galios spektrinio tankio laipsnio rodiklis yra

$$\beta = 1 + \frac{\lambda - 1}{2\eta}. \quad (25)$$

### 2.2.3 Skaitmenimis pavyzdys

Disertacijos 3.3 skyriuje buvo skaitmeniškai sprendžiama (20) ir (21) lygčių sistema.

$$dx_t = -\gamma y_t^{2\eta} x_t dt + y_t^\eta dW_t, \quad (26)$$

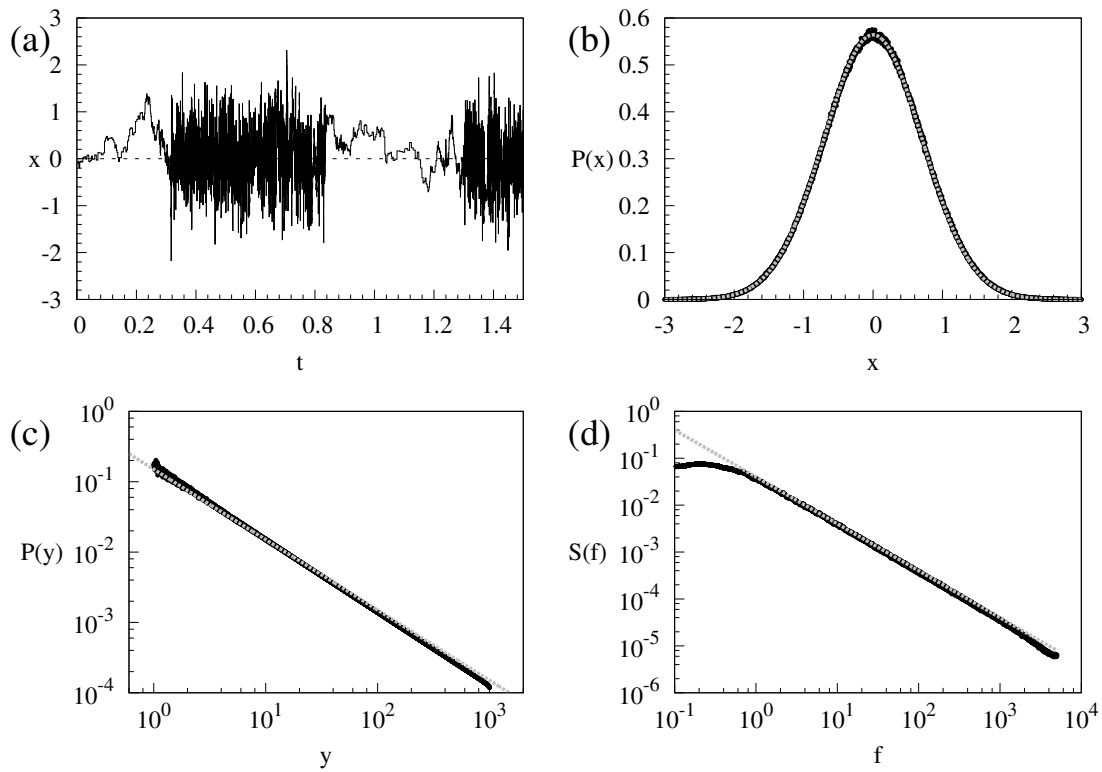
$$dy_t = \sigma^2 \left( \eta + 1 - \frac{\lambda}{2} \right) y_t^{2\eta+1} dt + \sigma y_t^{\eta+1} dW'_t. \quad (27)$$

(20) lygtyje koeficientai  $a(x) = -\gamma x$  and  $b(x) = 1$  buvo pasirinkti, tokie, kad  $x_t$  būtų pasiskirstęs pagal Gauso skirstinį

$$p(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} e^{-\gamma x^2}. \quad (28)$$

(26) lygtyje  $y^{2\eta}$  reprezentuoja fliktuojančią relaksacijos spartą.

2 paveikslėlyje palyginami, (26) ir (27) lygčių generuojamo, signalo intensyvumo skirstinys ir galios spektrinis tankis su analitinėmis aproksimacijomis. Pastarosios lygtys buvo sprendžiamos pasinaudojant Eulerio–Marujamos metodu. (27) lygtis buvo sprendžiama su kraštinėmis atspindinčiomis sąlygomis ties  $y = y_{\min}$  ir  $y = y_{\max}$ .



2 pav. (a) pavaizduotas (26) ir (27) lygčių sistemos generuojamas signalas. (21) lygtis buvo sprendžiama su kraštinėmis atspindinčiomis sąlygomis ties  $y = y_{\min}$  ir  $y = y_{\max}$ . (b) Signalų intensyvumų skirstinys. Pilka taškine linija pavaizduota Gauso kreivė. (c) Relaksacijos spartos  $y$  intensyvumo skirstinys. Pilka taškinė kreivė vaizduoja laipsninę priklausomybę su laipsnio rodikliu lygiu  $-1$ . (d)  $x$  galios spektrinis tankis. Pilka taškinė kreivė vaizduoja laipsninę priklausomybę proporcingą  $f^{-1}$ . Parametrai:  $\eta = 1$ ,  $\lambda = 1$ ,  $y_{\min} = 1$ ,  $y_{\max} = 1000$ ,  $\gamma = 1$  ir  $\sigma = 1$ .

## 2.2.4 Sukabintos Lanževano lygtys ir dalelės šuoliai per potencialinį barjerą su fliktuojančių aukščiu

Disertacijos 2.4 skyriuje buvo aptarti sukabintu Lažveno lygčių taikymai modeliuojant fizikinius reiškinius ir parodyta, kad (20) ir (21) lygčių sistema aprašo dalelės difuzija per potencialinį barjerą su fliktuojančių aukščiu.

Daugelyje fizikinių sistemų dalelės pabėgimo iš potencialinio barjero sparta priklauso nuo barjero aukščio  $v$  kaip eksponentinė funkcija. Todėl (20) ir (21) lygtyse atlikome pakeitimą  $y = e^v$

$$dx_t = a(x_t)e^{-v_t} dt + b(x_t)e^{-v_t/2} dW_t, \quad (29)$$

$$dv_t = -\frac{1}{2}\sigma^2\lambda e^{-v_t} dt + \sigma e^{-v_t/2} dW'_t. \quad (30)$$

Perrašius pastarąsias lygtis diskretine forma su kintamu laiko žingsniu  $\Delta t_k = e^{v_k}$  turime

$$x_{k+1} = x_k + a(x_k) + b(x_k)\varepsilon_k, \quad (31)$$

$$v_{k+1} = v_k - \frac{1}{2}\sigma^2\lambda + \sigma\xi_k, \quad (32)$$

$$t_{k+1} = t_k + e^{v_k}. \quad (33)$$

(32) lygtis parodo, kad potencialo aukštis  $v$  kinta, kaip Vynerio (Wiener) procesas (standartinis vienmatis Brauno judėjimas) su pastoviu dreifu. Jeigu potencialas turi pastovią vertę  $v_k$ , tai laiko tarpas, kurį dalelė turi palaukti iki kito šuolio, yra  $e^{v_k}$ .

## 2.3 Spalvotojo triukšmo įtaka Brauno judėjimui

Trečiame disertacijos skyriuje tyrėme spalvotojo triukšmo įtaką Brauno judėjimui nehomogeninėje aplinkoje. Spalvotas triukšmas imituoja koreliaciją tarp dalelės judėjimo ir susidūrimų su aplinkos dalelėmis. Rezultatai aptariami šiame skyriuje publikuoti [A2]

### 2.3.1 Adiabatinė aproksimacija sistemoms veikiamoms spalvotojo triukšmo

Disertacijos 3.1 skyriuje aprašoma adiabatinės aproksimacijos procedūra nehomogeninėms sistemoms veikiamoms spalvotojo (eksponentiškai koreliuoto) triukšmo.

## 2.3.2 Spalvotojo triukšmo įtaka stochastinėms diferencialinėms lygtims generuojančioms signalus pasižyminčius $1/f$ spektru

3.2 disertacijos skyriuje tyrėme Brauno dalelės fliuktuacijas nehomogeninėje aplinkoje, kai dalelę veikia spalvotas triukšmas.

Stochastinės diferencialinės lygtys aprašančios dalelės pozicijos kitimą laikui bėgant:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\sigma^2(\eta - \lambda)x^{2\eta-1} + \sigma x^\eta \circ \varepsilon(t), \quad (34)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{1}{\tau}\varepsilon + \frac{1}{\tau}\xi(t). \quad (35)$$

Čia  $\xi(t)$  yra baltasis triukšmas,  $\langle \xi(t)\xi(s) \rangle = \delta(t - s)$ ,  $\tau$  - spalvotojo triukšmo koreliacijos trukmė. Spalvotojo triukšmo autokoreliacijos funkcija yra:

$$\langle \varepsilon(t)\varepsilon(s) \rangle = \frac{1}{2\tau} \exp\left(-\frac{|t-s|}{\tau}\right). \quad (36)$$

Atlikus adiabatinę aproksimaciją (aprašyta disertacijos 4.1 skyriuje) turime

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\sigma^2(\eta - \lambda)\frac{x^{2\eta-1}}{\gamma(x)} + \sigma\frac{x^\eta}{\gamma(x)} \circ \xi(t). \quad (37)$$

Čia

$$\gamma(x) \equiv 1 - \frac{1}{2}\tau\sigma^2(\eta - 1)(\eta - \lambda)x^{2(\eta-1)} \quad (38)$$

(37) lygtis turėtų būti interpretuojama Stratonovičius prasme. Lygtis (37) galioja tik tuomet, kai yra tenkinama nelygybė

$$\frac{\sqrt{\tau}\sigma|2\eta - 1|x^{\eta-1}}{1 - \frac{1}{2}\tau\sigma^2(\eta - 1)(\eta - \lambda)x^{2(\eta-1)}} \ll 1 \quad (39)$$

Lygties (37) generuojamo signalo stacionarusis skirstinys yra

$$P_0(x) \sim x^{-\lambda} \left(1 - \frac{1}{2}\tau\sigma^2(\eta - 1)(\eta - \lambda)x^{2(\eta-1)}\right) \exp\left[-\frac{1}{4}\tau\sigma^2(\eta - \lambda)^2x^{2(\eta-1)}\right] \quad (40)$$

Iš (40) išraiškos matome, kad dėl spalvotojo triukšmo įvedimo atsiranda eksponentinis nu-plovimas stacionariajame skirstinyje  $P_0(x)$ . Turime eksponentinį nupjovimą ties didelėmis  $x$  vertėmis, kai  $\eta > 1$  ir ties mažomis  $x$  vertėmis, kai  $\eta < 1$ . Taigi dėl spalvotojo triukšmo įvedimo atsiranda natūralus Brauno dalelės difuzijos ribojimas.

Galime nepaisyti triukšmo koreliacijos trukmės  $\tau$  įtakos jeigu tenkinama nelygybė

$$\frac{1}{2}\tau\sigma^2|\eta - 1||\eta - \lambda|x^{2(\eta-1)} \ll 1. \quad (41)$$

Tegul  $\eta > 1$ . Tuomet (41) lygtis parodo, kad baigtinės spalvotojo triukšmo koreliacijos trukmės galime nepaisyti, kai  $x \ll x_\tau$ . Čia  $x \ll x_\tau$  pažymėjome

$$x_\tau \equiv \left[ \frac{2}{\tau \sigma^2 (\eta - 1) |\eta - \lambda|} \right]^{\frac{1}{2(\eta-1)}} \quad (42)$$

Jeigu dalelės difuzija yra apribojama intervale  $x_{\min} < x < x_{\max}$ , tai nulemia, kad galios spektrinis tankis turi laipsninę priklausomybę nuo dažnio ribotame dažnių intervale (3). Jei  $x_\tau > x_{\max}$  tuomet laipsninės srities plotis nepakinta. Priešingu atveju, kai  $x_\tau < x_{\max}$  turime siauresnę dažnių sritį, kurioje galios spektrinis tankis elgiasi kaip laisninė funkcija

$$\sigma^2 x_{\min}^{2(\eta-1)} \ll 2\pi f \ll \frac{2}{\tau(\eta-1)|\eta-\lambda|}. \quad (43)$$

Jeigu  $\eta < 1$ . Spalvotojo triukšmo koreliacijos trukmės įtakos galime nepaisyti jeigu  $x \gg x_\tau$ . Jeigu turime apribotą difuziją ( $x_{\min} < x < x_{\max}$ ) laipsninės srities plotis nepakinta, kai  $x_\tau < x_{\min}$ . Priešingu atveju, kai  $x_\tau > x_{\min}$  turime siauresnę sritį, kurioje galios spektrinis tankis elgiasi kaip laisninė funkcija funkcija dažnių srityje

$$\sigma^2 x_{\max}^{-2(1-\eta)} \ll 2\pi f \ll \frac{2}{\tau(1-\eta)|\eta-\lambda|}. \quad (44)$$

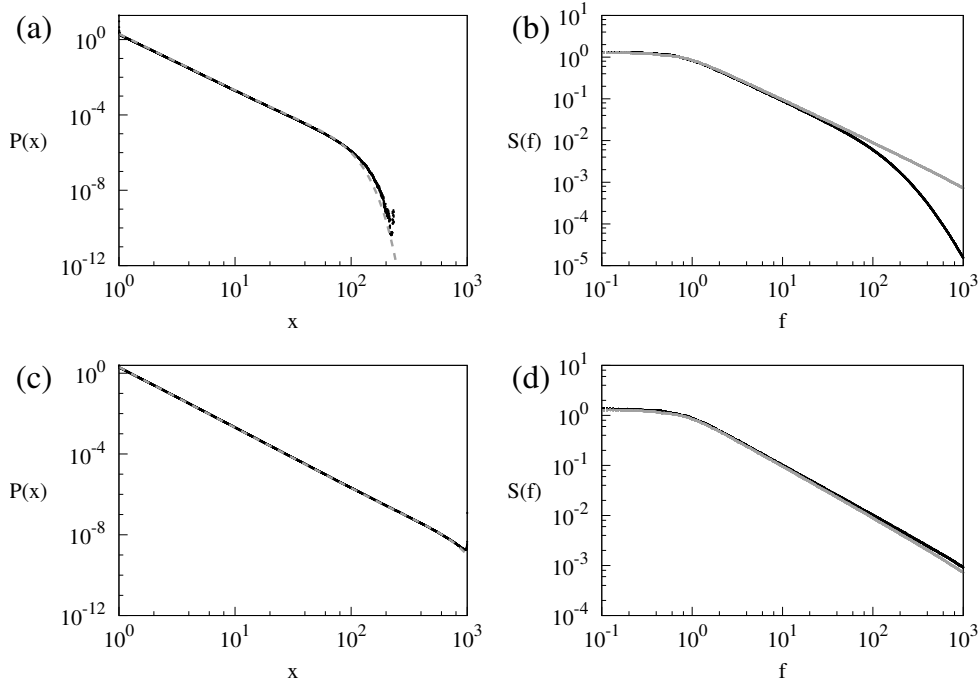
Spalvotojo triukšmo įvedimas vietoje baltojo (1) lygtyje gali nulemti, susiaurėjusią dažnių sritį, kurioje galios spektrinis tankis atvirkščiai proporcingas dažniui  $f$  laipsnyje  $\beta$ .

### 2.3.3 Skaitmeninis modeliavimas

Disertacijos 3.3 skyriuje pasimaudomi kintamo žingsnio metodu skaitmeniškai išsprendėme (34) ir (35) lygčių sistemą. Kraštinės atspindinčios sąlygos buvo pasirinktos ties  $x_{\min} = 1$  ir  $x_{\max} = 1000$ . Stacionarus signalo  $x$  intensyvumo skirstinys  $P_0(x)$  ir galios spektrinis tankis  $S(f)$  pavaizduoti 3 paveikslėlyje.

## 2.4 Stochastinės diferencialinės lygties generuojančios $1/f$ triukšmą apibendrinimas

Ketvirtame disertacijos skyriuje apibendrinome (1) stochastinę diferencialinę lygtį generuojančią signalus, pasižyminčius laipsniniu signalo intensyvumo skirstiniu ir laipsniniu galios spektriniu tankiu. (1) lygtyje Gauso triukšmas buvo pakeistas Levio (Lévy)  $\alpha$  - stabiliojo triukšmu.



3 pav. (a,c) Stacionarusis signalų, sugeneruotų pasinaudojant (34) ir (35) lygtimis, intensyvumo skirstynys. Punktyrinės linijos rodo analitines aproksimacijas (žr. (40) lygtį). (b,d) Signalų galios spektrinis tankis. Pilka linija vaizduoja signalo sugeneruoto pasinaudojant (1) galios spektrinį tankį. Spalvotojo triukšmo kerelacijos trukmė yra (a,b)  $\tau = 10^{-3}$ , (c,d)  $\tau = 10^{-5}$ . Kiti parametrai:  $\eta = 2$ ,  $\lambda = 3$ ,  $x_{\min} = 1$ ,  $x_{\max} = 1000$ , ir  $\sigma = 1$ .

## 2.4.1 Stochastinė diferencialinė lygtis su Levio triukšmu

4.1 disertacijos skyriuje mes modifikavome (1) lygtį, generuojančia signalus, pasižymi- nčius laipsniniu intensyvumo skirstiniu, joje Gauso triukšmą pakeisdami Levio (Lévy)  $\alpha$  - sta- biliuoju triukšmu

$$\frac{dx}{dt} = \sigma^\alpha \gamma(\eta, \lambda, \alpha) x^{\alpha(\eta-1)+1} + x^\eta \xi_\alpha(t), \quad (45)$$

Ši lygtis turi būti sprendžiama su kraštinėmis atspindinčiomis sąlygomis  $x \in [x_{\min}, x_{\max}]$ . (45) lygtis interpretuojama Ito prasme. Čia  $x$  yra signalas,  $\sigma$  nustato proceso laiko mastelį,  $\eta \neq 1$  - triukšmo multiplikatyvumo laipsnio rodiklis.  $\xi_\alpha(t)$  - baltasis triukšmas, kurio intensyvumas yra pasiskirstęs pagal Levio  $\alpha$  stabilųjį skirstinį. Šis skirstinys bendru atveju neturi analitinės išraiškos ir apibrėžiamas pasinaudojant charakteristinę funkciją

$$\langle \exp(ik\xi_\alpha) \rangle = \exp(-\sigma^\alpha |k|^\alpha)$$

Levio  $\alpha$  - stabilusis skirstinys yra apibendrintosios centrinės ribinės teoremos rezultatas. Šis skirstinys charakterizuojamas pagal stabilumo indeksą  $0 < \alpha \leq 2$ . Gauso skirstinys yra atskiras Levio skirstinio atvejis, kai  $\alpha = 2$ .



(45) lygtis gali būti išreikšta per diferencialus

$$dx = \sigma^\alpha \gamma x^{\alpha(\eta-1)+1} dt + x^\eta dL_t^\alpha, \quad (46)$$

čia  $dL_t^\alpha$  Levio  $\alpha$ - stabiliojo judėjimo  $L_t^\alpha$  prieaugliai [8, 39]. Koeficientas  $\gamma(\eta, \lambda, \alpha)$  yra lygus

$$\gamma(\eta, \lambda, \alpha) = \frac{\sin\left[\pi\left(\frac{\alpha}{2} - \alpha\eta + \lambda\right)\right]}{\sin[\pi(\alpha(\eta-1) - \lambda)]} \frac{\Gamma(\alpha\eta - \lambda + 1)}{\Gamma(\alpha(\eta-1) - \lambda + 2)}. \quad (47)$$

Toks koeficiento  $\gamma(\eta, \lambda, \alpha)$  pasirinkimas užtikrina, kad (45) generuojami signalai pažymėtų laipsniniu intensyvumo skirstiniu lygiu

$$P_0(x) \sim x^{-\lambda}, \quad (48)$$

Parametras  $\lambda$  - signalo intensyvumų stacionariojo skirstinio  $P_0(x)$  laipsnio rodiklis. Laipsnio rodiklis  $\lambda$  turi tenkinti nelygybę [A4]

$$\alpha(\eta - 1) + 1 < \lambda < \alpha\eta + 1. \quad (49)$$

## 2.4.2 Galios spektrinio tankio parametų nustatymas

4.2 disertacijos skyriuje buvo nustatyta, kad (45) lygties generuoja signalus pasižyminčius laipsniu galios spektriniu tankiu  $S(f)$  lygiu

$$S(f) \sim \frac{1}{f^\beta}, \quad \beta = 1 + \frac{\lambda - 3}{\alpha(\eta - 1)}. \quad (50)$$

Jeigu (45) lygtis sprendžiama su kraštinėmis sąlygomis t.y.  $x$  gali kisti tik intervale tarp  $x = x_{\min}$  ir  $x = x_{\max}$ . Tuomet galios spektrinis tankis elgiasi kaip laipsninė funkcija,  $1/f^\beta$ , ribotame dažnių intervale  $f_{\min} \ll f \ll f_{\max}$ . Buvo nustatyta šio intervalo pločio priklausomybė (45) lygties nuo parametų:

$$\sigma^\alpha x_{\min}^{\alpha(\eta-1)} \ll 2\pi f \ll \sigma^\alpha x_{\max}^{\alpha(\eta-1)}. \quad (51)$$

## 2.4.3 Skaitmeninio sprendimo metodas

4.3 disertacijos skyriuje buvo modifikuotas kintamo žingsnio skaitmeninio lygčių sprendimo metodas. Pritaikant jį lygtims su Levio  $\alpha$  stabiliojo triukšmu spręsti.

## 2.5 Signalų, generuojamų laike subordinuojamų netiesinių Lanževano lygčių, galios spektrinis tankis

Penktame disertacijos skyriuje buvo išvesta (laike) trupmeninė Fokerio ir Planko lygtis aprašanti Brauno dalelės difuziją aplinkoje, pasižyminčioje nehomogeniniu spastų pasiskirstymu. Taip pat buvo analitiškai suskaičiuotas trupmeninės Fokerio ir Planko lygties aprašomo signalo galios spektrinis tankis.

### 2.5.1 Trumpmeninė Fokerio-Planko lygtis aprašanti difuziją heterogeninėje aplinkoje

5.1 disertacijos skyriuje buvo aptartas sąryšis tarp laike subordinuotos Lanževano lygties, aprašančios Brauno judėjimą nehomogeninėje aplinkoje ir trupmeninės Fokerio ir Planko lygties

### 2.5.2 Nuo dalelės padėties priklausomas įkalinimo laikas

5.2 disertacijos skyriuje parodėme, kad nors dalelės difuzija yra aprašoma tiesine Lanževano lygtimi, tačiau dėl nehomogeninio spastų, užlaikančių dalelę, pasiskirstymo aplinkoje trupmeninė Fokerio ir planko lygtis gali turėti nuo dalelės koordinatės priklausančius difuzijos ir dreifo koeficientus.

### 2.5.3 Galios spektrinis tankis ir laike trupmeninė Fokerio ir Planko lygtis

5.3 disertacijos skyriuje buvo išvesta bendra formulė galios spektriniam tankiui skaičiuoti žinant trupmeninės Fokerio ir Planko lygties tikrinės vertes.

### 2.5.4 Laike trupmeninė Fokerio ir Planko lygtis su laipsniniais koeficientais

5.4 disertacijos skyriuje buvo suskaičiuotas signalų, aprašomų laike trupmeninė Fokerio ir Planko lygtis su laipsniniais koeficientais, galios spektrinis tankis

Laike trupmeninė Fokerio ir Planko lygtis su laipsniniais koeficientais:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = \sigma^2 {}_0D_t^{1-\alpha} \left\{ \left( \frac{\lambda}{2} - \eta \right) \frac{\partial}{\partial x} \left[ x^{2\eta-1} P(x, t) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ x^{2\eta} P(x, t) \right] \right\}. \quad (52)$$

$${}_0D_t^{1-\alpha} f(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{f(t')}{(t-t')^{1-\alpha}} dt', \quad 0 < \alpha < 1 \quad (53)$$

(52) lygties stacionarusis sprendinys yra laipsninė funkcija

$$P_0(x) \sim x^{-\lambda}. \quad (54)$$

Buvo parodyta, kad Brauno dalelės (aprašomos (52) lygtimi) koordinatės fluktuacijų galios spektrinis tankis yra

$$S(f) \sim \begin{cases} \frac{1}{\omega^\beta}, & 1 - \alpha < \beta < 1 + \alpha, \\ \frac{1}{\omega^{1+\alpha}}, & \beta > 1 + \alpha. \end{cases} \quad (55)$$

Čia

$$\beta = 1 + \frac{\alpha(\lambda - 3)}{2(\eta - 1)} \quad (56)$$

## 2.5.5 Galios spektrinis tankis ir signalo skalės pakeitimo savybės

5.5 disertacijos skyriuje pasinaudojant savybe, jog (52) lygtimi aprašomo signalo skalės pakeitimas  $x \rightarrow ax$  yra tapatus signalo laiko skalės pakeitimui  $t \rightarrow a^{2(\eta-1)/\alpha} t$ , buvo nustatyta galios spektrinio tankio laipsnio rodiklio priklausomybė nuo parametrų. Šiuo alternatyviu metodu ir 5.4 skyriuje (žr. (56) formule) nustatytos  $\beta$  priklausomybės yra tokios pačios.

## 2.5.6 Skaitmeninė aproksimacija trajektorijoms skaičiuoti

5.6 disertacijos skyriuje kaip pavyzdys buvo skaitmeniškai išspręstos Lanževeno lygtys

$$dx = \left( \eta - \frac{\lambda}{2} \right) x^{2\eta-1} d\tau + x^\eta dW(\tau), \quad (57)$$

$$dt = dL^\alpha(\tau) \quad (58)$$

atitinkančios (52) Fokerio ir Planko lygtį. Buvo sukaičiotos vidinio laiko priklausomybė nuo realios laiko, bei difunduojančios dalelės, aprašomos (57) ir (58) lygtimis, judėjimo trajektorijos.

## 2.5.7 Galios spektrinis tankis

5.7 disertacijos skyriuje transformavus Fokerio ir Planko (52) lygtį į Šredingerio lygties pavidalą ir išsprendus pastarąją lygtį parodyta, kad galios spektriniam tankiui būdinga laipsninė priklausomybė, kurios laipsnio rodiklis aprašomas (56) formule.

## 2.6 Anomalioji difuzija

Šeštame disertacijos skyriuje buvo tiriama (1) ir (46) lygčių generuojamų signalų vidutinio kvadratinio nuokrypio priklausomybė nuo laiko.

### 2.6.1 Heterogeninės difuzijos procesas

6.1 disertacijos skyriuje aptariamas sąryšis tarp heterogeninės difuzijos proceso ir anomalios difuzijos. Bei pateikiami fizikinių sistemų pavyzdžiai, kur anomalioji difuzija gali būti modeliuojama pasinaudojant heterogeninės difuzijos procesu.

### 2.6.2 Išorinio potencialo įtaka heterogeninės difuzijos procesui

6.2 disertacijos skyriuje buvo parodyta, kad heterogeninės difuzijos procesas veikiamas išorinės jėgos potencialo gali būti aprašomas (1) lygtimi. Taip pat buvo parodyta, kad išorinės jėgos įvedimas nepakeičia vidutinio kvadratinio nuokrypio augimo laikui bėgant, jeigu išorinė jėga proporcinga triukšmo indukuotam dreifui.

Heterogeninės difuzijos procesas yra aprašomas pasinaudojant Lažveno lygtini

$$dx = \sigma |x|^\eta \circ dW_t. \quad (59)$$

Čia  $x$  yra signalas,  $\sigma$  nustato proceso laiko mastelį,  $\eta$  - triukšmo multiplikatyvumo laipsnio rodiklis.  $W_t$  yra standartinis Vynerio procesas. (59) lygtis yra interpretuojama Stratonovičiaus prasme.

Mes naudosime Ito interpretaciją:

$$dx = \frac{1}{2} \sigma^2 \eta |x|^{2(\eta-1)} x dt + \sigma |x|^\eta dW_t. \quad (60)$$

(60) lyties dešinės pusės pirmasis narys reprezentuoja triukšmo indukuotą dreifą. (60) lyties generuojamo signalo vidutinis kvadratinis nuokrypis pasižymi netiesiniu augimu laikui bėgant [13]

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \sim (\sigma^2 t)^{\frac{1}{1-\eta}}. \quad (61)$$

Įvertinus išorinės jėgos potencialo poveikį heterogeninės difuzijos procesas aprašomas (1) lygtimi

$$dx = \sigma^2 \left( \eta - \frac{\lambda}{2} \right) x^{2\eta-1} dt + \sigma x^\eta dW_t. \quad (62)$$

Kaip buvo minėta praeituose skyriuose parametras  $\lambda$  yra stacionariojo skirstinio,  $P_0(x) \sim x^{-\lambda}$ , laipsnio rodiklis. (62) lygtis turi būti sprendžiama su kraštinėmis atspindinčiomis sąlygomis ties mažomis  $x = x_{\min}$  ir didelėmis  $x = x_{\max}$  signalo vertėmis. Buvo suskaičiuota analitinė išraiška aprašanti nuo laiko priklausančią kintamojo  $x$  tikimybės tankio funkciją

$$P(x, t|x_0, 0) = \frac{x^{\frac{1-2\eta-\lambda}{2}} x_0^{\frac{1-2\eta+\lambda}{2}}}{|\eta-1|\sigma^2 t} \exp\left(-\frac{x^{2(1-\eta)} + x_0^{2(1-\eta)}}{2(\eta-1)^2\sigma^2 t}\right) \times I_{\frac{\lambda+1-2\eta}{2(\eta-1)}}\left(\frac{x^{(1-\eta)} x_0^{(1-\eta)}}{(\eta-1)^2\sigma^2 t}\right). \quad (63)$$

Pastarasis tikimybės tankis tenkina pradinę sąlygą  $P(x, t=0|x_0, 0) = \delta(x-x_0)$ . Pasinaudojus (63) išraiška buvo suskaičiuotas nuo laiko priklausantis  $a$ -tasis  $x$  momentas

$$\begin{aligned} \langle x^a \rangle_{x_0} &= \int_0^\infty x^a P(x, t|x_0, 0) dx \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda-1-a}{2(\eta-1)}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda-1}{2(\eta-1)}\right)} \left(2(\eta-1)^2\sigma^2 t\right)^{\frac{a}{2(1-\eta)}} \\ &\quad \times {}_1F_1\left(\frac{a}{2(\eta-1)}; \frac{\lambda-1}{2(\eta-1)}; -\frac{x_0^{2(1-\eta)}}{2(\eta-1)^2\sigma^2 t}\right) \end{aligned} \quad (64)$$

Čia  ${}_1F_1(a; b; z)$  yra the Kumerio (Kummer) susipynusi hypergeometrinė funkcija. Praėjus pakankamai dideliu laiko tarpui hypergeometrinė funkcija yra apytiksliai lygi 1, todėl

$$\langle x^a \rangle_{x_0} \approx \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda-1-a}{2(\eta-1)}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda-1}{2(\eta-1)}\right)} \left(2(\eta-1)^2\sigma^2 t\right)^{\frac{a}{2(1-\eta)}}. \quad (65)$$

Iš (65) išraiškos matyti, kad  $x$  kvadrato vidurkis priklauso nuo laiko kaip laipsninė funkcija  $\langle x^2 \rangle_{x_0} \sim t^{1/(1-\eta)}$ , jeigu yra praėjęs pakankamai didelis laiko tarpas

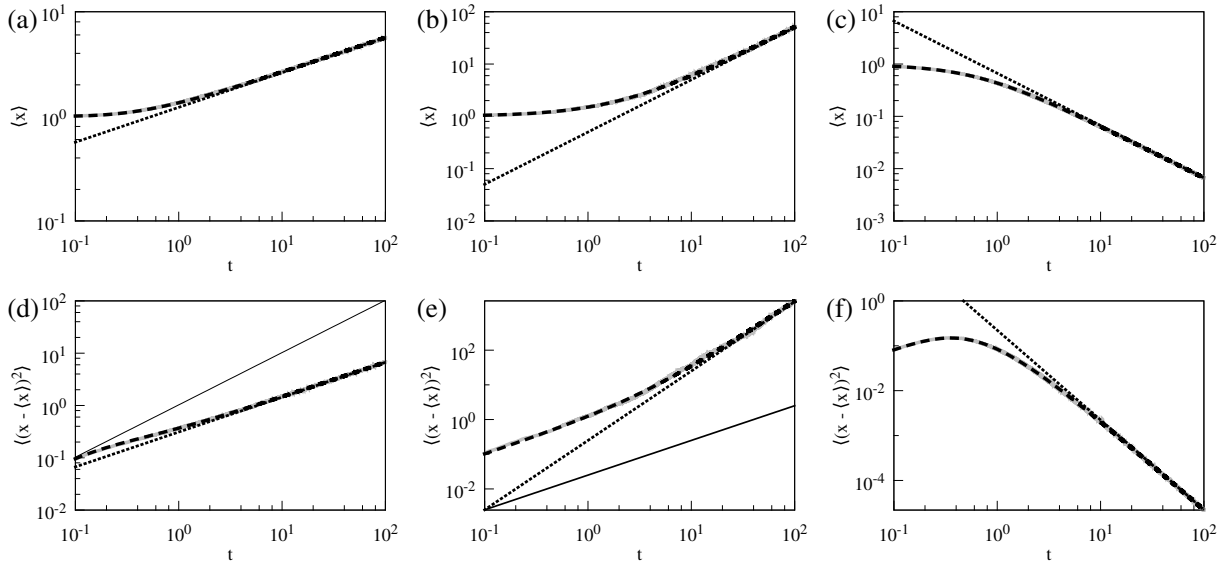
$$\frac{x_0^{2(1-\eta)}}{2(\eta-1)^2\sigma^2 t} \ll 1. \quad (66)$$

$x$  vidurkis priklauso nuo laiko kaip laipsninė funkcija  $t^{1/2(1-\eta)}$ . Todėl ir vidutinis kvadratinis nuokrypis  $\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$  turi tokią pačią priklausomybę nuo laiko

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \sim t^{1/(1-\eta)} \quad (67)$$

kaip ir originalus heterogeninės difuzijos procesas (žr (59) lygtį).

4 paveikslėlyje pavaizduotas (62) lygties generuojamo signalo vidurkio ir vidutinio kvadratinio nuokrypio (dispersijos) augimas laikui bėgant. Kaip matome kreivės suskaičiuotos pagal analitinę išraišką (64) sutampa su skaitmeniniais rezultatais.



4 pav. Vidurkio (a,b,c) ir vidutinio kvadratinio nuokrypio (d,e,f) priklausomybė nuo laiko, kai difunduojančios dalelės padėtis kinta pagal (62) lygtį. Pilka kreivė vaizduoja skaitmeninės simuliacijos rezultatus, juoda punktyrinė kreivė suskaičiuota pasinaudojant (64) išraiška, juoda taškinė kreivė vaizduoja laipsninę priklausomybę nuo laiko: (a,b,c)  $\sim t^{1/[2(1-\eta)]}$ , (d,e,f)  $\sim t^{1/(1-\eta)}$ . (d,e) Tolydi juoda kreivė vaizduoja vidutinio kvadratinio nuokrypio tiesinę priklausomybę nuo laiko. (d) stebima subdifuzija ir (e) superdifuzija. Parametrai:  $\sigma = 1$ , (a,d)  $\eta = -\frac{1}{2}$ ,  $\lambda = -1$ ; (b,c)  $\eta = \frac{1}{2}$ ,  $\lambda = 0$ ; (c,f)  $\eta = \frac{3}{2}$ ,  $\lambda = 5$ . Pradinė dalelės padėtis  $x_0 = 1$ .

### 2.6.3 Eksponentinis difuzijos apribojimas

6.3 disertacijos skyriuje buvo tiriamas heterogeninės difuzijos procesas veikiamas išorinės jėgos neproporcingos triukšmo indukuotam dreifui. Buvo parodyta, kad papildomos išorinės jėgos tiesiškai proporcingos  $x$  įvedimas sutrumpina laiko intervalą, kuriame vidutinis kvadratinis nuokrypis auga kaip netiesinė funkcija nuo laiko.

(62) lygtyje pridėjome išorinę pridėjome papildomą išorinę jėgą neproporcingą  $2\eta - 1$ :

$$dx = \left( \mu x + \sigma^2 \left( \eta - \frac{\lambda}{2} \right) x^{2\eta-1} \right) dt + \sigma x^\eta dW_t. \quad (68)$$

Čia  $\mu$  yra

$$\mu = \sigma^2 (\eta - 1) x_m^{2(\eta-1)}. \quad (69)$$

Jeigu  $\mu$  turi tą patį ženklą kaip  $\eta - 1$  tuomet stacionarusis signalo  $x$  intensyvumų skirstinys  $P_0(x)$  yra lygus

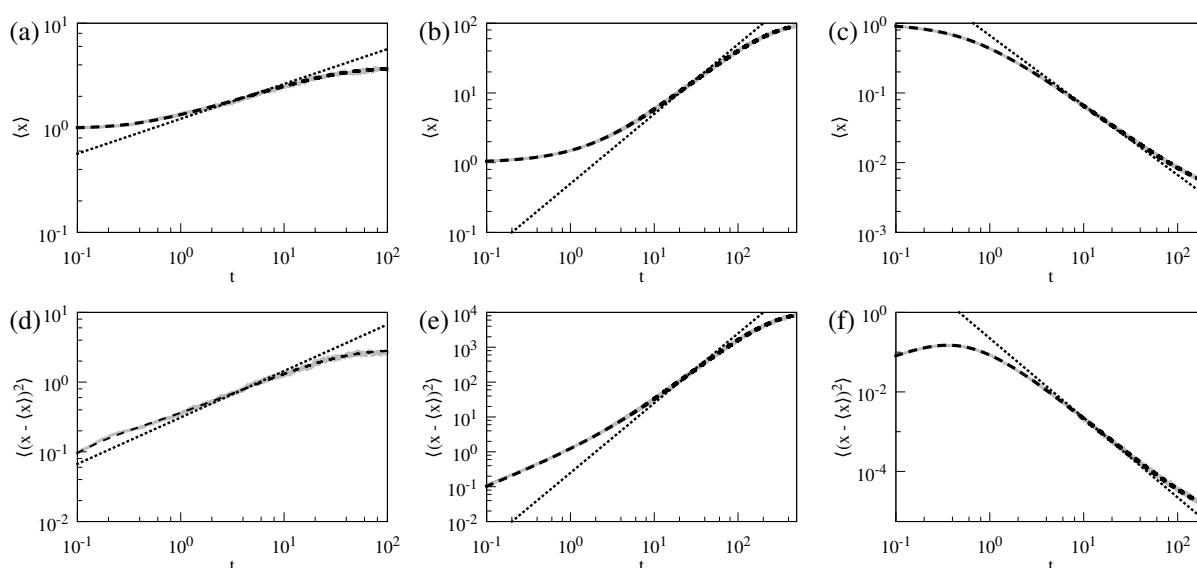
$$P_0(x) = \frac{2|\eta - 1|x_m^{\lambda-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda-1}{2(\eta-1)}\right)} x^{-\lambda} \exp\left(-\left(\frac{x_m}{x}\right)^{2(\eta-1)}\right), \quad (70)$$

Čia  $x_m$  signalo intensyvumo vertė, kuria pasiekus prasideda  $P_0(x)$  laipsninės dalies eksponentinis nupjovimas.

Buvo suskaičiuotas nuo laiko priklausantis  $a$  - tasis  $x$  momentas

$$\langle x^a \rangle_{x_0} = \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda-1-a}{2(\eta-1)}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda-1}{2(\eta-1)}\right)} \frac{x_m^a}{(1 - e^{-2(\eta-1)\mu t})^{\frac{a}{2(\eta-1)}}} \times {}_1F_1\left(\frac{a}{2(\eta-1)}; \frac{\lambda-1}{2(\eta-1)}; -\frac{x_m^{2(\eta-1)} x_0^{2(1-\eta)}}{e^{2(\eta-1)\mu t} - 1}\right) \quad (71)$$

5 paveikslėlyje pavaizduotas (68) lygties generuojamo signalo vidurkio ir vidutinio kvadratinio nuokrypio augimas laikui bėgant. Kaip matome kreivės suskaičiuotos pagal analitinę išraišką (71) sutampa su skaitmeniniais rezultatais.



5 pav. Vidurkio (a,b,c) ir vidutinio kvadratinio nuokrypio (d,e,f) priklausomybė nuo laiko, kai difunduojančios dalelės padėtis kinta pagal (68) lygtį. Pilka kreivė vaizduoja skaitmenės simuliacijos rezultatus, juoda punktyrinė kreivė suskaičiuota pasinaudojant (71) išraišką, juoda taškinė kreivė vaizduoja laipsninę priklausomybę nuo laiko: (a,b,c)  $\sim t^{1/[2(1-\eta)]}$ , (d,e,f)  $\sim t^{1/(1-\eta)}$ . Parametrai:  $\sigma = 1$ , (a,d)  $\eta = -\frac{1}{2}$ ,  $\lambda = -1$ ,  $x_m = 5$ ; (b,c)  $\eta = \frac{1}{2}$ ,  $\lambda = 0$ ,  $x_m = 100$ ; (c,f)  $\eta = \frac{3}{2}$ ,  $\lambda = 5$ ,  $x_m = 0.01$ . Pradinė dalelės padėtis  $x_0 = 1$ .

## 2.6.4 Anomalioji difuzija ir $1/f$ triukšmas

6.4 disertacijos skyriuje buvo tiriamas stochastinė diferencialinės lygties su Levio triukšmu generuojamo signalo vidutinio kvadratinio nuokrypio augimas laikui bėgant. Buvo parodyta, kad (46) lygtis gali generuoti signalus pasižyminčius tiek  $1/f$  triukšmu, tiek anomalią difuzija trumpuose laikuose.

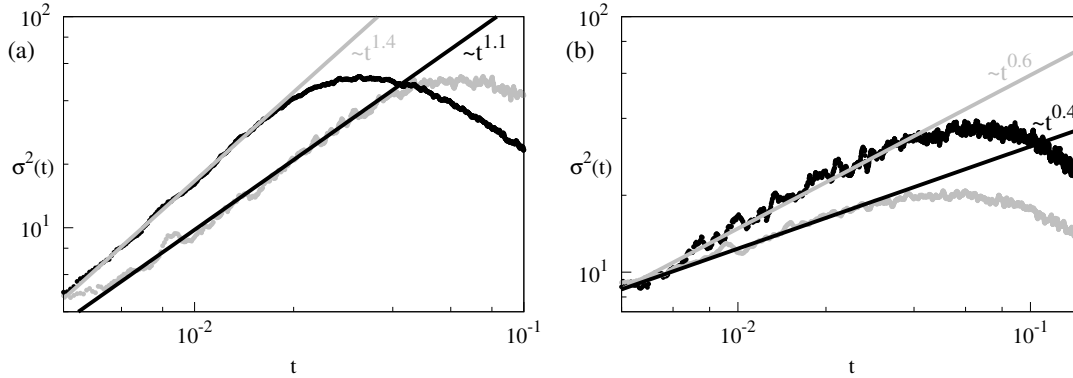
Klasikinis Brauno judėjimas pasižymi vidutinio kvadratinio nuokrypio  $\sigma^2(t)$  tiesiniu augimu laikui bėgant. Jeigu procesui būdingas vidutinio kvadratinio nuokrypio netiesinis augimas

laikui bėgant,

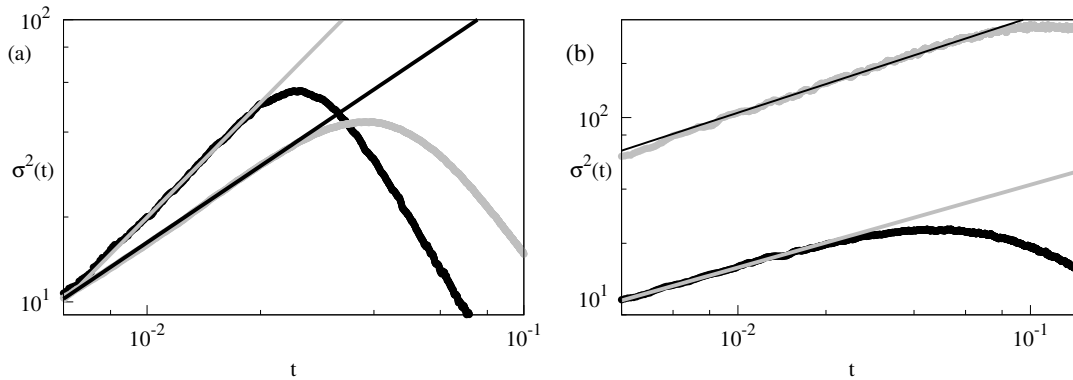
$$\sigma^2(t) = \langle [x(t) - \langle x(t) \rangle]^2 \rangle \sim t^\mu. \quad (72)$$

tai sakoma, kad procesas pasižymi anomaliąja difuzija [2].

6 ir Fig. 7 paveikslėliuose pateikta (46) lygties generuojamų signalų  $\sigma^2(t)$  priklausomybės nuo laiko.



6 pav. (46) lygties generuojamo signalo vidutinio kvadratinio nuokrypio  $\sigma^2(t)$  priklausomybė nuo laiko  $t$ . Tolydžios pilka ir juoda linijos vaizduoja  $\sigma^2(t)$  laipsninę priklausomybę nuo laiko,  $\sigma^2 \sim t^\mu$ . (a) pavaizduota superdifuzija, kai Levio stabilumo indeksas yra lygus  $\alpha = 1.5$ : juoda kreivė  $\eta = 2.1$ , pilka kreivė  $\eta = 1.9$ . Atitinkamai skaitmeniškai nustatytos anomaliosios difuzijos laipsnio rodiklio vertės  $\mu$  yra  $\mu = 1.4$  and  $\mu = 1.1$ . (b) subdifuzija, kai  $\alpha = 1.2$ : juoda kreivė  $\eta = 2.1$ , pilka kreivė  $\eta = 1.9$ . Atitinkamai anomaliosios difuzijos ekponetės vertės  $\mu$  yra  $\mu = 0.6$  ir  $\mu = 0.4$ . Kiti parametrai:  $\lambda = 3$ ,  $x_{\min} = 1$ ,  $x_{\max} = 10^4$ ,  $\sigma = 1$ .



7 pav. (46) lygties generuojamo signalo vidutinio kvadratinio nuokrypio  $\sigma^2(t)$  priklausomybė nuo laiko  $t$ , kai Levio stabilumo indeksas yra lygus  $\alpha = 1$ . Tolydžios pilka ir juoda linijos vaizduoja  $\sigma^2(t)$  laipsninę priklausomybę nuo laiko,  $\sigma^2 \sim t^\mu$ . (a) juoda kreivė vaizduoja superdifuziją  $\eta = 2.8$ , o pilka kreivė subdifuziją  $\eta = 2.9$ . Atitinkamai skaitmeniškai nustatytos anomaliosios difuzijos laipsnio rodiklio vertės  $\mu$  yra  $\mu = 1.35$  and  $\mu = 0.9$ . (b) juoda kreivė  $\eta = 2.4$ , pilka kreivė  $\eta = 2.1$ . Atitinkamai anomaliosios difuzijos ekponetės vertės  $\mu$  yra  $\mu = 0.5$ . Kiti parametrai tokie patys kaip ir 6 pav.



### 3 Išvados

1. Buvo parodyta, kad stochastinė diferencialinė (1) lygtis, generuojanti signalus pasižymi-  
nčius laipsnine statistika ir  $1/f^\beta$  triukšmu, gali aprašyti dalelių difuziją nehomogeninėje  
aplinkoje. Pastaroji lygtis buvo išvesta supaprastinus Lanžveno ((4) ir (5)) lygtis, apraša-  
nčias vienmatį Brauno judėjimą.
2. Sukabintų stochastinių diferencialinių (20) ir (21) lygčių sistema gali generuoti signalus  
 $x_t$  su galios spektriniu tankiu besielgiančiu kaip laipsninė funkcija,  $S(f) \sim f^{-\beta}$ , plačiame  
dažnių intervale. Laipsnio rodiklis  $\beta$  aprašomas (25) formule. (20) lygtis aprašo signalo  
 $x_t$  fliuktuacijas, o (21) lygtis aprašo signalo  $x_t$  kitimo spartą.
3. Spalvotojo triukšmo įvedimas vietoje baltojo (1) lygtyje nulemia papildomą dalelės difu-  
zijos ribojimą, kuris pasireiškia, kaip eksponentinis nuplovimas galimų dalelės pozicijų  
skirstinyje. Skirstinio pločio sumažėjimo turime susiaurėjusią dažnių sritį, kurioje stebi-  
mas laipsninis galios spektrinis tankis.
4. (1) lygtyje Gauso triukšmas buvo pakeistas Levio (Lévy)  $\alpha$  - stabiliojo triukšmu. Šis pa-  
keitimas nulėmė, kad modifikuotos (45) stochastinės diferencialinės lygties generuojamo  
signalo galios spektrinio tankio laipsnio rodiklis papildomai priklauso nuo parametro  $\alpha$ .  
Laipsnio rodiklis  $\beta$  aprašomas (50) formule.
5. Laike trupmeninės Fokerio ir Planko lygties su laipsniniais koeficientais galios spektrinis  
tankis elgiasi kaip laipsninė funkcija  $S(f) \sim f^{-\beta}$ , plačiame dažnių intervale. Laipsnio  
rodiklis aprašomas (56) formule. Iš (56) išraiškos matyti, kad galios spektrinio tankio  
laipsnio rodiklis yra didesnis už vienetą plačiame dažnių intervale.
6. Mūsų tyrėme išorinės jėgos įtaką heterogeninės difuzijos procesui. Buvo parodyta, kad  
išorinės jėgos įvedimas nepakeičia vidutinio kvadratinio nuokrypio priklausomybės nuo  
laiko laipsnio rodiklio, jeigu išorinė jėga proporcinga triukšmo indukuotam dreifui. Taip  
pat buvo parodyta, kad išorinės jėgos, su kitokiu laipsnio rodikliu negu  $2\eta - 1$ , įvedimas  
apriboja laiko intervalą, kuriame stebima anomalioji difuzija.

# Literatūra

1. T. H. Solomon, E. R. Weeks, H. L. Swinney, Observation of anomalous diffusion and Lévy flights in a two-dimensional rotating flow, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3975 (1993).
2. R. Metzler, J. Klafter, The random walk's guide to anomalous diffusion: A fractional dynamics approach, *Phys. Rep.* **339**, 1 (2000).
3. H. C. Fogedby, Lévy flights in random environments, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 2517 (1994).
4. T. Srokowski, Fractional Fokker-Planck equation for Lévy flights in nonhomogeneous environments, *Phys. Rev. E* **79**, 040104(R) (2009).
5. D. Schertzer, M. Larchev, J. Duan, V. V. Yanovsky, S. Lovejoy, Fractional Fokker-Planck equation for nonlinear stochastic differential equations driven by non-Gaussian Lévy stable noises, *J. Math. Phys.* **42**, 200 (2001).
6. T. Srokowski, Multiplicative Lévy processes: Itô versus Stratonovich interpretation, *Phys. Rev. E* **80**, 051113 (2009).
7. P. D. Ditlevsen, Observation of  $\alpha$ -stable noise induced millennial climate changes from an ice-core record, *Geophys. Res. Lett.* **26**, 1441 (1999).
8. A. Weron, K. Burnecki, S. Mercik, K. Weron, Complete description of all self-similar models driven by Lévy stable noise, *Phys. Rev. E* **71**, 016113 (2005).
9. H. Scher, G. Margolin, R. Metzler, J. Klafter, B. Berkowitz, The dynamical foundation of fractal stream chemistry: The origin of extremely long retention times, *Geophys. Res. Lett.* **29**, 5-1-5-4 (2002).
10. I. Golding, E. C. Cox, Physical nature of bacterial cytoplasm, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 098102 (2006).
11. G. M. Zaslavsky, Fractional kinetic equation for hamiltonian chaos, *Physica D* **76**, 110 (1994).
12. T. Srokowski, A. Kaminska, Diffusion equations for a markovian jumping process, *Phys. Rev. E* **74**, 021103 (2006).
13. A. G. Cherstvy, A. V. Chechkin, R. Metzler, Anomalous diffusion and ergodicity breaking in heterogeneous diffusion processes, *New J. Phys.* **15**, 083039 (2013).

14. L. F. Richardson, Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph, Proc. R. Soc. Lond. A **110**, 709 (1926).
15. C. Loverdo, O. Bénichou, R. Voituriez, A. Biebricher, I. Bonnet, P. Desbiolles, Quantifying hopping and jumping in facilitated diffusion of DNA-binding proteins, Phys. Rev. Lett. **102**, 188101 (2009).
16. M. Dentz, P. Gouze, A. Russian, J. Dweik, F. Delay, Time-domain random walk modeling of heterogeneous diffusion and sorption in porous media, Adv. Water Res. **49**, 13 (2012).
17. Y. Wang, Y. Lai, , Z. Zheng, Onset of colored-noise-induced synchronization in chaotic systems, Phys. Rev. E **79**, 056210 (2009).
18. L. Gammaitoni, Hänggi, F. Marchesoni, Stochastic resonance, Rev. Mod. Phys. **70**, 223 (1998).
19. D. Nozaki, D. J. Mar, P. Grigg, J. J. Collins, Effects of colored noise on stochastic resonance in sensory neurons, Phys. Rev. Lett. **82**, 2402 (1999).
20. A. L. Barabasi, R. Albert, Emergence of scaling in random networks, Science **286**, 509 (1999).
21. C. Castellano, S. Fortunato, V. Loreto, Statistical physics of social dynamics, Rev. Mod. Phys. **81**, 591 (2009).
22. A. A. Balandin, Low-frequency  $1/f$  noise in graphene devices, Nature Nanotechnology **8**, 549 (2013).
23. S. Kogan, *Electronic Noise and Fluctuations in Solids* (Cambridge University Press, Cambridge, 2008).
24. M. Li, W. Zhao, On  $1/f$  noise, Math. Problems Eng. **2012**, 673648 (2012).
25. V. Orlyanchik, M. B. Weissman, M. A. Torija, M. Sharma, C. Leighton, Strongly inhomogeneous conduction in cobaltite films: Non-Gaussian resistance noise, Phys. Rev. B **78**, 094430 (2008).
26. S. V. Melkonyan, Non-Gaussian conductivity fluctuations in semiconductors, Physica B **405**, 379 (2010).
27. E. Marinari, G. Parisi, D. Ruelle, P. Windey, Random walk in a random environment and  $1/f$  noise, Phys. Rev. Lett. **50**, 1223 (1983).

28. B. Kaulakys, V. Gontis, M. Alaburda, Point process model of  $1/f$  noise vs a sum of Lorentzians, *Phys. Rev. E* **71**, 051105 (2005).
29. B. Kaulakys, J. Ruseckas, Stochastic nonlinear differential equation generating  $1/f$  noise, *Phys. Rev. E* **70**, 020101(R) (2004).
30. B. Kaulakys, J. Ruseckas, V. Gontis, M. Alaburda, Nonlinear stochastic models of  $1/f$  noise and power-law distributions, *Physica A* **365**, 217 (2006).
31. B. Kaulakys, M. Alaburda, Modeling scaled processes and  $1/f^\beta$  noise using nonlinear stochastic differential equations, *J. Stat. Mech.* **2009**, P02051 (2009).
32. J. Ruseckas, B. Kaulakys, V. Gontis, Herding model and  $1/f$  noise, *EPL* **96**, 60007 (2011).
33. V. Gontis, J. Ruseckas, A. Kononovicius, A long-range memory stochastic model of the return in financial markets, *Physica A* **389**, 100–106 (2010).
34. J. Mathiesen, L. Angheluta, P. T. H. Ahlgren, M. H. Jensen, Excitable human dynamics driven by extrinsic events in massive communities, *PNAS* **110**, 17259 (2013).
35. J. Ruseckas, B. Kaulakys, Scaling properties of signals as origin of  $1/f$  noise, *J. Stat. Mech.* P06005 (2014).
36. H. Risken, *The Fokker-Planck equation, Methods of Solution and Applications* (Springer-Verlag, 1989).
37. C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences* (Springer-Verlag, Berlin, 2004).
38. J. M. Sancho, M. San Miguel, D. Dürr, Adiabatic elimination for systems of brownian particles with nonconstant damping coefficients, *J. Stat. Phys.* **291** (1982).
39. A. Janicki, A. Weron, *Simulation and Chaotic Behaviour of  $\alpha$  - Stable Stochastic Processes* (Marcel Dekker, New York, 1994).

# Summary

Transport properties in complex systems are usually characterized by anomalous scaling, that is by a non-linear time dependency in the growth of the variance,  $\sigma^2(t) \sim t^\mu$ , where  $t$  is the elapsed time. This condition is known as an anomalous diffusion. In contrast to the anomalous diffusion, in a typical diffusion process the variance of the particle position (or mean squared displacement  $\sigma_x^2$ ) is a linear function of time. Physically, the variance  $\sigma^2(t)$  can be considered as the amount of space that the particle has “explored” in the system at given time  $t$ .

In this thesis we have derived nonlinear stochastic differential equations (SDEs) generating signals with  $1/f$  spectrum in a wide range of frequencies together with power-law steady-state distribution from Langevin equations describing Brownian particle motion in heterogeneous media.

By using proposed SDEs we have studied the influence of external potentials on anomalous diffusion and obtained analytic expressions for the transition probability as well as for the first and the second moments. By using these expressions we calculated the dependence of the mean squared displacement on time.

We have studied the effect of colored noise on the motion of a Brownian particle in an inhomogeneous environment. Existence of colored noise leads to additional restriction of the diffusion seen as exponential cut-off of the distribution of particle positions and narrower range of frequencies where  $1/f$  noise occurs.

We have showed that set of two nonlinearly coupled SDEs generates signals with power-law power spectral density in a wide range of frequencies together with the almost arbitrary steady-state distribution.

We have generalized nonlinear SDEs driven by Gaussian noise and generating signals with  $1/f$  spectrum by replacing the Gaussian noise with a more general Lévy stable noise.

We proposed time-fractional Fokker-Planck equation describing the subdiffusion of particles in an inhomogeneous medium resulting from inhomogeneous distribution of traps in the media. We analytically solved proposed Fokker-Planck equation and obtained analytic expression for power spectral density.

The research covered in this dissertation was published in 8 papers. 7 papers were published in ISI indexed journals. 8 paper was published in ISI indexed conference proceedings. 15 conference presentations were made based on the research covered in this dissertation.

# Trumpos žinios apie disertacijos autorių

## Bendrieji duomenys

Vardas, pavardė: Rytis Kazakevičius  
Gimimo data: 1988-5-31  
Gimimo vieta: Marijampolės m.  
Elektroninis paštas: rytis.kazakevicius@tfai.vu.lt

## Išsilavinimas

2013–2017 metais Doktorantūros studijos Vilniaus universitete, Teorinės fizikos ir astronomijos institute.  
2011–2013 metais Fizikos magistro laipsnis įgytas, Vilniaus universitete, Fizikos fakultete (studijų programa – teorinė fizika ir astronomija).  
2007–2011 metais Fizikos bakalauro laipsnis įgytas, Vilniaus universitete, Fizikos fakultete (studijų programa – Taikomoji fizika).  
1995–2007 metais Vidurinis išsilavinimas įgytas, Marijampolės Rygiškių Jono Gimnazijoje.

## Darbo patirtis

Nuo 2015 metų jaunesnysis mokslo darbuotojas Vilniaus universitete, Teorinės fizikos ir astronomijos institute.  
2012 metų vasara Lietuvos mokslo tarybos organizuotos studentų mokslinės praktikos dalyvis. Praktika atlikta Vilniaus universitete, Teorinės fizikos ir astronomijos institute, (vadovas dr. Julius Ruseckas).  
2011–2015 metai technikas Vilniaus universitete, Teorinės fizikos ir astronomijos institute.  
2009 metai laborantas Vilniaus universitete, Kvantinės elektronikos katedros kvantinės elektronikos lazerinių tyrimų mokymo-mokslo centre.

## Pomėgiai

Mišrūs kovos menai, fantastinių knygų ir komiksų skaitymas.

# Padėka

Visų pirma norėčiau padėkoti savo moksliniam vadovui dr. Juliui Ruseckui. Esu labai dėkingas už jo sumanų vadovavimą, didelį palaikymą ir vertingas pamokas moksle.

Esu labai dėkingas mano magistro ir bakalauro studijų baigiamųjų darbų vadovui profesoriui Bronislovui Kaulakiui ir už turiningas diskusijas ir naudingus patarimus. Už kūrybingą ir draugišką atmosferą taip pat norėčiau padėkoti kolegoms studentams, mokslininkams ir kitam Vilniaus universiteto personalui.

Esu dėkingas Vilniaus universiteto doktorantų mobilumo fondui už finansinę paramą.

Taip pat esu dėkingas savo šeimai ir draugams už kantrybę, begalinį palaikymą.