VILNIAUS UNIVERSITETAS

VYTAUTAS STEPAS

ADITYVIŲJŲ FUNKCIJŲ, APIBRĖŽTŲ ATSITIKTINIŲ ANSAMBLIŲ AIBĖJE, MOMENTAI

Daktaro disertacijos santrauka
Fiziniai mokslai, matematika (01 P)

Vilnius, 2017 metai

Disertacija rengta 2012–2016 metais Vilniaus universitete.

Mokslinis vadovas – prof. habil. dr. Eugenijus Manstavičius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P).

Disertacija ginama viešame disertacijos Gynimo tarybos posėdyje:

Pirmininkas – prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).
Nariai:
prof. dr. Karl-Heinz Indlekofer (Paderborno universitetas, Vokietija, fiziniai mokslai, matematika – 01P);
prof. dr. Aleksandras Krylovas (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P);
prof. dr. Renata Macaitienė (Šiaulių universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P);
prof. habil. dr. Jonas Šiaulys (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

Disertacija bus ginama viešame disertacijos Gynimo tarybos posėdyje 2017 m. gruodžio mėn. 8 d. 16 val. Matematikos ir informatikos fakulteto 102 auditorijoje.

Adresas: Naugarduko g. 24, Vilnius, Lietuva.

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2017 m. lapkričio mėn. 8 d.

Disertaciją galima peržiūrėti Vilniaus universiteto bibliotekoje ir VU interneto svetainėje adresu www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius.

VILNIUS UNIVERSITY

VYTAUTAS STEPAS

MOMENTS OF ADDITIVE FUNCTIONS DEFINED ON RANDOM ASSEMBLIES

Summary of doctoral dissertation
Physical sciences, Mathematics (01 P)

Vilnius, 2017

Doctoral dissertation was written in 2012-2016 at Vilnius University.

Scientific supervisor – prof. habil. dr. Eugenijus Manstavičius (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P).

The council:

Chairman – Prof. Habil. Dr. Antanas Laurinčikas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P).
Members:
Prof. Dr. Karl-Heinz Indlekofer (Paderborn University, Physical sciences, Mathematics – 01P);
Prof. Dr. Aleksandras Krylovas (Vilnius Gediminas Technical University, Physical sciences, Mathematics – 01P);
Prof. Dr. Renata Macaitienė (Šiauliai University, Physical sciences, Mathematics – 01P);
Prof. Habil. Dr. Jonas Šiaulys (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P).

The dissertation will be defended at the public meeting of the council on December 8, 2017, in Vilnius University, Faculty of Mathematics and Informatics, 102.

Address: Naugarduko st. 24, Vilnius, Lithuania.

The summary of the dissertation was distributed on November 8, 2017.

The dissertation is available at the library of Vilnius University and VU website:
www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius

1 Mokslinė problema ir tyrimo objektas

Išplėtota tikimybinė skaičių teorija, aprašanti natūraliųjų skaičių skaidinius pirminiais dauginamaisiais, įkvėpė atlikti analogiškus išskaidomų kombinatorinių struktūrų tyrimus. Suformuluosime kelis dėmesį patraukusius skaičių teorijos rezultatus.

Funkciją $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ vadinsime *adityviąja*, jeigu $f(nm) = f(n) + f(m)$ visiems tarpusavyje pirminiams skaičiams n ir m. Šios funkcijos yra visiškai apibrėžiamos savo reikšmėmis pirminių skaičių, kuriuos toliau žymėsime p, laipsnių aibėje. Tačiau jų reikšmių kitimas, kai argumentas perbėga natūraliuosius skaičius, yra chaotiškas, todėl tenka nagrinėti skirstinius, kai $m \leq n$ imami, pavyzdžiui, su vienodomis tikimybėmis. Taip $f(m)$ tampa atsitiktiniu dydžiu, kurio net dispersijos analizė yra netriviali problema. Norėdami pateikti jos viršutinį įvertį, apibrėžkime

$$A(x) := \sum_{p^k \leq x} \frac{f(p^k)}{p^k}$$

ir

$$B(x)^2 := \sum_{p^k \leq x} \frac{|f(p^k)|^2}{p^k}.$$

Suformuluota P. Turáno [19] ir 1956 m. apibendrinta J. Kubiliaus (istorinę apžvalgą žr. [13]), žymioji Turáno-Kubiliaus nelygybė tvirtina, kad

$$\sum_{n \leq x} |f(n) - A(x)|^2 \ll xB(x)^2$$

tolygiai visiems realiesiems $x \geq 2$ ir visoms adityviosioms funkcijos f. Čia, kaip ir kitur šioje santraukoje, $\ll$ yra žymens $O(\cdot)$ analogas.

Vėliau P.D.T.A. Elliottas [6] įrodė tokį aukštesnio laipsnio Turáno-Kubiliaus nelygybės analogą.

Tegu $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada egzistuoja tokia konstanta c, priklausanti nebent nuo α, kad tolygiai visoms adityviosioms funkcijoms f ir visiems realiesiems $x \geq 2$ teisinga nelygybė

$$x^{-1} \sum_{n \leq x} |f(n) - A(x)|^\alpha \leq c \begin{cases} B(x)^\alpha + \sum_{p^k \leq x} p^{-k} |f(p^k)|^\alpha, & \text{jei } \alpha \geq 2; \\ B(x)^\alpha, & \text{jei } 0 \leq \alpha \leq 2. \end{cases} \tag{1}$$

Be to, Elliottas savo [7] monografijoje įrodė nelygybę, dualią pastarajai. Dualizacijos metodo esmė pateikta [5] knygoje; išsamesnei jos teorijai ir taikymams skirta visa [7] monografija. Tai taip pat motyvavo panašių rezultatų kombinatorikoje paieškas.

Turáno-Kubiliaus nelygybė buvo apibendrinta ir adityviosioms funkcijoms, apibrėžtoms aritmetinių pusgrupių klasėse (apibrėžimus ir motyvaciją galima rasti [11] ir [12] knygose). Adityviųjų pusgrupių elementai gali būti suvokiami kaip svorinės multiaibės. Imdami jas atsitiktinai, galime kelti ir spręsti uždavinius, analogiškus nagrinėtiesiems tikimybinėje skaičių teorijoje. W.-B. Zhangas [22] nagrinėjo aritmetinių funkcijų, apibrėžtų adityviųjų aritmetinių pusgrupių klasėje, dispersiją, o S. Wehmeieris šiuos rezultatus praplėtė savo [20] disertacijoje ir vėlesniame [21] straipsnyje. Pateiksime vieną rezultatų.

Aibės galią susitarę žymėti simboliu #, primename, kad monoidą $\mathcal{G} = (\mathcal{G}, \cdot)$ virš skaičios generuojančios „pirminių elementų“ aibės $\mathcal{P}$ vadinsime *adityviąja aritmetine pusgrupe*, jeigu jame yra apibrėžtas toks atvaizdis $\partial : \mathcal{G} \to \mathbb{N}_0$, kad $\partial(ab) = \partial(a) + \partial(b)$ visiems $a, b \in \mathcal{G}$, $\partial(p) \geq 1$ bet kokiam $p \in \mathcal{P}$ ir $\mathbf{G}(n) := \#\{a \in \mathcal{G} | \partial(a) = n\}$ yra baigtinis visiems n. Tegul $\mathbf{G}(n) = Aq^n(1 + R(n))$, čia $A > 0$, $q > 1$ yra konstantos, o $R(n)$ yra nykstantis liekamasis narys. Pažymėkime $\mathbf{P}(n) := \#\{p \in \mathcal{P} | \partial(p) = n\}$. Nagrinėkime realiąją funkciją $f(a) = \sum_{p|a} f(p)$, čia $a \in \mathcal{G}$. Tegul dabar

$$A(n) := \frac{1}{\mathbf{G}(n)} \sum_{\partial(p) \le n} f(p)\mathbf{G}(n - \partial(p))$$

ir

$$B(n)^2 := \frac{1}{\mathbf{G}(n)} \sum_{\partial(p) \le n} f(p)^2 \mathbf{G}(n - \partial(p)).$$

Pagrindinis [21] darbo rezultatas yra tokia teorema:

Jei tenkinama Čebyšovo tipo sąlyga $\mathbf{P}(n) \ll \mathbf{G}(n)/n$ *ir* $R(n) = O(\log(n)^{-1})$, *tai*

$$\frac{1}{\mathbf{G}(n)} \sum_{\partial(a) = n} \big(f(a) - A(n)\big)^2 \ll B(n)^2.$$

Šiame darbe autorius siekė rasti kuo bendresnes pusgrupių sąlygas, su kuriomis galioja Turáno-Kubiliaus nelygybės analogas. Toks pat tikslas, tik kitoms kombinatorinių struktūrų klasėms, keliamas ir šioje disertacijoje.

Didžiulė Turáno-Kubiliaus nelygybės bei įvairių apibendrintų jos variantų svarba ir taikymų mastas leidžia tikėtis, kad jos analogas, išvestas adityviosioms funkcijoms, apibėžtoms kombinatorinių struktūrų klasėse, taip pat bus vertingas. Eidamas šia linkme, pirmą rezultatą atsitiktiniams keitiniams gavo E. Manstavičius [14]. Prieš formuluoami jo teoremą, įvesime keletą žymenų ir apibrėžimų.

Keitinių σ, apibrėžtų n galios aibėje, simetrinę grupę pažymėkime $\mathbf{S}_n$. Kanoniniame keitinio $\sigma \in \mathbf{S}_n$ skaidinyje ciklais ilgio j ciklų skaičių pažymėkime $k_j(\sigma) \in \mathbb{N}_0$, $1 \le j \le n$. Tada vadinamasis ciklų vektorius

$$\bar{k}(\sigma) := \big(k_1(\sigma), \ldots, k_n(\sigma)\big)$$

tenkina lygybę $\ell(\bar{k}(\sigma)) = n$ visiems $\sigma \in \mathbf{S}_n$. Čia $\ell(\bar{s}) := 1s_1 + \cdots + ns_n$, kai $\bar{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Toliau, turėdami tokį dvimatį realiųjų skaičių rinkinį $\{h_j(s)\}$, $1 \le j \le n$ ir $s \ge 0$, kad $h_j(0) := 0$ visiems $j \le n$, adityviąją funkciją $h : \mathbf{S}_n \to \mathbb{R}$ apibrėžkime formule

$$h(\sigma) := \sum_{j \le n} h_j\big(k_j(\sigma)\big).$$

Skirtingo ilgio ciklus suprasdami kaip analogą tarpusavyje pirminiams skaičiams, galime nesunkiai pastebėti panašumą į skaičių teorijoje apibrėžiamą adityviąją funkciją. Jau galime perrašyti 5.3 išvadą iš [14].

Kiekvienai adityviajai funkcijai $h : \mathbf{S}_n \to \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$ *ir* $\alpha \ge 0$ *nelygybė*

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} |h(\sigma) - A|^\alpha \ll \mathbb{E}\Big| \sum_{j \le n} h_j(\xi_j) - A\Big|^\alpha \tag{2}$$

galioja tolygiai visiems $n \in \mathbb{N}$. *Čia* ξ_j, $j \le n$, *yra nepriklausomi Puasono atsitiktiniai dydžiai su parametrais* $1/j$, $\mathbb{E}$ *žymi vidurkį, o konstanta žymenyje* $\ll$ *priklauso nebent nuo* α.

Kaip pastebėjo E. Manstavičius [14], o vėliau ir įrodė (žr. [15]), naudodamiesi gerai žinomais nelygybėmis nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumų momentams (žr., pvz., [18]), iš (2) galime išvesti tokį rezultatą.

Kiekvienai adityviajai funkcijai $h : \mathbf{S}_n \to \mathbb{R}$ *ir* $\alpha \geq 0$ *nelygybė*

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} |h(\sigma) - A_n|^\alpha \ll \begin{cases} B_n^\alpha + B_n(\alpha), & \text{jei } \alpha \geq 2; \\ B_n^\alpha, & \text{jei } 0 \leq \alpha \leq 2, \end{cases}$$

galioja tolygiai visiems $n \in \mathbb{N}$. *Čia konstanta žymenyje* $\ll$ *priklauso nebent nuo* α,

$$A_n := \sum_{jk \leq n} \frac{h_j(k)}{j^k k!}, \qquad B_n(\alpha) := \sum_{jk \leq n} \frac{|h_j(k)|^\alpha}{j^k k!}$$

ir $B_n := \big(B_n(2)\big)^{1/2}$.

Analogija su Elliotto (1) rezultatu yra akivivaizdi. G.J. Babu ir E. Manstavičius [2] išvedė ir nelygybę atsitiktiniams keitiniams, imamiems pagal Ewenso matą. Vėliau E. Manstavičius [17] įrodė nelygybę baigtinės aibės atvaizdžiams į save. Šioje disertacijoje tęsiame tyrimą ir gauname momentų įverčius kombinatorinių stuktūrų klasei, kurią sudaro vadinamieji *ansambliai.*

Disertacijos mokslinių tyrimų **objektas** – adityviosios funkcijos, apibrėžtos kombinatorinių struktūrų klasėse, ir jų momentai. Disertacijos mokslinių tyrimų **problema** – gauti adityviųjų funkcijų momentų įverčius, analogiškus Turáno-Kubiliaus ir (1) nelygybėms.

2 Aktualumas

Diskrečiosios atsitiktinės struktūros figūruoja modeliuojant įvairius objektus biologijoje, kompiuterių moksle, fizikoje ir kt. Apžvalginiame H. Crane'o [4] straipsnyje pateikta daug Ewenso tikimybinio mato ir iš jo išvestų skirstinių taikymo pavyzdžių molekulinėje genetikoje, neutraliojoje biologinės įvairovės teorijoje, Bajeso statistiniuose modeliuose, stochastiniuose kombinatoriniuose procesuose... Tokie skirstiniai aptinkami ir fundamentinėje matematikoje: tikimybių teorijoje, algebroje, skaičių teorijoje. Adityviosios funkcijos naudojamos sprendžiant daugelį algebros, skaičių teorijos ir kombinatorikos problemų. Adityviųjų statistikų, apibrėžtų išskaidomose kombinatorinėse struktūrose, reikšmių pasiskirstymas yra svarbi ir sudėtinga problema. Vienas įdomesnių ir reikalingesnių jos uždavinių – statistikų momentų įverčių radimas. Pažymėtina, kad tikimybinė kombinatorika nėra tiek pažengusi šioje kryptyje, kiek tikimybinė skaičių teorija (žr. P. Turáno, J. Kubiliaus, P.D.T.A. Elliotto, I.Z. Ruzsos, I. Kátai ir K.-H. Indlekoferio darbus). Panaši teorija adityviesiems aritmetiniams pusgrupiams taip pat yra plačiau išrutuliota (W.-B. Zhangas, S. Wehmeieris). Keli E. Manstavičiaus darbai, skirti atsitiktiniams keitiniams bei atvaizdžiams, šios spragos neužpildo. Šioje disertacijoje plėtojami minėtų autorių rezultatai.

3 Disertacijos struktūra

Disertacija parašyta anglų kalba. Ją sudaro įvadas, trys skyriai, išvados ir literatūros sąrašas. Įvade apžvelgiama tematikos istorija, supažindinama su žinomais panašaus tipo rezultatais artimose matematikos kryptyse, trumpai apibūdinami gauti rezultatai ir jų sklaida.

Disertacijos tikslai išskaidyti į tris uždavinius, kurių kiekvienas yra nagrinėjamas atitinkamai pirmame, antrame ir trečiame skyriuose. Kiekviename jų pateikiami reikalingi apibrėžimai, istorinės apžvalgos, vėliau – suformuluojamos pagrindinės skyriaus teoremos. Pagalbinių rezultatų ir teoremų įrodymai užbaigia skyrius.

4 Pagrindiniai uždaviniai

Aprašysime pagrindinius matematinius uždavinius, kurie nagrinėjami disertacijoje.

1. **Adityviųjų funkcijų dispersija apibendrintojo Ewenso skirstinio atžvilgiu.**
   Pirmame disertacijos skyriuje nagrinėjamos adityviosios funkcijos, apibrėžtos simetrinėje grupėje, kai keitiniai yra imami pagal apibendrintąjį Ewenso tikimybinį matą. Tokių funkcijų dispersija aprėžiama iš viršaus per dėmenų dispersijų sumą.

2. **Adityviųjų funkcijų, apibrėžtų atsitiktinių ansamblių aibėje, dispersija.**
   Antrame skyriuje pateikiamas Turáno-Kubiliaus nelygybės analogas adityviosioms funkcijoms, apibrėžtoms atsitiktinių ansamblių aibėje, ir jai duali nelygybė. Šie rezultatai apibendrina anksčiau gautus įverčius keitiniams bei baigtinės aibės atvaizdžiams į save ir šiek tiek patikslina rezultatus, gautus pirmajame skyriuje.

3. **Adityviųjų funkcijų momentai Ewenso skirstinio atžvilgiu.**
   Trečiame skyriuje nagrinėjama adicinė vektorių su neneigiamomis sveikosiomis koordinatėmis pusgrupė, kai joje yra apibrėžtas Ewenso tikimybinis matas. Gaunami adityviųjų statistikų, apibrėžtų minėtoje pusgrupėje, momentų viršutiniai įverčiai. Rezultatas analogiškas Elliotto (1) nelygybei.

5 Tyrimų metodika

Naudojami kombinatoriniai, tikimybiniai ir analiziniai metodai. Plėtojamos idėjos, kilusios tikimybinėje skaičių teorijoje.

6 Moksliniai rezultatai

6.1 Adityviųjų funkcijų dispersija apibendrintojo Ewenso skirstinio atžvilgiu

Keitinių σ, apibrėžtų n galios aibėje, simetrinę grupę pažymėkime $\mathbf{S}_n$. Kanoniniame keitinio $\sigma \in \mathbf{S}_n$ skaidinyje ciklais j ilgio ciklų skaičių pažymėkime $k_j(\sigma) \in \mathbb{N}_0$, $1 \le j \le n$. Tada vadinamasis ciklų vektorius

$$\bar{k}(\sigma) := \big(k_1(\sigma), \dots, k_n(\sigma)\big)$$

tenkina lygybę $\ell(\bar{k}(\sigma)) = n$ visiems $\sigma \in \mathbf{S}_n$. Čia $\ell(\bar{s}) := 1s_1 + \cdots + ns_n$, kai $\bar{s} = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Toliau, turėdami tokį dvimatį realiųjų skaičių rinkinį $\{h_j(s)\}$, $1 \le j \le n$ ir $s \ge 0$, kad $h_j(0) := 0$ visiems $j \le n$, adityviąją funkciją $h : \mathbf{S}_n \to \mathbb{R}$ apibrėžkime formule

$$h(\sigma) := \sum_{j \le n} h_j\big(k_j(\sigma)\big).$$

Tarkime, kad $\theta_j \ge 0$, $1 \le j \le n$ yra netapati nuliui seka, galbūt priklausanti nuo n. Tada apibendrintasis Ewenso tikimybinis matas apibrėžiamas formule

$$\nu_n^{(\bar{\theta})}(\{\sigma\}) := (n!Q(n))^{-1} \prod_{j \le n} \theta_j^{k_j(\sigma)}, \quad Q(n) := \sum_{\ell(\bar{s})=n} \prod_{j \le n} \left(\frac{\theta_j}{j}\right)^{s_j} \frac{1}{s_j!}, \quad \sigma \in \mathbf{S}_n,$$

jei $Q(n) > 0$. Jei fiksavę $\theta > 0$ turime $\theta_j \equiv \theta$, tada formulė $\nu_n^{(\theta)} := \nu_n^{(\bar{\theta})}$ apibrėžia klasikinį Ewenso tikimybinį matą. Šiuo atveju

$$Q(n) = \Theta(n) := \binom{\theta + n - 1}{n},$$

o ciklų vektorius yra pasiskirstęs pagal dėsnį

$$\nu_n^{(\theta)}(\bar{k}(\sigma) = \bar{s}) = \mathbf{1}\{\ell(\bar{s}) = n\} \Theta(n)^{-1} \prod_{j \le n} \frac{1}{s_j!} \left(\frac{\theta}{j}\right)^{s_j} =: P_n(\{\bar{s}\}),$$

čia $\bar{s} \in \Omega_n := \big\{\bar{s} \in \mathbb{N}_0^n : \ \ell(\bar{s}) = n\big\}$; be to, žymenyje $\nu_n^{\bar{\theta}}$ brūkšnį viršutiniame indekse praleidome. Tikimybių $P_n(\{\bar{s}\})$, priskirtų vektoriams $\bar{s} \in \Omega_n$, išraiška gerai žinoma kaip Ewenso atrankos formulė (žr. [8]).

Pirmame disertacijos skyriuje įvertinama $h(\sigma)$ dispersija $\mathbf{V}_n^{(\bar{\theta})} h(\sigma)$ mato $\nu_n^{(\bar{\theta})}$ atžvilgiu. Tokie dispersijos įverčiai labai praverčia įrodant didžiųjų skaičių dėsnį (žr., pvz., [10]).

Dėl paprastumo pirmoji teorema formuluojama visiškai adityviai funkcijai, apibrėžiamai reikšmėmis $h_j(s) = sa_j$ su laisvai parenkamais $a_j \in \mathbb{R}$, čia $j \le n$ ir $s \ge 0$, ir klasikiniam Ewenso matui. Dispersiją atžvilgiu $\nu_n^{(\theta)}$ žymėkime $\mathbf{V}_n^{(\theta)}$. Tegul

$$B_n^2 := B_n^2(h) := \theta \sum_{j \le n} \frac{a_j^2}{j} \frac{\Theta(n-j)}{\Theta(n)}.$$

Disertacijoje įrodoma, kad

$$R_n := B_n^2 - \sum_{j \le n} \mathbf{V}_n^{(\theta)}\big(a_j k_j(\sigma)\big) = O\big(n^{-\min\{1,\theta\}} B_n^2\big),$$

kai $n \to \infty$. Tai paaiškina, kodėl B_n^2 naudojamas vertinant sumos h dispersiją iš viršaus.

6.1.1 teorema. *Egzistuoja tokia konstanta* $C > 1$*, kad bet kokiai visiškai adityviai funkcijai* $h(\sigma)$*,* $\theta > 0$ *ir* $n \geq 1$

$$\mathbf{V}_n^{(\theta)} h(\sigma) \leq C B_n^2.$$

Kai $\theta \geq 1$, nelygybė yra teisinga su $C = 2$, o dideliems n galima gauti dar mažesnes konstantas. Siekdami supaprastinti B_n^2, pritaikykime asimptotinę formulę

$$\Theta(n-j)/\Theta(n) = (1 - j/n)^{\theta-1}\Big(1 + O\big((n-j)^{-1}\big)\Big), \quad 1 \leq j \leq n-1,$$

išplaukiančią iš gerai žinomo (žr. [9]) įverčio

$$\Theta(m) = [z^m](1-z)^{-\theta} = \frac{m^{\theta-1}}{\Gamma(\theta)}\bigg(1 + O\Big(\frac{1}{m}\Big)\bigg),$$

čia $0 < \theta \leq T$, $m \geq 1$, o konstanta žymenyje $O(\cdot)$ priklauso nebent nuo T. Kitame įvertyje, gautame bendroms adityviosioms funkcijoms, tuo pasinaudojame. Dabar konstanta tampa galbūt priklausoma nuo θ.

6.1.2 teorema. *Egzistuoja tokia konstanta* $C(\theta) > 0$*, priklausanti nebent nuo* θ*, kad kiekvienai adityviajai funkcijai* $h(\sigma)$ *ir* $n \geq 1$

$$\mathbf{V}_n^{(\theta)} h(\sigma) \leq C(\theta) \sum_{jk \leq n} \Big(\frac{\theta}{j}\Big)^k \frac{h_j(k)^2}{k!} \Big(1 - \frac{jk}{n+1}\Big)^{\theta-1}.$$

Adityviosios funkcijos dispersiją $\mathbf{V}_n^{(\bar\theta)} h(\sigma)$ apibendrintojo Ewenso tikimybinio mato atžvilgiu vertinsime per dydį

$$D_n^2 := \sum_{jk \leq n} \Big(\frac{\theta_j}{j}\Big)^k \frac{h_j(k)^2}{k!} \frac{Q(n-jk)}{Q(n)}.$$

Tolesnis rezultatas apibendrina 6.1.2 teoremą.

6.1.3 teorema. *Tarkime, kad* $0 < \alpha \leq \theta_j \leq \beta < \infty$ *visiems* $j \leq n$*. Tada egzistuoja tokia teigiama konstanta* C_1*, priklausanti nebent nuo* α *ir* β*, kad*

$$\mathbf{V}_n^{(\bar\theta)} h(\sigma) \leq C_1 D_n^2.$$

Įrodant 6.1.3 teoremą pasinaudota idėjomis, pasiūlytomis A. Biró ir T. Szamuely [3].

6.2 Adityviųjų funkcijų, apibrėžtų atsitiktinių ansamblių aibėje, dispersija

Antrame disertacijos skyriuje nagrinėjamos adityviosios funkcijos, apibrėžtos išskaidomų kombinatorinių struktūrų, vadinamų *ansambliais*, klasėje. Ansamblio apibrėžimą pateikiame vadovaudamiesi [1] knyga. Tarkime, jog n galios sužymėtų taškų aibė σ yra suskaidyta į poaibius, ir j galios poaibių skaičių skaidinyje pažymėkime k_j, $1 \le j \le n$. Kiekvienam tokiam poaibiui, nepriklausomai nuo parinktų elementų, sudarykime struktūrą. Skaičių skirtingų struktūrų, kurias galima sudaryti j galios poaibiui, pažymėkime g_j ir tegu $1 \le g_j < \infty$. Poaibį su nurodyta struktūra vadinsime σ komponente, vektorių $\bar{k}(\sigma) := \big(k_1(\sigma), \dots, k_n(\sigma)\big)$, kuriam $\ell(\bar{k}(\sigma)) = n$, jei $\ell(\bar{s}) := 1s_1 + \cdots + ns_n$, – komponenčių vektoriumi. Tarkime, kad skaičius g_j nepriklauso nuo kitų poaibių formavimo. Aibę σ su fiksuota komponenčių struktūra, turinčią paminėtas savybes, vadinsime *ansambliu*. Seka g_j, $j \ge 1$, charakterizuoja ansamblių klasę, kurią pažymėsime $\mathcal{G}$. Tegu $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{G}$ – ansamblių, sudarytų iš n galios aibės, aibė. Tegu

$$G(n) := \#\mathcal{G}_n = n! \sum_{\ell(\bar{s})=n} \prod_{j=1}^{n} \Big(\frac{g_j}{j!}\Big)^{s_j} \frac{1}{s_j!} =: n! Q(n).$$

Laikysime $G(n) \ge 1$ visiems $n \in \mathbb{N}_0$.

Tolygųjį tikimybinį matą virš $\mathcal{G}_n$ poaibių pažymėkime ν_n. Tada komponenčių vektorius yra pasiskirstęs pagal dėsnį

$$\nu_n\big(\bar{k}(\sigma) = \bar{s}\big) = \frac{n!}{G(n)} \prod_{j=1}^{n} \Big(\frac{g_j}{j!}\Big)^{s_j} \frac{1}{s_j!},$$

čia $\bar{s}$ perbėga aibę vektorių, kuriems $\ell(\bar{s}) = n$. Tegul $\lambda_j := g_j/j!$, $1 \le j \le n$.

Apsiribokime ansamblių klase, pasiūlyta [16] darbe. Ji charakterizuojama keliomis teigiamomis konstantomis ρ, Θ, θ, θ' ir $n_0 \ge 1$. Sakysime, kad ansamblių klasė yra *silpnai logaritminė*, jeigu tenkinamos sąlygos:

$$\rho^j j\lambda_j \le \Theta, \quad j \ge 1;$$

$$\sum_{j \le n} \rho^j j \lambda_j \ge \theta n, \quad n \ge n_0;$$

$$nQ(n)\rho^n \ge \theta' \exp\Big\{\sum_{j \le n} \lambda_j \rho^j\Big\}, \quad n \ge 1.$$

Nagrinėkime *adityviąją funkciją* $h : \mathcal{G}_n \to \mathbb{R}$. Kaip ir keitinių atveju, ji apibrėžiama per dvimatį realiųjų skaičių rinkinį $\{h_j(k)\}$, čia $j, k \in \mathbb{N}$, $jk \le n$ ir $h_j(0) := 0$ visiems $j \le n$, formule

$$h(\sigma) := \sum_{j \le n} h_j\big(k_j(\sigma)\big).$$

Adityviosios funkcijos $h : \mathcal{G}_n \to \mathbb{R}$ vidurkį bei dispersiją tolygaus mato ν_n atžvilgiu atitinkamai pažymėkime $\mathbb{E}_n h$ ir $\mathbf{V}_n h$. Norime įvertinti

$$\mathbf{V}_n h = \frac{1}{G(n)} \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_n} \big(h(\sigma) - \mathbb{E}_n h\big)^2 = \mathbb{E}_n h^2 - (\mathbb{E}_n h)^2$$

per reikšmes $h_j(k)$, $jk \le n$.

Apibrėžkime $Q^J(m)$, $0 \le m \le n$, $J \subset \{1,2,\dots,m\}$, formule

$$Q^J(m) := \sum_{\substack{\ell(\bar{s})=m \\ s_j=0,\ \text{jei}\ j\in J}} \prod_{i\le m} \frac{\lambda_i^{s_i}}{s_i!}.$$

Pateikiamuose įverčiuose konstantos gali priklausyti nuo parametrų ρ, Θ, θ, θ' ir $n_0 \ge 1$.

6.2.1 teorema. *Tarkime, kad $\mathcal{G}$ yra silpnai logaritminė, o $h : \mathcal{G}_n \to \mathbb{R}$ – adityvioji funkcija. Tada*

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_n h &= \frac{1}{G(n)} \sum_{\sigma\in\mathcal{G}_n} \left[\sum_{jk\le n} h_j(k) \left(\mathbf{1}\{k_j(\sigma)=k\} - \frac{\lambda_j^k}{k!} \frac{Q^{\{j\}}(n-jk)}{Q(n)} \right) \right]^2 \\ &\ll \sum_{jk\le n} \frac{\lambda_j^k h_j(k)^2}{k!} \frac{Q^{\{j\}}(n-jk)}{Q(n)} =: B_n^2 \end{aligned} \tag{3}$$

visiems $n \ge 1$.

Visiškai adityvią funkciją h apibrėžkime lygybėmis $h_j(k) = a_j k$ su $a_j \in \mathbb{R}$ ir $jk \le n$. Tokioms funkcijoms gaunamas paprastesnis įvertis.

6.2.2 teorema. *Tarkime, kad $\mathcal{G}$ yra silpnai logaritminė, o $h : \mathcal{G}_n \to \mathbb{R}$ – visiškai adityvi funkcija. Tada*

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_n h &= \frac{1}{G(n)} \sum_{\sigma\in\mathcal{G}_n} \left[\sum_{j\le n} a_j \left(k_j(\sigma) - \lambda_j \frac{Q(n-j)}{Q(n)} \right) \right]^2 \\ &\ll \sum_{j\le n} \lambda_j a_j^2 \frac{Q(n-j)}{Q(n)}. \end{aligned} \tag{4}$$

Kaip parodyta Elliotto [7] knygoje, abi nelygybės: (3) ir (4) – turi naudingas dualiąsias formas. Toliau žvaigždutė virš sumos ženklo reikš, kad sumuojama tik pagal tuos j, kuriems $\lambda_j \ne 0$.

6.2.3 teorema. *Nelygybės*

$$\begin{aligned} \sideset{}{^*}\sum_{jk\le n} \frac{k!}{\lambda_j^k} \frac{Q(n)}{Q^{\{j\}}(n-jk)} \left[\sum_{\sigma\in\mathcal{G}_n} y(\sigma) \left(\mathbf{1}\{k_j(\sigma)=k\} - \frac{\lambda_j^k}{k!} \frac{Q^{\{j\}}(n-jk)}{Q(n)} \right) \right]^2 \\ \ll G(n) \sum_{\sigma\in\mathcal{G}_n} y(\sigma)^2 \end{aligned}$$

ir

$$\sideset{}{^*}\sum_{j\le n} \frac{1}{\lambda_j} \frac{Q(n)}{Q(n-j)} \left[\sum_{\sigma\in\mathcal{G}_n} y(\sigma) \left(k_j(\sigma) - \lambda_j \frac{Q(n-j)}{Q(n)} \right) \right]^2 \ll G(n) \sum_{\sigma\in\mathcal{G}_n} y(\sigma)^2$$

yra teisingos visiems $y(\sigma) \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathcal{G}_n$.

6.3 Adityviųjų funkcijų momentai Ewenso skirstinio atžvilgiu

Tegu $\Omega := \mathbb{N}_0^n$ yra adicinė vektorių $\bar{s}$ pusgrupė, čia $\bar{0} = (0, \ldots, 0)$ – nulinis vektorius. Jos dalinis sutvarkymas apibrėžiamas nelygybe $\bar{s} = (s_1, \ldots, s_n) \leq \bar{t} = (t_1, \ldots, t_n)$, reiškiančia, kad $s_j \leq t_j$ kiekvienam $1 \leq j \leq n$. Vektorius $\bar{s}, \bar{t} \in \Omega$ laikysime *statmenais* ir žymėsime $\bar{s} \perp \bar{t}$, jeigu $s_1 t_1 + \cdots + s_n t_n = 0$. Sakysime, kad vektorius $\bar{t}$ *tiksliai įeina* į vektorių $\bar{s}$, ir žymėsime $\bar{t} \parallel \bar{s}$, jeigu $\bar{t} \leq \bar{s}$ ir $\bar{t} \perp \bar{s} - \bar{t}$. Taip mes priartėjame prie tikimybinėje skaičių teorijoje nagrinėjamos multiplikacinės pusgrupės $\mathbb{N}$ (žr. [13] ir [5]), kurioje dalinis sutvarkymas apibrėžiamas per dalumą, o statmenumas ekvivalentus dviejų skaičių savybei būti tarpusavyje pirminiams.

Įveskime Ewenso tikimybinį matą (žr. [8]). Tegul $\ell(\bar{s}) := 1s_1 + \cdots + ns_n$, $\bar{s} \in \Omega$, $\Omega_n := \ell^{-1}(n) = \{\bar{s} \in \Omega : \ \ell(\bar{s}) = n\}$ ir

$$\Theta(n) := \binom{\theta + n - 1}{n},$$

čia $\theta > 0$ yra parametras. Tada žymioji Ewenso atrankos formulė yra tikimybė

$$P_n(\{\bar{s}\}) := \Theta(n)^{-1} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\theta}{j}\right)^{s_j} \frac{1}{s_j!} =: \Theta(n)^{-1} P(\bar{s}), \tag{5}$$

priskiriama kiekvienam $\bar{s} \in \Omega_n$. Patogumo dėlei matą praplėsime visoje erdvėje Ω nustatydami $P_n(\{\bar{s}\}) = 0$, kai $\bar{s} \in \Omega \setminus \Omega_n$. Taigi kiekvieną atvaizdį $G : \Omega \to \mathbb{C}$ galime suprasti kaip kompleksines reikšmes įgyjantį atsitiktinį dydį, o

$$\mathbb{E}_n(G) := \Theta(n)^{-1} \sum_{\bar{s} \in \Omega_n} G(\bar{s}) P(\bar{s})$$

bus jo vidurkis. Tegu $\mathbb{E}_0(G) := 1$ kiekvienam $G : \Omega \to \mathbb{C}$.

Pastebėkime, kad apibrėžę Ewenso tikimybinį matą $\nu_n^{(\theta)}$ virš simetrinės grupės $\mathbf{S}_n$ formule

$$\nu_n^{(\theta)}(\{\sigma\}) := \theta^{w(\sigma)} / \big(\theta(\theta+1) \cdots (\theta + n - 1)\big), \quad \sigma \in \mathbf{S}_n,$$

kai $\theta > 0$ yra parametras, o $w(\sigma)$ – ciklų skaičiaus funkcija, ir taikydami paprastus kombinatorinius skaičiavimus (žr. [1]), gauname sutapimą:

$$\nu_n^{(\theta)}\big(\bar{k}(\sigma) = \bar{s}\big) = P_n(\{\bar{s}\}),$$

jei $\bar{s} \in \Omega_n$. Taigi spręsdami uždavinius atsitiktinių keitinių statistikoms, išreikštoms per $\bar{k}(\sigma)$, galime juos suvesti į uždavinius atitinkamoms atsitiktinių vektorių $\bar{s} \in \Omega_n$, imamų su (5) tikimybėmis, statistikoms.

Funkciją $F : \Omega \to \mathbb{C}$, $F(\bar{0}) := 1$, vadinsime *multiplikatyviąja*, jeigu visiems tarpusavyje statmeniems vektoriams $\bar{s}, \bar{t} \in \mathbb{N}_0^n$ teisinga lygybė $F(\bar{s} + \bar{t}) = F(\bar{s}) F(\bar{t})$.

Funkciją $H : \Omega \to \mathbb{C}$ vadinsime *adityviąja*, jeigu visiems tarpusavyje statmeniems vektoriams $\bar{s}, \bar{t} \in \mathbb{N}_0^n$ teisinga lygybė $H(\bar{s} + \bar{t}) = H(\bar{s}) + H(\bar{t})$. Taip pat apibrėžkime $h_j(k) := H(k\bar{e}_j)$, $h_j(0) := 0$ ir $\bar{e}_j := (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, čia vienintelis 1 stovi j-ojoje pozicijoje.

Trečiame disertacijos skyriuje išvestos nelygybės kompleksinės funkcijos $H(\bar{s})$ laipsniniams momentams. Skaičių teorijoje analogiškas rezultatas yra jau minėta (1) Elliotto nelygybė.

Pažymėkime

$$A := A_n := \sum_{jk \le n} h_j(k) p_j(k) \frac{\Theta(n - jk)}{\Theta(n)},$$

$$B_n(\alpha) := \sum_{jk \le n} |h_j(k)|^\alpha p_j(k) \frac{\Theta(n - jk)}{\Theta(n)}$$

ir $B := \big(B_n(2)\big)^{1/2}$. Čia $\alpha > 0$.

Konstanta žymenyje $\ll$ priklausys nebent nuo θ ir α.

6.3.1 teorema. *Jeigu H yra adityvioji funkcija, o $\theta \ge 1$ tai*

$$\mathbb{E}_n\big(|H(\bar{s}) - A|^\alpha\big) \ll \begin{cases} B^\alpha + B_n(\alpha), & \textit{jei } \alpha \ge 2; \\ B^\alpha, & \textit{jei } 0 \le \alpha \le 2, \end{cases}$$

tolygiai visiems $n \ge 1$.

Įrodyme naudojamės Elliotto [6] darbo metodika. Jos pagrindas – multiplikatyviosios funkcijos $e^{zH(\bar{s})/B}$, priklausančios nuo kompleksinio parametro z, vidurkio analizė.

7 Rezultatų naujumas

Visi disertacijoje pateikti rezultatai yra nauji ir apibendrina ankstesniuosius.

8 Išvados

- Tikimybinės skaičių teorijos rezultatai turi savo analogus tikimybinėje kombinatorikoje ir tai atveria galimybes tolimesniems tyrimams.
- Disertacija patvirtina, kad tikimybinės teorijos keitiniams ir adicinėms pusgrupėms turi daug panašumų.
- Adityviųjų funkcijų momentų įverčiai panašūs į įverčius nepriklausomiems atsitiktiniams dydžiams. Tai leidžia manyti, kad, neatsižvelgiant į konstantas, nelygybės yra tikslios.
- Galime tikėtis adityviųjų funkcijų momentų apatinių įverčių išvedimo.

9 Rezultatų aprobavimas

Disertacijoje gauti rezultatai buvo pristatyti šiuose pranešimuose ir mokslinėse konferencijose:

▷ *On influence of probabilistic number theory to probabilistic combinatorics.* The 13th Serbian Mathematical Congress, Vrniačka Bania, Serbija, 2014 m. gegužės 22–25 d.

▷ *On variance of an additive function with respect to a generalized Ewens probability.* The 25th International Conference on Probabilistic, Combinatorial and Asymptotic Methods for the Analysis of Algorithms, AofA'14, Paryžius, Prancūzija, 2014 m. birželio 16–20 d.

▷ *On variance of an additive function on permutations.* The 11th international Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics, Vilnius, Lietuva, 2014 m. birželio 30 d. – liepos 4 d.

▷ *Apie adityviųjų funkcijų, apibrėžtų ant atsitiktinių ansamblių, dispersiją.* Lietuvos matematikų draugijos LVII konferencija, Vilnius, Lietuva, 2016 m. birželio 20–21 d.

▷ *Variance of additive functions defined on random assemblies.* The 27th International Conference on Probabilistic, Combinatorial and Asymptotic Methods for the Analysis of Algorithms, AofA'16, Krokuva, Lenkija, 2016 m. liepos 4–8 d.

Disertacija pristatyta Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto Tikimybių teorijos ir skaičių teorijos katedros seminare 2017 m. rugsėjo 25 d., o atskiri jos rezultatai pristatyti minėtos katedros seminaruose 2012–2017 metų laikotarpiu.

10 Publikacijos

10.1 Pagrindinės publikacijos

Publikuoti straipsniai:

- E. Manstavičius, V. Stepanauskas (Stepas), *On variance of an additive function with respect to a generalized Ewens probability.* Proceedings of the 25th International Conference on Probabilistic, Combinatorial and Asymptotic Methods for the Analysis of Algorithms, 301–312, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., BA, Assoc. Discrete Math. Theor. Comput. Sci., Nancy, 2014.
- E. Manstavičius, V. Stepas, *Variance of additive functions defined on random assemblies.* Lith. Math. J. 57 (2017), no. 2, 222–235.

Paruoštas publikacijai straipsnis:

- E. Manstavičius, V. Stepas, *Moments of additive statistics with respect to the Ewens Sampling Formula.*

10.2 Konferencijų pranešimų tezės:

- E. Manstavičius, V. Stepanauskas (Stepas), *On influence of probabilistic number theory to probabilistic combinatorics.*
  http://tesla.pmf.ni.ac.rs/people/smak/book_of_abstracts.pdf (2014), 15.
- V. Stepanauskas (Stepas), *On variance of an additive function on permutations.* 11th international Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics, Abstracts of Communications (2014), 234.
- E. Manstavičius, V. Stepas, *Variance of additive functions defined on random assemblies.*
  http://aofa.tcs.uj.edu.pl/proceedings/aofa2016.pdf (2016), 278-280
  arba arXiv:1605.04239v1 (2016).

11 Summary

The doctoral dissertation deals with additive functions defined on combinatorial structures. The problem is to estimate the moments of such functions, if a structure is taken at random. We establish analogues of the well-known Turán-Kubilius inequality and other power moment estimates.

The dissertation consists of the Introduction, 3 Chapters devoted to 3 main problems accordingly, the Conclusions and the Bibliography. The results of the thesis are published in 2 research articles, one more is ready to be submitted. They have been contributed at 5 conferences as well as at the department seminars.

The main mathematical results presented in the dissertation are as follows:

1. **Variance of additive functions with respect to a generalized Ewens probability.** Chapter 1 deals with additive functions defined on the symmetric group, where a permutation is taken according to a generalized Ewens probability. We establish an upper bound of its variance via a sum of variances of the summands. The idea of our approach goes back to the paper by Biró and Szamuely [3].

2. **Variance of additive functions defined on random assemblies.** Chapter 2 presents an analogue of the Turán-Kubilius inequality for an additive function defined on random decomposable structures, called assemblies (for a definition, see [1]). The result generalizes estimates obtained earlier in the cases of permutations and mappings of a finite set into itself, but is also slightly different from the results obtained in Chapter 1.

3. **Moments of additive functions with respect to the Ewens Sampling Formula.** Chapter 3 explores the additive semigroup of vectors with non-negative integer coordinates endowed with the Ewens Probability Measure which plays an important role as a probabilistic space for many statistical models. In them, additive and multiplicative statistics defined on the semigroup having decompositions via dependent random variables raise an interest from many points of view. We obtain upper estimates of the power moments of additive statistics defined on the semigroup. Our result is an analogue of the higher power moment generalization of Turán-Kubilius inequality obtained by Elliott in [6].

In order to solve these mathematical problems, we used combinatorial, probabilistic and analytical methods. The technical approaches applied in probabilistic number theory are adopted and further enriched.

12 Trumpos žinios apie autorių

Gimimo data ir vieta

1987 m. vasario 15 d., Vilnius.

Išsilavinimas

1993–1997 m. Vilniaus Medeinos pradinė mokykla.

1997–2001 m. Vilniaus Gabijos gimnazija.

2001–2005 m. Vilniaus licėjus.

2005–2009 m. Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, matematikos ir matematikos taikymų studijų programos bakalauras.

2009–2012 m. Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, matematikos magistras.

Darbo patirtis

2006 m. Matematikos ir informatikos institutas, laborantas.

Nuo 2012 m. Kauno technologijos universitetas, asistentas.

Nuo 2014 m. Vilniaus universitetas, lektorius.

Literatūra

[1] R. Arratia, A. D. Barbour, S. Tavaré, *Logarithmic combinatorial structures: a probabilistic approach.* EMS Monographs in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2003.

[2] G. J. Babu, E. Manstavičius, *Brownian motion for random permutations.* Sankhyā Ser. A 61 (1999), no. 3, 312–327.

[3] A. Biró, T. Szamuely, *A Turán-Kubilius inequality with multiplicative weights.* Acta Math. Hungar. 70 (1996), no. 1-2, 39–56.

[4] H. Crane, *The ubiquitous Ewens sampling formula.* Statist. Sci. 31 (2016), no. 1, 1–19.

[5] P. D. T. A. Elliott, *Probabilistic number theory. I. Mean-value theorems.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Science], 239. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1979.

[6] P. D. T. A. Elliott, *High-power analogues of the Turán-Kubilius inequality, and an application to number theory.* Canad. J. Math. 32 (1980), no. 4, 893–907.

[7] P. D. T. A. Elliott, *Duality in analytic number theory.* Cambridge Tracts in Mathematics, 122. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[8] W. J. Ewens, *The sampling theory of selectively neutral alleles.* Theoret. Population Biology 3 (1972), 87–112; erratum, ibid. 3 (1972), 240; erratum, ibid. 3 (1972), 376.

[9] P. Flajolet, R. Sedgewick, *Analytic combinatorics.* Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[10] T. Kargina, E. Manstavičius, *The law of large numbers with respect to Ewens probability.* Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput. 39 (2013), 227–238.

[11] J. Knopfmacher, *Abstract analytic number theory. Second edition.* Dover Books on Advanced Mathematics. Dover Publications, Inc., New York, 1990.

[12] J. Knopfmacher, W.-B. Zhang, *Number theory arising from finite fields. Analytic and probabilistic theory.* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 241. Marcel Dekker, Inc., New York, 2001.

[13] J. Kubilius, *Probabilistic methods in the theory of numbers.* Translations of Mathematical Monographs, Vol. 11 American Mathematical Society, Providence, R.I. 1964 xviii+182 pp.

[14] E. Manstavičius, *The law of the iterated logarithm for random permutations.* (Russian) Liet. Mat. Rink. 38 (1998), no. 2, 205–220; translation in Lithuanian Math. J. 38 (1998), no. 2, 160–171 (1999).

[15] E. Manstavičius, *Moments of additive functions on random permutations.* Acta Appl. Math. 97 (2007), no. 1-3, 119–127.

[16] E. Manstavičius, *On total variation approximations for random assemblies.* 23rd Intern. Meeting on Probabilistic, Combinatorial, and Asymptotic Methods for the Analysis of Algorithms (AofA'12), 97–108, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., AQ, Assoc. Discrete Math. Theor. Comput. Sci., Nancy, 2012.

[17] E. Manstavičius, *A Turán-Kubilius inequality on mappings of a finite set.* From arithmetic to zeta-functions, 295–307, Springer, [Cham], 2016.

[18] V. V. Petrov, *Sums of independent random variables.* (Russian) Izdat. "Nauka", Moscow, 1972. 414 pp.

[19] P. Turán, *On a Theorem of Hardy and Ramanujan.* J. London Math. Soc. S1-9 (1934), no. 4, 274.

[20] S. Wehmeier, *Arithmetical semigroups.* Dissertation Univ. Paderborn, Verlag Dr. Hut, München, 2005.

[21] S. Wehmeier, *Die Turan-Kubilius-Ungleichung für additive arithmetische Halbgruppen.* [The Turan-Kubilius inequality for additive arithmetic semigroups] (German) Liet. Mat. Rink. 46 (2006), no. 3, 457–471; translation in Lithuanian Math. J. 46 (2006), no. 3, 371–383.

[22] W.-B. Zhang, *Probabilistic number theory in additive arithmetic semigroups. I.* Analytic number theory, Vol. 2 (Allerton Park, IL, 1995), 839–885, Progr. Math., 139, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1996.