

VILNIAUS UNIVERSITETAS

LAURA ŽVINYTĖ

DISKRETUS TOLYGUSIS RIBINIS  
DĖSNIS ADITYVIOSIOMS  
FUNKCIJOMS

Daktaro disertacija  
Fiziniai mokslai, matematika (01P)

Vilnius, 2017

Disertacija rengta 2011-2017 metais Vilniaus universitete

Mokslinis vadovas - prof. dr. Gediminas Stepanauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

# Turinys

Žymėjimai	5
Įvadas	7
<b>1 Literatūros apžvalga</b>	<b>11</b>
1.1 Istorinis kontekstas, klasikiniai rezultatai . . . . .	11
1.2 Stipriai adityviųjų funkcijų sekų skirstinių $\nu_x(n \leq x, f_x(n) < u)$ ribiniai rezultatai . . . . .	21
1.3 Stipriai adityviųjų funkcijų sekų su paslinktais argumentais skirstinių ribiniai dėsniai . . . . .	25
<b>2 Diskretus tolygusis ribinis dėsnis adityviųjų funkcijų sekoms su paslinktais pirminiais</b>	<b>28</b>
2.1 Pagrindinis rezultatas ir papildomos lemos . . . . .	28
2.2 Lemų įrodymai . . . . .	30
2.3 Pagrindinio rezultato įrodymas . . . . .	33
<b>3 Diskretus tolygusis ribinis dėsnis adityviųjų funkcijų sekų sumoms su paslinktais argumentais</b>	<b>39</b>
3.1 Pagrindinis rezultatas ir papildomos lemos . . . . .	39
3.2 Lemų įrodymai . . . . .	41
3.3 Pagrindinio rezultato įrodymas . . . . .	45
<b>4 Diskretus tolygusis ribinis dėsnis adityviųjų funkcijų sekų sumoms su paslinktais pirminiais</b>	<b>49</b>
4.1 Pagrindinis rezultatas ir papildomos lemos . . . . .	49
4.2 Lemų įrodymai . . . . .	52
4.3 Pagrindinio rezultato įrodymas . . . . .	58
<b>Išvados</b>	<b>62</b>



## Žymėjimai

$\mathbb{N}$	natūraliųjų skaičių aibė
$\mathbb{P}$	pirminių skaičių aibė
$\mathbb{R}$	realiųjų skaičių aibė
$m, n$	natūralieji skaičiai
$q, p, p_1, p_2, \dots$	pirminiai skaičiai
$[x]$	skaičiaus $x$ sveikoji dalis
$f_x$	$(x \geq 2)$ stipriai adityviųjų funkcijų seka
$\pi(x)$	skaičius pirminių skaičių, ne didesnių už realųjį teigiamą skaičių $x$
$\varphi(x)$	Oilerio funkcija
$\varepsilon(x)$	nykstanti funkcija
$\omega(n)$	skaičiaus $n$ pirminių daliklių skaičius
$a \ll b$	ekvivalentu nelygybei $ a  \leq cb$
$\nu_x(n \leq x, \dots)$	natūraliųjų skaičių, neviršijančių $x$ ir tenkinančių sąlygą, esančią daugtaškio vietoje, dažnis

$f(x) \sim g(x)$       reiškia, kad  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

$F_x(u) \Rightarrow F(u)$       skirstinių  $F_x(u)$  silpnasis konvergavimas į pasiskirstymo funkciją  $F(u)$ , kai  $x \rightarrow \infty$

$$A(n) = \sum_{p \leq n} \frac{f(p)}{p}$$

$$B(n) = \left( \sum_{p \leq n} \frac{f^2(p)}{p} \right)^{1/2}$$

$$G(u) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^u e^{-x^2/2} dx$$

$\Pi(u, \lambda)$       Puasono skirstinys su parametru  $\lambda > 0$  :

$$\Pi(u, \lambda) := \sum_{\substack{k=0,1,\dots \\ k < u}} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$\mathbb{B}(u, \gamma, N)$       binominis skirstinys su parametrais  $\gamma \in (0, 1)$  ir  $N \in \mathbb{N}$ :

$$\mathbb{B}(u, \gamma, N) := \sum_{\substack{k=0,1,\dots,N \\ k < u}} \binom{N}{k} \gamma^k (1 - \gamma)^{N-k}$$

$\mathcal{U}(u, L)$       diskretus tolygusis skirstinys su parametru  $L \in \mathbb{N}$ ,  $L \geq 2$ :

$$\mathcal{U}(u, L) := \frac{1}{L} \sum_{\substack{k=0,1,\dots,L-1 \\ k < u}} 1$$

# Įvadas

Disertacijoje pristatomos gautos būtinos ir pakankamos sąlygos stipriai adityviųjų funkcijų sekų skirstinių

$$\nu_x(p \leq x, f_x(p+1) < u),$$

$$\nu_x(n \leq x, f_x(n) + g_x(n+1) < u),$$

$$\nu_x(p \leq x, f_x(p+1) + g_x(p+2) < u)$$

silpnajam konvergavimui į diskretų tolygųjį skirstinį.

**1 apibrėžimas.** *Aritmetinė funkcija  $f$  vadinama adityviąja, jei su bet kokia pora tarpusavyje pirminių skaičių  $m$  ir  $n$  teisinga lygybė  $f(m \cdot n) = f(m) + f(n)$ .*

**2 apibrėžimas.** *Jei adityvioji funkcija  $f(n)$  tenkina sąlygą  $f(p^k) = f(p)$ , kiekvienam  $k \in \mathbb{N}$  ir kiekvienam pirminiam  $p$ , tai  $f(n)$  vadinama stipriai adityviąja funkcija.*

Darbe nagrinėjamos stipriai adityviųjų funkcijų sekos  $f_x(p)$  įgyjančios reikšmes 0 arba 1 bet kuriam pirminiam skaičiui  $p$ . Tuomet

$$f_x(n) = \sum_{p|n} f_x(p) = \sum_{\substack{p|n \\ f_x(p)=1}} 1 =: \sum_{p|n}^f 1.$$

## Aktualumas

Darbo tyrimų objektas yra stipriai adityviųjų funkcijų sekų su paslinktais pirminiais, adityviųjų funkcijų sekų sumų bei sumų su paslinktais pirminiais silpnas konvergavimas į ribinį dėsnį. Tyrimo objektas ir sprendžiami uždaviniai priskirtini tikimybinei skaičių teorijai. Idėja nagrinėti stipriai adityviųjų funkcijų su skirtingais argumentais ribinį elgesį nėra nauja.

P.D.T.A. Elliott'o ir J. Kubiliaus monografijose [5], [6], [18] galima rasti daugumą klasikinių rezultatų ir jų istorinį kontekstą. Adityviųjų funkcijų ribinių teoremų pirmieji rezultatai buvo gauti P. Erdős'o ir A. Wintner'io [12] (1939) bei P. Erdős'o ir M. Kac'o [11] (1940). Adityviųjų funkcijų sumų ribinio elgesio pirmieji rezultatai yra gauti W.J. LeVeque'o [19] (1949). Bendresni rezultatai vėliau yra gauti J. Kubiliaus [18], G. Halász'o [13], I. Kátai [17], A. Hildebrand'o [14], P.D.T.A. Elliott'o [5]–[8] ir kitų autorių (žr. [20], [22], [23], [34], [36], [42]). Jų darbuose yra nagrinėjamos adityviųjų funkcijų skirtingos klasės.

Adityviųjų funkcijų su paslinktais pirminiais atvejus yra nagrinėję M.B. Barban'as, A.I. Vinogradov'as ir B.V. Levin'as [1], I. Kátai [15] ir kiti autoriai (žr. [3], [4], [6], [16], [33], [35], [40], [41]).

Šie silpną konvergavimo rezultatai buvo įrodyti remiantis skirtingais metodais. Buvo naudoti elementarusis, rėčio, charakteristinių funkcijų, faktorialinių momentų metodai bei Kubiliaus modelis.

Adityviųjų funkcijų sekų skirstinių silpną konvergavimą į ribinį Puasono skirstinį nagrinėjo J. Šiaulytis ir G. Stepanauskas straipsniuose [27]–[29], [33]–[36]. Suformuluotiems teiginiams įrodyti buvo naudotas faktorialinių momentų bei charakteristinių funkcijų metodai.

Bernulio, geometrinis, binominis, diskretus tolygusis pasiskirstymai kaip ribiniai dėsniai buvo nagrinėti straipsniuose [37]–[39].

Stipriai adityviųjų funkcijų sekų su paslinktais pirminiais, sumų su paslinktais argumentais bei sumų su paslinktais pirminiais skirstinių silpnas konvergavimas į diskretų tolygųjį skirstinį nebuvo nagrinėtas. Gauti rezultatai apibūdina adityviųjų funkcijų sekų skirstinių ribinį elgesį ir gali būti taikomi matematiniuose tyrimuose, kuriuose reikia žinių apie adityviųjų funkcijų skirstinių asimptotikas.

## **Tikslas ir uždaviniai**

Darbo tikslas – ištirti stipriai adityviųjų funkcijų sekų skirstinių silpno-



jo konvergavimo į diskretų tolygųjų dėsnį atvejus. Tikslui pasiekti buvo sprendžiami šie uždaviniai:

- suformuluoti ir įrodyti stipriai adityviųjų funkcijų sekų su paslinktais pirminiais pasiskirstymo funkcijų silpnojo konvergavimo į diskretų tolygųjų skirstinį būtinas ir pakankamas sąlygas;
- suformuluoti ir įrodyti stipriai adityviųjų funkcijų sekų sumų su paslinktais argumentais pasiskirstymo funkcijų silpnojo konvergavimo į diskretų tolygųjų skirstinį būtinas ir pakankamas sąlygas;
- suformuluoti ir įrodyti stipriai adityviųjų funkcijų sekų sumų su paslinktais pirminiais pasiskirstymo funkcijų silpnojo konvergavimo į diskretų tolygųjų skirstinį būtinas ir pakankamas sąlygas.

## **Metodai**

Disertacijoje suformuluotoms teorems įrodyti buvo naudoti faktorialinių momentų bei charakteristinių funkcijų metodai.

## **Mokslinis naujumas**

Disertacijoje pateikti rezultatai yra nauji. Jie yra teorinio pobūdžio. Iki šiol diskretus tolygusis ribinis dėsnis stipriai adityviųjų funkcijų sekoms buvo mažai nagrinėtas (žr. [39]). Diskretus tolygusis pasiskirstymas kaip ribinis dėsnis adityviųjų funkcijų sekų su paslinktais pirminiais, adityviųjų funkcijų sekų sumoms su paslinktais argumentais bei sumoms su paslinktais pirminiais nebuvo nagrinėtas.

## **Aprobacija**

Disertacijos rezultatai buvo pristatyti šeštojoje tarptautinėje konferencijoje "Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory" (Palanga, Lietuva, 2016), taip pat Lietuvos matematikų draugijos konferencijose (2014, 2015, 2016).

## Publikacijos

1. G. Stepanauskas, L. Žvinytė, Discrete uniform limit law for additive functions on shifted primes, *Nonlinear Anal. Model. Control*, **21**(4):437-447, 2016.
2. G. Stepanauskas, L. Žvinytė, Discrete uniform distribution for a sum of additive functions, *Lith. Math. J.*, **57**(3):391-400, 2017.
3. J. Šiaulyš, G. Stepanauskas, L. Žvinytė, Discrete uniform limit law for a sum of additive functions on shifted primes, *Lith. Math. J.*, 2017, įteiktas spaudai.

## Padėka

Ypatingą padėką skiriu savo moksliniam vadovui prof. dr. G. Stepanauskui už pagalbą visų studijų metu, už suteiktas žinias ir įžvalgas. Jos buvo labai naudingos rašant disertaciją. Taip pat dėkoju savo šeimai už moralinį palaikymą.

# 1 Literatūros apžvalga

Šiame skyriuje pristatomi tikimybinės skaičių teorijos uždaviniai – adityviųjų funkcijų  $f(n)$  ribinio skirstinio egzistavimo problemos bei jų istorinis kontekstas. Apžvelgiami gauti ribiniai rezultatai šių adityviųjų funkcijų skirstinių:

1.  $\nu_x(n \leq x, f(n) < u)$ ;
2.  $\nu_x(n \leq x, \frac{f(n) - \alpha(x)}{\beta(x)} < u)$ ;
3.  $\nu_x(p \leq x, \frac{f(p+1) - \alpha(x)}{\beta(x)} < u)$ ;
4.  $\nu_x\{n \leq x, f_1(n) + f_2(n+1) - \alpha(x) < u\}$ ;
5.  $\nu_x\left\{n \leq x, \sum_{j=1}^s \frac{f_j(n+a_j) - A_j(x)}{B_j(x)} < u\right\}$ .

Taip pat pristatomi gauti ribiniai rezultatai šių stipriai adityviųjų funkcijų sekų skirstinių:

1.  $\nu_x(n \leq x, f_x(n) < u)$ ;
2.  $\nu_x\{p \leq x, f_x(p+1) < u\}$ ;
3.  $\nu_x\{n \leq x, f_x(n) + g_x(n+1) < u\}$ ;
4.  $\nu_x\{p \leq x, f_x(p+1) + g_x(p+2) < u\}$ .

## 1.1 Istorinis kontekstas, klasikiniai rezultatai

Pirmieji sprendžiami uždaviniai buvo adityviųjų funkcijų  $f(n)$  skirstinių

$$\nu_x(n \leq x, f(n) < u)$$

silpnojo konvergavimo į ribinį dėsnį būtinų ir pakankamų sąlygų formulavimas ir įrodymas.

Pirmieji rezultatai buvo gauti P. Erdős'o ir A. Wintner'io [12] (1939).

**1.1 teorema** (Erdős-Wintner, 1939). *Adityvioji funkcija  $f(n)$  turi ribinį skirstinį tada ir tik tada, kai šios eilutės*

$$\sum_{|f(p)| > 1} \frac{1}{p}, \quad \sum_{|f(p)| \leq 1} \frac{f(p)}{p}, \quad \sum_{|f(p)| \leq 1} \frac{f^2(p)}{p}$$

*konverguoja. Kai šios sąlygos yra patenkinamos, ribinio skirstinio charakteristinė funkcija yra*

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{itf(p^m)}}{p^m}\right).$$

*Ribinis skirstinys yra gryno tipo ir yra tolydus tada ir tik tada, kai eilutė*

$$\sum_{f(p) \neq 0} \frac{1}{p}$$

*diverguoja.*

Vėliau buvo sprendžiamas bendresnis tikimybinės skaičių teorijos uždavinys – apibrėžti kada egzistuoja funkcijos  $\alpha(x) \in \mathbb{R}$  ir  $\beta(x) > 0$ ,  $x \rightarrow \infty$ , kad adityviųjų funkcijų  $f(n)$  skirstiniai

$$\nu_x(n \leq x, \frac{f(n) - \alpha(x)}{\beta(x)} < u) \tag{1.1}$$

silpnai konverguotų į ribinį dėsnį.

Šiuo atveju P. Erdős'o ir A. Wintner'io teoremoje  $\alpha(x) = 0$  ir  $\beta(x) = 1$ .

Atskiru atveju, kai

$$\alpha(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ |f(p)| \leq 1}} \frac{f(p)}{p}, \quad \beta(x) = 1$$

gauta P.Erdős'o teorema.

**1.2 teorema** (P.Erdős, 1938). *Tegul*

$$\alpha(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ |f(p)| \leq 1}} \frac{f(p)}{p}.$$

Jeigu eilutės

$$\sum_{|f(p)| > 1} \frac{1}{p}, \quad \sum_{|f(p)| \leq 1} \frac{f^2(p)}{p}$$

konverguoja, tai skirstinys

$$\nu_x(n \leq x, f(n) - \alpha(x) < u)$$

silpnai konverguoja į ribinį dėsnį. Ribinio skirstinio charakteristinė funkcija yra

$$\prod_{|f(p)| > 1} (1 + g(p)) \prod_{|f(p)| \leq 1} (1 + g(p)) e^{-itf(p)/p},$$

čia

$$g(p) = -\frac{1}{p} + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{m=1}^{\infty} p^{-m} e^{-itf(p^m)}.$$

Ribinis skirstinys yra gryno tipo ir yra tolydus tada ir tik tada, kai eilutė

$$\sum_{f(p) \neq 0} \frac{1}{p}$$

diverguoja.

Svarbus rezultatas davęs naują postūmį adityviųjų aritmetinių funkcijų skirstinių asimptotinių savybių tyrimams yra P. Erdős'o ir M. Kac'o teorema [11]. Taip pat ji svarbi tikimybinėje skaičių teorijoje kaip centrinė ribinė teorema adityviosioms funkcijoms.

Pažymėkime

$$\alpha(x) = A(x) := \sum_{p \leq x} \frac{f(p)}{p},$$

$$\beta(x) = B(x) := \left( \sum_{p \leq x} \frac{f^2(p)}{p} \right)^{1/2}.$$

**1.3 teorema** (Erdős-Kac, 1940). Tegul  $f(n)$  stipriai adityvioji funkcija, kuriai  $|f(p)| \leq 1$  visiems pirminiams  $p$ . Jeigu  $B(x) \rightarrow \infty$ , kai  $x \rightarrow \infty$ , tai

$$\nu_x(n \leq x, \frac{f(n) - A(x)}{B(x)} < u) \Rightarrow G(u),$$

čia  $G(u)$  – standartinis normalusis skirstinys.

P. Erdős'o ir A. Wintner'io bei P. Erdős'o ir M. Kac'o teoremos yra pirmieji adityviųjų funkcijų ribinių teoremų pavyzdžiai, turėję didelę įtaką tikimybinės skaičių teorijos raidai.

Vėliau P. Erdős'o ir M. Kac'o metodą išplėtė J. Kubilius (1954-1955). J. Kubiliaus darbai yra svarus indėlis tikimybinėje skaičių teorijoje. Jo monografijoje [18] galima rasti klasikinius rezultatus ir pagrindinius tikimybinės skaičių teorijos uždavinius. J. Kubilius yra apibrėžęs jo vardu pavadintą klasę  $H$ . Sakoma, kad stipriai adityvioji funkcija  $f$  priklauso Kubiliaus  $H$  klasei, jeigu  $B(n) \rightarrow \infty$ , kai  $n \rightarrow \infty$ , ir egzistuoja neapibrėžtai didėjanti funkcija  $r = r(n)$ , kuriai

$$\frac{\ln r(n)}{\ln n} \rightarrow 0 \quad \text{ir} \quad \frac{B(r(n))}{B(n)} \rightarrow 1.$$

Suformuluota ir įrodyta J. Kubiliaus teorema (1.1) skirstiniams, kai funkcija  $f(n)$  priklauso Kubiliaus  $H$  klasei.

**1.4 teorema** (Kubilius, 1954). *Tarkime  $f(n)$  stipriai adityvioji funkcija, priklausanti klasei  $H$ . Pasiskirstymo funkcijos*

$$\nu_x(n \leq x, \frac{f(n) - A(x)}{B(x)} < u)$$

*silpnai konverguoja į ribinį skirstinį, kai  $x \rightarrow \infty$ , tada ir tik tada, kai egzistuoja nemažėjanti funkcija  $K(v)$ , kad visuose funkcijos tolydumo taškuose*

$$\frac{1}{B^2(x)} \sum_{\substack{p \leq x \\ f(p) < vB(x)}} \frac{f^2(p)}{p} \rightarrow K(v),$$

*kai  $x \rightarrow \infty$ . Kai ši sąlyga yra patenkinta, ribinio dėsnio charakteristinė funkcija  $\phi(t)$  gaunama iš Kolmogorovo formulės*

$$\ln \phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itv} - 1 - itv) \frac{1}{v^2} dK(v), \quad (1.2)$$

*ribinio dėsnio vidurkis lygus 0, o dispersija lygi 1.*

1971 m. nepriklausomai P.D.T.A. Elliott'as ir C. Ryavec'as [10] bei B.V. Levin'as ir N.M. Timofeev'as [43] gavo pasiskirstymo funkcijų

$$\nu_x(n \leq x, f(n) - \alpha(x) < u)$$

silpnojo konvergavimo į ribinį skirstinį būtinas ir pakankamas sąlygas.

**1.5 teorema.** *Tegul  $f(n)$  reali adityvioji aritmetinė funkcija,  $\alpha(x)$  realioji funkcija, apibrėžta, kai  $x \geq 1$ . Pasiskirstymo funkcijos*

$$\nu_x(n \leq x, f(n) - \alpha(x) < u)$$

konverguoja į ribinį skirstinį, kai  $x \rightarrow \infty$ , tada ir tik tada, kai egzistuoja tokia konstanta  $c$ , su kuria  $f(n) = c \log n + h(n)$ , ir eilutės

$$\sum_{|h(p)| > 1} \frac{1}{p}, \quad \sum_{|h(p)| \leq 1} \frac{h^2(p)}{p}$$

konverguoja. Be to, kai šios sąlygos yra patenkinamos, funkcija  $\alpha(x)$  yra apibrėžiama taip

$$\alpha(x) = c \log x + \sum_{\substack{p \leq x \\ |h(p)| \leq 1}} \frac{h(p)}{p}.$$

Ribinio skirstinio charakteristinė funkcija yra

$$\frac{1}{1 + ict} \prod_{|h(p)| > 1} w_p(t) \prod_{|h(p)| \leq 1} w_p(t) e^{-it \frac{h(p)}{p}},$$

čia

$$w_p(t) = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ith(p^k)}}{p^k}\right).$$

Ribinis skirstinys yra gryno tipo ir yra tolydus tada ir tik tada, kai eilutė

$$\sum_{f(p) \neq 0} \frac{1}{p}$$

diverguoja.

Analogiški uždaviniai buvo nagrinėti ir paslinktų pirminių skaičių aibėse, t. y. pasiskirstymo funkcijų

$$\nu_x(p \leq x, \frac{f(p+1) - \alpha(x)}{\beta(x)} < u) \quad (1.3)$$

silpnojo konvergavimo į ribinį dėsni būtinų ir pakankamų sąlygų formulavimas ir įrodymas.

Analogiškai 1.1, 1.2 ir 1.5 teorems buvo gautos stipriai adityviųjų funkcijų su paslinktais pirminiais skirstinių silpnojo konvergavimo į ribinį dėsni sąlygos [44], [6].

**1.6 teorema** (Timofeev, 1991). *Tarkime,  $f(n)$  reali stipriai adityvioji funkcija. Pasiskirstymo funkcijos*

$$\nu_x(p \leq x, f(p+1) < u)$$

*turi ribinį dėsni tada ir tik tada, kai eilutės*

$$\sum_{|f(p)| > 1} \frac{1}{p}, \quad \sum_{|f(p)| \leq 1} \frac{f(p)}{p}, \quad \sum_{|f(p)| \leq 1} \frac{f^2(p)}{p}$$

*konverguoja.*

**1.7 teorema** (Elliott, 1980). *Tegul  $f(n)$  reali stipriai adityvioji funkcija, kuriai eilutės*

$$\sum_{|f(p)| > 1} \frac{1}{\varphi(p)}, \quad \sum_{|f(p)| \leq 1} \frac{f^2(p)}{\varphi(p)}$$

*konverguoja. Tegul*

$$\alpha(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ |f(p)| \leq 1}} \frac{f(p)}{\varphi(p)}.$$

*Tuomet pasiskirstymo funkcijos*

$$\nu_x(p \leq x, f(p+1) - \alpha(x) < u)$$

*silpnai konverguoja į ribinį dėsni, kai  $x \rightarrow \infty$ .*



**1.8 teorema** (Timofeev, 1991). Tegul  $f(n)$  reali stipriai adityvioji funkcija, apibrėžta tokiu būdu  $f(n) = c \log n + h(n)$ . Pasiskirstymo funkcijos

$$\nu_x(p \leq x, f(p+1) - \alpha(x) < u)$$

silpnai konverguoja į ribinį skirstinį, kai  $x \rightarrow \infty$ , tada ir tik tada, kai egzistuoja tokia konstanta  $c$ , su kuria eilutės

$$\sum_{|h(p)| > 1} \frac{1}{p}, \quad \sum_{|h(p)| \leq 1} \frac{h^2(p)}{p}$$

konverguoja. Be to, kai šios sąlygos yra patenkintos, funkcija  $\alpha(x)$  yra apibrėžiama taip

$$\alpha(x) = c \log x + \sum_{\substack{p \leq x \\ |h(p)| \leq 1}} \frac{h(p)}{p}.$$

Analogiškai 1.4 teoremai buvo suformuluotos ir įrodytos stipriai adityviųjų funkcijų su paslinktais pirminiais paskirstymo funkcijų silpnojo konvergavimo į ribinį dėsnį būtinos ir pakankamos sąlygos [1].

**1.9 teorema** (Barban-Vinogradov-Levin, 1965). Tegul  $f(n)$  stipriai adityvioji funkcija, priklausanti klasei  $H$ . Pasiskirstymo funkcijos

$$\nu_x(p \leq x, \frac{f(p+1) - \alpha(x)}{\beta(x)} < u)$$

silpnai konverguoja į ribinį skirstinį, kai  $x \rightarrow \infty$ , tada ir tik tada, kai egzistuoja tokia pasiskirstymo funkcija  $K(v)$ , kad

$$\frac{1}{B^2(x)} \sum_{\substack{p \leq x \\ f(p) < vB(x)}} \frac{f^2(p)}{p} \rightarrow K(v),$$

kai  $x \rightarrow \infty$ .

Kai ši sąlyga yra patenkinta, ribinio dėsnio charakteristinė funkcija  $\phi(t)$  gaunama iš Kolmogorovo (1.2) formulės, ribinio dėsnio vidurkis lygus 0, o dispersija lygi 1.

Buvo nagrinėtas dar vienas tikimybinės skaičių teorijos uždavinys – adityviųjų funkcijų sumų ribinio skirstinio egzistavimas. Pirmieji rezultatai šioje srityje yra gauti W.J. LeVeque'o [19] (1949).

**1.10 teorema** (LeVeque, 1949). *Tegul  $f(n)$  stipriai adityvioji funkcija,  $|f(p)| \leq 1$  visiems pirminiams  $p$ , o eilutė  $\sum_p \frac{f^2(p)}{p}$  diverguoja. Tada*

$$\nu_x \left( n \leq x, \frac{f(n) - A(x)}{B(x)} < u_1, \frac{f(n+1) - A(x)}{B(x)} < u_2 \right) \Rightarrow G(u_1)G(u_2).$$

Ši teorema yra svarbi tikimybinėje skaičių teorijoje kaip centrinė ribinė teorema adityviųjų funkcijų sumoms. Iš jos išplaukia

$$\nu_x \left( n \leq x, \frac{\omega(n) - \omega(n+1)}{\sqrt{2 \log \log x}} < u \right) \Rightarrow G(u).$$

Bendresnius rezultatus vėliau yra gavę J. Kubilius [18], G. Halász'as [13], I. Kátai [17], A. Hildebrand'as [14], P.D.T.A. Elliott'as [5]–[8], N.M. Timofeev'as ir H.H. Usmanov'as [42] ir kt.

A. Hildebrand'as [14] (1988) pritaikė Erdős'o-Wintner'io teoremos principus adityviųjų funkcijų skirtumo ribiniam rezultatui gauti. Teoremos įrodymui buvo taikytas charakteristinių funkcijų metodas.

**1.11 teorema** (Hildebrand, 1988). *Tegul  $f$  stipriai adityvioji funkcija. Pasiskirstymo funkcijos*

$$\nu_x \{ n \leq x, f(n+1) - f(n) < u \}$$

*silpnai konverguoja į ribinį skirstinį, kai  $x \rightarrow \infty$ , tada ir tik tada, kai egzistuoja realusis skaičius  $c$  toks, kad funkcijai  $h(n) = f(n) - c \log n$  eilutės*

$$\sum_{|h(p)| \leq 1} \frac{|h(p)|^2}{p}, \quad \sum_{|h(p)| > 1} \frac{1}{p}$$

*konverguoja.*

*Jei šios sąlygos yra patenkintos, tai ribinio skirstinio charakteristinė funkcija yra*

$$\prod_p \left( 1 - \frac{2}{p} + 2 \left( 1 - \frac{1}{p} \right) \operatorname{Re} \sum_{m \geq 1} \frac{e^{ith(p^m)}}{p^m} \right).$$

Dar po keleto metų N.M. Timofeev'as ir H.H. Usmanov'as [42] (1992) gavo stipriai adityviųjų funkcijų  $f_1, f_2$  skirstinių

$$\nu_x \{ n \leq x, f_1(n) + f_2(n+1) - \alpha(x) < u \} \quad (1.4)$$

silpnojo konvergavimą į ribinį dėsnį būtinas ir pakankamas sąlygas.

**1.12 teorema** (Timofeev-Usmanov, 1992). *Tegul  $f_1, f_2$  stipriai adityviosios funkcijos. Tam, kad (1.4) pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguotų į ribinį dėsnį, būtina ir pakankama, kad egzistuotų tokie realieji skaičiai  $c_1, c_2$ , su kuriais eilutė*

$$\sum_p \frac{1}{p} (\min\{1, h_1^2(p)\} + \min\{1, h_2^2(p)\})$$

konverguotų, čia funkcija  $h_j(p) = f_j(p) - c_j \log p$ ,  $j = 1, 2$ . Be to, kai šios sąlygos yra patenkintos, funkcija  $\alpha(x)$  turi pavidalą

$$\alpha(x) = (c_1 + c_2) \log x + \sum_{p \leq x} \frac{h_1^*(p) + h_2^*(p)}{p},$$

čia

$$h^* = \begin{cases} h, & \text{kai } |h| \leq 1, \\ 1, & \text{kai } |h| > 1, \end{cases}$$

ribinio skirstinio charakteristinė funkcija yra

$$\frac{1}{1 + it(c_1 + c_2)} \prod_p \left( 1 - \frac{2}{p} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{p^m} (e^{ith_1(p^m)} + e^{ith_2(p^m)}) \times \left( 1 - \frac{1}{p} \right) \right) e^{-\frac{it}{p}(h_1^*(p) + h_2^*(p))}.$$

J. Kubilius monografijoje [18] įrodė bendrąjį skirstinių

$$\nu_x \left\{ n \leq x, \frac{f_1(n + a_1) - A_1(x)}{B_1(x)} + \dots + \frac{f_s(n + a_s) - A_s(x)}{B_s(x)} < u \right\} \quad (1.5)$$

silpnojo konvergavimo į ribinį dėsnį atvejį. Čia  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, s$ , stipriai adityviosios funkcijos, kurios priklauso klasei H.

**1.13 teorema** (Kubilius, 1964). *Tegul  $f_1(n), \dots, f_s(n)$  stipriai adityviosios funkcijos, priklausančios klasei H, ir  $a_1, \dots, a_s$  skirtingi fiksuoti natūralieji skaičiai. (1.5) pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguoja į ribinį skirstinį su dispersija  $s$ , kai  $x \rightarrow \infty$ , tada ir tik tada, kai egzistuoja nemažėjanti funkcija  $K(v)$  tokia, kad*

$$\sum_{j=1}^s \frac{1}{B_j^2(x)} \sum_{\substack{p \leq x \\ f_j(p) < v B_j(x)}} \frac{f_j^2(p)}{p} \rightarrow K(v), \quad x \rightarrow \infty$$

visuose funkcijos  $K(v)$  tolydumo taškuose. Ribinio dėsnio charakteristinės funkcijos logaritmas apibrėžtas (1.2) lygybe.

Atskiras šios teoremos atvejis yra stipriai adityviųjų funkcijų sumų konvergavimas į standartinį normalųjį skirstinį.

**1.14 teorema** (Kubilius, 1964). *Tegul  $a_1, \dots, a_s$  skirtingi natūralieji skaičiai ir  $f_1(n), \dots, f_s(n)$  realios stipriai adityviosios funkcijos. Jeigu kiekvienam  $\epsilon > 0$*

$$\frac{1}{B_j^2(x)} \sum_{\substack{p \leq x \\ |f_j(p)| > \epsilon B_j(x)}} \frac{f_j^2(p)}{p} \rightarrow 0, \quad (j = 1, \dots, s),$$

kai  $x \rightarrow \infty$ , tai

$$\nu_x \left\{ n \leq x, \sum_{j=1}^s \frac{f_j(n + a_j) - A_j(x)}{\sqrt{s} B_j(x)} < u \right\} \Rightarrow G(u),$$

kai  $x \rightarrow \infty$ .

Ir vėliau gauta nemažai rezultatų apie adityviųjų funkcijų sumų pasiskirstymus. Šiuos uždavinius sprendė I. Kátai, N.M. Timofeev'as, G. Stepanauskas ir kiti autoriai.

## 1.2 Stipriai adityviųjų funkcijų sekų skirstinių

### $\nu_x(n \leq x, f_x(n) < u)$ ribiniai rezultatai

Pastaraisiais metais buvo gautos stipriai adityviųjų funkcijų sekų  $f_x$ ,  $x \geq 2$ , skirstinių silpnojo konvergavimo į konkrečius ribinius dėsnius būtinos ir pakankamos sąlygos. Tirti atvejai, kai  $f_x(p)$  įgyja reikšmę 0 arba 1 bet kuriam pirminiam skaičiui  $p$ .

Nagrinėtas stipriai adityviųjų funkcijų sekų pasiskirstymo funkcijų

$$\nu_x(n \leq x, f_x(n) < u) \quad (1.6)$$

silpnas konvergavimas į šiuos ribinius dėsnius: Puasono, Bernulio, geometrinį, binominį, diskretų tolygųjį (žr. [37]–[39]).

(1.6) pasiskirstymo funkcijų silpnojo konvergavimo į tam tikrą dėsnį sąlygos nusakytos šioje J. Šiaulio įrodytoje teoremoje [30].

**1.15 teorema** (Šiaulys, 1999). *Tegul  $f_x$ ,  $x \geq 2$ , yra stipriai adityviųjų funkcijų aibė tokia, kad  $f_x(p) \in \{0, 1\}$  visiems pirminiams  $p$ . Pasiskirstymo funkcijos  $\nu_x(n \leq x, f_x(n) < u)$  silpnai konverguoja į kažkokią pasiskirstymo funkciją tada ir tik tada, kai riba*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{\substack{p_1 p_2 \dots p_l \leq x \\ p_i \neq p_j, i \neq j}} \frac{1}{p_1 p_2 \dots p_l} = g_l$$

*egzistuoja kiekvienam fiksuotam natūraliajam skaičiui  $l$ . Be to, ribinio skirstinio charakteristinė funkcija yra*

$$1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{g_l}{l!} (e^{it} - 1)^l. \quad (1.7)$$

Toms (1.6) pasiskirstymo funkcijoms, kurių ribinis skirstinys turi baigtinę atramą, silpnojo konvergavimo į ribinį dėsnį sąlygos buvo gautos J. Šiaulio straipsnyje [31].

**1.16 teorema** (Šiaulys, 2000). *Tegul  $f_x$ ,  $x \geq 2$ , yra stipriai adityviųjų funkcijų aibė,  $f_x(p) \in \{0, 1\}$  visiems pirminiams  $p$ . Pasiskirstymo funkcijos*

$\nu_x(f_x(n) < u)$  silpnai konverguoja į pasiskirstymo funkciją  $F_\xi(u)$ , čia  $\xi$  – atsitiktinis dydis su baigtine atrama  $\{0, 1, 2, \dots, L-1\}$ ,  $L \geq 2$ , tada ir tik tada, kai egzistuoja konstanta  $D \geq 2$  tokia, kad

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \#\{p \leq D : f_x(p) = 1\} \leq L,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{D < p \leq x^{1/(L+1)}}^f \frac{1}{p} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^L \sum_{\substack{p_1, \dots, p_k \leq D, p_i \neq p_j, i \neq j \\ x^{1/(L+1)} < p_{k+1}, \dots, p_{L+1} \leq x \\ p_1 p_2 \dots p_{L+1} \leq x}}^f \frac{1}{p_1 p_2 \dots p_{L+1}} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{\substack{p_1, p_2, \dots, p_l \leq D \\ p_i \neq p_j, i \neq j}}^f \frac{1}{p_1 p_2 \dots p_l} + \sum_{\substack{x^{1/(L+1)} < p_1, p_2, \dots, p_l \leq x \\ p_1 p_2 \dots p_l \leq x}}^f \frac{1}{p_1 p_2 \dots p_l} + \sum_{k=1}^{l-1} \binom{l}{k} \sum_{\substack{p_1, \dots, p_k \leq D, p_i \neq p_j, i \neq j \\ x^{1/(L+1)} < p_{k+1}, \dots, p_l \leq x \\ p_1 p_2 \dots p_l \leq x}}^f \frac{1}{p_1 p_2 \dots p_l} \right\} = g_l,$$

$l = 1, 2, \dots, L$ . Be to, ribinio skirstinio charakteristinė funkcija nusakoma (1.7) formule.

1.15 ir 1.16 teoremos yra teorinis pagrindas (1.6) pasiskirstymo funkcijų silpnojo konvergavimo į konkrečius ribinius dėsnius būtinų ir pakankamų sąlygų suradimui.

(1.6) pasiskirstymo funkcijų silpnojo konvergavimo į Puasono dėsnį su parametru  $\lambda$  sąlygos gautos J. Šiaulio [32] (2002).

**1.17 teorema** (Šiaulys, 2002). Tegul  $f_x$ ,  $x \geq 2$ , yra stipriai adityviųjų funkcijų aibė tokia, kad  $f_x(p) \in \{0, 1\}$  visiems pirminiams  $p$ . Pasiskirstymo funkcijos  $\nu_x(f_x(n) < u)$  silpnai konverguoja į Puasono dėsnį su parametru  $\lambda$  tada ir tik tada, kai yra teisingos šios trys sąlygos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \max_{p \leq x}^f \frac{1}{p} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{p \leq x}^f \frac{1}{p} = \lambda,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\log x} \sum_{p \leq x}^f \frac{\log p}{p} = 0.$$

Du skirtingus šios teoremos įrodymus galima rasti [26], [32] straipsniuose. Straipsnyje [26] teorema įrodyta remiantis tikimybinio, analiziniu ir momentų metodais. Paprastesnis teoremos įrodymas pateiktas straipsnyje [32]. Čia įrodymas paremtas faktorialinių momentų metodu.

Stipriai adityviųjų funkcijų sekų silpnojo konvergavimo į binominį ribinį dėsnį būtinos ir pakankamos sąlygos buvo gautos J. Šiaulio ir G. Stepanausko straipsnyje [38].

**1.18 teorema** (Šiaulyš-Stepanauskas, 2011). *Tegul  $f_x$ ,  $x \geq 2$ , yra stipriai adityviųjų funkcijų aibė tokia, kad  $f_x(p) \in \{0, 1\}$  visiems pirminiams  $p$ . Pasiskirstymo funkcijos  $\nu_x(f_x(n) < u)$  silpnai konverguoja į ribinį binominį dėsnį  $\mathcal{B}(u, \gamma, N)$  su parametrais  $\gamma \notin \{1/p, p \in \mathbb{P}\}$  ir  $N \in \mathbb{N}$ , kai  $x \rightarrow \infty$ , tada ir tik tada, kai*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{p \leq x^{\frac{1}{N+1}}}^f \frac{1}{p} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{x^{\frac{1}{N+1}} < p_1 \leq x}^f \dots \sum_{\substack{x^{\frac{1}{N+1}} < p_l \leq x \\ p_1 p_2 \dots p_l \leq x}}^f \frac{1}{p_1 p_2 \dots p_l} = \frac{N!}{(N-l)!} \gamma^l,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{\substack{x^{\frac{1}{N+1}} < p_1 p_2 \dots p_l \leq x \\ p_1 p_2 \dots p_l \leq x}}^f \frac{1}{p_1 p_2 \dots p_l} = \frac{N!}{(N-l)!} \gamma^l,$$

kiekvienam fiksuotam  $l = 1, 2, \dots, N$ .

**1.19 teorema** (Šiaulyš-Stepanauskas, 2011). *Tegul  $f_x$ ,  $x \geq 2$ , yra stipriai adityviųjų funkcijų aibė tokia, kad  $f_x(p) \in \{0, 1\}$  visiems pirminiams  $p$ .*

Pasiskirstymo funkcijos  $\nu_x(f_x(n) < u)$  silpnai konverguoja į ribinį binominį dėsnį  $\mathcal{B}(u, \gamma, N)$  su parametrais  $\gamma = 1/q$ ,  $q \in \mathbb{P}$ , ir  $N \in \mathbb{N}$ , kai  $x \rightarrow \infty$ , tada ir tik tada, kai kiekvienam pakankamai dideliam  $x$  galioja viena iš dviejų sąlygų:

1)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_x(q) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{p \leq x^{\frac{1}{N+1}}}^f \frac{1}{p} = 0$$

ir kiekvienam fiksuotam  $l = 1, 2, \dots, N$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{x^{\frac{1}{N+1}} < p_1 \leq x}^f \dots \sum_{\substack{x^{\frac{1}{N+1}} < p_l \leq x \\ p_1 p_2 \dots p_l \leq x}}^f \frac{1}{p_1 p_2 \dots p_l} = \frac{N!}{(N-l)!} \left(\frac{1}{q}\right)^l,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{\substack{x^{\frac{1}{N+1}} < p_1 p_2 \dots p_l \leq x \\ p_1 p_2 \dots p_l \leq x}}^f \frac{1}{p_1 p_2 \dots p_l} = \frac{N!}{(N-l)!} \left(\frac{1}{q}\right)^l$$

arba

2)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_x(q) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{p \leq x^{\frac{1}{N}}, p \neq q}^f \frac{1}{p} = 0$$

ir kiekvienam fiksuotam  $l = 1, 2, \dots, N-1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{x^{\frac{1}{N}} < p_1 \leq x}^f \dots \sum_{\substack{x^{\frac{1}{N}} < p_l \leq x \\ p_1 p_2 \dots p_l \leq x}}^f \frac{1}{p_1 p_2 \dots p_l} = \frac{(N-1)!}{(N-1-l)!} \left(\frac{1}{q}\right)^l,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{\substack{x^{\frac{1}{N}} < p_1 p_2 \dots p_l \leq x \\ p_1 p_2 \dots p_l \leq x}}^f \frac{1}{p_1 p_2 \dots p_l} = \frac{(N-1)!}{(N-1-l)!} \left(\frac{1}{q}\right)^l.$$

Taip pat buvo gautos stipriai adityviųjų funkcijų sekų silpnosios konvergavimo į diskretų tolygųjų ribinį dėsnį būtinos ir pakankamos sąlygos [39].

**1.20 teorema** (Šiaulyš-Stepanauskas, 2012). Tegul  $f_x$ ,  $x \geq 2$ , yra stipriai adityviųjų funkcijų aibė tokia, kad  $f_x(p) \in \{0, 1\}$  visiems pirminiams  $p$ . Pasiskirstymo funkcijos  $\nu_x(f_x(n) < u)$  silpnai konverguoja į ribinį diskretų



tolygųjį dėsnį  $\mathcal{U}(u, L)$ , kai  $x \rightarrow \infty$ , tada ir tik tada, kai  $L = 2$  ir kiekvienam pakankamai dideliame  $x$  galioja viena iš dviejų sąlygų:

$$f_x(2) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{2 < p \leq x}^f \frac{1}{p} = 0 \quad (1.8)$$

arba

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{p \leq x^{1/2}}^f \frac{1}{p} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{x^{1/2} < p \leq x}^f \frac{1}{p} = \frac{1}{2}. \quad (1.9)$$

Pastarosios teoremos buvo įrodytos remiantis faktorialinių momentų bei charakteristinių funkcijų metodais.

Silpnąjį konvergavimą į konkrečius ribinius dėsnius pavyzdžius galima rasti straipsnyje [37].

### 1.3 Stipriai adityviųjų funkcijų sekų su paslinktais argumentais skirstinių ribiniai dėsniai

Plačiai tirtas stipriai adityviųjų funkcijų skirstinių silpnasis konvergavimas į Puasono dėsnį. Straipsniuose [33]–[35] yra gautos būtinos ir pakankamos sąlygos skirstinių

$$\nu_x(p \leq x, f_x(p+1) < u),$$

$$\nu_x(n \leq x, f_x(n) + g_x(n+1) < u),$$

$$\nu_x(p \leq x, f_x(p+1) + g_x(p+2) < u)$$

silpnajam konvergavimui į Puasono dėsnį.

**1.21 teorema** (Šiaulyš-Stepanauskas, 2007). *Tegul  $f_x$ ,  $x \geq 2$ , yra stipriai adityviųjų funkcijų aibė tokia, kad  $f_x(p) \in \{0, 1\}$  visiems pirminiems  $p$  ir*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log x \sum_{x^\gamma < q \leq x}^f \frac{1}{q} = 0$$

kiekvienam  $\gamma \in (0, 1)$ . Pasiskirstymo funkcijos  $\nu_x(f_x(p+1) < u)$  silpnai konverguoja į Puasono dėsnį su parametru  $\lambda$ , kai  $x \rightarrow \infty$ , tada ir tik tada, kai

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \max_{q \leq x}^f \frac{1}{q} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{q \leq x}^f \frac{1}{q} = \lambda.$$

**1.22 teorema** (Šiaulyš-Stepanauskas, 2007). Tegul  $f_x$  ir  $g_x$ ,  $x \geq 2$ , yra dvi stipriai adityviųjų funkcijų aibės tokios, kad  $f_x(p), g_x(p) \in \{0, 1\}$  visiems pirminiams  $p$  ir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\log x} \left( \sum_{p \leq x}^f \frac{\log p}{p} + \sum_{p \leq x}^g \frac{\log p}{p} \right) = 0.$$

Pasiskirstymo funkcijos  $\nu_x(n \leq x, f_x(n) + g_x(n+1) < u)$  silpnai konverguoja į Puasono dėsnį su parametru  $\lambda$ , kai  $x \rightarrow \infty$ , tada ir tik tada, kai

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \max_{p \leq x}^f \frac{1}{p} + \max_{p \leq x}^g \frac{1}{p} \right) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sum_{p \leq x}^f \frac{1}{p} + \sum_{p \leq x}^g \frac{1}{p} \right) = \lambda.$$

**1.23 teorema** (Šiaulyš-Stepanauskas, 2007). Tegul  $f_x$  ir  $g_x$ ,  $x \geq 2$ , yra dvi stipriai adityviųjų funkcijų aibės tokios, kad  $f_x(p), g_x(p) \in \{0, 1\}$  visiems pirminiams  $p$  ir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log x \left( \sum_{x^\alpha < q \leq x}^f \frac{1}{q} + \sum_{x^\alpha < q \leq x}^g \frac{1}{q} \right) = 0$$

kiekvienam  $\alpha \in (0, 1)$ . Pasiskirstymo funkcijos  $\nu_x(p \leq x, f_x(p+1) + g_x(p+2) < u)$  silpnai konverguoja į Puasono dėsnį su parametru  $\lambda$ , kai  $x \rightarrow \infty$ , tada ir tik tada, kai

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \max_{q \leq x}^f \frac{1}{q} + \max_{q \leq x}^g \frac{1}{q} \right) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sum_{q \leq x}^f \frac{1}{q} + \sum_{q \leq x}^g \frac{1}{q} \right) = \lambda.$$

## 2 Diskretus tolygusis ribinis dėsnis adityviųjų funkcijų sekoms su paslinktais pirminiais

Šiame skyriuje pateikiamos stipriai adityviųjų funkcijų sekų su paslinktais pirminiais pasiskirstymo funkcijų

$$\nu_x(p \leq x, f_x(p+1) < u) = \frac{1}{\pi(x)} \sum_{\substack{p \leq x \\ f_x(p+1) < u}} 1 \quad (2.1)$$

silpnąjį konvergavimą į diskretų tolygųjį skirstinį

$$\mathcal{U}(u, L) := \sum_{\substack{k=0,1,\dots,L-1 \\ k < u}} \frac{1}{L}, \quad (2.2)$$

čia  $L \in \mathbb{N}$ ,  $L \geq 2$ , būtinos ir pakankamos sąlygos. Teorema buvo įrodyta remiantis faktorialinių momentų bei charakteristinių funkcijų metodais. Taip pat buvo įvesta sąlyga, apribojanti adityviųjų funkcijų elgseną dideliems pirminiams skaičiams ((H) sąlyga). Galbūt ši problema yra išsprendžiama kitais metodais (pvz. Kubiliaus modelis ar kt.). Tačiau ir šiais atvejais iškilus didelių pirminių skaičių problema.

### 2.1 Pagrindinis rezultatas ir papildomos lemos

**2.1 teorema.** Tegul  $f_x$ ,  $x \geq 2$ , stipriai adityviųjų funkcijų aibė. Tarkime  $f_x(p) \in \{0, 1\}$  visiems pirminiams  $p$  ir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log x \sum_{x^\gamma < p \leq x}^f \frac{1}{p} = 0 \quad (H)$$

kiekvienam  $\gamma \in (0, 1)$ . (2.1) pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguoja į ribinį diskretų tolygųjį dėsnį  $\mathcal{U}(u, L)$ , kai  $x \rightarrow \infty$ , tada ir tik tada, kai  $L = 2$  ir

$$f_x(3) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{\substack{p \leq x \\ p \neq 3}}^f \frac{1}{p} = 0. \quad (2.3)$$

Teoremos įrodymas remiasi žemiau pateiktomis lemomis. 2.3–2.5 lemos apibūdina paskirstymo funkcijų  $\nu_x(f_x(p+1) < u)$  faktorialinių momentų ribinę elgseną.

**2.2 lema** ([9]). *Kiekvienai adityviajai, įgyjančiai realiąsias reikšmes funkcijai  $h$ , visiems realiesiems  $b$  ir sveikiesiems  $a$  teisingas įvertis*

$$\nu_x(h(p+a) = b) \ll \left(4 + \sum_{\substack{p \leq x \\ h(p) \neq 0}} \frac{1}{p}\right)^{-1/2}.$$

**2.3 lema.** *Tegul  $f_x$ ,  $x \geq 2$ , aibė stipriai adityviųjų funkcijų, kurioms  $f_x(p) \in \{0, 1\}$  visiems pirminiams  $p$ . Jeigu (2.1) pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguoja į kažkokią pasiskirstymo funkciją  $F(u)$  su šuoliu taške  $u = 0$ , kai  $x \rightarrow \infty$ , tai dydis*

$$\beta(l, x) := \frac{1}{\pi(x)} \sum_{p \leq x} f_x(p+1)(f_x(p+1)-1) \dots (f_x(p+1)-l+1), \quad l = 1, 2, \dots$$

turi baigtinę ribą

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \beta(l, x) = g_l, \quad (2.4)$$

čia  $g_l$  yra ribinio dėsnio  $l$ -asis faktorialinis momentas.

**2.4 lema** ([33], Lema 2). *Jeigu stipriai adityviųjų funkcijų aibė  $f_x$  tenkina 2.1 teoremos sąlygas ir*

$$\sum_{p \leq x}^f \frac{1}{p} \ll 1, \quad (2.5)$$

tai

$$\beta(l, x) = \sum_{\substack{p_1, p_2, \dots, p_l \leq x \\ p_i \neq p_j, i \neq j}}^f \frac{1}{(p_1-1)(p_2-1) \dots (p_l-1)} + \varepsilon_l(x), \quad l = 1, 2, \dots$$

Iš šio teiginio ir (2.4) lygybės skirstinių  $\nu_x(f_x(p+1) < u)$  konvergavimo atveju turime, kad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{\substack{p_1, p_2, \dots, p_l \leq x \\ p_i \neq p_j, i \neq j}}^f \frac{1}{(p_1-1)(p_2-1) \dots (p_l-1)} = g_l \quad (2.6)$$

kiekvienam  $l \in \{1, 2, \dots\}$ .

**2.5 lema.** Tegul  $f_x$ ,  $x \geq 2$ , aibė stipriai adityviųjų funkcijų, kurioms  $f_x(p) \in \{0, 1\}$  visiems pirminiams  $p$  ir patenkinta sąlyga (H). Jeigu (2.1) pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguoja į pasiskirstymo funkciją  $F_\xi$ , čia  $\xi$ -atsitiktinis dydis su baigtine atrama  $\{0, 1, \dots, L-1\}$ ,  $L \geq 2$ , tai egzistuoja konstanta  $D \geq 2$  tokia, kad

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \#\{p \leq D : f_x(p) = 1\} \leq L-1, \quad (2.7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{D < p \leq x^{1/L}}^f \frac{1}{p} = 0, \quad (2.8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{\substack{p_1, \dots, p_l \leq D \\ p_i \neq p_j, i \neq j}}^f \frac{1}{(p_1-1)(p_2-1)\dots(p_l-1)} = g_l, \quad (2.9)$$

$l = 1, 2, \dots, L-1$ . Be to, ribinio skirstinio charakteristinė funkcija yra

$$1 + \sum_{l=1}^{L-1} \frac{g_l}{l!} (e^{it} - 1)^l.$$

Iš 2.1 teoremos gauname šį pavyzdį.

**2.1 pavyzdys.** Tegul

$$f_x(p) = \begin{cases} 1, & \text{jei } p = 3, \\ 1, & \text{jei } x^\alpha \leq p < x^{\alpha+\varepsilon_x}, \\ 0 & \text{kitais atvejais,} \end{cases}$$

čia  $\varepsilon_x > 0$  ir  $\varepsilon_x \log x \rightarrow 0$ , kai  $x \rightarrow \infty$ . Tuomet

$$\nu_x(f_x(p+1) < u) \Rightarrow \mathcal{U}(u, 2), \quad x \rightarrow \infty.$$

## 2.2 Lemų įrodymai

### 2.3 lemos įrodymas

Tarkime, kad (2.1) pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguoja į ribinę pasiskirstymo funkciją  $F(u)$  su šuoliu taške  $u = 0$ . Iš silpnojo konvergavimo išplaukia, kad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \nu_x(f_x(p+1) = 0) = F(0+) - F(0) \geq c > 0.$$

Naudojant šį įvertį, straipsnyje [33] ((10) nelygybė) buvo įrodyta, kad

$$\beta(l, x) \ll_l 1, \quad l \geq 1. \quad (2.10)$$

Pasinaudoję šiuo įverčiu gauname, kad

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi(x)} \sum_{\substack{p \leq x \\ f_x(p+1)=k}} 1 &= \frac{1}{\pi(x)} \sum_{\substack{p \leq x \\ f_x(p+1)=k}} \frac{k(k-1) \dots (k-l-1)}{k(k-1) \dots (k-l-1)} \\ &\leq \frac{1}{k(k-1) \dots (k-l-1)} \beta(l+2, x) \ll_l \frac{1}{k(k-1) \dots (k-l-1)} \end{aligned}$$

visiems  $k \geq l+2$ . Taigi,

$$F(k+) - F(k) = \lim_{x \rightarrow \infty} \nu_x(f_x(p+1) = k) \ll_l \frac{1}{k(k-1) \dots (k-l-1)}$$

visiems  $k \geq l+2$ .

Fiksuokime  $l \in \mathbb{N}$  ir pasirinkime  $K > l+2$ . Naudojant (2.10) įvertį analogiškai kaip [33] gauname

$$\begin{aligned} \beta(l, x) &= \frac{1}{\pi(x)} \sum_{\substack{p \leq x \\ 1 \leq f_x(p+1) \leq K}} f_x(p+1)(f_x(p+1)-1) \dots (f_x(p+1)-l+1) \\ &+ \frac{1}{\pi(x)} \sum_{\substack{p \leq x \\ f_x(p+1) > K}} f_x(p+1)(f_x(p+1)-1) \dots (f_x(p+1)-l+1) \frac{f_x(p+1)-l}{f_x(p+1)-l} \\ &= \sum_{k=l}^K k(k-1) \dots (k-l+1) \frac{1}{\pi(x)} \sum_{\substack{p \leq x \\ f_x(p+1)=k}} 1 + O\left(\frac{\beta(l+1, x)}{K-l}\right) \\ &= \sum_{k=l}^K k(k-1) \dots (k-l+1)(F(k+) - F(k-)) + \varepsilon_{K,l}(x) + O_l\left(\frac{1}{K-l}\right) \\ &= g_l - \sum_{k=K+1}^{\infty} k(k-1) \dots (k-l+1)(F(k+) - F(k-)) + \varepsilon_{K,l}(x) + O_l\left(\frac{1}{K-l}\right) \\ &= g_l + \varepsilon_{K,l}(x) + O_l\left(\sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{(k-l)(k-l-1)}\right) + O_l\left(\frac{1}{K}\right) \\ &= g_l + \varepsilon_{K,l}(x) + O_l\left(\frac{1}{K}\right). \end{aligned}$$

Perėjus prie ribos, kai  $x \rightarrow \infty$  ir tada  $K \rightarrow \infty$ , gauname (2.4) lygybę.

2.3 lema įrodyta.

## 2.5 lemos įrodymas

Šios lemos įrodymas panašus į 4 išvados iš [31] būtinumo įrodymą. Iš lemos sąlygų turime, kad egzistuoja toks  $k \in \{0, 1, \dots, L-1\}$ , kuriam

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \nu_x(f_x(p+1) = k) = F_\xi(k+) - F_\xi(k) \geq c > 0.$$

Iš 2.2 lemos turime, kad

$$\nu_x(f_x(p+1) = k) \ll \left(4 + \sum_{p \leq x}^f \frac{1}{p}\right)^{-1/2}. \quad (2.11)$$

Taigi, gauname (2.5) nelygybę.

Tada pagal 2.4 lemą, galioja (2.6) lygybė. Tegul  $d \geq 2$  fiksuotas natūralusis skaičius. Jeigu  $x/d^{L-1} > d$ , iš (2.6) lygybės turime, kad

$$g_L \geq \limsup_{x \rightarrow \infty} \sum_{\substack{p_1, p_2, \dots, p_L \leq d \\ p_i \neq p_j, i \neq j}}^f \frac{1}{(p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_L - 1)}.$$

Tardami, kad

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \#\{p \leq d : f_x(p) \neq 0\} \geq L,$$

gauname prieštarą sąlygai  $g_L = 0$ . Taigi,

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \#\{p \leq d : f_x(p) \neq 0\} \leq L - 1$$

visiems fiksuotiems natūraliesiems  $d$ .

Imkime

$$a_d = \limsup_{x \rightarrow \infty} \#\{p \leq d : f_x(p) \neq 0\}.$$

Seka  $a_d$  ( $d \geq 2$ ) įgyja sveikąsias reikšmes, yra nemažėjanti ir aprėžta. Taigi, egzistuoja toks natūralusis skaičius  $D \geq 2$ , kuriam

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \#\{p \leq D : f_x(p) \neq 0\} = a_d,$$

kai  $d \geq D$ . Kadangi  $a_d \leq L - 1$  visiems natūraliesiems  $d$ , tai gauname, kad yra išpildyta (2.7) sąlyga.



Kita vertus, iš šių samprotavimų išplaukia, kad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_x(p) = 0$$

viesiems fiksuotiems pirminiams  $p > D$ . Todėl gauname, kad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \max_{D < p \leq x}^f \frac{1}{p} = 0.$$

Kadangi kiekvienai porai  $i, j$ ,  $1 \leq i < j \leq L$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{D < p_1, \dots, p_L \leq x^{1/L} \\ p_i = p_j}}^f \frac{1}{(p_1 - 1) \dots (p_L - 1)} \\ \leq \max_{D < p \leq x}^f \frac{1}{p - 1} \left( \sum_{p \leq x}^f \frac{1}{p - 1} \right)^{L-1} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

tai (2.6) lygybė rodo, kad

$$g_L \geq \limsup_{x \rightarrow \infty} \left( \sum_{D < p \leq x^{1/L}}^f \frac{1}{p - 1} \right)^L.$$

Taigi, iš sąlygos  $g_L = 0$  gauname (2.8). Paskutinė lemos (2.9) sąlyga išplaukia iš (2.6), (2.8) lygybės ir (H) sąlygos. 2.5 lema įrodyta.

## 2.3 Pagrindinio rezultato įrodymas

*Būtinumas.* Tarkime, kad

$$\nu_x(f_x(p+1) < u) \Rightarrow \mathcal{U}(u, L), \quad (2.12)$$

kai  $x \rightarrow \infty$ , su parametru  $L \geq 2$ . Iš 2.3 lemos gauname, kad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \beta(x, l) = \frac{(L-1)!}{(L-1-l)!(l+1)},$$

kai  $l = 1, 2, \dots, L-1$ . Reikšmės  $g_l$  yra ribinio skirstinio faktorialiniai momentai. Diskretaus tolygiojo skirstinio atveju išplaukia, kad

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{L-1}{2}, \quad g_2 = \frac{(L-1)(L-2)}{3}, \\ g_k &= \frac{(L-1)(L-2) \dots (L-k)}{k+1}, \quad k = 3, 4, \dots, L-1, \end{aligned}$$

$$g_k = 0, \quad k = L, L + 1, \dots$$

Iš (2.12) turime, kad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \nu_x(f_x(p + 1) = 0) = \mathcal{U}(0+, L) - \mathcal{U}(0, L) = \frac{1}{L} > 0.$$

Taigi, (2.5) nelygybė išplaukia iš (2.11) nelygybės, kai  $k = 0$ . Dabar taikysime 2.4 lema. Reikšmės  $g_l$  yra ribinio skirstinio faktorialiniai momentai. Akivaizdu, kad

$$g_l \leq g_{l-k} g_k$$

visiems  $l = 2, 3, \dots$  ir visiems  $k = 1, 2, \dots, l - 1$ . Konkrečiu atveju

$$g_2 \leq g_1^2.$$

Todėl

$$\frac{(L-1)(L-2)}{3} \leq \left(\frac{L-1}{2}\right)^2.$$

Išsprendus pastarąją nelygybę gauname, kad  $L \leq 5$ . Atskirai nagrinėkime atvejus  $L = 2, 3, 4, 5$ .

Tegul  $L = 2$ . Šiuo atveju

$$g_1 = \frac{1}{2}, \quad g_2 = g_3 = \dots = 0.$$

Naudojant 2.5 lema egzistuoja  $D \geq 2$ , kad

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \#\{p \leq D : f_x(p) = 1\} = \kappa \leq 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{D < p \leq x^{1/2}}^f \frac{1}{p} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{p \leq D}^f \frac{1}{p-1} = \frac{1}{2}. \quad (2.13)$$

Jei  $\kappa = 1$ , tai iš šių samprotavimų ir (H) sąlygos gauname, kad yra galimas tik vienas atvejis

$$f_x(3) = 1$$

dideliems  $x$  ir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{\substack{p \leq x \\ p \neq 3}}^f \frac{1}{p} = 0.$$

Jei  $\kappa = 0$ , tai  $f_x(p) = 0$  kiekvienam fiksuotam  $p$  ir pakankamai dideliems  $x$ . Šiuo atveju (2.13) lygybė nėra teisinga. Iš to išplaukia, kad atvejis  $\kappa = 0$  nėra galimas.

Tegul  $L = 3$ . Tada

$$g_1 = 1, \quad g_2 = \frac{2}{3}, \quad g_3 = g_4 = \dots = 0.$$

Iš 2.5 lemos turime, kad egzistuoja  $D \geq 2$ , su kuriuo teisingos šios sąlygos:

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \#\{p \leq D : f_x(p) = 1\} = \kappa \leq 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{D < p \leq x^{1/3}}^f \frac{1}{p} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{p \leq D}^f \frac{1}{p-1} = 1, \tag{2.14}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{\substack{p_1, p_2 \leq D \\ p_1 \neq p_2}}^f \frac{1}{(p_1-1)(p_2-1)} = \frac{2}{3}. \tag{2.15}$$

Visų pirma, tarkime, kad  $\kappa = 2$ . Iš (2.14) ir (H) sąlygos turime, kad

$$f_x(p_1) = f_x(p_2) = 1$$

dideliems  $x$  ir

$$\frac{1}{p_1-1} + \frac{1}{p_2-1} = 1$$

fiksuotiems pirminiams  $p_1, p_2$ , kai  $p_1 < p_2$ . Kadangi pastaroji lygybė nėra teisinga jokioms skirtingų pirminių  $p_1, p_2$  poroms, tai atvejis  $\kappa = 2$  nėra galimas.

Iš (2.15) lygybės išplaukia, kad atvejai  $\kappa = 1$ ,  $\kappa = 0$  taip pat negalimi.

Tegul  $L = 4$ . Tada

$$g_1 = \frac{3}{2}, \quad g_2 = 2, \quad g_3 = \frac{3}{2}, \quad g_4 = g_5 = \dots = 0.$$

Pagal 2.5 lemą egzistuoja tokia konstanta  $D \geq 2$ , kuriai

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \#\{p \leq D : f_x(p) = 1\} = \kappa \leq 3, \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{D < p \leq x^{1/4}}^f \frac{1}{p} &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{p \leq D}^f \frac{1}{p-1} &= \frac{3}{2},\end{aligned}\tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{\substack{p_1, p_2 \leq D \\ p_1 \neq p_2}}^f \frac{1}{(p_1-1)(p_2-1)} &= 2, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{\substack{p_1, p_2, p_3 \leq D \\ p_i \neq p_j, i \neq j}}^f \frac{1}{(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)} &= \frac{3}{2}.\end{aligned}\tag{2.18}$$

Iš (2.18) išplaukia, kad  $\kappa$  negali būti 0, 1 ir 2.

Tarkime, kad  $\kappa = 3$ . Tuomet iš (2.16) ir (2.17) lygybių matyti, kad egzistuoja tokie fiksuoti pirminiai  $p_1 < p_2 < p_3$ , kuriems  $f_x(p_1) = f_x(p_2) = f_x(p_3) = 1$  dideliems  $x$  ir

$$\frac{1}{p_1-1} + \frac{1}{p_2-1} + \frac{1}{p_3-1} = \frac{3}{2}.\tag{2.19}$$

Tačiau nėra tokių pirminių, kuriems galiotų (2.19) lygybė. Taigi, atvejis  $\kappa = 3$  taip pat nėra įmanomas.

Tarkime, kad  $L = 5$ . Tuomet

$$g_1 = 2, \quad g_2 = 4, \quad g_3 = 6, \quad g_4 = \frac{24}{5}, \quad g_5 = g_6 = \dots = 0.$$

Pagal 2.5 lemą egzistuoja tokia konstanta  $D \geq 2$ , kuriai

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \#\{p \leq D : f_x(p) = 1\} = \kappa \leq 4,$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{D < p \leq x^{1/5}}^f \frac{1}{p} &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{p \leq D}^f \frac{1}{p-1} &= 2, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{\substack{p_1, p_2 \leq D \\ p_1 \neq p_2}}^f \frac{1}{(p_1-1)(p_2-1)} &= 4, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{\substack{p_1, p_2, p_3 \leq D \\ p_i \neq p_j, i \neq j}}^f \frac{1}{(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)} &= 6,\end{aligned}\tag{2.20}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{\substack{p_1, p_2, p_3, p_4 \leq D \\ p_i \neq p_j, i \neq j}}^f \frac{1}{(p_1 - 1)(p_2 - 1)(p_3 - 1)(p_4 - 1)} = \frac{24}{5}. \quad (2.21)$$

Iš (2.21) lygybės gauname, kad  $\kappa$  negali būti lygus 0, 1, 2 ir 3.

Tarkime, kad  $\kappa = 4$ . Tuomet iš (2.20) išplaukia, kad egzistuoja tokie pirminiai  $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$ , kuriems  $f_x(p_1) = f_x(p_2) = f_x(p_3) = f_x(p_4) = 1$  dideliems  $x$  ir

$$\frac{1}{p_1 - 1} + \frac{1}{p_2 - 1} + \frac{1}{p_3 - 1} + \frac{1}{p_4 - 1} = 2.$$

Tačiau

$$\frac{1}{p_1 - 1} + \frac{1}{p_2 - 1} + \frac{1}{p_3 - 1} + \frac{1}{p_4 - 1} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} < 2.$$

Taigi, atvejis  $\kappa = 4$  taip pat neįmanomas.

*Pakankamumas.* Tarkime, kad tenkinama teoremos (2.3) sąlyga bei papildoma (H) sąlyga. (2.5) įvertis išplaukia iš (2.3) sąlygos. Tuomet naudojant 2.4 lemą gauname, kad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \beta(l, x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{\substack{p_1, p_2, \dots, p_l \leq x \\ p_i \neq p_j, i \neq j}}^f \frac{1}{(p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_l - 1)} = 0,$$

jei  $l > 1$  ir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \beta(1, x) = \frac{1}{2}.$$

Imkime

$$\psi_x(t) = \frac{1}{\pi(x)} \sum_{p \leq x} e^{itf_x(p+1)},$$

kai  $x \geq 2$  ir  $t \in \mathbb{R}$ . Kadangi

$$|e^{itr} - 1 - r(e^{it} - 1)| \leq \frac{r(r-1)}{2} |e^{it} - 1|^2$$

visiems  $r \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ , tai turime, kad

$$\psi_x(t) = 1 + \beta(1, x) (e^{it} - 1) + O(\beta(2, x)).$$

Perėję prie ribos paskutinėje lygybėje darome išvadą, kad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \psi_x(t) = \frac{1}{2} (e^{it} + 1).$$

Bet tai ir yra diskretaus tolygiojo skirstinio  $\mathcal{U}(u, 2)$  charakteristinė funkcija.

Taigi, teoremos pakankamumas įrodytas.

2.1 teorema įrodyta.

### 3 Diskretus tolygusis ribinis dėsnis adityviųjų funkcijų sekų sumoms su paslinktais argumentais

Šiame skyriuje pateikiamos stipriai adityviųjų funkcijų sekų sumų su paslinktais argumentais pasiskirstymo funkcijų

$$\nu_x(n \leq x, f_x(n) + g_x(n+1) < u) = \frac{1}{[x]} \sum_{\substack{n \leq x \\ f_x(n) + g_x(n+1) < u}} 1 \quad (3.1)$$

silpnojo konvergavimo į diskretų tolygųjų skirstinį  $\mathcal{U}(u, L)$ ,  $L \in \mathbb{N}$ ,  $L \geq 2$ , būtinos ir pakankamos sąlygos. Teorema buvo įrodyta remiantis faktorialinių momentų bei charakteristinių funkcijų metodais. Taip pat buvo įvesta sąlyga, apribojanti adityviųjų funkcijų elgseną dideliems pirminiams skaičiams ((3.2) sąlyga). Galbūt ši problema yra išsprendžiama kitais metodais (pvz. Kubiliaus modelis ar kt.). Tačiau ir šiais atvejais iškils didelių pirminių skaičių problema.

#### 3.1 Pagrindinis rezultatas ir papildomos lemos

**3.1 teorema.** Tegul  $f_x$  ir  $g_x$ ,  $x \geq 2$ , yra dvi stipriai adityviųjų funkcijų aibės tokios, kad  $f_x(p), g_x(p) \in \{0, 1\}$  visiems pirminiams  $p$ . Be to, tarkime, kad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\log x} \sum_{p \leq x} \frac{(f_x(p) + g_x(p)) \log p}{p} = 0. \quad (3.2)$$

(3.1) pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguoja į diskretų tolygųjų ribinį dėsnį  $\mathcal{U}(u, L)$ , kai  $x \rightarrow \infty$ , tada ir tik tada, kai  $L = 2$  ir

$$f_x(2) + g_x(2) = 1, \quad (3.3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{2 < p \leq x} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} = 0. \quad (3.4)$$

Šios teoremos įrodymas paremtas paskirstymo funkcijų  $\nu_x(f_x(n) + g_x(n+1) < u)$  faktorialinių momentų ribine elgsena. Ji pateikiama 3.2, 3.4, 3.5 lemose.

**3.2 lema** ([34]). Tegul  $f_x$  ir  $g_x$ ,  $x \geq 2$ , yra stipriai adityviųjų funkcijų aibės tokios, kad  $f_x(p)$ ,  $g_x(p) \in \{0, 1\}$  visiems pirminiams  $p$ . Jeigu (3.1) pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguoja į kažkokią pasiskirstymo funkciją, kai  $x \rightarrow \infty$ , tai dydis

$$\phi(x, l) := \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \prod_{k=0}^{l-1} (f_x(n) + g_x(n+1) - k), \quad l = 1, 2, \dots$$

turi baigtinę ribą

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x, l) =: \phi_l, \quad (3.5)$$

čia  $\phi_l$  yra ribinio dėsnio  $l$ -asis faktorialinis momentas. Iš kitos pusės, jei (3.5) riba egzistuoja kiekvienam fiksuotam natūraliajam  $l$  ir eilutė

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{2^l \phi_l}{l!}$$

konverguoja, tai (3.1) pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguoja į kažkokią pasiskirstymo funkciją, kurios charakteristinė funkcija yra

$$1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\phi_l}{l!} (e^{it} - 1)^l. \quad (3.6)$$

**3.3 lema** ([13]). Tegul  $h$  adityvioji funkcija, įgyjanti realiąsias reikšmes. Tuomet įvertis

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ h(n)=a}} 1 \ll x \left( \sum_{\substack{p \leq x \\ h(p) \neq 0}} \frac{1}{p} \right)^{-1/2}$$

teisingas visiems realiesiems skaičiams  $a$  ir  $x \geq 2$ .

**3.4 lema.** Tegul  $f_x$  ir  $g_x$ ,  $x \geq 2$ , yra dvi stipriai adityviųjų funkcijų aibės tokios, kad  $f_x(p)$ ,  $g_x(p) \in \{0, 1\}$  visiems pirminiams  $p$  ir (3.2) sąlyga yra patenkinta. Jeigu (3.1) pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguoja į kažkokią ribinį dėsnį, tai

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \sum_{\substack{p_1, \dots, p_k, p_{k+1}, \dots, p_l \leq x \\ p_i \neq p_j, i \neq j}} \frac{f(p_1) \dots f(p_k) g(p_{k+1}) \dots g(p_l)}{p_1 \dots p_k p_{k+1} \dots p_l} = \phi_l \quad (3.7)$$

visiems fiksuotiems natūraliesiems  $l$ . Be to, ribinis dėsnis turi (3.6) charakteristinę funkciją.



**3.5 lema.** Tegul  $f_x$  ir  $g_x$ ,  $x \geq 2$ , dvi stipriai adityviųjų funkcijų aibės ir  $f_x(p)$ ,  $g_x(p) \in \{0, 1\}$  visiems pirminiams  $p$  bei (3.2) sąlyga yra patenkinama. Jeigu (3.1) pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguoja į pasiskirstymo funkciją  $F_\xi$  su baigtine atrama  $\{0, 1, 2, \dots, L - 1\}$ ,  $L \geq 2$ , tai egzistuoja konstanta  $D \geq 2$  tokia, kad

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \#\{p \leq D : f_x(p) + g_x(p) \neq 0\} \leq L - 1, \quad (3.8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{D < p \leq x} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} = 0, \quad (3.9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \sum_{\substack{p_1, \dots, p_k, p_{k+1}, \dots, p_l \leq D \\ p_i \neq p_j, i \neq j}} \frac{f(p_1) \dots f(p_k) g(p_{k+1}) \dots g(p_l)}{p_1 \dots p_k p_{k+1} \dots p_l} = \phi_l, \quad (3.10)$$

$l = 1, 2, \dots, L - 1$ . Be to, ribinio skirstinio  $F_\xi$  charakteristinė funkcija yra (3.6) ir  $\phi_l = 0$ , kai  $l \geq L$ .

Iš 3.1 teoremos gauname pavyzdį.

**3.1 pavyzdys.** Tegul stipriai adityviosios funkcijos  $f_x$  ir  $g_x$  apibrėžtos taip

$$f_x(p) = \begin{cases} 1, & \text{jei } p = 2 \text{ ir } x \text{ nelyginis,} \\ 0 & \text{kitais atvejais,} \end{cases} \quad g_x(p) = \begin{cases} 1, & \text{jei } p = 2 \text{ ir } x \text{ lyginis,} \\ 0 & \text{kitais atvejais.} \end{cases}$$

Tada

$$\nu_x(f_x(n) + g_x(n + 1) < u) \Rightarrow \mathcal{U}(u, 2), \quad x \rightarrow \infty.$$

## 3.2 Lemų įrodymai

### 3.4 lemos įrodymas

Pirmiausia įrodysime, kad

$$\sum_{p \leq x} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} \ll 1. \quad (3.11)$$

Tarkime, kad (3.1) pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguoja į ribinį skirstinį  $F_\xi$ . Šis ribinis skirstinys yra atsitiktinio dydžio  $\xi$ , įgyjančio sveikąsias reikšmes, skirstinys. Taigi, egzistuoja toks natūralusis  $a$ , kuriam

$$F_\xi(a+) - F_\xi(a) > 0.$$

Tarkime, kad  $a_0$  mažiausias toks sveikasis skaičius. Tuomet

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \nu_x(n \leq x, f_x(n) + g_x(n+1) = a_0) = F_\xi(a_0+) - F_\xi(a_0) > 0.$$

Kadangi

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \nu_x(n \leq x, f_x(n) \leq a_0) \geq \lim_{x \rightarrow \infty} \nu_x(n \leq x, f_x(n) + g_x(n+1) = a_0) > 0,$$

tai tam tikram sveikajam  $a_1$ ,  $0 \leq a_1 \leq a_0$  turime

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \nu_x(n \leq x, f_x(n) = a_1) > 0.$$

Iš šios nelygybės ir 3.3 lemos išplaukia, kad

$$\sum_{p \leq x} \frac{f_x(p)}{p} \ll 1.$$

Atitinkamai galime įvertinti funkcijos  $g_x$  elgseną. Taigi, (3.11) nelygybė yra teisinga.

Tegul  $\delta$  fiksuotas, teigiamas ir pakankamai mažas skaičius. Apibrėžkime dvi naujas, stipriai adityvias funkcijas  $\tilde{f}_x$  ir  $\tilde{g}_x$  taip:

$$\tilde{f}_x(p) := \begin{cases} f_x(p), & \text{jei } p \leq x^\delta, \\ 0, & \text{jei } p > x^\delta, \end{cases} \quad \tilde{g}_x(p) := \begin{cases} g_x(p), & \text{jei } p \leq x^\delta, \\ 0, & \text{jei } p > x^\delta. \end{cases}$$

Kiekvienam  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} & \nu_x(n \leq x, |f_x(n) + g_x(n+1) - \tilde{f}_x(n) - \tilde{g}_x(n+1)| > \varepsilon) \\ & \leq \nu_x\left(n \leq x, |f_x(n) - \tilde{f}_x(n)| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + \nu_x\left(n \leq x, |g_x(n+1) - \tilde{g}_x(n+1)| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ & \leq \nu_x(n \leq x, \exists p|n : f_x(p) \neq \tilde{f}_x(p)) + \nu_x(n \leq x, \exists p|n+1 : g_x(p) \neq \tilde{g}_x(p)) \\ & \ll \sum_{x^\delta < p \leq x} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p}. \quad (3.12) \end{aligned}$$

Bet iš (3.2) sąlygos gauname, kad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{x^\delta < p \leq x} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} = 0. \quad (3.13)$$

Tai reiškia, kad (3.1) pasiskirstymo funkcijos ir pasiskirstymo funkcijos

$$\nu_x \left( \tilde{f}_x(n) + \tilde{g}_x(n+1) < u \right) \quad (3.14)$$

konverguoja į tą patį ribinį skirstinį ir šių ribinių skirstinių faktorialiniai momentai sutampa.

Tegul  $l$  fiksuotas skaičius. Iš (3.14) skirstinių faktorialinių metodų turime, kad

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(x, l) &= \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \prod_{k=0}^{l-1} \left( \tilde{f}_x(n) + \tilde{g}_x(n+1) - k \right) \\ &= \frac{1}{x} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \sum_{n \leq x} \tilde{f}_x(n) (\tilde{f}_x(n) - 1) \dots (\tilde{f}_x(n) - (k-1)) \\ &\quad \times \tilde{g}_x(n+1) (\tilde{g}_x(n+1) - 1) \dots (\tilde{g}_x(n+1) - (l-k-1)). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Naudojant funkcijų  $\tilde{f}_x$  ir  $\tilde{g}_x$  adityvumą (3.15) lygybės vidinę sumą galime perrašyti taip

$$\sum_{\substack{p_1, \dots, p_k, p_{k+1}, \dots, p_l \leq x^\delta \\ p_i \neq p_j, i \neq j}} \sum_{\substack{n \leq x \\ p_1 \dots p_k | n \\ p_{k+1} \dots p_l | n+1}} f(p_1) \dots f(p_k) g(p_{k+1}) \dots g(p_l),$$

kuri yra lygi

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{p_1, \dots, p_k, p_{k+1}, \dots, p_l \leq x^\delta \\ p_i \neq p_j, i \neq j}} \left( \frac{f(p_1) \dots f(p_k) g(p_{k+1}) \dots g(p_l)}{p_1 \dots p_k p_{k+1} \dots p_l} + O\left(\frac{1}{x}\right) \right) \\ &= \sum_{\substack{p_1, \dots, p_k, p_{k+1}, \dots, p_l \leq x^\delta \\ p_i \neq p_j, i \neq j}} \frac{f(p_1) \dots f(p_k) g(p_{k+1}) \dots g(p_l)}{p_1 \dots p_k p_{k+1} \dots p_l} + O\left(\frac{x^{l\delta}}{x \log^l x}\right). \end{aligned}$$

Taigi, turime, kad

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(x, l) &= \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \sum_{\substack{p_1, \dots, p_k, p_{k+1}, \dots, p_l \leq x \\ p_i \neq p_j, i \neq j}} \frac{f(p_1) \dots f(p_k) g(p_{k+1}) \dots g(p_l)}{p_1 \dots p_k p_{k+1} \dots p_l} \\ &\quad + O\left( \sum_{x^\delta < p \leq x} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} \left( \sum_{p \leq x} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} \right)^{l-1} \right) + O\left(\frac{x^{l\delta}}{x \log^l x}\right). \end{aligned}$$

Pasirinkus  $\delta \leq 1/l$  iš (3.11) ir (3.13) gauname (3.7). 3.4 lema įrodyta.

### 3.5 lemos įrodymas

Šios lemos įrodymas panašus į 4 išvados iš [31] būtinumo įrodymą.

Remiantis 3.4 lema (3.7) lygybė galioja kiekvienam natūraliajam  $l$ . Tegul  $d \geq 2$  fiksuotas natūralusis skaičius. Jeigu  $x/d^{L-1} > d$ , tai iš (3.7) lygybės turime, kad

$$\phi_L \geq \limsup_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^L \binom{L}{k} \sum_{\substack{p_1, \dots, p_k, p_{k+1}, \dots, p_L \leq d \\ p_i \neq p_j, i \neq j}} \frac{f(p_1) \dots f(p_k) g(p_{k+1}) \dots g(p_L)}{p_1 \dots p_k p_{k+1} \dots p_L}.$$

Darant prielaidą, kad

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \#\{p \leq d : f_x(p) + g_x(p) \neq 0\} \geq L,$$

gauname prieštarą sąlygai  $\phi_L = 0$ . Todėl

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \#\{p \leq d : f_x(p) + g_x(p) \neq 0\} \leq L - 1$$

kiekvienam fiksuotam, natūraliajam  $d$ . Imkime

$$a_d = \limsup_{x \rightarrow \infty} \#\{p \leq d : f_x(p) + g_x(p) \neq 0\}.$$

Seka  $a_d$  ( $d \geq 2$ ) įgyja sveikąsias reikšmes, yra nemažėjanti ir aprėžta.

Vadinasi, egzistuoja natūralusis  $D \geq 2$ , kad

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \#\{p \leq D : f_x(p) + g_x(p) \neq 0\} = a_d,$$

kai  $d \geq D$ . Kadangi  $a_d \leq L - 1$  visiems natūraliesiems  $d$ , tai gauname (3.8) sąlygą.

Kita vertus, iš šių samprotavimų išplaukia, kad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f_x(p) + g_x(p)) = 0$$

visiems fiksuotiems pirminiams  $p > D$ . Taigi,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \max_{D < p \leq x} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} = 0. \quad (3.16)$$

Pagal (3.11) ir (3.16) kiekvienai porai  $i, j, 1 \leq i < j \leq L$ , turime, kad

$$\sum_{\substack{D < p_1, \dots, p_k, p_{k+1}, \dots, p_L \leq x \\ p_i = p_j}} \frac{f(p_1) \dots f(p_k) g(p_{k+1}) \dots g(p_L)}{p_1 \dots p_k p_{k+1} \dots p_L} \\ \leq \max_{D < p \leq x} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} \left( \sum_{p \leq x} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} \right)^{L-1} \rightarrow 0,$$

kai  $x \rightarrow \infty$ . Iš čia ir (3.7) lygybės turime, kad

$$\phi_L \geq \limsup_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^L \binom{L}{k} \left( \sum_{D < p \leq x} \frac{f_x(p)}{p} \right)^k \left( \sum_{D < p \leq x} \frac{g_x(p)}{p} \right)^{L-k}.$$

Taigi, iš sąlygos  $\phi_L = 0$  išplaukia (3.9).

Paskutinė (3.10) lemos sąlyga išplaukia iš (3.7) ir (3.9) lygybės. 3.5 lema įrodyta.

### 3.3 Pagrindinio rezultato įrodymas

*Būtinumas.* Tarkime, kad

$$\nu_x(f_x(n) + g_x(n+1) < u) \Rightarrow \mathcal{U}(u, L),$$

kai  $x \rightarrow \infty$ , su parametru  $L \geq 2$ . Diskretaus tolygiojo skirstinio atveju turime, kad ribinio skirstinio faktorialiniai momentai yra

$$\phi_k = \frac{(L-1)(L-2) \dots (L-k)}{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, L-1, \\ \phi_k = 0, \quad k = L, L+1, \dots$$

Iš (3.7) išplaukia, kad

$$\phi_2 \leq \phi_1^2.$$

Todėl

$$\frac{(L-1)(L-2)}{3} \leq \left( \frac{L-1}{2} \right)^2.$$

Iš čia gauname, kad  $L \leq 5$ .

Pagal 3.5 lemą turime, kad fiksuotiems  $D \geq 2$  teisingos šios sąlygos :

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \#\{p \leq D : f_x(p) + g_x(p) \neq 0\} =: \kappa \leq L - 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{D < p \leq x} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} = 0.$$

Atskirai nagrinėsime atvejus  $L = 2, 3, 4, 5$ .

Tegul  $L = 2$ . Šiuo atveju  $\kappa \leq 1$ ,

$$\phi_1 = \frac{1}{2}, \quad \phi_2 = \phi_3 = \dots = 0.$$

Iš 3.5 lemos turime, kad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{p \leq D} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} = \frac{1}{2}. \quad (3.17)$$

Jei  $\kappa = 1$ , tai iš šių samprotavimų gauname, kad yra galimas tik vienas atvejis:

$$f_x(2) + g_x(2) = 1$$

dideliems  $x$  ir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{2 < p \leq x} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} = 0.$$

Jei  $\kappa = 0$ , tai  $f_x(p) + g_x(p) = 0$  kiekvienam fiksuotam pirminiam  $p$  ir pakankamai dideliems  $x$ . Šiuo atveju (3.17) lygybė nėra teisinga. Iš to išplaukia, kad atvejis  $\kappa = 0$  nėra galimas.

Tegul  $L = 3$ . Tada  $\kappa \leq 2$ ,

$$\phi_1 = 1, \quad \phi_2 = \frac{2}{3}, \quad \phi_3 = \phi_4 = \dots = 0.$$

Iš 3.5 lemos turime, kad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{p \leq D} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} = 1, \quad (3.18)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{\substack{p_1, p_2 \leq D \\ p_1 \neq p_2}} \frac{f_x(p_1)f_x(p_2) + 2f_x(p_1)g_x(p_2) + g_x(p_1)g_x(p_2)}{p_1 p_2} = \frac{2}{3}. \quad (3.19)$$

Visų pirma, tarkime, kad  $\kappa = 2$ . Nėra tokių dviejų skirtingų pirminių  $p_1, p_2 \leq D$ , kuriems  $f_x(p_i) + g_x(p_i) \neq 0$ ,  $i = 1, 2$ . Taigi, (3.18) sąlyga nėra tenkinama.

Atvejams  $\kappa = 1$  ir  $\kappa = 0$  (3.19) sąlyga nėra išpildyta.

Tegul  $L = 4$ . Tada  $\kappa \leq 3$ ,

$$\phi_1 = \frac{3}{2}, \quad \phi_2 = 2, \quad \phi_3 = \frac{3}{2}, \quad \phi_4 = \phi_5 = \dots = 0.$$

Iš 3.5 lemos turime, kad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{p \leq D} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} = \frac{3}{2}, \quad (3.20)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{\substack{p_1, p_2 \leq D \\ p_1 \neq p_2}} \frac{f_x(p_1)f_x(p_2) + 2f_x(p_1)g_x(p_2) + g_x(p_1)g_x(p_2)}{p_1 p_2} = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{\substack{p_1, p_2, p_3 \leq D \\ p_1 \neq p_2, p_1 \neq p_3, p_2 \neq p_3}} \left( \frac{f_x(p_1)f_x(p_2)f_x(p_3) + 3f_x(p_1)f_x(p_2)g_x(p_3)}{p_1 p_2 p_3} + \frac{3f_x(p_1)g_x(p_2)g_x(p_3) + g_x(p_1)g_x(p_2)g_x(p_3)}{p_1 p_2 p_3} = \frac{3}{2} \right). \quad (3.21)$$

Iš (3.21) lygybės išplaukia, kad  $\kappa$  negali įgyti reikšmių 0, 1, ir 2.

Tarkime, kad  $\kappa = 3$ . Tuomet turi egzistuoti trys skirtingi pirminiai skaičiai  $p_1, p_2, p_3 \leq D$ , kuriems  $f_x(p_i) + g_x(p_i) \neq 0$ . Tačiau nėra tokių pirminių, kad (3.20) lygybė būtų teisinga.

Tarkime  $L = 5$ . Tuomet  $\kappa \leq 4$ ,

$$\phi_1 = 2, \quad \phi_2 = 4, \quad \phi_3 = 6, \quad \phi_4 = \frac{24}{5}, \quad \phi_5 = \phi_6 = \dots = 0.$$

Iš 3.5 lemos turime, kad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{p \leq D} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} = 2, \quad (3.22)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{\substack{p_1, p_2 \leq D \\ p_1 \neq p_2}} \frac{f_x(p_1)f_x(p_2) + 2f_x(p_1)g_x(p_2) + g_x(p_1)g_x(p_2)}{p_1 p_2} = 4,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{\substack{p_1, p_2, p_3 \leq D \\ p_1 \neq p_2, p_1 \neq p_3, p_2 \neq p_3}} \left( \frac{f_x(p_1)f_x(p_2)f_x(p_3) + 3f_x(p_1)f_x(p_2)g_x(p_3)}{p_1 p_2 p_3} + \frac{3f_x(p_1)g_x(p_2)g_x(p_3) + g_x(p_1)g_x(p_2)g_x(p_3)}{p_1 p_2 p_3} = 6 \right), \quad (3.23)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} \sum_{\substack{p_1, p_2, p_3, p_4 \leq D \\ p_i \neq p_j, i \neq j}} \frac{f(p_1) \dots f(p_k) g(p_{k+1}) \dots g(p_4)}{p_1 p_2 p_3 p_4} = \frac{24}{5}. \quad (3.24)$$

Iš (3.24) lygybės išplaukia, kad  $\kappa$  negali būti lygus 0, 1, 2 ir 3.

Atvejis  $\kappa = 4$  nėra galimas dėl (3.22) lygybės. Teoremos būtinumas įrodytas.

*Pakankamumas.* Iš teoremos (3.4) sąlygos išplaukia, kad (3.11) ir (3.13) sąlygos yra teisingos. Tuomet iš (3.12) turime, kad, konvergavimo atveju (3.1) ir (3.14) skirstiniai silpnai konverguoja į tą patį ribinį skirstinį. Todėl užtenka nagrinėti (3.14) skirstinio faktorialinių momentų  $\tilde{\phi}(x, l)$  konvergavimą.

Iš (3.3), (3.4) ir (3.15) gauname, kad

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{\phi}(x, l) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \sum_{\substack{p_1, \dots, p_k, p_{k+1}, \dots, p_l \leq x \\ p_i \neq p_j, i \neq j}} \frac{f(p_1) \dots f(p_k) g(p_{k+1}) \dots g(p_l)}{p_1 \dots p_k p_{k+1} \dots p_l} = 0, \end{aligned}$$

kai  $l = 2, 3, \dots$  ir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{\phi}(x, 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{p \leq x} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} = \frac{f_x(2) + g_x(2)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Iš 3.2 lemos išplaukia, kad (3.1) skirstiniai silpnai konverguoja į diskretų tolygųjį skirstinį  $\mathcal{U}(u, 2)$ . Teorema įrodyta.



## 4 Diskretus tolygusis ribinis dėsnis adityviųjų funkcijų sekų sumoms su paslinktais pirminiais

Šiame skyriuje pateikiamos stipriai adityviųjų funkcijų sekų sumų su paslinktais pirminiais pasiskirstymo funkcijų

$$\nu_x(p \leq x, f_x(p+1) + g_x(p+2) < u) = \frac{1}{\pi(x)} \sum_{\substack{p \leq x \\ f_x(p+1) + g_x(p+2) < u}} 1 \quad (4.1)$$

silpnąjį konvergavimą į diskretų tolygųjį skirstinį  $\mathcal{U}(u, L)$ ,  $L \in \mathbb{N}$ ,  $L \geq 2$ , būtinos ir pakankamos sąlygos. Kaip ankstesniuose skyriuose, teorema buvo įrodyta remiantis faktorialinių momentų bei charakteristinių funkcijų metodais. Šiems skirstiniams taip pat buvo įvesta sąlyga apribojanti adityviųjų funkcijų elgseną dideliems pirminiams skaičiams ((4.2) sąlyga).

### 4.1 Pagrindinis rezultatas ir papildomos lemos

**4.1 teorema.** Tegul  $f_x$  ir  $g_x$ ,  $x \geq 2$ , yra dvi stipriai adityviųjų funkcijų aibės. Tarkime, kad  $f_x(p)$ ,  $g_x(p) \in \{0, 1\}$  visiems pirminiams  $p$  ir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log x \sum_{x^\gamma < p \leq x} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} = 0 \quad (4.2)$$

kiekvienam  $\gamma \in (0, 1)$ . (4.1) pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguoja į ribinį diskretų tolygųjį skirstinį  $\mathcal{U}(u, L)$ , kai  $x \rightarrow \infty$ , tada ir tik tada, kai  $L = 2$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{\substack{p \leq x \\ p \neq 3, 5}} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} = 0 \quad (4.3)$$

ir kiekvienam pakankamai dideliame  $x$  galimas vienas iš atvejų

$$f_x(3) + g_x(3) = 1 \text{ ir } f_x(5) + g_x(5) = 0 \quad (4.4)$$

arba

$$f_x(3) + g_x(3) = 0 \text{ ir } f_x(5) + g_x(5) = 2. \quad (4.5)$$

Teoremos įrodymas remiasi toliau pateiktomis lemomis.

**4.2 lema** ([2]). *Tegul  $K$  teigiamas realusis skaičius. Tada egzistuoja toks realusis skaičius  $L$ , kad tolygiai visiems  $x \geq 2$*

$$\sum_{d \leq x^{1/2} (\log x)^{-L}} \max_{(d,v)=1} \left| \pi(x, d, v) - \frac{\text{li } x}{\phi(d)} \right| \ll \frac{x}{(\log x)^K}.$$

**4.3 lema** ([35]). *Tegul  $f_x$  ir  $g_x$ ,  $x \geq 2$ , dvi stipriai adityviųjų funkcijų aibės, tokios, kad  $f_x(p), g_x(p) \in \{0, 1\}$  visiems pirminiams  $p$  ir*

$$\sum_{p \leq x} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} \leq c. \quad (4.6)$$

*Taip pat tegul natūraliesiems  $l$*

$$\begin{aligned} \beta(l, x) &:= \frac{1}{\pi(x)} \sum_{p \leq x} (f_x(p+1) + g_x(p+2)) \\ &\times (f_x(p+1) + g_x(p+2) - 1) \dots (f_x(p+1) + g_x(p+2) - l + 1). \end{aligned}$$

*Tuomet*

$$\beta(l, x) \ll_{l,c} 1.$$

**4.4 lema.** *Tegul  $f_x$  ir  $g_x$ ,  $x \geq 2$ , dvi stipriai adityviųjų funkcijų aibės tokios, kad  $f_x(p), g_x(p) \in \{0, 1\}$  visiems pirminiams  $p$  ir tegul (4.6) nelygybė patenkinta. Jeigu (4.1) pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguoja į kažkokią pasiskirstymo funkciją  $F(u)$ , kai  $x \rightarrow \infty$ , tai*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \beta(l, x) = \beta_l, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (4.7)$$

*čia  $\beta_l$  yra ribinio dėsnio  $l$ -asis faktorialinis momentas.*

**4.5 lema.** *Tegul stipriai adityviųjų funkcijų aibėms  $f_x$  ir  $g_x$  galioja 4.1 teoremos sąlygos ir (4.6) nelygybė patenkinta. Jeigu (4.1) pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguoja į kažkokią pasiskirstymo funkciją  $F(u)$ , kai  $x \rightarrow \infty$ , tai*

$$\beta_l = \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \sum_{\substack{p_1, p_2, \dots, p_l \leq x \\ p_i \neq p_j, i \neq j}} \frac{f_x(p_1) \dots f_x(p_k) g_x(p_{k+1}) \dots g_x(p_l)}{\phi(p_1 p_2 \dots p_l)}. \quad (4.8)$$

**4.6 lema.** Tegul  $f_x$  ir  $g_x$ ,  $x \geq 2$ , dvi stipriai adityviųjų funkcijų aibės tokios, kad  $f_x(p)$ ,  $g_x(p) \in \{0, 1\}$  visiems pirminiams  $p$  ir tegul (4.2) sąlyga patenkinta. Jeigu (4.1) pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguoja į atsitiktinio dydžio  $\xi$  pasiskirstymo funkciją  $F_\xi$  su baigtine atrama  $\{0, 1, \dots, L - 1\}$ ,  $L \geq 2$ , tai egzistuoja konstanta  $D \geq 2$  tokia, kad

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \#\{p \leq D : f_x(p) + g_x(p) \neq 0\} \leq L - 1, \quad (4.9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{D < p \leq x} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} = 0, \quad (4.10)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \sum_{\substack{p_1, \dots, p_k, p_{k+1}, \dots, p_l \leq D \\ p_i \neq p_j, i \neq j}} \frac{f(p_1) \dots f(p_k) g(p_{k+1}) \dots g(p_l)}{\phi(p_1 p_2 \dots p_l)} = \beta_l, \quad (4.11)$$

$l = 1, 2, \dots, L - 1$ . Be to, ribinio dėsnio  $F_\xi$  charakteristinė funkcija yra lygi

$$1 + \sum_{l=1}^{L-1} \frac{\beta_l}{l!} (e^{it} - 1)^l.$$

Iš 4.1 teoremos išplaukia pavyzdys.

**4.1 pavyzdys.** Tegul

$$f_x(p) = \begin{cases} 1, & \text{jei } p = 3 \text{ ir } x \text{ nelyginis,} \\ 0, & \text{jei } p = 3 \text{ ir } x \text{ lyginis,} \\ 0, & \text{jei } p = 5 \text{ ir } x \text{ nelyginis,} \\ 1, & \text{jei } p = 5 \text{ ir } x \text{ lyginis,} \\ 0 & \text{kitais atvejais,} \end{cases} \quad g_x(p) = \begin{cases} 0, & \text{jei } p = 3, \\ 0, & \text{jei } p = 5 \text{ ir } x \text{ nelyginis,} \\ 1, & \text{jei } p = 5 \text{ ir } x \text{ lyginis,} \\ 0 & \text{kitais atvejais.} \end{cases}$$

Tuomet

$$\nu_x(f_x(p+1) + g_x(p+2) < u) \Rightarrow \mathcal{U}(u, 2), \quad x \rightarrow \infty.$$

## 4.2 Lemų įrodymai

### 4.4 lemos įrodymas

Kiekvienam  $k \geq l + 2$  teisingas įvertis

$$\begin{aligned} \beta(l+2, x) &= \frac{1}{\pi(x)} \sum_{\substack{p \leq x \\ h(p)=m}} \sum_{m=l+2}^{\infty} m(m-1) \dots (m-l-1) \\ &\geq \frac{1}{\pi(x)} k(k-1) \dots (k-l-1) \sum_{\substack{p \leq x \\ h(p)=m}} 1. \end{aligned}$$

Naudojant 4.3 lemą bei šį įvertį, gauname, kad

$$\frac{1}{\pi(x)} \sum_{\substack{p \leq x \\ f_x(p+1)+g_x(p+2)=k}} 1 \leq \frac{\beta(l+2, x)}{k(k-1) \dots (k-l-1)} \ll_l \frac{1}{k(k-1) \dots (k-l-1)}.$$

Todėl

$$F(k+) - F(k) = \lim_{x \rightarrow \infty} \nu_x(f_x(p+1) + g_x(p+2) = k) \ll_l \frac{1}{k(k-1) \dots (k-l-1)} \quad (4.12)$$

kiekvienam  $k \geq l + 2$  ir riba

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=l}^K k(k-1) \dots (k-l+1) (F(k+) - F(k)) = \beta_l \quad (4.13)$$

egzistuoja.

Fiksuokime  $l \in \mathbb{N}$ , pasirinkime  $K > l + 2$  ir padalinkime  $\beta(l, x)$  į dvi sumas:

$$\begin{aligned} \beta(l, x) &= \frac{1}{\pi(x)} \sum_{\substack{p \leq x \\ 1 \leq f_x(p+1) + g_x(p+2) \leq K}} (f_x(p+1) + g_x(p+2)) \\ &\quad \times (f_x(p+1) + g_x(p+2) - 1) \dots (f_x(p+1) + g_x(p+2) - l + 1) \\ &+ \frac{1}{\pi(x)} \sum_{\substack{p \leq x \\ f_x(p+1) + g_x(p+2) > K}} (f_x(p+1) + g_x(p+2)) (f_x(p+1) + g_x(p+2) - 1) \dots \\ &\quad \times (f_x(p+1) + g_x(p+2) - l + 1) \frac{f_x(p+1) + g_x(p+2) - l}{f_x(p+1) + g_x(p+2) - l}. \end{aligned}$$

Pertvarkome  $\beta(l, x)$  išraišką ir, pasinaudoję 4.3 lema, gauname

$$\begin{aligned} \beta(l, x) &= \sum_{k=l}^K k(k-1) \dots (k-l+1) \frac{1}{\pi(x)} \sum_{\substack{p \leq x \\ f_x(p+1) + g_x(p+2) = k}} 1 + O\left(\frac{\beta(l+1, x)}{K-l}\right) \\ &= \sum_{k=l}^K k(k-1) \dots (k-l+1) (F(k+) - F(k)) + \varepsilon_{K,l}(x) + O_l\left(\frac{1}{K-l}\right). \end{aligned}$$

Iš (4.12) ir (4.13) išplaukia, kad

$$\begin{aligned}\beta(l, x) &= \beta_l - \sum_{k=K+1}^{\infty} k(k-1) \dots (k-l+1)(F(k+)-F(k)) + \varepsilon_{K,l}(x) + O_l\left(\frac{1}{K-l}\right) \\ &= \beta_l + O_l\left(\sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{(k-l)(k-l-1)}\right) + \varepsilon_{K,l}(x) + O_l\left(\frac{1}{K}\right) \\ &= \beta_l + \varepsilon_{K,l}(x) + O_l\left(\frac{1}{K}\right).\end{aligned}$$

Paskutinėje lygybėje perėjus prie ribos, kai  $x$  artėja į begalybę, tada  $K$  artėja į begalybę, gauname (4.7) sąryšį. 4.4 lema įrodyta.

#### 4.5 lemos įrodymas

Tegul  $\hat{f}_x$  ir  $\hat{g}_x$  yra dvi naujos stipriai adityviosios funkcijos, apibrėžtos lygybėmis:

$$\hat{f}_x(p) = \begin{cases} f_x(p), & \text{jei } p \leq x^\delta, \\ 0, & \text{jei } p > x^\delta, \end{cases} \quad \hat{g}_x(p) = \begin{cases} g_x(p), & \text{jei } p \leq x^\delta, \\ 0, & \text{jei } p > x^\delta, \end{cases}$$

čia konstanta  $\delta > 0$  yra mažas dydis ir bus pasirinktas vėliau. Kiekvienam teigiamam  $\varepsilon$

$$\begin{aligned}&\nu_x\left(|f_x(p+1) + g_x(p+2) - \hat{f}_x(p+1) - \hat{g}_x(p+2)| > \varepsilon\right) \\ &\leq \nu_x\left(|f_x(p+1) - \hat{f}_x(p+1)| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + \nu_x\left(|g_x(p+2) - \hat{g}_x(p+2)| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &\leq \nu_x(\exists q|p+1 : f_x(q) \neq \hat{f}_x(q)) + \nu_x(\exists q|p+2 : g_x(q) \neq \hat{g}_x(q)). \quad (4.14)\end{aligned}$$

Dešniosios pusės pirmasis dėmuo neviršija

$$\frac{1}{\pi(x)} \sum_{x^\delta < q \leq x+1} \sum_{\substack{p \leq x \\ q|p+1}} f_x(q) \ll \log x \left( \sum_{x^\delta < q \leq x} \frac{f_x(q)}{q} + \frac{1}{x} \right).$$

Analogiškas įvertis yra ir (4.14) antrojo dešniosios pusės dėmens. Tuomet

$$\begin{aligned}&\nu_x\left(|f_x(p+1) + g_x(p+2) - \hat{f}_x(p+1) - \hat{g}_x(p+2)| > \varepsilon\right) \\ &\ll \log x \left( \sum_{x^\delta < q \leq x} \frac{f_x(q) + g_x(q)}{q} + \frac{1}{x} \right) = \varepsilon_\delta(x), \quad (4.15)\end{aligned}$$

nes (4.2) sąlyga galioja. Tai reiškia, kad

$$\nu_x \left( \hat{f}_x(p+1) + \hat{g}_x(p+2) < u \right) \Rightarrow F(u), \quad \text{kai } x \rightarrow \infty.$$

Taigi, faktorialiniai momentai  $\beta(l, x)$  ir

$$\hat{\beta}(l, x) := \frac{1}{\pi(x)} \sum_{p \leq x} \prod_{k=0}^{l-1} \left( \hat{f}_x(p+1) + \hat{g}_x(p+2) - k \right)$$

turi tą pačią ribą  $\beta_l$ ,  $l = 1, 2, \dots$

Fiksuokime  $l \in \mathbb{N}$ . Iš žinomų kombinatorikos lygybių išplaukia, kad

$$\begin{aligned} \hat{\beta}(l, x) &= \frac{1}{\pi(x)} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \sum_{p \leq x} \hat{f}_x(p+1) (\hat{f}_x(p+1) - 1) \dots (\hat{f}_x(p+1) - k + 1) \\ &\quad \times \hat{g}_x(p+2) (\hat{g}_x(p+2) - 1) \dots (\hat{g}_x(p+2) - (l - k) + 1). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Funkcijų  $\hat{f}_x$  ir  $\hat{g}_x$  stiprus adityvumas reiškia, kad

$$\begin{aligned} &\hat{f}_x(p+1) (\hat{f}_x(p+1) - 1) \dots (\hat{f}_x(p+1) - k + 1) \\ &\quad \times \hat{g}_x(p+2) (\hat{g}_x(p+2) - 1) \dots (\hat{g}_x(p+2) - (l - k) + 1) \\ &= \sum_{\substack{q_1 q_2 \dots q_k | p+1 \\ q_{k+1} q_{k+2} \dots q_l | p+2 \\ q_i \neq q_j, i \neq j}} \hat{f}_x(q_1) \hat{f}_x(q_2) \dots \hat{f}_x(q_k) \hat{g}_x(q_{k+1}) \hat{g}_x(q_{k+2}) \dots \hat{g}_x(q_l). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Sveikiesiems skaičiams  $k_1$  ir  $k_2$

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ k_1 | p+1 \\ k_2 | p+2}} 1 = \pi(x, k_1 k_2, v),$$

čia  $v$  toks vienintelis sveikasis skaičius, kuriam

$$v \equiv -2 \pmod{k_1}, \quad v \equiv -1 \pmod{k_2} \quad \text{ir} \quad 1 \leq v \leq k_1 k_2 - 1.$$

Pasirinkime  $\delta = 1/(3l)$ . Iš (4.16) ir (4.17) turime

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}(l, x) &= \frac{1}{\pi(x)} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \sum_{\substack{q_1, q_2, \dots, q_l \leq x^\delta \\ q_i \neq q_j, i \neq j}} f_x(q_1) \dots f_x(q_k) \\
&\quad \times g_x(q_{k+1}) \dots g_x(q_l) \pi(x, q_1 q_2 \dots q_l, v) \\
&= \frac{\text{li } x}{\pi(x)} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \sum_{\substack{q_1, q_2, \dots, q_l \leq x^\delta \\ q_i \neq q_j, i \neq j}} \frac{f_x(q_1) \dots f_x(q_k) g_x(q_{k+1}) \dots g_x(q_l)}{\phi(q_1 q_2 \dots q_l)} \\
&\quad + \frac{1}{\pi(x)} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \sum_{\substack{q_1, q_2, \dots, q_l \leq x^\delta \\ q_i \neq q_j, i \neq j}} f_x(q_1) \dots f_x(q_k) g_x(q_{k+1}) \dots g_x(q_l) \\
&\quad \times \left( \pi(x, q_1 q_2 \dots q_l, v) - \frac{\text{li } x}{\phi(q_1 q_2 \dots q_l)} \right) =: S_1 + S_2.
\end{aligned}$$

Sumai  $S_2$  įvertinti taikome 4.2 lema:

$$S_2 \ll_l \frac{1}{\pi(x)} \sum_{\substack{q_1, q_2, \dots, q_l \leq x^\delta \\ q_i \neq q_j, i \neq j}} \left| \pi(x, q_1 q_2 \dots q_l, v) - \frac{\text{li } x}{\phi(q_1 q_2 \dots q_l)} \right| \ll_l \frac{1}{\log x}.$$

Naudojant žinomus įverčius gauname

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \sum_{\substack{q_1, q_2, \dots, q_l \leq x^\delta \\ q_i \neq q_j, i \neq j}} \frac{f_x(q_1) \dots f_x(q_k) g_x(q_{k+1}) \dots g_x(q_l)}{\phi(q_1 q_2 \dots q_l)} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right) \right) \\
&= \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \sum_{\substack{q_1, q_2, \dots, q_l \leq x^\delta \\ q_i \neq q_j, i \neq j}} \frac{f_x(q_1) \dots f_x(q_k) g_x(q_{k+1}) \dots g_x(q_l)}{\phi(q_1 q_2 \dots q_l)} \\
&\quad + O_l \left( \frac{1}{\log x} \left( \sum_{q \leq x} \frac{f_x(q) + g_x(q)}{q} \right)^l \right) \\
&= \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \sum_{\substack{q_1, q_2, \dots, q_l \leq x \\ q_i \neq q_j, i \neq j}} \frac{f_x(q_1) \dots f_x(q_k) g_x(q_{k+1}) \dots g_x(q_l)}{\phi(q_1 q_2 \dots q_l)} \\
&\quad + O_l \left( \sum_{\substack{q_1, q_2, \dots, q_l \leq x \\ \max(q_1, \dots, q_l) > x^\delta}} \frac{f_x(q_1) \dots f_x(q_k) g_x(q_{k+1}) \dots g_x(q_l)}{q_1 q_2 \dots q_l} \right) + \varepsilon_l(x).
\end{aligned}$$

Iš (4.2) ir (4.6) sąlygų turime

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{q_1, q_2, \dots, q_l \leq x \\ \max(q_1, \dots, q_l) > x^\delta}} \frac{f_x(q_1) \dots f_x(q_k) g_x(q_{k+1}) \dots g_x(q_l)}{q_1 q_2 \dots q_l} \\
&\ll_l \sum_{x^\gamma < q \leq x} \frac{f_x(q) + g_x(q)}{q} \left( \sum_{q \leq x} \frac{f_x(q) + g_x(q)}{q} \right)^l \ll_l \frac{1}{\log x}.
\end{aligned}$$

4.5 lema įrodyta.

#### 4.6 lemos įrodymas

Lemos įrodymas panašus į 4 išvados iš [31] būtinumo įrodymą.

Iš lemos sąlygų gauname, kad egzistuoja toks  $k \in \{0, 1, \dots, L - 1\}$ , kuriam

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \nu_x(f_x(p+1) + g_x(p+2) = k) = F_\xi(k+) - F_\xi(k) \geq c.$$

Iš to išplaukia, kad

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \nu_x(f_x(p+1) \in \{0, 1, \dots, k\}) \geq \lim_{x \rightarrow \infty} \nu_x(f_x(p+1) + g_x(p+2) = k) \geq c.$$

Iš 2.2 lemos matyti, kad

$$\nu_x(f_x(p+1) = a) \ll \left(4 + \sum_{p \leq x} \frac{f_x(p)}{p}\right)^{-1/2},$$

kai  $a = 0, 1, \dots, k$ . Todėl

$$\nu_x(f_x(p+1) \in \{0, 1, \dots, k\}) \ll_k \left(4 + \sum_{p \leq x} \frac{f_x(p)}{p}\right)^{-1/2}.$$

Iš pastarojo įvertio gauname, kad

$$\sum_{p \leq x} \frac{f_x(p)}{p} \ll 1.$$

Analogiškai gauname

$$\sum_{p \leq x} \frac{g_x(p)}{p} \ll 1.$$

(4.6) lygybė yra patenkinta.

Tuomet pagal 4.5 lemą, (4.8) lygybė galioja. Tegul  $d \geq 2$  fiksuotas natūralusis skaičius. Jeigu  $x/d^{L-1} > d$ , tai iš (4.8) lygybės gauname

$$\beta_L \geq \limsup_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^L \binom{L}{k} \sum_{\substack{p_1, \dots, p_k, p_{k+1}, \dots, p_L \leq d \\ p_i \neq p_j, i \neq j}} \frac{f_x(p_1) \dots f_x(p_k) g_x(p_{k+1}) \dots g_x(p_L)}{p_1 \dots p_k p_{k+1} \dots p_L}.$$

Tariant, kad

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \#\{p \leq d : f_x(p) + g_x(p) \neq 0\} \geq L,$$



gauname prieštarą sąlygai  $\beta_L = 0$ . Todėl

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \#\{p \leq d : f_x(p) + g_x(p) \neq 0\} \leq L - 1$$

kiekvienam fiksuotam natūraliajam  $d$ . Imkime

$$a_d = \limsup_{x \rightarrow \infty} \#\{p \leq d : f_x(p) + g_x(p) \neq 0\}.$$

Seka  $a_d$  ( $d \geq 2$ ) įgyja sveikąsias reikšmes, yra nemažėjanti ir aprėžta. Egzistuoja natūralusis skaičius  $D \geq 2$  toks, kad

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \#\{p \leq D : f_x(p) + g_x(p) \neq 0\} = a_d,$$

kai  $d \geq D$ . Kadangi  $a_d \leq L - 1$  visiems natūraliesiems  $d$ , gauname (4.9) sąlygą.

Kita vertus, iš šių samprotavimų išplaukia, kad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f_x(p) + g_x(p)) = 0$$

kiekvienam fiksuotam pirminiam  $p > D$ . Taigi, gauname

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \max_{D < p \leq x} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} = 0. \quad (4.18)$$

Kiekvienai porai  $i, j$ ,  $1 \leq i < j \leq L$ ,

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{D < p_1, \dots, p_k, p_{k+1}, \dots, p_L \leq x \\ p_i = p_j}} \frac{f_x(p_1) \cdots f_x(p_k) g_x(p_{k+1}) \cdots g_x(p_L)}{p_1 \cdots p_k p_{k+1} \cdots p_L} \\ & \leq \max_{D < p \leq x} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} \left( \sum_{p \leq x} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} \right)^{L-1} \rightarrow 0, \quad (4.19) \end{aligned}$$

kai  $x \rightarrow \infty$ , nes patenkintos (4.6) ir (4.18) sąlygos. Iš (4.19) ir (4.8) lygybės turime, kad

$$\beta_L \geq \limsup_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^L \binom{L}{k} \left( \sum_{D < p \leq x} \frac{f_x(p)}{p} \right)^k \left( \sum_{D < p \leq x} \frac{g_x(p)}{p} \right)^{L-k}.$$

Taigi, iš sąlygos  $\beta_L = 0$  gauname (4.10).

Paskutinioji (4.11) lemos sąlyga išplaukia iš (4.8) ir (4.10) lygybės.

4.6 lema įrodyta.

### 4.3 Pagrindinio rezultato įrodymas

*Būtinumas.* Tarkime

$$\nu_x(f_x(p+1) + g_x(p+2) < u) \Rightarrow \mathcal{U}(u, L),$$

kai  $x \rightarrow \infty$ , su parametru  $L \geq 2$ . Diskretaus tolygiojo skirstinio atveju turime, kad ribinio skirstinio faktorialiniai momentai yra

$$\beta_k = \frac{(L-1)(L-2)\dots(L-k)}{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, L-1, \quad (4.20)$$

$$\beta_k = 0, \quad k = L, L+1, \dots$$

Iš (4.8) lygybės išplaukia, kad

$$\beta_2 \leq \beta_1^2$$

arba

$$\frac{(L-1)(L-2)}{3} \leq \left(\frac{L-1}{2}\right)^2.$$

Išsprendę pastarąją nelygybę gauname  $L \leq 5$ .

Iš 4.6 lemos gauname, kad fiksuotiems  $D \geq 2$  galioja šios sąlygos:

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \#\{p \leq D : f_x(p) + g_x(p) \neq 0\} =: \kappa \leq L-1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{D < p \leq x} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} = 0.$$

Atskirai nagrinėkime atvejus  $L = 2, 3, 4, 5$ . Jeigu  $\kappa < L-1$ , iš (4.11) sąlygos gauname, kad  $\beta_{L-1} = 0$ . Bet tai prieštarauja (4.20). Todėl užtenka nagrinėti atvejus  $\kappa = L-1$ .

Tegul  $L = 2$  ir  $\kappa = 1$ . Šiuo atveju

$$\beta_1 = \frac{1}{2}, \quad \beta_2 = \beta_3 = \dots = 0.$$

Iš (4.11) išplaukia, kad pirminiems  $p = p(x) \leq D$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p-1} = \frac{1}{2}.$$

Tai reiškia, kad bet kokiam pakankamai dideliam  $x$  teisinga viena iš dviejų sąlygų:

$$f_x(3) + g_x(3) = 1 \text{ ir } f_x(5) + g_x(5) = 0$$

arba

$$f_x(3) + g_x(3) = 0 \text{ ir } f_x(5) + g_x(5) = 2.$$

Abiem atvejais

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{\substack{p \leq x \\ p \neq 3,5}} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} = 0.$$

Tegul  $L = 3$  ir  $\kappa = 2$ . Tuomet

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = \frac{2}{3}, \quad \beta_3 = \beta_4 = \dots = 0.$$

Pagal 4.6 lemą skirtingų pirminių porai  $p_1 = p_1(x) \leq D$  ir  $p_2 = p_2(x) \leq D$  tokiai, kad  $f_x(p_1) + g_x(p_1) \neq 0$ ,  $f_x(p_2) + g_x(p_2) \neq 0$  turime

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{p=p_1, p_2} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p-1} = 1, \quad (4.21)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{\substack{p, q \in \{p_1, p_2\} \\ p \neq q}} \frac{f_x(p)f_x(q) + 2f_x(p)g_x(q) + g_x(p)g_x(q)}{(p-1)(q-1)} = \frac{2}{3}. \quad (4.22)$$

Iš (4.21) lygybės gauname vieną atvejį

$$f_x(3) + g_x(3) = 1 \text{ ir } f_x(5) + g_x(5) = 2.$$

Bet (4.22) lygybės kairioji pusė yra lygi  $1/2$ . Taigi atvejis  $L = 3$  ir  $\kappa = 2$  yra neįmanomas.

Tegul  $L = 4$  ir  $\kappa = 3$ . Tuomet

$$\beta_1 = \frac{3}{2}, \quad \beta_2 = 2, \quad \beta_3 = \frac{3}{2}, \quad \beta_4 = \beta_5 = \dots = 0.$$

Pagal 4.6 lemą skirtingiems pirminių trejetams  $p_1 = p_1(x) \leq D$ ,  $p_2 = p_2(x) \leq D$  ir  $p_3 = p_3(x) \leq D$  tokiems, kad  $f_x(p_i) + g_x(p_i) \neq 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ , turime

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{p=p_1, p_2, p_3} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p-1} = \frac{3}{2}, \quad (4.23)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{\substack{p, q \in \{p_1, p_2, p_3\} \\ p \neq q}} \frac{f_x(p)f_x(q) + 2f_x(p)g_x(q) + g_x(p)g_x(q)}{(p-1)(q-1)} = 2. \quad (4.24)$$

Iš (4.23) lygybės gauname, kad yra galimi du atvejai:

$$f_x(2) + g_x(2) = 1 \text{ ir } f_x(7) + g_x(7) = f_x(13) + g_x(13) = 2$$

arba

$$f_x(3) + g_x(3) = f_x(7) + g_x(7) = f_x(13) + g_x(13) = 2.$$

Abiem atvejais kairioji (4.24) lygybės pusė yra lygi  $10/9$  ir (4.24) lygybė nėra tenkinama. Taigi, atvejis  $L = 4$  ir  $\kappa = 3$  nėra galimas.

Tegul  $L = 5$  ir  $\kappa = 4$ . Tuomet

$$\beta_1 = 2, \quad \beta_2 = 4, \quad \beta_3 = 6, \quad \beta_4 = \frac{24}{5}, \quad \beta_5 = \beta_6 = \dots = 0.$$

Pagal 4.6 lemą skirtingų pirminių ketvertams  $p_i = p_i(x) \leq D$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , tokiems, kad  $f_x(p_i) + g_x(p_i) \neq 0$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , turime

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{p=p_1, p_2, p_3, p_4} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p-1} = 2, \quad (4.25)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{\substack{p, q \in \{p_1, p_2, p_3, p_4\} \\ p \neq q}} \frac{f_x(p)f_x(q) + 2f_x(p)g_x(q) + g_x(p)g_x(q)}{(p-1)(q-1)} = 4. \quad (4.26)$$

Iš (4.25) lygybės gauname, kad yra galimi trys atvejai:

$$f_x(2) + g_x(2) = f_x(3) + g_x(3) = 1 \text{ ir } f_x(7) + g_x(7) = f_x(13) + g_x(13) = 2,$$

arba

$$f_x(2) + g_x(2) = 1 \text{ ir } f_x(5) + g_x(5) = f_x(7) + g_x(7) = f_x(13) + g_x(13) = 2,$$

arba

$$f_x(3) + g_x(3) = f_x(5) + g_x(5) = f_x(7) + g_x(7) = f_x(13) + g_x(13) = 2.$$

Visuose trijuose atvejuose (4.26) lygybės kairioji pusė yra lygi  $47/18$  ir (4.26) lygybė nėra tenkinama. Taigi, atvejis  $L = 5$  ir  $\kappa = 4$  taip pat nėra galimas. Teoremos būtinumas įrodytas.

*Pakankamumas.* Iš teoremos (4.2) ir (4.3) sąlygų išplaukia, kad (4.6) ir (4.15) sąlygos galioja. Tuomet turime, kad konvergavimo atveju skirstiniai (4.1) ir

$$\nu_x \left( \hat{f}_x(p+1) + \hat{g}_x(p+2) < u \right)$$

silpnai konverguoja į tą patį ribinį dėsnį. Iš (4.4), (4.5) ir (4.3), mažstant taip pat kaip 4.5 lemos įrodyme, gauname, kad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \hat{\beta}(l, x) = \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \sum_{\substack{p_1, p_2, \dots, p_l \leq x^\delta \\ p_i \neq p_j, i \neq j}} \frac{f_x(p_1) \cdots f_x(p_k) g_x(p_{k+1}) \cdots g_x(p_l)}{\phi(p_1 p_2 \cdots p_l)} = 0,$$

jeigu  $l > 1$  ir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \hat{\beta}(1, x) = \frac{1}{2}.$$

Imkime

$$\hat{\psi}_x(t) = \frac{1}{\pi(x)} \sum_{p \leq x} e^{it(\hat{f}_x(p+1) + \hat{g}_x(p+2))},$$

kai  $x \geq 2$  ir  $t \in \mathbb{R}$ . Kadangi

$$\left| e^{itr} - 1 - r(e^{it} - 1) \right| \leq \frac{r(r-1)}{2} |e^{it} - 1|^2$$

visiems  $r \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ , tai gauname, kad

$$\hat{\psi}_x(t) = 1 + \hat{\beta}(1, x) (e^{it} - 1) + O(\hat{\beta}(2, x)).$$

Perėjus prie ribos, kai  $x \rightarrow \infty$ , darom išvadą, kad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \hat{\psi}_x(t) = \frac{1}{2} (e^{it} + 1).$$

O tai ir yra diskretaus tolygiojo skirstinio  $\mathcal{U}(u, 2)$  charakteristinė funkcija.

Teoremos pakankamumas įrodytas.

4.1 teorema įrodyta.

# Išvados

Disertacijoje gauti šie rezultatai:

- stipriai adityviųjų funkcijų sekų su paslinktais pirminiais skirstinių silpnojo konvergavimo į diskretų tolygųjų dėsnį būtinos ir pakankamos sąlygos;
- stipriai adityviųjų funkcijų sekų sumų su paslinktais argumentais skirstinių silpnojo konvergavimo į diskretų tolygųjų dėsnį būtinos ir pakankamos sąlygos;
- stipriai adityviųjų funkcijų sekų sumų su paslinktais pirminiais skirstinių silpnojo konvergavimo į diskretų tolygųjų dėsnį būtinos ir pakankamos sąlygos.

## Literatūra

- [1] M.B. Barban, A.I. Vinogradov, B.V. Levin, Limit laws for arithmetic functions of J.P. Kubilius class  $H$ , defined on the set of "shifted" primes, *Liet. mat. rink.*, **5**:1-8, 1965.
- [2] E. Bombieri, On the large sieve, *Mathematika*, **12**:201-225, 1965.
- [3] P.D.T.A. Elliott, On the limiting distribution of  $f(p+1)$  for non-negative additive functions, *Acta Arith.*, **25**:259-264, 1974.
- [4] P.D.T.A. Elliott, A conjecture of Kátai, *Acta Arith.*, **26**:11-20, 1974.
- [5] P.D.T.A. Elliott, *Probabilistic Number Theory. I. Mean Value Theorems*, Springer, New York Heidelberg Berlin, 1979.
- [6] P.D.T.A. Elliott, *Probabilistic Number Theory. II. Central Limit Theorems*, Springer, New York Heidelberg Berlin, 1980.
- [7] P.D.T.A. Elliott, *Arithmetic Functions and Integer Products*, Springer, New York Berlin Heidelberg Tokyo, 1985.
- [8] P.D.T.A. Elliott, On the correlation of multiplicative and the sum of additive arithmetic functions, *Memoirs Amer. Math. Soc.*, **112**(538, 2), 1994.
- [9] P.D.T.A. Elliott, The concentration function of additive functions on shifted primes, *Acta Math.*, **173**:1-35, 1994.
- [10] P.D.T.A. Elliott, C. Ryavec, The distribution of the values of additive arithmetical functions, *Acta Math.*, **126**:143-164, 1971.
- [11] P. Erdős, M. Kac, The Gaussian law of errors in the theory of additive number-theoretic functions, *Amer. J. Math.*, **62**:738-742, 1940.
- [12] P. Erdős, A. Wintner, Additive arithmetical functions and statistical independence, *Amer. J. Math.*, **61**:713-721, 1939.

- [13] G. Halász, On the distribution of additive arithmetical functions, *Acta Arith.*, **27**:143-152, 1975.
- [14] A. Hildebrand, An Erdős-Wintner theorem for differences of additive functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **310**(1):257-276, 1988.
- [15] I. Kátai, On the distribution of arithmetical functions on the set of primes plus one, *Comput. Math.*, **19**:278-289, 1968.
- [16] I. Kátai, Some remarks on additive arithmetical functions, *Liet. mat. rink.*, **9**:515-518, 1969.
- [17] I. Kátai, On the distribution of arithmetical functions, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **20**(1-2):69-87, 1969.
- [18] J. Kubilius, *Probabilistic Methods in the Theory of Numbers*, Providence, Amer. Math. Soc. Translations of Math. Monographs, No 11, 1964.
- [19] W.J. LeVeque, On the size of certain number-theoretic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **66**:440-463, 1949.
- [20] G. Stepanauskas, The mean values of multiplicative functions. III, in A. Laurinćikas, E. Manstavićius and V. Stakėnas (Eds.), *Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory, Proceedings of the Second International Conference in Honour of J.Kubilius, Palanga, Lithuania, September 23-27, 1996*(New Trends in Probability and Statistics, **4**), VSP-TEV, Utrecht Vilnius, 371-387, 1997.
- [21] G. Stepanauskas, The mean values of multiplicative functions on shifted primes, *Lith. Math. J.*, **37**:443-451, 1997.
- [22] G. Stepanauskas, The mean values of multiplicative functions. IV, *Publ. Math. Debrecen*, **52**:659-681, 1998.



- [23] G. Stepanauskas, The mean values of multiplicative functions. I, *Annales Univ. Sci. Budapest. (Sect. Comp.)*, **18**:175-186, 1999.
- [24] G. Stepanauskas, L. Žvinytė, Discrete uniform limit law for additive functions on shifted primes, *Nonlinear Anal. Model. Control*, **21**(4):437-447, 2016.
- [25] G. Stepanauskas, L. Žvinytė, Discrete uniform distribution for a sum of additive functions, *Lith. Math. J.*, **57**(3):391-400, 2017.
- [26] J. Šiaulys, The von Mises theorem in number theory, in: *New Trends in Probability and Statistics. Vol.2, Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory, Proc on Intern. Conf. Palanga, Lithuania, 1991*, F.Schweiger and E. Manstavičius (Eds.), TEV, Vilnius / VSP Utrecht, 293-310, 1992.
- [27] J. Šiaulys, The convergence of distribution of integer valued additive functions to the Poisson law, *Lith. Math. J.*, **35**(3):300-308, 1995.
- [28] J. Šiaulys, The convergence to the Poisson law. II, Unbounded strongly additive functions, *Lith. Math. J.*, **36**(3):314-322, 1996.
- [29] J. Šiaulys, The convergence to the Poisson law. III, Method of moments, *Lith. Math. J.*, **38**(4):374-390, 1998.
- [30] J. Šiaulys, On the distributions of additive functions, *Lietuvos matematikų draugijos mokslo darbai*, **3**: Special Issue of *Liet. Matem. Rink.*, 104-109, 1999.
- [31] J. Šiaulys, Factorial moments of distributions of additive functions, *Lith. Math. J.*, **40**(4):389-401, 2000.
- [32] J. Šiaulys, The convergence to the Poisson law in number theory, *Fiz. Mat. Fak. Moksl. Semin. Darb.*, **5**:108-114, 2002.

- [33] J. Šiaulyš, G. Stepanauskas, The Poisson law for additive functions on shifted primes, in E. Manstavičius and A. Laurinčikas (Eds.), *Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory, Proceedings of the Fourth International Conference in Honour of J. Kubilius, Palanga, Lithuania, September 24-30, 2006*, TEV, Vilnius, 204-212, 2007.
- [34] J. Šiaulyš, G. Stepanauskas, Poisson distribution for a sum of additive functions, *Acta Appl. Math.*, **97**:269-279, 2007.
- [35] J. Šiaulyš, G. Stepanauskas, Poisson distribution for a sum of additive functions on shifted primes, *Acta Arith.*, **130**(4):403-414, 2007.
- [36] J. Šiaulyš, G. Stepanauskas, Poisson distribution for a sum of additive functions on arithmetic progressions, *Annales Univ. Sci. Budapest. (Sect. Comp.)*, **29**:199-212, 2008.
- [37] J. Šiaulyš, G. Stepanauskas, Some limit laws for strongly additive prime number indicators, *Šiauliai Math. Sem.*, **3**(11):235-246, 2008.
- [38] J. Šiaulyš, G. Stepanauskas, Binomial limit law for additive prime number indicators, *Lith. Math. J.*, **51**(4):562-572, 2011.
- [39] J. Šiaulyš, G. Stepanauskas, Discrete uniform limit law for additive prime number indicators, in A. Laurinčikas, E. Manstavičius and G. Stepanauskas (Eds.), *Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory, Proceedings of the Fifth International Conference in Honour of J. Kubilius, Palanga, Lithuania, September 25-29, 2011*, TEV, Vilnius, 255-263, 2012.
- [40] N.M. Timofeev, The distribution of values of additive functions on the sequence  $\{p + 1\}$ , *Mat. Zametki*, **33**(6):933-941, 1983.
- [41] N.M. Timofeev, Arithmetic functions on the set of shifted primes, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **6**:311-317, 1995.

- [42] N.M. Timofeev, H.H. Usmanov, The distribution of values of a sum of additive functions with shifted arguments, *Mat. Zametki*, **352**(5):113-124, 1992.
- [43] Б.В. Левин, Н.М. Тимофеев, Аналитический метод в вероятностной теории чисел, Уч. зап. Владимирского гос. пед. ин.-та. мат. **57**(2):57-150, 1971.
- [44] Н.М. Тимофеев, Гипотеза Эрдеша-Кубилюса о распределении значений аддитивных функций на последовательности сдвинутых простых чисел, *Acta Arith.*, **58**(2):113-131, 1991.