

Stačiųjų trikampių egzistavimo ir vienaties problema

Jevgenijus Kirjackis¹, Edmundas Mazėtis^{2,3},
Grigorijus Melničenko³

¹ *Vilniaus Gedimino technikos universitetas, Fundamentalųjų mokslų fakultetas*
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius

² *Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas*
Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius

³ *Lietuvos edukologijos universitetas, Gamtos, matematikos ir technologijų fakultetas*
Studentų g. 39, LT-08106 Vilnius, Lietuva

E. paštas: jk@vgtu.lt, gmelnicenko@gmail.com, edmundas.mazetis@leu.lt

Santrauka. Straipsnyje gautos būtinos ir pakankamos sąlygos, kad egzistuotų vienintelis statusis trikampis, kai duota jo pusiaukraštinė ir pusiaukampinė.

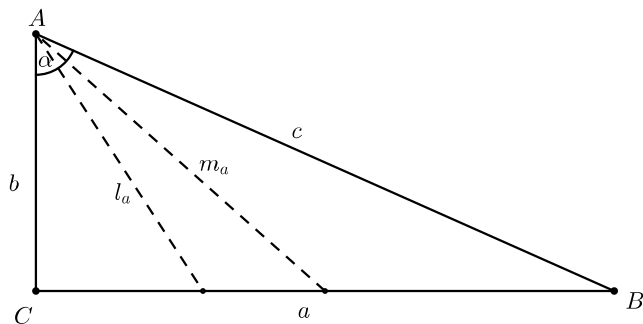
Raktiniai žodžiai: statusis trikampis, pusiaukraštinė, pusiaukampinė, kubinė lygtis.

Įvadas

Trikampio egzistavimo įrodymas, kai žinomi jo elementai, dažnai yra sunkus uždavinys. Pavyzdžiui, trikampio egzistavimo problema, kai duotos trys jo pusiaukampinės, turi ilgą istoriją. Pirmasis šį uždavinį mokslinėje spaudoje suformulavo ir bandė jį spręsti prancūzų matematikas Anri Brokaras 1875 metais [6, 3]. Tik 1994 metais buvo paskelbtas uždavinio sprendimas [6], kuris remiasi Brauerio teoremos apie invariantinį tašką taikymu. Šio straipsnio autoriai, siekdami trikampio egzistavimo problemą išdėstyti elementariosios matematikos priemonėmis, apsiriboja stačiojo trikampio egzistavimo įrodymu, kai yra žinomos jo pusiaukampinė ir pusiaukraštinė, t. y., sprendžiamas trikampio egzistavimo klausimas, kai duoti trys jo elementai – 90° kampas, pusiaukampinė ir pusiaukraštinė.

Staciojo trikampio egzistavimo, kai duota pusiaukampinė ir pusiaukraštinė, problemą išskaidysime į tris uždavinius: 1) kada statusis trikampis apibrėžiamas šiais elementais (t. y., ar egzistuoja bent vienas uždavinio sprendinys), 2) jei uždavinio sprendinys egzistuoja, tai ar jis vienintelis (t. y., ar trikampis vienareikšmiškai nustatomas šiais elementais) ir 3) ar galima trikampį, jei jis egzistuoja, nubrėžti skriestuvu ir liniuote.

Pastebėkime, kad tokie tyrinėjimai gali būti matematika besidominčių mokinių kūrybinių ar projektinių darbų dalis.



1 pav.

1 Stačiojo trikampio egzistavimas, kai žinoma pusiaukampinė ir pusiauakraštinė, nubrėžtos iš vienos viršūnės

1 teorema. *Sakykime, kad l_a ir m_a – dvi duotos atkarpos. Statusis trikampis ABC kuriame pusiaukampinė ir pusiauakraštinė, išeinančios iš viršūnės A , yra lygios duotosioms atkarpoms l_a ir m_a (1 pav.) egzistuoja tada ir tik tada, kai teisinga nelygybė $m_a > l_a$. Be to, toks statusis trikampis nustatomas vienareikšmiškai ir bendruoju atveju jo negalima nubrėžti skriestuvu ir liniuote.*

Irodymas. Visų pirma įrodysime sąlygos $m_a > l_a$ pakankamumą. Darbe [4] įrodyta, kad stačiojo trikampio smailiojo kampo α kosinusas $x = \cos \alpha$ yra lygties

$$3x^3 - kx^2 + x + 1 = 0 \quad (1)$$

sprendinys, čia $k = (8m_a^2 - 3l_a^2)/l_a^2$.

Išnagrinėkime funkciją $f(x) = 3x^3 - kx^2 + x + 1$. Kadangi $m_a > l_a$, tai $k > 5$. Akivaizdu, kad $f(1) = 5 - k < 0$, o $f(0) = 1 > 0$, todėl iš teoremos apie tolydžiosios funkcijos nulius išplaukia, kad (1) lygtis turi bent vieną sprendinį intervale $0 < x_1 < 1$. Taigi egzistuoja kampo α reikšmė, esanti intervale $0 < \alpha < 90^\circ$ tokia, kad $x_1 = \cos \alpha$. Žinodami smailųjį kampą $\angle A = \alpha$, skriestuvu ir liniuote atliekame tokias konstrukcijas: nubraižome kampą $\angle A$, nubrėžiame jo pusiaukampinę, joje atidedame atkarpą $AL = l_a$; iš taško L į vieną iš kampo kraštinių nuleidžiame statmenį LC ir pratęsiame jį iki susikirtimo su kita kampo kraštine taške B . Gavome trikampį ABC (1 pav.), kurio $\angle C = 90^\circ$, smailusis kampas $\angle A = \alpha$, o iš jo viršūnės išeinanti pusiaukampinė lygi l_a . Sakykime, kad \bar{m}_a nubrėžtojo trikampio pusiauakraštinė, nubrėžta iš viršūnės A , o $\bar{k} = (8\bar{m}_a^2 - 3l_a^2)/l_a^2$. Pagal [4] straipsnio 2 teoremą reiškinys $x = \cos \alpha$ tenkina lygtį

$$3x^3 - \bar{k}x^2 + x + 1 = 0 \quad (2)$$

Atėmę (1) lygtį iš (2) lygties randame, kad $\bar{k} = k$. Tuomet $\bar{m}_a = m_a$, taigi stačiojo trikampio $\triangle ABC$ egzistavimas, kai duota l_a ir m_a , o $m_a > l_a$ įrodytas.

Sąlygos $m_a > l_a$ būtinumas išplaukia iš to, kad ši nelygybė yra teisinga bet kuriam nelygiašoniui trikampiui Tikrai, jei iš bet kurio trikampio ABC viršūnės A nubrėžtos aukštinė AH , pusiaukampinė AD ir pusiauakraštinė AM , tai taškas D yra atkarpoje

HM, taigi $AH < AD < AM$. Šią nelygybę galima įrodyti ir algebriniu būdu, nes trikampio pusiauakraštinei ir pusiauokampinei teisingos lygybės

$$m_a^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2, \quad l_a^2 = \frac{bc((b+c)^2 - a^2)}{(b+c)^2}.$$

Iš trikampio nelygybės gauname, kad $a/(b+c) < 1$, taigi

$$\begin{aligned} m_a^2 - l_a^2 &= \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2 - \frac{bc((b+c)^2 - a^2)}{(b+c)^2} = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2 - bc + \frac{a^2bc}{(b+c)^2} \\ &= \frac{1}{2}(b-c)^2 - \frac{1}{4} \frac{a^2}{(b+c)^2} [(b+c)^2 - 4bc] = \frac{1}{4}(b-c)^2 \left[2 - \left(\frac{a}{b+c} \right)^2 \right] > 0. \end{aligned}$$

Iš čia išplaukia, kad nelygybė $m_a > l_a$ teisinga bet kuriam nelygiašoniui trikampiui.

Įrodysime tokio stačiojo trikampio vienatį. Kai $k > 5$ turime, kad $f(-1) = -1 - k < 0$, o $f(0) = 1 > 0$. Pagal teoremą apie tolydžios funkcijos nulius, (1) lygtis turi antrąjį sprendinį $-1 < x_2 < 0$. Jei x_3 – trečiasis (1) lygties sprendinys, tai pagal Vijeto teoremą turime $1/3 = -x_1x_2x_3$. Kadangi $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, tai $x_3 > 0$. Iš lygybės $f'(x) = 9x^3 - 2kx^2 + 1$ išplaukia, kad funkcija $f(x)$ įgyja maksimumą taške $x_{\max} = (k - \sqrt{k^2 - 9})/9$, (be to, $f(x_{\max}) > 0$) ir minimumą taške $x_{\min} = (k + \sqrt{k^2 - 9})/9$, (be to, $f(x_{\min}) < 0$). Kadangi $k > 5$, tai nesunkiai gauname, kad $x_{\min} > 1$. Taigi funkcija $f(x)$ yra didėjanti intervale $(x_{\min}, +\infty)$ ir kerta Ox ašį intervalo $(1, +\infty)$ taške, t. y., $x_3 > 1$. Todėl intervale $(0, 1)$ (1) lygtis turi vienintelį sprendinį $x_1 = \cos \alpha$, kuris nustato vienintelį smailųjį kampą $\angle A = \alpha$. Taigi statinis $b = l_a \cos(\alpha/2)$ nustatomas vienareikšmiškai, todėl ir statusis trikampis nustatomas vienareikšmiškai.

Kad statusis trikampis, kurio žinoma pusiauakraštinė ir pusiauokampinė, nubrėžtos iš vienos smailiojo kampo viršūnės, nenubraižomas skriestuvu ir liniuote, įrodyta [4] darbe.

2 Stačiojo trikampio egzistavimas, kai žinoma pusiauakraštinė ir pusiauokampinė, nubrėžtos iš skirtingų viršūnių

2 teorema. *Sakykime, kad l_a ir m_a – duotosios atkarpos. Statusis trikampis ABC (2 pav.), kurio pusiauokampinė, nubrėžta iš viršūnės A, lygi l_a , o pusiauakraštinė, nubrėžta iš viršūnės B lygi m_b , egzistuoja tada ir tik tada, kai $2m_b > l_a$. Toks statusis trikampis yra vienintelis ir bendru atveju nenubraižomas skriestuvu ir liniuote.*

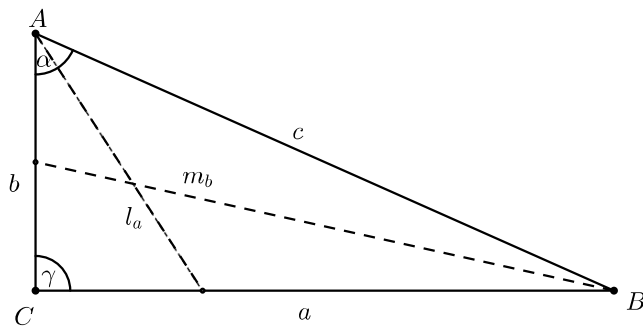
Irodymas. Sąlygos $2m_b > l_a$ būtinumas ir pakankamumas yra įrodyti [5] darbe. Pastebėkime, kad sąlyga $2m_b > l_a$ yra teisinga stačiajame trikampyje, bet kuriam trikampiui gali būti neteisinga. Skaitytojui patariame sukonstruoti atitinkamą pavyzdį.

Įrodysime stačiojo trikampio, tenkinančio nurodytas sąlygas, vienatį. [5] straipsnyje įrodyta, kad stačiojo trikampio smailiojo kampo kosinusas $x = \cos \alpha$ yra lygties

$$3x^3 + kx^2 - 4x - 4 = 0 \tag{3}$$

sprendinys, čia $k = (8m_b^2 + 3l_a^2)/l_a^2$.

Nagrinėkime funkciją $f(x) = 3x^3 + kx^2 - 4x - 4$. Kadangi $2m_b > l_a$, tai $k > 5$, todėl $f(1) = k - 5 > 0$. Iš teoremos apie tolydžiosios funkcijos nulius gauname, kad (3) lygtis



2 pav.

turi bent vienu sprendinju $0 < x_1 < 1$, t. y., $x_1 = \cos \alpha$. Taigi gauname smailuju kampā $\angle A = \alpha$, tuomet konstruojame statuju trikampju su duotosiomis atkarpomis l_a ir m_a (smulkiau galima rasti [5]). Kadangi $k > 5$, tai $f(-1) = -3 + k$. Kadangi $f(0) = -4 < 0$, tai iš teoremos apie tolydziosios funkcijos nulius išplaukia, kad (3) lygtis turi antrąjį sprendinju $-1 < x_2 < 0$. Sakykime, kad trečiasis (3) lygties sprendinys yra x_3 , todėl pagal Vijeto teorema $-4/3 = -x_1 x_2 x_3$. Iš čia gauname, kad $x_3 < 0$, nes $x_1 > 0$ ir $x_2 < 0$. Taigi intervale $(0, 1)$ (3) lygtis turi tik vienu sprendinju $x_1 = \cos \alpha$, apibrėžiantju vienintelju stačiojo trikampio smailuju kampā $\angle A = \alpha$. Todėl statinis $b = l_a \cos(\alpha/2)$ surandamas vienareikšmiškai, taigi ir statusis trikampis nustatomas vienareikšmiškai.

Bendruoju atveju stačiojo trikampio, kai duota pusiauakampinė ir pusiauakraštinė, nubrėžtos iš skirtingų smailiuju kampų viršūnių, nubrėžti skriestuvu ir liniuote negalima, tai įrodyta [5] darbe.

3 Stačiojo trikampio egzistavimas, kai žinoma smailiojo kampo pusiauakampinė ir pusiauakraštinė, nubrėžta iš stačiojo kampo viršūnės

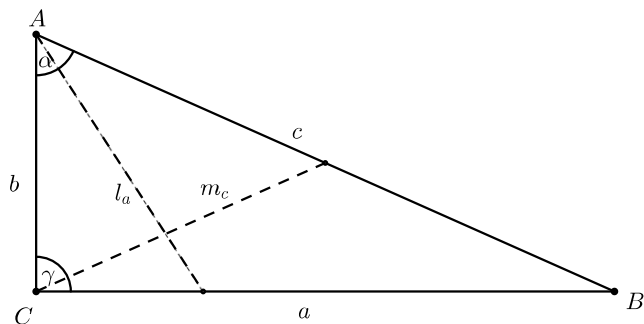
3 teorema. Sakykime, kad l_a ir m_c – dvi duotosios atkarpos. Statusis trikampis, kuriame smailiojo kampo A pusiauakampinė lygi l_a , o iš stačiojo kampo viršūnės nubrėžta pusiauakraštinė lygi m_c (3 pav.) egzistuoja tada ir tik tada, kai $2m_c > l_a$. Toks statusis trikampis yra vienintelis ir jis nubraižomas skriestuvu ir liniuote.

Irodymas. Sakykime, kad stačiojo trikampio ABC smailiojo kampo A pusiauakampinė lygi l_a , o iš stačiojo kampo viršūnės nubrėžta pusiauakraštinė lygi m_c . Tada $c = 2m_c$,

$$b = l_a \cos \frac{\alpha}{2} = l_a \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = l_a \sqrt{\frac{b + c}{2c}} = l_a \sqrt{\frac{b + 2m_c}{4m_c}}. \quad (4)$$

Taigi statinio b ilgis yra kvadratinės lygties $4m_c b^2 - l_a^2 b - 2m_c l_a^2 = 0$ sprendinys. Kadangi šios lygties diskriminantas $D = \sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{l_a^4 + 32m_c^2 l_a^2} > l_a^2$, tai ši lygtis turi vienu teigiamą sprendinju Taigi statinio b ilgis lygus

$$b = \frac{l_a^2 + l_a \sqrt{l_a^2 + 32m_c^2}}{8m_c}. \quad (5)$$



3 pav.

Dabar beliko nubrėžti statųjį trikampį, kai duota jo įžambinė ir statinis. Iš Pitagoro teoremos turime, kad

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{4m_c^2 - b^2}. \quad (6)$$

Iš (5) ir (6) lygybių išplaukia sąlygos $2m_c > l_a$ pakankamumas. Iš (6) lygybės gauname nelygybę $2m_c - b > 0$, o, atsižvelgę į (5) lygybę, iš čia gauname, kad ši nelygybė teisinga tik kai $2m_c > l_a$. Skriestuvu ir linuote braižome atkarpą $\sqrt{l_a^2 + 32m_c^2}$ (žr. [1], p. 120–123; [2], p. 146–148), po to brėžiame atkarpą b , tenkinančią (5) lygybę, o galiausiai nubraižome statųjį trikampį, kai duota statinis b ir įžambinė $c = 2m_c$. Iš čia išplaukia, kad iš stačiojo kampo viršūnės nubrėžta pusiauakraštinė lygi m_c , o iš (4) ir (5) lygybių gauname, kad kampo A pusiauakampinė lygi l_a . Taigi nubrėžtas trikampis tenkina teoremos sąlygas.

Sąlygos $2m_c > l_a$, būtinumas išplaukia iš nelygybės $\cos(\alpha/2) > \cos \alpha$ ir lygybių $\cos \alpha = b/2m_c$ ir $\cos(\alpha/2) = b/l_a$.

Kadangi trikampio statiniai a ir b (5) ir (6) lygybėmis nustatomi vienareikšmiškai, tai pagal pirmąjį trikampių lygumo požymį egzistuoja vienintelis statusis trikampis, tenkinantis teoremos sąlygas.

4 Baigiamosios pastabos

Nagrinėjant stačiojo trikampio egzistavimo ir vienaties, kai duota stačiojo trikampio pusiauakampinė ir pusiauakraštinė, uždavinį, dar liko ištirti šiuos atvejus: 1) kai duota stačiojo kampo pusiauakampinė ir pusiauakraštinė, nubrėžta iš smailiojo kampo viršūnės ir 2) pusiauakampinė ir pusiauakraštinė, nubrėžtos iš stačiojo kampo viršūnės. Šie uždaviniai bus nagrinėjami kituose straipsniuose. Be to, 1 ir 2 teoremų įrodymai yra algebriniai, todėl natūralu rasti šių teoremų geometrinius įrodymus. Be to, įdomu būtų gauti būtinas ir pakankamas sąlygas, kurias turi tenkinti bet kurio trikampio pusiauakraštinė ir pusiauakampinė, t. y., kai $\angle C \neq 90^\circ$.

Literatūra

- [1] R. Courant and H. Robbins. *What is Mathematics?: An Elementary Approach to Ideas and Methods*. Oxford University Press, Oxford, 2nd edition, 1996.

- [2] R. Courant and H. Robbins. *What is Mathematics?: An Elementary Approach to Ideas and Methods* (in Russian). Moskva, MCNMO, 2001.
- [3] G. Dinca and J. Mawhin. A constructive fixed point approach to the existence of a triangle with prescribed angle bisector lengths. *Bull. Belgian Math. Soc. – Simon Stevin*, **17**(2):333–341, 2010.
- [4] J. Kirjackis, E. Mazētis and G. Melničenko. Apie vieno brėžimo uždavinio neišsprendžiamumą. *Liet. matem. rink. LMD darbai, ser. B*, **56**:70–74, 2015.
- [5] J. Kirjackis, E. Mazētis and G. Melničenko. Apie vieno brėžimo uždavinio neišsprendžiamumą ii. *Liet. matem. rink. LMD darbai, ser. B.*, **57**:89–93, 2016.
- [6] P. Mironescu and L. Panaitopol. The existence of a triangle with prescribed angle bisector lengths. *Amer. Math. Monthly*, **101**(1):58–60, 1994.

SUMMARY

On the problem of the existence and uniqueness of right triangles*J. Kirjackis, G. Melnichenko, E. Mazētis*

In the article necessary and sufficient conditions for existence and uniqueness of a right triangle with given bisector and median are established.

Keywords: Right triangle, median, bisector, cubic equation.