VILNIAUS UNIVERSITETAS

Audronė Rimkevičienė

PERIODINIŲ HURVICO DZETA FUNKCIJŲ ASIMPTOTINIŲ SAVYBIŲ TYRIMAI

Daktaro disertacijos santrauka
Fiziniai mokslai, matematika (01 P)

Vilnius, 2018

Disertacija rengta 2014-2018 metais Vilniaus universitete.

Mokslinis vadovas:

Prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Disertacija ginama viešame disertacijos Gynimo tarybos posėdyje:

Pirmininkas - Prof. habil. dr. Eugenijus Manstavičius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Nariai:

Dr. Natalija Budarina (Dundalk technologijos institutas, Airija, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Doc. dr. Paulius Drungilas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Prof. habil. dr. Konstantinas Pileckas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Prof. dr. Artūras Štikonas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Disertacija bus ginama viešame Gynimo tarybos posėdyje 2018 m. vasario 22 d. 16 val. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultete, 103 auditorijoje.
Adresas: Naugarduko g. 24, LT-03225, Vilnius, Lietuva.

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2018 m. sausio 22 d.
Su disertacija galima susipažinti Vilniaus universiteto bibliotekoje ir VU interneto svetainėje adresu: www.vu.lt/naujienos/ivykiu-kalendorius

VILNIUS UNIVERSITY

Audronė Rimkevičienė

INVESTIGATIONS OF THE ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF PERIODIC HURWITZ ZETA-FUNCTIONS

Summary of Doctoral Dissertation
Physical sciences, Mathematics (01 P)

Vilnius, 2018

The scientific work was written at the Vilnius University in 2014–2018.

Scientific Supervisor:

Prof. Dr. Habil. Antanas Laurinčikas (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics – 01P)

The dissertation is being defended in the public meeting of the Thesis council:

Chairman - Prof. habil. dr. Eugenijus Manstavičius (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics - 01P

Members:

Dr. Nataliya Budarina (Dundalk Institute of Technology, Ireland, Physical Sciences, Mathematics - 01P)

Doc. dr. Paulius Drungilas (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics - 01P)

Prof. habil. dr. Konstantinas Pileckas (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics - 01P)

Prof. dr. Artūras Štikonas (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics - 01P)

The dissertation will be defended at the public meeting of the Thesis council on February 22, at 4 p. m. 2018, in Vilnius University Department of Mathematics and Informatics, room 103.
Address: Naugarduko st. 24, LT-03225, Vilnius, Lithuania.

The summary of the dissertation was distributed on January 22, 2018. The dissertation is available at the Library of Vilnius University and at VU website address: www.vu.lt/naujienos/ivykiu-kalendorius

Tarkime, kad $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis, α , $0 < \alpha \leqslant 1$, yra fiksuotas parametras, o $\mathfrak{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ yra periodinė kompleksinių skaičių seka su minimaliu periodu $k \in \mathbb{N}$. Periodinė Hurvico (Hurwitz) dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(m + \alpha)^s}$$

ir yra meromorfiškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą.

Disertacijoje gaunamos ribinės teoremos periodinei Hurvico dzeta funkcijai apie tikimybinių matų kompleksinėje plokštumoje silpnąjį konvergavimą. Yra nagrinėjami visi galimi parametrų α atvejai.

Tikslas ir uždaviniai. Disertacijos tikslas yra tikimybinių ribinių teoremų įrodymas kompleksinėje plokštumoje periodinėms Hurvico dzeta funkcijoms. Uždaviniai yra šie:

1. Įrodyti vienmates ribines teoremas periodinei Hurvico dzeta funkcijai su įvairios aritmetinės prigimties paramatru.

2. Įrodyti jungtines ribines teoremas periodinėms Hurvico dzeta funkcijoms su įvairiais parametrais.

3. Identifikuoti ribinius matus ribinėse teoremose periodinėms dzeta funkcijoms.

4. Įrodyti diskrečiąsias ribines teoremas periodinei dzeta funkcijai.

Aktualumas. Dzeta funkcijų reikšmių pasiskirstymas yra labai sudėtingas, todėl jo tyrimui yra taikomi įvairūs metodai. Antrame praėjusio amžiaus dešimtmetyje H. Boras (Bohr) pasiūlė Rymano dzeta funkcijos asimptotinio elgesio charakterizavimui taikyti statistinį metodą. Šią savo idėją jis sėkmingai įgyvendino bendruose darbuose su B. Jesenu (Jessen). 1930 ir 1932 m. jie įrodė šiuolaikinių ribinių teoremų apie tikimybinių matų kompleksinėje plokštumoje silpnąjį konvergavimą pirmtakus Rymano dzeta funkcijai. Jų tyrimus tęsė Jesenas bei garsusis A. Selbergas (Selberg). Gautieji rezultatai buvo įdomūs ir atskleidė Rymano dzeta funkcijos statistines savybes. Todėl vėliau sukūrus bendrąją tikimybinių matų silpnojo konvergavimo teoriją, tikimybiniai metodai tapo vienu iš galingų tyrimo įrankių dzeta funkcijų teorijoje. Daugelis skaičių teorijos specialistų toliau vystė Boro idėjas. Tarp jų B. Bagčis (Bagchi), R. Garunkštis, D. Džoineris (Jogner), A. Laurinčikas, K. Macumotas (Matsumoto), J.-L. Mokleras (Mauclaire), J. Štoidingas (Steuding), A. Gošas (Ghosh). Šioje srityje sėkmingai dirba grupė jaunų Japonijos, Lietuvos ir Vokietijos matematikų. Apie 1980 m. tapo aišku, jog tikimybinės ribinės teoremos gali būti taikomos nagrinėjant dzeta funkcijų svarbią savybę - universalumą. Tai dar labiau padidino dėmesį tikimybiniams metodams dzeta funkcijų teorijoje. Visos šios pastabos rodo tikimybinių ribinių teoremų dzeta funkcijoms tyrimų aktualumą.

Metodai. Ribinių teoremų periodinėms Hurvico dzeta funkcijoms įrodymui yra taikomas Furjė transformacijų metodas bei silpnojo tikimybinių matų konvergavimo teorijos elementai, įskaitant Prochorovo teoremas. Ribinių matų identifikavimas remiasi kai kurių transformacijų grupių ergodiškumu.

Naujumas. Visos ribinės teoremos apie silpnai konverguojančius tikimybinius matus kompleksinėje plokštumoje yra naujos. Ribinė teorema funkcijų, analizinių dešinėje kritinės juostos pusėje, erdvėje periodinei Hurvico dzeta funkcijai su transcendenčiuoju parametru α buvo nagrinėjama A. Javtoko ir A. Laurinčiko straipsnyje [4] ryšium su šios funkcijos universalumo tyrimu.

Problemos istorija ir rezultatai. Jau minėjome, kad pirmąsias tikimybinio pobūdžio ribines teoremas Rymano dzeta funkcijai

$$\zeta(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m^s}, \quad \sigma > 1,$$

gavo Boras kartu su Jesenu. Tegul JA yra mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Žordano matas, o R yra uždaras stačiakampis su kraštinėmis, lygiagrečiomis kompleksinės plokštumos ašims. 1930 m. jie įrodė, jog pusplokštumėje $\sigma > 1$ egzistuoja riba

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\mathrm{J}\{t \in [0,T] : \log\zeta(\sigma+it) \in R\}}{T},$$

kuri priklauso tik nuo σ ir R. Po dviejų metų, jie išplėtė ką tik paminėtą teoremą į sritį $\sigma > \frac{1}{2}$. Šis atvejis yra sudėtingesnis, kadangi funkcija $\zeta(s)$ pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$ gali turėti nulių. Tegul

$$G = \left\{s \in \mathbb{C} : \sigma > \tfrac{1}{2}\right\} \setminus \bigcup_{s_j=\sigma_j+it_j} \left\{s = \sigma + it_j : \tfrac{1}{2} < \sigma \leqslant \sigma_j\right\},$$

čia s_j perbėga visus galimus funkcijos $\zeta(s)$ nulius juostoje $\{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$. Tuomet Boras ir Jesenas įrodė tokią teoremą.

A teorema. *Tarkime, kad $\sigma > \frac{1}{2}$. Tuomet egzistuoja riba*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\mathrm{J}\{t \in [0,T] : \sigma+it \in G, \log\zeta(\sigma+it) \in R\}}{T} \overset{def}{=} V(\sigma, R)$$

kuri priklauso tik nuo σ ir R.

Minėtų teoremų įrodymui buvo naudojama gana sudėtinga Boro sukurta iškilų kreivių sumų teorija.

K. Macumotas (1989 m) įvertino konvergavimo greitį A teoremoje.

B teorema. *Su visais $\sigma \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ir $\varepsilon > 0$ yra teisingas įvertis*

$$\begin{aligned} &\mathrm{J}\{t \in [0,T] : \sigma+it \in G, \log\zeta(\sigma+it) \in R\} \\ &\quad = V(\sigma,R)T + \mathrm{O}\left((\mathrm{J}R + \varepsilon)T(\log\log T)^{-(2\sigma-1)/(1-\sigma)+\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Vėliau K. Macumotas apibendrino Boro - Jeseno rezultatus bendresnėms dzeta funkcijoms.

Praėjus trims metams po Boro - Jeseno darbų, Jesenas ir Vintneris pasiūlė naują tikimybinių matų begalinių sąsūkų metodą funkcijos $\zeta(s)$ ribinių teoremų įrodymui. Tegul meas$A$ yra mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matas. Lebego prasme mačių aibių seka $\{A_n : A_n \subset \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$ yra vadinama priimtina, jei $\mathrm{measA_n} > 0$ ir

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{meas} A_n = +\infty.$$

Yra du priimtinų sekų tipai: neribotas ir ribotas. Pirmuoju atveju priimtina seka yra bet kuri intervalų (a_n, b_n) seka, o antruoju - $(0, b_n)$ arba $(a_n, 0)$, čia atitinkamai $b_n - a_n \to +\infty$, $b_n \to +\infty$ ir $a_n \to -\infty$, kai $n \to \infty$. Tegul $\mathcal{B}(X)$ yra erdvės X Borelio σ kūnas. Tuomet turime tokią Jeseno - Vintnerio teoremą.

C teorema. *Jei $\sigma > 1$, tai neribotu atveju, o jei $\frac{1}{2} < \sigma \leqslant 1$, tai ribotu atveju dažnis*

$$\frac{\mathrm{meas}\{t \in A_n : \zeta(\sigma + it) \in A\}}{\mathrm{meas} A_n}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}), \tag{1}$$

kai $n \to \infty$, turi asimptotinę pasiskirstymo funkciją.

Praėjusio šimtmečio viduryje buvo sukurta tikimybinių matų silpnojo konvergavimo teorija. Tegul P ir P_n, $n \in \mathbb{N}$, yra tikimybiniai matai erdvėje $(X, B(X))$, čia X yra metrinė erdvė. Primename, kad P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į P, jei su kiekviena realia, aprėžta, tolydžia funkcija f erdvėje X

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f \mathrm{d}P_n = \int_X f \mathrm{d}P.$$

Taigi, šioje terminologijoje, C teoremą galima interpretuoti taip: (1) dažnis, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į kurį nors tikimybinį matą P_σ erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$.

Jesenas ir Vintneris nagrinėjo ir tikimybinį matą P_σ. Pasirodė, jog jis yra absoliučiai tolydus, t. y., egzistuoja tokia Lebego prasme integruojama funkcija $p_\sigma(x + iy)$, kad su kiekviena aibe $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$

$$P_\sigma(A) = \iint_A p_\sigma(x + iy) \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

1948 m. Borčsenijus kartu su Jesenu funkcijai $\zeta(s)$ įrodė ribinę teoremą, kuri yra panaši į šiuolaikines tikimybines teoremas. Šiam tikslui jie pritaikė beveik periodinių funkcijų teoriją. Yra teisinga tokia teorema

D teorema. *Tarkime, kad $\sigma > \frac{1}{2}$ yra fiksuotas. Tada su kiekvienu fiksuotu $\gamma > 0$,*

$$\frac{\mathrm{meas}\{\gamma < t < \delta : \zeta(\sigma + it) \in A\}}{\delta - \gamma}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

kai $\delta \to \infty$, silpnai konverguoja į kurį nors tikimybinį matą P_σ erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$.

Patogiau yra naudoti tokį D teoremos analogą [7].

E teorema. *Tarkime, kad $\sigma > \frac{1}{2}$ yra fiksuotas. Tada erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ egzistuoja toks tikimybinis matas P_σ, į kurį, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja*

$$\frac{1}{T}\text{meas}\{t \in [0, T] : \zeta(\sigma + it) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

[7] monografijoje E teorema yra įrodyta charakteringųjų transformacijų metodu.

Atvejis $\sigma = \frac{1}{2}$ yra sudėtingesnis, funkcijai $\zeta(s)$ yra reikalingas normavimas. Pirmasis rezultatas šiuo atveju priklauso Selbergui (apie 1949 m., nepublikuotas).

F teorema. *Tegul A yra bet kuri mati aibė $A \subset \mathbb{C}$, turinti teigiamą Žordano matą. Tuomet*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\text{meas}\left\{t \in [0, T] : \frac{\log\zeta(1/2 + it)}{\sqrt{\log\log t}} \in A\right\} = \frac{1}{\pi}\iint_A \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

F teoremos įrodymo kelias trumpai aprašytas [5] monografijoje.

A. Laurinčikas [7] monografijoje nagrinėjo pačią funkciją $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$, o ne jos logaritmą. Pirmiau formuluojame ribinę teoremą moduliui $\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|$. Tegul $\psi_T > 0$, $\psi_T \to \infty$ ir $\psi_T = \mathrm{o}(\log\log T)$, kai $T \to \infty$. Be to,

$$G(x) = \begin{cases} \Phi(\log x), & \text{kai } x > 0, \\ 0, & \text{kai } x \leqslant 0, \end{cases}$$

čia, kaip įprasta,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-u^2/2}\mathrm{d}u.$$

Funkcija $G(x)$ yra logaritmiškai normaliojo dažnio pasiskirstymo funkcija. Tuomet yra teisingas toks tvirtinimas.

G teorema. *Tegul $\sigma \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\psi_T\sqrt{\log\log T}}{\log T}\right]$. Tuomet pasiskirstymo funkcija*

$$\frac{1}{T}\text{meas}\left\{t \in [0, T] : |\zeta(\sigma + it)|^{(1/2\log\log T)^{-1/2}} < x\right\},$$

kai $T \to \infty$, konverguoja pataškiui į $G(x)$.

Teorema, analogiška G teoremai, yra teisinga ir kompleksinėje plokštumoje. Paprastumo dėlei, ją formuluojame tik atveju $\sigma = \frac{1}{2}$ [7].

H teorema. *Tegul P yra tikimybinis matas erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ su charakteringąja transformacija*

$$\int_{\mathbb{C}\setminus\{0\}} |z|^{it} \mathrm{e}^{ik \arg z} \mathrm{d}P = \exp\left\{-\tfrac{t^2}{2} - \tfrac{k^2}{2}\right\}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Tuomet

$$\frac{1}{T} \mathrm{meas}\left\{t \in [0,T] : \left(\zeta\left(\tfrac{1}{2} + it\right)\right)^{(1/2 \log\log T)^{-1/2}} \in A\right\},$$

kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P.

Yra gerai žinoma, kad Rymano dzeta funkcija pusplokštumėje $\sigma > 1$ turi Oilerio sandaugą

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

pagal pirminius skaičius p. Tačiau ribinės teoremos taip pat yra žinomos ir dzeta funkcijoms, kurios neturi Oilerio sandaugos. Paprasčiausia iš tokių funkcijų yra Hurvico dzeta funkcija. Tegul α, $0 < \alpha \leqslant 1$, yra fiksuotas parametras. Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+\alpha)^s}$$

ir yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu 1. Aišku, kad $\zeta(s, 1) = \zeta(s)$ ir

$$\zeta\left(s, \tfrac{1}{2}\right) = (2^s - 1)\, \zeta(s).$$

Išskyrus šiuos du parametro α atvejus, funkcija $\zeta(s, \alpha)$ neturi Oilerio sandaugos pagal pirminius skaičius.

[10] monografijoje, 5.1.1 teorema, randame tokį tvirtinimą.

I teorema. *Tarkime, kad $\sigma > \frac{1}{2}$ yra fiksuotas. Tuomet erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ egzistuoja toks tikimybinis matas P_σ, į kurį, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja*

$$\frac{1}{T} \mathrm{meas}\{t \in [0,T] : \zeta(\sigma + it, \alpha) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

Ši teorema duoda tik ribinio mato egzistavimą, tačiau šio mato išreikštinis pavidalas lieka nežinomas. Be to, aišku, kad ribinis matas turi priklausyti nuo parametro α. Pastaroji problema funkcijai $\zeta(s, \alpha)$ yra išspręsta [10] monografijoje analizinių funkcijų erdvėje.

Rezultatas, analogiškas I teoremai, [10] monografijoje yra gautas sudėtingesnei Lercho dzeta funkcijai $L(\lambda, \alpha, s)$, kuri pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama eilute

$$L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{2\pi i \lambda m}}{(m+\alpha)^s}$$

ir yra meromorfiškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą. Čia $\lambda \in \mathbb{R}$ yra kitas fiksuotas parametras.

Ribinės teoremos kompleksinėje plokštumoje yra nagrinėjamos ir bendrosioms Dirichlė eilutėms

$$f(s) = \sum_{m=1}^{\infty} a(m)\mathrm{e}^{-\lambda_m s}, \quad \sigma \geqslant \sigma_0,$$

čia $\{a(m) : m \in \mathbb{N}\}$ yra kompleksinių skaičių seka, o $\{\lambda_m : m \in \mathbb{N}\}$ yra didėjanti realiųjų skaičių seka,

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_m = +\infty.$$

Eilėje A. Laurinčiko ir jo mokinių darbų įvairiose erdvėse buvo įrodytos ribinės teoremos funkcijai $f(s)$. Pateikiame vieną [8] darbo teoremą.

J teorema. *Tarkime, kad funkcija $f(s)$ yra meromorfiškai pratęsiama į pusplokštumę $\sigma > \sigma_1$ su $\sigma_1 < \sigma_0$ ir visi poliai šioje pusplokštumėje priklauso kompaktinei aibei. Be to, tegul srityje $\sigma > \sigma_1$ galioja įverčiai*

$$f(s) = \mathrm{O}(|t|^a), \quad |t| \geq t_0, \quad a \geq 0,$$

ir

$$\int_{-T}^{T} |f(\sigma+it)|^2 \mathrm{d}t = \mathrm{O}(T), \quad T \to \infty.$$

Tuomet erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ egzistuoja toks tikimybinis matas P_σ, į kurį, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja

$$\frac{1}{T}\mathrm{meas}\{t \in [0,T] : f(\sigma+it) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

Kai rodiklių seka $\{\lambda_m\}$ tenkina papildomas sąlygas, galima nurodyti ir ribinio mato P_σ išreikštinį pavidalą.

J.-L. Mokleras taip pat nagrinėjo [13] bendrųjų Dirichlė eilučių reikšmių pasiskirstymą ir joms įrodė daugiamates ribines teoremas analizinių bei periodinių funkcijų erdvėse, tačiau ribinių matų išreikštinis pavidalas tose teoremose nėra nurodomas. Kai rodiklių sekos tenkina papildomas sąlygas, jis įrodė, kad ribiniai matai daugiamatėse teoremose yra lygūs atitinkamų vienmačių ribinių teoremų ribinių matų sandaugai. Moklero naudojamas metodas remiasi Besikovičiaus beveik periodinių funkcijų teorija.

Disertacijos tyrimų objektas, periodinė Hurvico dzeta funkcija, yra klasikinės Hurvico dzeta funkcijos $\zeta(s,\alpha)$ apibendrinimas. Tegul $\{a_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ yra periodinė kompleksinių skaičių seka su minimaliu periodu $k \in \mathbb{N}$, o α, $0 < \alpha \leqslant 1$, kaip ir funkcijos $\zeta(s,\alpha)$ apibrėžime, yra fiksuotas parametras. Kaip jau minėjome, periodinė Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a})$ srityje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(m+\alpha)^s}.$$

Iš sekos $\mathfrak{a}$ periodiškumo turime, kad

$$\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a}) = \frac{1}{k^s} \sum_{l=0}^{k-1} a_l \zeta\left(s, \tfrac{\alpha+l}{k}\right), \quad \sigma > 1.$$

Taigi, funkcija $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a})$ yra Hurvico dzeta funkcijų tiesinės kombinacijos ir daugiklio k^{-s} sandauga. Todėl pastaroji lygybė ir funkcijos $\zeta(s,\alpha)$ savybės duoda funkcijos $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a})$ analizinį pratęsimą į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus papratąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu

$$a \overset{def}{=} \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} a_l.$$

Jei $a = 0$, tai tuomet periodinė Hurvico dzeta funkcija yra sveikoji.

Disertacijoje yra nagrinėjamos įvairios ribinės teoremos funkcijai $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a})$. Visose ribinėse teoremose yra nurodomos ribinio mato išreikštinis pavidalas. Šis pavidalas priklauso nuo parametro α aritmetinės prigimties. Todėl teoremų formuluotėms reikalingi atitinkami apibrėžimai. Tegul $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$ yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje. Apibrėžiame aibę

$$\Omega_1 = \prod_{m=0}^{\infty} \gamma_m,$$

čia $\gamma_m = \gamma$ su visais $m \in \mathbb{N}_0$. Begaliniamatis toras Ω_1 su sandaugos topologija ir pataškinės daugybos operacija pagal Tichonovo klasikinę teoremą yra kompaktinė topologinė Abelio grupė. Todėl galime konstruoti tikimybinę erdvę $(\Omega_1, \mathcal{B}(\Omega_1), m_{1H})$, kurioje m_{1H} yra tikimybinis Haro matas mačioje erdvėje $(\Omega_1, \mathcal{B}(\Omega_1))$. Tegul $\omega_1(m)$ yra elemento $\omega_1 \in \Omega_1$ projekcija į koordinatinę erdvę γ_m, $m \in \mathbb{N}_0$. Tikimybinėje erdvėje $(\Omega_1, \mathcal{B}(\Omega_1), m_{1H})$ apibrėžiame kompleksines reikšmes įgyjantį atsitiktinį dydį $\zeta_1(\sigma,\alpha,\omega_1;\mathfrak{a})$

$$\zeta_1(\sigma,\alpha,\omega_1;\mathfrak{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m \omega_1(m)}{(m+\alpha)^\sigma}, \quad \sigma > \frac{1}{2}.$$

Tegul P_{ζ_1} yra atsitiktinio dydžio $\zeta_1(\sigma, \alpha, \omega_1; \mathfrak{a})$ pasiskirstymas, t.y.,

$$P_{\zeta_1}(A) = m_{1H}\{\omega_1 \in \Omega_1 : \zeta_1(\sigma, \alpha, \omega_1; \mathfrak{a}) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

1 skyriaus pirmoji teorema nagrinėja funkciją $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$ su transcendenčiuoju parametru α. Primename, kad α yra vadinamas transcendenčiuoju, jei jis nėra jokio polinomo $p \not\equiv 0$ su racionaliais koeficientais šaknis.

1.1 teorema. *Tarkime, kad α yra transcendentusis skaičius ir $\sigma > \frac{1}{2}$. Tuomet*

$$\frac{1}{T}\text{meas}\{t \in [0, T] : \zeta(\sigma + it, \alpha; \mathfrak{a}) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P_{ζ_1}.

Pastebime, kad 1.1 teorema apibendrina ir sustiprina 5.1.1 teoremą iš [10], įrodytą Lercho dzeta funkcijai, todėl ir I teoremą, teisingą Hurvico dzeta funkcijai, nes $\mathfrak{a}$ yra bet kuri periodinė seka, be to, 1.1 teoremoje yra nurodomas ribinio mato išreikštinis pavidalas.

Transcendenčiojo parametro α atvejis yra paprasčiausias, kadangi šiuo atveju aibė

$$L(\alpha) = \{\log(m + \alpha) : m \in \mathbb{N}_0\}$$

yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$.

Antroje 1 skyriaus teoremoje yra nagrinėjamas racionaliojo $\alpha = \frac{r}{q}$, $0 < r \leqslant q$, $(r, q) = 1$, atvejis. Apibrėžiame torą

$$\Omega_2 = \prod_p \gamma_p,$$

čia $\gamma_p = \gamma$ su visais pirminiais p. Šiuo atveju turime tikimybinę erdvę $(\Omega_2, \mathcal{B}(\Omega_2), m_{2H})$, kurioje m_{2H} yra tikimybinis Haro matas erdvėje $(\Omega_2, \mathcal{B}(\Omega_2))$. Tegul $\omega_2(p)$ yra elemento $\omega_2 \in \Omega_2$ projekcija į koordinatinę erdvę γ_p. Pratęsiame funkciją $\omega_2(p)$ į visą aibę $\mathbb{N}$ formulės

$$\omega_2(m) = \prod_{p^l \| m} \omega_2^l(p), \quad m \in \mathbb{N},$$

pagalba, čia $p^l \| m$ žymi, kad $p^l \mid m$, bet $p^{l+1} \nmid m$. Dabar tikimybinėje erdvėje $(\Omega_2, \mathcal{B}(\Omega_2), m_{2H})$ apibrėžiame kompleksines reikšmes įgyjantį atsitiktinį dydį $\zeta_2(\sigma, \alpha, \omega_2; \mathfrak{a})$ formule

$$\zeta_2(\sigma, \alpha, \omega_2; \mathfrak{a}) = \overline{\omega_2(q)} q^\sigma \sum_{\substack{m=1 \\ m \equiv r (\bmod q)}}^{\infty} \frac{a_{(m-r)/q}\omega_2(m)}{(m + \alpha)^\sigma}, \quad \sigma > \frac{1}{2}.$$

Tegul P_{ζ_2} yra šio elemento pasiskirstymas, t. y.,

$$P_{\zeta_2}(A) = m_{2H}\{\omega_2 \in \Omega_2 : \zeta_2(\sigma, \alpha, \omega_2; \mathfrak{a}) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

Tuomet antroji 1 skyriaus teorema yra tokia.

1.2 teorema. *Tarkime, kad* $\alpha = \frac{r}{q}$ *yra racionalusis skaičius ir* $\sigma > \frac{1}{2}$. *Tuomet*

$$\frac{1}{T}\text{meas}\{t \in [0, T] : \zeta(\sigma + it, \alpha; \mathfrak{a}) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

kai $T \to \infty$, *silpnai konverguoja į matą* P_{ζ_2} .

Sudėtingiausias iš visų yra algebrinio iracionaliojo α atvejis. Primename, kad α yra algebrinis, jei egzistuoja toks polinomas $p \not\equiv 0$ su racionaliaisiais koeficientais, kad $p(\alpha) = 0$. Šiuo atveju nėra jokios griežtos informacijos apie aibės $L(\alpha)$ tiesinį nepriklausomumą. Yra žinomas tik gilus Kaselso (Cassels) rezultatas [2], kad bent 51 procentas aibės $L(\alpha)$ elementų tankio prasme yra tiesiškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$. Tegul $I(\alpha)$ yra maksimalus tiesiškai nepriklausomas aibės $L(\alpha)$ poaibis. Tarkime, jog $L(\alpha) \neq I(\alpha)$, kadangi lygybės $L(\alpha) = I(\alpha)$ atveju gauname, kad aibė $L(\alpha)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$, todėl turime tokią pat situaciją kaip ir transcendenčiojo α atveju. Apibrėžiame aibę $D(\alpha) = L(\alpha) \setminus I(\alpha)$ ir pažymime $d_m = \log(m + \alpha) \in D(\alpha)$. Jei $d_m \in D(\alpha)$, tuomet iš aibės $I(\alpha)$ maksimalumo turime, kad aibė $I(\alpha) \cup \{d_m\}$ jau yra tiesiškai priklausoma virš $\mathbb{Q}$. Todėl atsiras tokie elementai $i_{m_1}, \dots, i_{m_n} \in I(\alpha)$ ir $k_0, \dots, k_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, kad

$$d_m = -\frac{k_1}{k_0} i_{m_1} - \dots - \frac{k_n}{k_0} i_{m_n}.$$

Iš čia išplaukia, kad

$$m + \alpha = (m_1 + \alpha)^{-k_1/k_0} \cdots (m_n + \alpha)^{-k_n/k_0}. \tag{2}$$

Čia, aišku, kad m_j, $j = 1, \dots, n$, ir k_j, $j = 0, 1, \dots, n$, priklauso nuo m.

Apibrėžiame du aibės $\mathbb{N}_0$ poaibius

$$\mathcal{M}(\alpha) = \{m \in \mathbb{N}_0 : \log(m + \alpha) \in I(\alpha)\}$$

ir

$$\mathcal{N}(\alpha) = \{m \in \mathbb{N}_0 : \log(m + \alpha) \in D(\alpha)\}.$$

Be to, apibrėžiame dar vieną torą

$$\Omega_3 = \prod_{m \in \mathcal{M}(\alpha)} \gamma_m,$$

čia $\gamma_m = \gamma$ su visais $m \in \mathcal{M}(\alpha)$. Gauname naują tikimybinę erdvę $(\Omega_3, \mathcal{B}(\Omega_3), m_{3H})$, kurioje m_{3H} yra tikimybinis Haro matas erdvėje $(\Omega_3, \mathcal{B}(\Omega_3))$. Tegul $\omega_3(m)$ yra elemento $\omega_3 \in \Omega_3$ projekcija į koordinatinę erdvę γ_m, $m \in \mathcal{M}(\alpha)$. Pratęsiame funkciją $\omega_3(m)$ į visą aibę $\mathbb{N}_0$, kai $m \in \mathcal{N}(\alpha)$ ir galioja (2), imdami

$$\omega_3(m) = \omega_3(m_1)^{-k_1/k_0} \cdots \omega_3(m_n)^{-k_n/k_0}.$$

Čia yra imamos pagrindinės šaknų reikšmės.

Apibrėžiame pagalbinį torą

$$\widehat{\Omega} = \prod_{m \in \mathcal{N}(\alpha)} \gamma_m,$$

čia $\gamma_m = \gamma$ su visais $m \in \mathcal{N}(\alpha)$. Tegul $\hat{\omega}(m)$ yra elemento $\hat{\omega} \in \hat{\Omega}$ projekcija į koordinatinę erdvę γ_m , $m \in \mathcal{N}(\alpha)$. Apibrėžiame funkciją $h : \Omega_3 \to \hat{\Omega}$ formule

$$\widehat{\omega}(m) = \omega_3(m_1)^{-k_1/k_0} \cdots \omega_3(m_n)^{-k_n/k_0}, \quad m \in \mathcal{N}(\alpha),$$

kai galioja (2) lygybė.

A hipotezė. *Funkcija h yra siurjektyvi, t.y., kiekvienas elementas $\hat{\omega}$ turi pirmvaizdį.*

Laikydami, kad A hipotezė yra teisinga, tikimybinėje erdvėje $(\Omega_3, \mathcal{B}(\Omega_3), m_{3H})$ apibrėžiame kompleksines reikšmes įgyjantį atsitiktinį dydį

$$\zeta_3(\sigma, \alpha, \omega_3; \mathfrak{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m \omega_3(m)}{(m+\alpha)^\sigma}, \quad \sigma > \frac{1}{2}, \tag{3}$$

ir tegul P_{ζ_3} yra jo pasiskirstymas, t.y.,

$$P_{\zeta_3}(A) = m_{3H}\{\omega_3 \in \Omega_3 : \zeta_3(\sigma, \alpha, \omega_3; \mathfrak{a}) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

A hipotezė yra reikalinga įrodymui, kad (3) eilutė konverguoja su beveik visais $\omega_3 \in \Omega_3$ mato m_{3H} atžvilgiu. Disertacijos 2 skyrius yra skirtas algebrinio iracionaliojo parametro α atveju. Gauta tokia teorema.

2.1 teorema. *Tarkime, kad α yra algebrinis iracionalusis skaičius, teisinga A hipotezė ir $\sigma > \frac{1}{2}$. Tuomet*

$$\frac{1}{T}\text{meas}\{t \in [0, T] : \zeta(\sigma + it, \alpha; \mathfrak{a}) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P_{ζ_3} .

Pastebime, kad pirmoji ribinė teorema Hurvico dzeta funkcijai su algebriniu iracionaliuoju parametru α pusplokštumėje $\sigma > 1$ buvo įrodyta [9] darbe. Atvejis, kai $\sigma > \frac{1}{2}$, kol kas nėra išnagrinėtas. Lercho dzeta funkcijai yra žinomas 2.1 teoremos analogas, kai $\frac{k_1}{k_0}, \ldots, \frac{k_n}{k_0}$ yra sveikieji skaičiai. Aišku, kad tai yra labai stiprus reikalavimas.

Antroji disertacijos pusė yra skirta periodinių Hurvico dzeta funkcijų jungtinėms ribinėms teoremoms kompleksinėje plokštumoje. Pirmoji tokio tipo teorema Lercho dzeta funkcijoms buvo gauta [11] darbe. Tegul $L(\lambda_1, \alpha_1, s), \ldots, L(\lambda_r, \alpha_r, s)$ yra Lercho dzeta funkcijų rinkinys ir $\mathbb{C}^r = \underbrace{\mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}}_{r}$.

2.2 teorema. *Tarkime, kad* $\min\limits_{1\leqslant j\leqslant r}\sigma_j > \frac{1}{2}$. *Tada erdvėje* $(\mathbb{C}^r, \mathcal{B}(\mathbb{C}^r))$ *egzistuoja toks tikimybinis matas* P, *į kurį, kai* $T\to\infty$, *silpnai konverguoja*

$$\frac{1}{T}\text{meas}\{t\in[0,T] : L(\lambda_1,\alpha_1,\sigma_1+it),\dots,L(\lambda_r,\alpha_r,\sigma_r+it)\in A\},\quad A\in\mathcal{B}(\mathbb{C}^r).$$

Matome, kad šioje teoremoje yra įrodytas tik ribinio mato P egzistavimas, tačiau išreikštinis pavidalas nėra nurodytas. Aišku, kad P priklauso nuo $\sigma_1,\dots,\sigma_r$ ir Lercho dzeta funkcijų parametrų.

Vėliau įvairūs autoriai įrodė visą eilę jungtinių ribinių teoremų dzeta funkcijoms analizinių funkcijų, apibrėžtų dešinėse kritinių juostų pusėse, erdvėje. Šios teoremos buvo naudojamos nagrinėjamų dzeta funkcijų universalumui įrodyti.

Pirmoji disertacijos jungtinė ribinė teorema yra skirta periodinėms Hurvico dzeta funkcijoms su algebriškai nepriklausomais parametrais virš $\mathbb{Q}$. Primename, kad skaičiai $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ yra algebriškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$, jei nėra jokio polinomo $p\not\equiv 0$ su racionaliaisiais koeficientais, kad $p(\alpha_1,\dots,\alpha_r)=0$. Tegul $r\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$, o $\zeta(s,\alpha_j;\mathfrak{a}_j)$ yra periodinė Hurvico dzeta funkcija su parametru α_j, $0<\alpha_j\leqslant 1$, ir periodine kompleksinių skaičių seka $\mathfrak{a}_j=\{a_{mj} : m\in\mathbb{N}_0\}$ su minimaliuoju periodu $k_j\in\mathbb{N}$, $j=1,\dots,r$. Trumpumo dėlei, naudojame žymenis $\underline{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_r)$, $\underline{\mathfrak{a}}=(\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_r)$, $\underline{\sigma}=(\sigma_1,\dots,\sigma_r)$, $\underline{s}=(s_1,\dots,s_r)$, $\underline{\sigma}+it=(\sigma_1+it,\dots,\sigma_r+it)$ ir

$$\underline{\zeta}(\underline{s},\underline{\alpha};\underline{\mathfrak{a}})=(\zeta(s_1,\alpha_1;\mathfrak{a}_1),\dots,\zeta(s_r,\alpha_r;\mathfrak{a}_r)).$$

Apibrėžiame

$$\underline{\Omega}_1=\prod_{j=1}^{r}\Omega_{1j},$$

čia $\Omega_{1j}=\Omega_1$, su visais $j=1,\dots,r$. $\underline{\Omega}_1$, kaip kompaktinių topologinių grupių Dekarto sandauga, yra taip pat kompaktinė topologinė grupė. Todėl erdvėje $(\underline{\Omega}_1,\mathcal{B}(\underline{\Omega}_1))$ galima apibrėžti tikimybinį Haro matą $\underline{m}_{1H}$ ir gauname tikimybinę erdvę $(\underline{\Omega}_1,\mathcal{B}(\underline{\Omega}_1),\underline{m}_{1H})$. Grupės $\underline{\Omega}_1$ elementus žymime simboliu $\underline{\omega}=(\omega_1,\dots,\omega_r)$ ir tikimybinėje erdvėje $(\underline{\Omega}_1, \mathcal{B}(\underline{\Omega}_1),\underline{m}_{1H})$ apibrėžiame $\mathbb{C}^r$ reikšmį atsitiktinį elementą

$$\underline{\zeta}(\underline{\sigma},\underline{\alpha},\underline{\omega};\underline{\mathfrak{a}})=(\zeta(\sigma_1,\alpha_1,\omega_1;\mathfrak{a}_1),\dots,\zeta(\sigma_r,\alpha_r,\omega_r;\mathfrak{a}_r)),$$

čia $\sigma_j>\frac{1}{2}$ ir

$$\zeta(\sigma_j,\alpha_j,\omega_j;\mathfrak{a}_j)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_{m_j}\omega_j(m)}{(m+\alpha_j)^{\sigma_j}},\quad j=1,\dots,r.$$

Tegul $P_{1\underline{\zeta}}$ yra atsitiktinio elemento $\underline{\zeta}(\underline{\sigma},\underline{\alpha},\underline{\omega};\underline{\mathfrak{a}})$ pasiskirstymas, t.y.,

$$P_{1\underline{\zeta}}(A)=\underline{m}_{1H}\left\{\underline{\omega}\in\underline{\Omega}_1 : \underline{\zeta}(\underline{\sigma},\underline{\alpha},\underline{\omega};\underline{\mathfrak{a}})\in A\right\},\quad A\in\mathcal{B}(\mathbb{C}^r).$$

Tuomet pirmoji 3 skyriaus teorema turi tokį pavidalą.

3.1 teorema. *Tarkime, kad* $\min\limits_{1\leqslant j\leqslant r}\sigma_j > \frac{1}{2}$, *o skaičiai* $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ *yra algebriškai nepriklausomi virš* $\mathbb{Q}$. *Tuomet*

$$\frac{1}{T}\text{meas}\{t\in[0,T]:\underline{\zeta}(\underline{\sigma}+it,\underline{\alpha};\underline{\mathfrak{a}})\in A\},\quad A\in\mathcal{B}(\mathbb{C}^r),$$

kai $T\to\infty$, *silpnai konverguoja į matą* $P_{1\underline{\zeta}}$.

Antroje 3 skyriaus teoremoje yra nagrinėjamas racionaliųjų parametrų $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ atvejis. Tarkime, kad $\alpha_j=\frac{a_j}{q_j}$, $a_j,q_j\in\mathbb{N}$, $0<a_j<q_j$, $(a_j,q_j)=1$, $j=1,\dots,r$. Naudodami 1.2 teoremos žymenis, tikimybinėje erdvėje $(\Omega_2,\mathcal{B}(\Omega_2),m_{2H})$ apibrėžiame $\mathbb{C}^r$ reikšmį atsitiktinį elementą

$$\underline{\zeta}(\underline{\sigma},\underline{\alpha},\omega_2;\underline{\mathfrak{a}})=(\zeta(\sigma_1,\alpha_1,\omega_2;\mathfrak{a}_1),\dots,\zeta(\sigma_r,\alpha_r,\omega_2;\mathfrak{a}_r)),$$

čia $\sigma_j>\frac{1}{2}$,

$$\zeta(\sigma_j,\alpha_j,\omega_2;\mathfrak{a}_j)=\overline{\omega_2(q_j)}q^{\sigma_j}\sum_{\substack{m=1\\ m\equiv a_j(\bmod q_j)}}^{\infty}\frac{a_{(m-a_j)/q_j}\omega_2(m)}{m^{\sigma_j}},\quad j=1,\dots,r,$$

ir $\overline{\omega_2(q_j)}$ žymi $\omega_2(q_j)$ jungtinį. Tegul $P_{2\underline{\zeta}}$ yra atsitiktinio elemento $\underline{\zeta}(\underline{\sigma},\underline{\alpha},\underline{\omega};\underline{\mathfrak{a}})$ pasiskirstymas, t.y.,

$$P_{2\underline{\zeta}}(A)=m_{2H}\{\omega_2\in\Omega_2:\underline{\zeta}(\underline{\sigma},\underline{\alpha},\omega_2;\underline{\mathfrak{a}})\in A\},\quad A\in\mathcal{B}(\mathbb{C}^r).$$

Tuomet turime tokį 3.1 teoremos analogą.

3.2 teorema. *Tarkime, kad* $\min\limits_{1\leqslant j\leqslant r}\sigma_j>\frac{1}{2}$ *ir* $\alpha_j=\frac{a_j}{q_j}$, $a_j,q_j\in\mathbb{N}$, $0<a_j<q_j$, $(a_j,q_j)=1$, $j=1,\dots,r$. *Tuomet*

$$\frac{1}{T}\text{meas}\{t\in[0,T]:\underline{\zeta}(\underline{\sigma}+it,\underline{\alpha};\underline{\mathfrak{a}})\in A\},\quad A\in\mathcal{B}(\mathbb{C}^r),$$

kai $T\to\infty$, *silpnai konverguoja į matą* $P_{2\underline{\zeta}}$.

Disertacijos 4 skyriuje yra gauta jungtinė ribinė teorema kompleksinėje plokštumoje periodinėms Hurvico dzeta funkcijoms su algebriniais iracionaliaisiais parametrais. Kaip ir vienmačiu atveju, ši teorema remiasi viena hipoteze.

Tegul $j=1,\dots,r$, o $I(\alpha_j)$ yra maksimalus tiesiškai nepriklausomas virš $\mathbb{Q}$ aibės $L(\alpha_j)$ poaibis. Laikome, kad $L(\alpha_j)\neq I(\alpha_j)$ ir apibrėžiame aibę $D(\alpha_j)=L(\alpha_j)\setminus I(\alpha_j)$. Jei $d_{mj}=\log(m+\alpha_j)\in D(\alpha_j)$, tai tuomet aibė $I(\alpha_j)\cup\{d_{mj}\}$ jau yra tiesiškai priklausoma virš $\mathbb{Q}$. Todėl egzistuoja tokie elementai $i_{m_{1j}},\dots,i_{m_{nj}}\in I(\alpha_j)$ ir $k_{0j},\dots,k_{nj}\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, kad

$$d_{mj}=-\frac{k_{1j}}{k_{0j}}i_{m_{1j}}-\dots-\frac{k_{nj}}{k_{0j}}i_{m_{nj}}.$$

Iš čia randame, kad su visais $j = 1, \dots, r$

$$m + \alpha_j = (m_1 + \alpha_j)^{-k_{1j}/k_{0j}} \cdots (m_n + \alpha_j)^{-k_{nj}/k_{0j}}. \tag{4}$$

Apibrėžiame aibes

$$\mathcal{M}(\alpha_j) = \{m \in \mathbb{N}_0 : \log(m + \alpha_j) \in I(\alpha_j)\}, \quad j = 1, \dots, r,$$

ir

$$\mathcal{N}(\alpha_j) = \{m \in \mathbb{N}_0 : \log(m + \alpha_j) \in D(\alpha_j)\}, \quad j = 1, \dots, r.$$

Tegul

$$\Omega_{3j} = \prod_{m \in \mathcal{M}(\alpha_j)} \gamma_m,$$

čia $\gamma_m = \gamma$ su visais $m \in \mathcal{M}(\alpha_j)$, $j = 1, \dots, r$, ir

$$\underline{\Omega}_3 = \prod_{j=1}^{r} \Omega_{3j}.$$

Tuomet aibė $\underline{\Omega}_3$ vėl yra kompaktinė topologinė grupė. Todėl erdvėje $(\underline{\Omega}_3, \mathcal{B}(\underline{\Omega}_3))$ egzistuoja tikimybinis Haro matas $\underline{m}_{3H}$, ir turime tikimybinę erdvę $(\underline{\Omega}_3, \mathcal{B}(\underline{\Omega}_3), \underline{m}_{3H})$. Tegul $\omega_{3j}(m)$ yra elemento $\omega_{3j} \in \Omega_{3j}$ projekcija į koordinatinę erdvę γ_m, $m \in \mathcal{M}(\alpha_j)$. Kai galioja (4) lygybė, pratęsiame funkciją $\omega_{3j}(m)$ į visą aibę $\mathbb{N}_0$ naudodami formulę

$$\omega_{3j}(m) = \omega_{3j}(m_1)^{-k_{1j}/k_{0j}} \cdots \omega_{3j}(m_n)^{-k_{1j}/k_{0j}}, \quad m \in \mathcal{N}(\alpha_j), \quad j = 1, \dots, r.$$

Čia imamos pagrindinės šaknų reikšmės.

Tegul

$$\hat{\Omega}_j = \prod_{m \in \mathcal{N}(\alpha_j)} \gamma_m,$$

čia $\gamma_m = \gamma$ su visais $m \in \mathcal{N}(\alpha_j)$, $j = 1, \dots, r$. Tegul $\hat{\omega}_j(m)$ yra elemento $\hat{\omega}_j \in \hat{\Omega}_j$ projekcija į koordinatinę erdvę γ_m , $m \in \mathcal{N}(\alpha_j)$, o funkcija $h_j : \Omega_{3j} \to \hat{\Omega}_j$, kai galioja (4) lygybė, yra apibrėžiama formule

$$\hat{\omega}_j(m) = \omega_{3j}(m_1)^{-k_{1j}/k_{0j}} \cdots \omega_{3j}(m_n)^{-k_{nj}/k_{0j}}, \quad m \in \mathcal{N}(\alpha_j).$$

A^r hipotezė. *Su visais $j = 1, \dots, r$, funkcija h_j yra siurjektyvi.*

Grupės $\underline{\Omega}_3$ elementus žymime $\underline{\omega}_3 = (\omega_{31}, \dots, \omega_{3r})$ ir tardami, kad A^r hipotezė yra teisinga, tikimybinėje erdvėje $(\underline{\Omega}_3, \mathcal{B}(\underline{\Omega}_3), \underline{m}_{3H})$ apibrėžiame C^r reikšmį atsitiktinį elementą

$$\underline{\zeta}(\underline{\sigma}, \underline{\alpha}, \underline{\omega}_3; \underline{\mathfrak{a}}) = (\zeta(\sigma_1, \alpha_1, \omega_{31}; \mathfrak{a}_1), \dots, \zeta(\sigma_r, \alpha_r, \omega_{3r}; \mathfrak{a}_r)),$$

čia $\sigma_j > \frac{1}{2}$ ir

$$\zeta(\sigma_j, \alpha_j, \omega_{3j}; \mathfrak{a}_j) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{mj}\omega_{3j}(m)}{(m+\alpha_j)^{\sigma^j}}, \quad j = 1, \ldots, r.$$

Tegul $P_{3\underline{\zeta}}$ yra atsitiktinio elemento $\underline{\zeta}(\underline{\sigma}, \underline{\alpha}, \underline{\omega}_3; \underline{\mathfrak{a}})$ pasiskirstymas, t. y.,

$$P_{3\underline{\zeta}}(A) = \underline{m}_{3H}\{\underline{\omega}_3 \in \underline{\Omega}_3 : \underline{\zeta}(\underline{\sigma}, \underline{\alpha}, \underline{\omega}_3; \underline{\mathfrak{a}}) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^r).$$

Pagrindinis 4 skyriaus rezultatas yra tokia teorema.

4.1 teorema. *Tarkime, kad $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ yra algebriniai iracionalieji skaičiai, A^r hipotezė yra teisinga, ir aibė*

$$L(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) = \{(\log(m+\alpha_1) : m \in \mathcal{M}(\alpha_1)), \ldots, (\log(m+\alpha_r) : m \in \mathcal{M}(\alpha_r))\}$$

yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$ ir $\min_{1 \leqslant j \leqslant r} \sigma_j > \frac{1}{2}$. Tada

$$\frac{1}{T}\text{meas}\{t \in [0, T] : \underline{\zeta}(\underline{\sigma} + it, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^r),$$

kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $P_{3\underline{\zeta}}$.

Disertacijos 5 skyriuje yra įrodoma „mišri" jungtinė ribinė teorema periodinėms Hurvico dzeta funkcijoms. Šiame skyriuje nagrinėjamas periodinių Hurvico dzeta funkcijų rinkinys, sudarytas iš dzeta funkcijų su algebriškai nepriklausomais parametrais ir dzeta funkcijų su racionaliaisiais parametrais.

Tegul $\underline{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_r, \hat{\sigma}_1, \ldots, \hat{\sigma}_{r_1})$, $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_{r_1})$, $\underline{\mathfrak{a}} = (\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r, \hat{\mathfrak{a}}_1, \ldots, \hat{\mathfrak{a}}_{r_1})$, o

$$\underline{\underline{\zeta}}(s, \underline{\alpha}, \underline{\mathfrak{a}}) = (\zeta(s, \alpha_1, \mathfrak{a}_1), \ldots, \zeta(s, \alpha_r, \mathfrak{a}_r), \zeta(s, \hat{\alpha}_1, \hat{\mathfrak{a}}_1), \ldots, \zeta(s, \hat{\alpha}_{r_1}, \hat{\mathfrak{a}}_{r_1})).$$

Čia parametrai $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ yra algebriškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$, o parametrai $\hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_{r_1}$ yra racionalieji. Sekos $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ yra tokios pat, kaip ir 3.1, 3.2 ir 4.1 teoremose, o seka $\hat{\mathfrak{a}}_j = \{\hat{\mathfrak{a}}_{mj} : m \in \mathbb{N}_0\}$ su visais $j = 1, \ldots, r_1$ yra periodinė kompleksinių skaičių seka su minimaliuoju periodu $\hat{k}_j \in \mathbb{N}$.

Apibrėžiame $\Omega = \underline{\Omega}_1 \times \Omega_2$, čia $\underline{\Omega}_1$ yra apibržtas 3.1 teoremoje, o Ω_2 yra naudojamas 1.2 teoremoje. Tuomet Ω vėl yra kompaktinė topologinė Abelio grupė, ir mes turime tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$, kurioje m_H yra tikimybinis Haro matas. Tegul $\underline{\omega} = (\omega_{11}, \ldots, \omega_{1r}; \omega_2)$ yra grupės Ω elementai, ir tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$, apibrėžiame $\mathbb{C}^{r+r_1}$ reikšmį atsitiktinį elementą

$$\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\sigma}, \underline{\alpha}, \underline{\omega}; \underline{\mathfrak{a}}) = (\zeta(\sigma_1, \alpha_1, \omega_{11}; \mathfrak{a}_1), \ldots, \zeta(\sigma_r, \alpha_r, \omega_{1r}; \mathfrak{a}_r), \zeta(\hat{\sigma}_1, \hat{\alpha}_1, \omega_2; \hat{\mathfrak{a}}_1), \ldots,$$
$$\zeta(\hat{\sigma}_{r_1}, \hat{\alpha}_{r_1}, \omega_2; \hat{\mathfrak{a}}_{r_1})),$$

čia $\sigma_j > \frac{1}{2}$,

$$\zeta(\sigma_j, \alpha_j, \omega_{1j}; \mathfrak{a}_j) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{mj}\omega_{1j}(m)}{(m+\alpha_j)^{\sigma_j}}, \quad j = 1, \dots, r,$$

ir $\hat{\sigma}_j > \frac{1}{2}$,

$$\zeta(\hat{\sigma}_j, \hat{\alpha}_j, \omega_2; \hat{\mathfrak{a}}_j) = \overline{\omega_2(q_j)} q_j{}^{\hat{\sigma}_j} \sum_{\substack{m=1 \\ m \equiv a_j (\mathrm{mod}\, q_j)}}^{\infty} \frac{\hat{a}_{(m-a_j)/(q_j)}\omega_2(m)}{m^{\hat{\sigma}_j}},$$

su $\hat{\alpha_j} = \frac{a_j}{q_j}$, $0 < a_j < q_j$, $(a_j, q_j) = 1$, $j = 1, \dots, r_1$.

Tegul $P_{\underline{\underline{\zeta}}}$ yra atsitiktinio elemento $\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\sigma}, \underline{\alpha}, \underline{\omega}; \underline{\mathfrak{a}})$ pasiskirstymas, t.y.,

$$P_{\underline{\underline{\zeta}}}(A) = m_H\{\underline{\omega} \in \Omega : \underline{\underline{\zeta}}(\underline{\sigma}, \underline{\alpha}, \underline{\omega}; \mathfrak{a}) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^{r+r_1}).$$

Be to, trumpumo dėlei, tegul

$$\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\sigma}, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}) = (\zeta(\sigma_1, \alpha_1; \mathfrak{a}_1), \dots, \zeta(\sigma_r, \alpha_r; \mathfrak{a}_r), \zeta(\hat{\sigma}_1, \hat{\alpha}_1; \hat{\mathfrak{a}}_1), \dots, \zeta(\hat{\sigma}_{r1}, \hat{\alpha}_{r_1}; \hat{\mathfrak{a}}_{r_1})).$$

Tuomet 5 skyriuje gauta tokia „mišri" jungtinė ribinė teorema.

5.1 teorema. *Tarkime, kad skaičiai $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ yra algebriškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$, $\hat{\alpha_j} = \frac{a_j}{q_j}$, $0 < a_j < q_j$, $a_j, q_j \in \mathbb{N}$, $(a_j, q_j) = 1$, $j = 1, \dots, r_1$, ir*

$$\min(\min_{1 \leqslant j \leqslant r} \sigma_j, \min_{1 \leqslant j \leqslant r_1} \hat{\sigma}_j) > \frac{1}{2}.$$

Tuomet

$$\frac{1}{T}\mathrm{meas}\{t \in [0, T] : \underline{\underline{\zeta}}(\underline{\sigma} + it, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}) \in A\}, \quad A \in (\mathcal{B}(\mathbb{C}^{r+r_1})),$$

kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $P_{\underline{\underline{\zeta}}}$.

Visų įrodytų teoremų formulavimai rodo, kad ribinių matų forma priklauso nuo parametro α aritmetinės prigimties. Visos anksčiau pateiktos teoremos yra tolydaus tipo, nes menamoji dalis t jose gali įgyti bet kurias realias reikšmes. Tačiau galime nagrinėti ir diskrečiąsias ribines teoremas, kuriose t įgyja reikšmes iš kurios nors diskrečiosios aibės, tarkime, aritmetinės progresijos $\{hk : k \in \mathbb{N}_0\}$ su duotu skirtumu $h > 0$. Diskrečiąsias ribines teoremas dzeta ir L funkcijoms savo disertacijoje [1] nagrinėjo B. Bagčis. Jis įrodė diskrečiąsias ribines teoremas Rymano dzeta funkcijai ir Dirichlė L funkcijoms analizinių funkcijų erdvėje, ir pritaikė jas šių funkcijų universalumo tyrimui. R. Kačinskaitė įrodė [6] diskrečiąsias ribines teoremas Macumoto dzeta funkcijai, J. Ignatavičiūtė nagrinėjo [3] diskrečiąsias ribines teoremas Lercho dzeta funkcijai, o R. Macaitienė [12]- bendrosioms Dirichlė eilutėms. Visuose paminėtuose darbuose progresijos skirtumas h buvo specialios formos.

Disertacijos 6 skyriuje gauti tokie rezultatai. Tegul

$$L(\alpha, h, \pi) = \left\{ (\log(m+\alpha) : m \in \mathbb{N}_0), \tfrac{\pi}{h} \right\},$$

o $\#A$ yra aibės A elementų skaičius. Atsitiktinis dydis $\zeta_1(\sigma, \alpha, \omega_1; \mathfrak{a})$ ir jo pasiskirstymas yra tie patys kaip ir 1.1 teoremoje.

6.1 teorema. *Tarkime, kad aibė $L(\alpha, h, \pi)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$ ir $\sigma > \frac{1}{2}$. Tada*

$$\frac{1}{N+1} \#\{0 \leqslant k \leqslant N : \zeta(\sigma + ikh, \alpha; \mathfrak{a}) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})),$$

kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į P_{ζ_1}.

Antroje 6 skyriaus teoremoje nagrinėjama bendresnė diskrečioji aibė negu aritmetinė progresija. Primename, kad $L(\alpha) = \{\log(m+\alpha) : m \in \mathbb{N}_0\}$.

6.2 teorema. *Tarkime, kad $\sigma > \frac{1}{2}$, $0 < \beta < 1$ ir $h > 0$ yra fiksuoti skaičiai, o aibė $L(\alpha)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Tada*

$$\frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leqslant k \leqslant N : \zeta(\sigma + ik^{\beta}h, \alpha; \mathfrak{a}) \in A \right\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})),$$

kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į P_{ζ_1}.

6.2 teoremos įrodymas remiasi tuo, kad seka $\{k^{\beta} : k \in \mathbb{N}_0\}$ yra tolygiai pasiskirsčiusi moduliu 1. Tai reiškia, kad su kiekvienu intervalu $[a, b) \subset [0, 1)$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \chi_{[a,b)}(\{k^{\beta}\}) = b - a.$$

Čia $\{k^{\beta}\}$ yra trupmeninė skaičiaus k^{β} dalis, o $\chi_{[a,b)}$ yra aibės $[a, b)$ indikatorius.

Išvados. Disertacijoje gauta, kad periodinių Hurvico dzeta funkcijų reikšmių pasiskirstymas pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$ vertikaliose tiesėse paklūsta tikimybiniams dėsniams. Teisingos tokios teoremos:

1. Ribinės teoremos su išreikštiniu ribinių matų pavidalu apie silpnąjį tikimybinių matų kompleksinėje plokštumoje konvergavimą periodinėms Hurvico dzeta funkcijoms su racionaliuoju arba transcendenčiuoju parametru. Algebrinio iracionaliojo parametro atveju tokia teorema teisinga su viena atvaizdžių hipoteze.

2. Jungtinės ribinės teoremos į išreikštiniu ribinių matų pavidalu apie silpnąjį tikimybinių matų daugiamatėje kompleksinėje plokštumoje konvergavimą periodinių Hurvico dzeta funkcijų rinkiniui su algebriškai nepriklausomais arba racionaliaisiais parametrais. Analogiška teorema algebrinių iracionaliųjų parametrų atveju galioja su viena atvaizdžių hipoteze.

3. Mišri jungtinė ribinė teorema periodinių Hurvico dzeta funkcijų su algebriškai nepriklausomais ir racionaliaisiais parametrais rinkiniui.

4. Diskrečiosios ribinės teoremos periodinei Hurvico dzeta funkcijai.

Aprobacija. Disertacijos rezultatai buvo pristatyti Lietuvos matematikų draugijos konferencijose (2010-2017) ir tarptautinėse MMA (Mathematical Modelling and Analysis) konferencijose (MMA 2010: Gegužės 26-29, 2010, Druskininkai), (MMA 2011: Gegužės 25-28, 2011, Sigulda, Latvija), (MMA 2012: Birželio 6-9, 2012, Talinas, Estija), (MMA 2013: Gegužės 27-30, 2013, Tartu, Estija), (MMA 2014: Gegužės 26-29, 2014, Druskininkai), (MMA 2015: Gegužės 26-29, 2015, Sigulda, Latvija), (MMA 2016: Birželio 1-4, 2016, Tartu, Estija), (MMA 2017: Gegužės 30-birželio 2, 2017, Druskininkai)). Be to, jie buvo pristatyti Vilniaus universiteto skaičių teorijos seminaruose bei Šiaulių universiteto matematikos seminaruose.

Publikacijų disertacijos tema sąrašas

Straipsniai recenzuojamuose moksliniuose leidiniuose:

1. D. Genienė and A. Rimkevičienė, A joint limit theorem for periodic Hurwitz zeta-functions with algebraic irrational parameters, *Math. Modell. Analysis* **18**(1) (2013), 149–159.

2. G. Misevičius and A. Rimkevičienė, Joint limit theorems for periodic Hurwitz zeta-functions. II, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Set. Comput.* **41** (2013), 173–185.

3. A. Rimkevičienė, Limit theorems for the periodic Hurwitz zeta-function, *Šiauliai Math. Semin.* **5(13)** (2010), 55–69.

4. A. Rimkevičienė, Joint limit theorems for periodic Hurwitz zeta-functions, *Šiauliai Math. Semin.* **6(14)** (2011), 53–68.

5. A. Rimkevičienė, A discrete limit theorem for the periodic Hurwitz zeta-function, *Proc. of Lithuanian Mathematical Society, Ser. A* (2015), 90–94.

6. A. Rimkevičienė, A discrete limit theorem for the periodic Hurwitz zeta-function. II, *Lithuanian Mathematical Society, Ser. A* (2016), 71–74.

Konferencijų pranešimų tezės:

1. A. Rimkevičienė, Limit theorems for the periodic Hurwitz Zeta-functions, Mathematical Modelling and Analysis: 15th International Conference, May 26–29, 2010, Druskininkai: Abstracts, 77.

2. A. Rimkevičienė, Joint Value-distribution of Periodic Hurwitz Zeta-function, Mathematical modelling and analysis: 16th International Conference, May 25–28, 2011, Sigulda, Latvia: Abstracts, 104.

3. A. Rimkevičienė, A Joint limit theorem for periodic Hurwitz Zeta-functions with algebraic irrational parameters, Mathematical Modelling and Analysis: 17th International Conference, June 6–9, 2012,Tallinn, Estonia: Abstracts, 103.

4. A. Rimkevičienė, A generalization of a joint limit theorem for periodic Hurwitz Zeta-functions, Mathematical Modelling and Analysis: 18th International Conference, May 27–30, 2013, Tartu, Estonia: Abstracts, 108.

5. A. Rimkevičienė, Investigations of the asymptotic behaviour of periodic Hurwitz Zeta-functions, Mathematical Modelling and Analysis: 19th International Conference, May 26–29, 2014, Druskininkai: Abstracts, 57.

6. A. Rimkevičienė, A discrete limit theorem for the periodic Hurwitz Zeta-function, Mathematical Modelling and Analysis: 20th International Conference, May 26–29, 2015, Sigulda, Latvia : Abstracts, 71.

7. A. Rimkevičienė, A discrete limit theorem for the periodic Hurwitz Zeta-function, Mathematical Modelling and Analysis: 21th International Conference, June 1–4, 2016, Tartu, Estonia: Abstracts, 66.

8. A. Rimkevičienė, Investigations of the asymptotic behaviour of periodic Hurwitz Zeta-functions, Mathematical Modelling and Analysis: 22th International Conference, May 30 – June 2, 2017, Druskininkai: Abstracts, 57.

Padėka

Dėkoju moksliniam vadovui prof. habil. dr. Antanui Laurinčikui už paramą rengiant disertaciją. Esu dėkinga Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto Tikimybių teorijos ir skaičių teorijos katedros nariams ir Šiaulių universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto nariams už diskusijas ir moralinę paramą.

Cituota literatūra

1. B. Baghchi, *The statistical behaviour and universality properties of The Riemann zeta-function and other allied Dirichlet series*, Ph. D. Thesis, Indian Statistical Institute, Calcutta, 1981.

2. J.W.S. Cassels, Footnote to a note of Davenport and Heilbronn, *J. London Math. Soc.* **36** (1961), 177–184.

3. J. Ignatavičiūtė, *Value-distribution of the Lerch zeta-function. Discrete version*, Doctoral dissertation, Vilnius University, Vilnius, 2003.

4. A. Javtokas, A. Laurinčikas, On the periodic Hurwitz zeta-function, *Hardy-Ramanujan J.* **29**(3) (2006), 18–36.

5. D. Joyner, *Distribution Theorems of L-Functions*, Pitman Research Notes in Math. Series, Longman Scientific, Harlow, 1986.

6. R. Kačinskaitė, *Discrete limit theorems for the Matsumoto zeta-functions*, Doctoral thesis, Vilnius University, Vilnius, 2002.

7. A. Laurinčikas, *Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London 1996.

8. A. Laurinčikas, Limit theorems for general Dirichlet series, *Theory Stoch. Processes* **8**(3-4) (2002), 356–368.

9. A. Laurinčikas, A limit theorem for the Hurwitz zeta-function with algebraic irrational parameter, *J. Math. Sci.* **137**(2) (2006), 4684–4689.

10. A. Laurinčikas and R. Garunkštis, *The Lerch Zeta-Function*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2002.

11. A. Laurinčikas, K. Matsumoto, Joint value distribution theorems on Lerch zeta-functions, *Lith. Math. J.* **38**(3) (1998), 238–249.

12. R. Macaitienė, *Discrete limit theorems for general Dirichlet series*, Doctoral dissertation, Vilnius University, 2006.

13. J. L. Mauclaire, On some Dirichlet series, in: *New Directions in Value-Distribution Theory of Zeta and L-functions*, Proc. Wurzburg Conf. (2008), R. Steuding and J. Steuding (Eds), Shaker Verlag, Aachen, 2009, pp. 171–248.

Summary

In the thesis, limit theorems on the weak convergence of probability measures on the complex plane for periodic Hurwitz zeta-functions are obtained.

Let $s = \sigma + it$ be a complex variable, $0 < \alpha \leqslant 1$ be a fixed parameter, and let $\mathfrak{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ be a periodic sequence of complex numbers with minimal period $k \in \mathbb{N}$. The periodic Hurwitz zeta-function $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$ is defined, for $\sigma > 1$, by the Dirichlet series

$$\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(m+\alpha)^s},$$

and is meromorphically continued to the whole complex plane with the unique possible simple pole at the point $s = 1$.

In the thesis, various cases of the parameter α are considered. If α is transcendental or rational, then it is proved that

$$\frac{1}{T}\text{meas}\{t \in [0, T] : \zeta(\sigma + it, \alpha; \mathfrak{a}) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

with $\sigma > \frac{1}{2}$ converges weakly to explicitly given probability measure on $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ ($\mathcal{B}(\mathbb{C})$ denotes the Borel σ field of $\mathbb{C}$) as $T \to \infty$. For algebraic rational α, a certain hypothesis is used.

Also, joint limit theorems for a collection of periodic Hurwitz zeta-functions

$$\zeta(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_1), \dots, \zeta(s, \alpha_r; \mathfrak{a}_r)$$

are obtained, i. e., the weak convergence, as $T \to \infty$, for

$$\frac{1}{T}\text{meas}\{t \in [0, T] : \zeta(\sigma_1 + it, \alpha_1; \mathfrak{a}_1), \dots, \zeta(\sigma_r + it, \alpha_r; \mathfrak{a}_r) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^r),$$

with $\min\limits_{1 \leqslant j \leqslant r} \sigma_j > \frac{1}{2}$ is proved. The cases of algebraically independent over the field of rational numbers $\mathbb{Q}$ parameters $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, rational, algebraically independent and rational, and, under a certain hypothesis, of algebraic irrational are considered.

The thesis ends by two discrete limit theorems for the function $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$. In this case, the weak convergence for

$$\frac{1}{N+1}\#\{0 \leqslant k \leqslant N : \zeta(\sigma + ikh, \alpha; \mathfrak{a}) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})),$$

with $\sigma > \frac{1}{2}$ and $h > 0$ is investigated as $N \to \infty$. Here $\#\, A$ denotes the cardinality of the set A. It is required that the set $\{(\log(m+\alpha) : m \in \mathbb{N}_0), \frac{\pi}{h}\}$ would be linearly independent over $\mathbb{Q}$. Also, the weak convergence for

$$\frac{1}{N+1}\#\left\{0 \leqslant k \leqslant N : \zeta\left(\sigma + ik^{\beta}h, \alpha; \mathfrak{a}\right) \in A\right\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})),$$

with fixed β, $0 < \beta < 1$, and $\sigma > \frac{1}{2}$ is obtained.

Trumpos žinios apie autorę

Gimimo data ir vieta

1962 m. gegužės 14 d., Šiauliai.

Išsilavinimas ir kvalifikacija:

1980 m. Šiaulių 5-oji vidurinė mokykla.
1985 m. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, baigus Matematikos programą, suteikta matematiko-dėstytojo kvalifikacija.
2014–2018 studijos Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultete, doktorantė.

Darbo patirtis

1985–1989 m.	Šiaulių Aido vidurinė mokykla, matematikos mokytoja.
1989–1993 m.	Šiaulių Romuvos vidurinė mokykla, matematikos vyr. mokytoja.
1993–2009 m.	Šiaulių Didždvario gimnazija, matematikos mokytoja metodininkė.
Nuo 2007 m.	Šiaulių valstybinės kolegijos dėstytoja.