Liet. matem. rink., **44**, *spec. nr.*, 2004, 639–643

Daugiasluoksnio konstrukcinio elemento optimizavimas tampriai plastinėje zonoje

Vytautas KLEIZA (MII), Jonas BAREIŠIS (KTU)
e-mail: vytautas.kleiza@ktl.mii.lt, tfdek@midi.ppf.ktu.lt

Daugiasluoksnių strypų (DS) tampriai plastinio deformavimo efektyvumui įvertinti darbe [1] įvesta *efektingumo koeficiento* $m(\alpha, \beta, \gamma)$ sąvoka, naudojant ribinių įrąžų santykį, t.y. minimalios apkrovos, sukeliančios plastines deformacijas visame DS skerspjūvyje ir maksimalios apkrovos sukeliančios tampriąsias deformacijas visame DS skerspjūvyje santykį. Naudojant komutuojančių matricų metodą [2], darbe [3] įrodyta, kad

$$m(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha\gamma + 1)(\alpha\beta + 1)^{-1} \max\{\beta\gamma^{-1}, 1\}.$$

Šiame darbe tiriamas skaliarinis laukas $m(\alpha, \beta, \gamma)$, apibrėžtas uždaroje ir iškiloje srityje $\overline{D} = \{\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1, \beta_0 \leqslant \beta \leqslant \beta_1, \gamma_0 \leqslant \gamma \leqslant \gamma_1\}$, čia $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1 > 0$ ir $\alpha_0 < \alpha_1, \beta_0 < \beta_1, \gamma_0 < \gamma_1$, t.y. nustatomos globaliojo ir lokaliųjų ekstremumų egzistavimas, lokalizavimas bei jų vertės. Funkcija $m(\alpha, \beta, \gamma)$ tolydi srityje $\overline{D}$ ir todėl aprėžta. Jei plokštuma $P = \{\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1, \beta = \gamma\}$ turi bendrų taškų su sritimi $\overline{D}$, tai pastaroji dalina sritį į dvi dalis

$$\overline{D}_1 = \left\{ \begin{matrix} \alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1 \\ \gamma_0 \leqslant \beta \leqslant \gamma \leqslant \gamma_1 \end{matrix} \right\} \neq \emptyset, \quad \overline{D}_2 = \left\{ \begin{matrix} \alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1 \\ \gamma_0 \leqslant \gamma \leqslant \beta \leqslant \beta_1 \end{matrix} \right\} \neq \emptyset,$$

ir

$$\overline{D} = \overline{D}_1 \cup \overline{D}_2, \quad \overline{D}_1 \cap \overline{D}_2 = P,$$

arba eina per vieną srities briaunų: $B_{10} = \{\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1, \beta = \beta_1, \gamma = \gamma_0\}$ arba $B_{01} = \{\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1, \beta = \beta_0, \gamma = \gamma_1\}$. Jei plokštuma P neturi bendrų taškų su sritimi $\overline{D}$, tai arba $\overline{D} = \overline{D}_1$ arba $\overline{D} = \overline{D}_2$. $\overline{D}$ viršūnes (kraštiniai iškilos srities taškai) atitinkamai žymėsime $v_{ijk} = (\alpha_i, \beta_j, \gamma_k), i, j, k = 0, 1$, (pvz. $v_{010} = (\alpha_0, \beta_1, \gamma_0)$), o bet kurį erdvės R_3^+ tašką $(\alpha, \beta, \gamma) = v$. Visus uždaros srities $\overline{D}$ poaibius, kuriuose pasiekiami funkcijos $m(v)$ globalieji ekstremumai žymime $\operatorname{Arg\,max}_{\overline{D}} m(v)$ ir $\operatorname{Arg\,min}_{\overline{D}} m(v)$.

1 *teiginys.* Jei plokštuma P turi bendrų taškų su sritimi $\overline{D}$, tada funkcijos $m(v)$ globalusis minimumas pasiekiamas tik sankirtoje $\overline{D} \cap P$, be to

$$\operatorname{Arg}\min_{\overline{D}} m(v) = \operatorname{Arg}\min_{\overline{D}_1} m(v) = \operatorname{Arg}\min_{\overline{D}_2} m(v) = \overline{D} \cap P,$$

o, jei $v \in \overline{D} \cap P$, tai $m(v) \equiv \min_{v \in \overline{D}} m(v) = 1$.

Įrodymas. Iš $v \in \overline{D} \cap P \neq \emptyset$, turime $\beta = \gamma$ ir $m(v) \equiv 1$. Atviroje srityje $\overline{D}_1 \backslash P$ skirtumas $(\gamma - \beta) > 0$, todėl funkcija

$$m(v) - 1 = (\alpha\gamma + 1)(\alpha\beta + 1)^{-1} - 1 = \alpha(\gamma - \beta)(\alpha\beta + 1)^{-1} > 0,$$

o atviroje srityje $\overline{D}_2 \backslash P$ skirtumas $(\gamma - \beta) < 0$, todėl

$$m(v) - 1 = (\alpha\gamma + 1)(\alpha\beta + 1)^{-1}\beta\gamma^{-1} - 1 = (\beta - \gamma)(\alpha\beta\gamma + \gamma)^{-1} > 0.$$

Iš įrodyto seka, kad tik taškuose $v \in \overline{D} \cap P$ pasiekiamas funkcijos $m(v)$ globalusis minimumas, be to $\min_{\overline{D}_1} m(v) = \min_{\overline{D}_2} m(v) = 1$.

2 *teiginys.* Funkcijos $m(v)$ globalusis maksimumas pasiekiamas uždaro stačiakampio gretasienio $\overline{D}$ vienoje arba keliuose viršūnėse v_{ijk} neesančiose plokštumoje $\overline{D} \cap P$.

Įrodymas. Parodysime, kad funkcijos $m(v)$ gradientas atviroje srityje $D \backslash P$, ant ją ribojančių plokštumų ir jos briaunų, nepriklausomai nuo jos padėties plokštumos atžvilgiu, nelygus nuliui. Srityje D_1

$$\begin{aligned}
&m(v) = (\alpha\gamma + 1)(\alpha\beta + 1)^{-1}, m(v) \in C^1[D_1],\\
&\mathrm{grad}(m(v)) = (\alpha\beta + 1)^{-2}\left[(\gamma - \beta)\mathbf{i} - \alpha(\alpha\gamma + 1)\mathbf{j} + \alpha(\alpha\beta + 1)\kappa\right],
\end{aligned}$$

o srityje D_2

$$\begin{aligned}
&m(v) = (\alpha\beta\gamma + \beta)(\alpha\beta\gamma + \gamma), m(v) \in C^1[D_2],\\
&\mathrm{grad}(m(v)) = (\alpha\beta + 1)^{-2}\gamma^{-2}\left[\beta\gamma(\gamma - \beta)\mathbf{i} + \gamma(\alpha\gamma + 1)\mathbf{j} - \beta(\alpha\beta + 1)\kappa\right].
\end{aligned}$$

Kad (11) ir (12) virstų nuliu srityje D būtina ir pakankama, kad

$$\mathbf{V}(v) = \left[(\gamma - \beta)\mathbf{i} + (\alpha\gamma + 1)\mathbf{j} + (\alpha\beta + 1)\kappa\right] = 0,$$

bet tai neįmanoma, nes $|(\gamma - \beta)| > 0, (\alpha\gamma + 1) > 0, (\alpha\beta + 1) > 0$. Samprotaujant analogiškai turime, kad sritį D ribojančiose plokštumose ir jos briaunose (kaip atvirose aibėse) $\mathrm{grad}_2(m(v)) \neq 0$ ir $\mathrm{grad}_1(m(v)) \neq 0$. Iš įrodyto ir būtinos ekstremumo egzistavimo sąlygos ir iš *1 teiginio*, seka *2 teiginys*.

Nustatėme, kad funkcijos $m(v)$ globalusis maksimumas pasiekiamas tik srities $\overline{D}$ viršūnėse neesančiose plokštumoje P. Jei sritis $\overline{D}$ neturi bendrų taškų su plokštuma P, gautą rezultatą galima patikslinti.

3 *teiginys.*

$$\mathrm{Arg}\min_{\overline{D}} m(v) = \begin{cases} v_{010}, & \text{jei } \overline{D}_2 = \emptyset \\ v_{101}, & \text{jei } \overline{D}_1 \neq \emptyset \end{cases}, \quad \mathrm{Arg}\max_{\overline{D}} m(v) = \begin{cases} v_{101}, & \text{jei } \overline{D}_2 \neq \emptyset \\ v_{010}, & \text{jei } \overline{D}_1 = \emptyset \end{cases}.$$

Įrodymas. Jei $D_1 \neq \emptyset$ ir $D_2 = \emptyset$ tai plokštumoje $A_0 = \{\alpha = \alpha_0, \beta_0 \leqslant \beta \leqslant \beta_1, \gamma_0 \leqslant \gamma \leqslant \gamma_1\}$, kurioje yra keturios srities $\overline{D}$ viršūnės

$$m(\alpha_0, \beta, \gamma) - m(v_{010}) = \frac{\alpha_0\gamma + 1}{\alpha_0\beta + 1} - \frac{\alpha_0\gamma_0 + 1}{\alpha_0\beta_1 + 1} \geqslant 0,$$

nes $\alpha_0\gamma \geqslant \alpha_0\gamma_0, \alpha_0\beta \leqslant \alpha_0\beta_1$, o lygybė $m(\alpha_0, \beta, \gamma) - m(v_{010}) = 0$ galioja tik kai $\beta = \beta_1, \gamma = \gamma_0$. Plokštumoje $A_1 = \{\alpha = \alpha_1, \beta_0 \leqslant \beta \leqslant \beta_1, \gamma_0 \leqslant \gamma \leqslant \gamma_1\}$, kurioje yra likusios keturios srities $\overline{D}$ viršūnės

$$m(\alpha_1, \beta, \gamma) - m(v_{110}) = \frac{\alpha_1\gamma + 1}{\alpha_1\beta + 1} - \frac{\alpha_1\gamma_0 + 1}{\alpha_1\beta_1 + 1} \geqslant 0,$$

nes $\alpha_1\gamma \geqslant \alpha_1\gamma_0$, $\alpha_1\beta \leqslant \alpha_1\beta_1$, o lygybė $m(\alpha_1, \beta, \gamma) - m(v_{110}) = 0$ galioja tik kai $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_0$.

Pagal 2 *teiginį* globalusis minimumas gali būti pasiektas tik srities $\overline{D}$ viršūnėse v_{ijk}, t.y. viršūnėse v_{010} arba v_{110}. Tačiau, iš $D_1 \neq \emptyset$ ir $D_2 = \emptyset$ seka, kad $(\gamma - \beta) > 0$ ir $\frac{\partial m}{\partial \alpha} = (\gamma - \beta)(\alpha\beta + 1)^{-2} > 0$, todėl $m(v_{010}) < m(v_{110})$ ir $\operatorname{Arg\,min}_{\overline{D}} m(v) = v_{010}$. Analogiškai įrodoma, kad $\operatorname{Arg\,max}_{\overline{D}} m(v) = v_{101}$.

Jei $D_1 = \emptyset$ ir $D_2 \neq \emptyset$, tai plokštumose A_0 ir $A_1 \frac{\partial m}{\partial \beta} > 0$, $\frac{\partial m}{\partial \gamma} < 0$, todėl (pasinaudoję tuo kad globalieji minimumas ir maksimumas gali būti pasiekti tik srities $\overline{D}$ viršūnėse) turime

$$\operatorname{Arg}\min_{\overline{D}} m(\alpha_0, \beta, \gamma) = (\alpha_0, \min_{\overline{D}} \beta, \max_{\overline{D}} \gamma) = (\alpha_0, \beta_0, \gamma_1) = v_{001},$$

$$\operatorname{Arg}\min_{\overline{D}} m(\alpha_1, \beta, \gamma) = (\alpha_1, \min_{\overline{D}} \beta, \max_{\overline{D}} \gamma) = (\alpha_1, \beta_0, \gamma_1) = v_{101}.$$

Tačiau, kai $D_1 = \emptyset$ ir $D_2 \neq \emptyset$ vertė $(\gamma - \beta) < 0$ ir $\frac{\partial m}{\partial \alpha} = \beta\gamma(\gamma - \beta)(\alpha\beta + 1)^{-2}\gamma^{-2} < 0$, todėl $m(v_{001}) > m(v_{101})$ ir $\operatorname{Arg\,min}_{\overline{D}} m(v) = v_{101}$. Analogiškai įrodoma, kad $\operatorname{Arg\,max}_{\overline{D}} m(\alpha, \beta, \gamma) = v_{010}$.

4 *teiginys.* Jei $D_1 \neq \emptyset$ ir $D_2 \neq \emptyset$ tai funkcijos $m(v)$ globalusis maksimumas pasiekiamas viršūnėje v_{010}, arba/ir viršūnėje v_{101}.

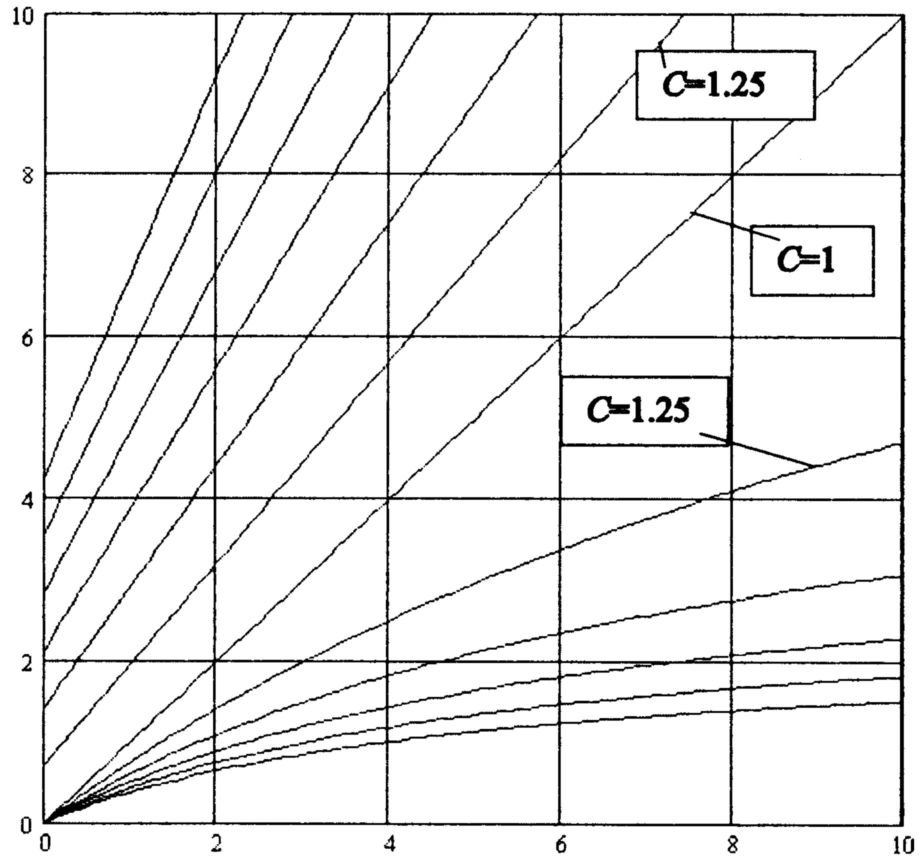
$$\operatorname{Arg}\max_{\overline{D}} m(v) = v_{010} \cup v_{101}, \quad \text{jei } \overline{D} \cap P \neq \emptyset,$$

$$\max_{\overline{D}} m(v) = \max\left\{m(v_{010}), m(v_{101})\right\}, \quad \text{jei } \overline{D} \cap P \neq \emptyset.$$

Įrodymas. Srityje $D_1 \neq \emptyset$ remiantis 2 *teiginiu* $m(v)$ maksimumas pasiekiamas tik $\overline{D}_1$ viršūnėse neesančiose plokštumoje P, o, taikant 2 *teiginio* įrodymo metodą gauname, kad pastarasis pasiekiamas tik viršūnėje v_{101}. Samprotaudami analogiškai, turime, kad, srityje $\overline{D}_2$ $m(v)$ maksimumas pasiekiamas tik viršūnėje v_{010}, todėl srityje $\overline{D}$ globalusis maksimumas pasiekiamas viršūnėje v_{010}, arba viršūnėje v_{101}. Dėl funkcijos $m(v)$ tolydumo srityje $\overline{D}$ egzistuoja tokia srities $\overline{D}$ ir plokštumos P tarpusavio padėtis, kad $\max_{\overline{D}} m(v) = \max_{\overline{D}_1} \{m(v)\} = \max_{\overline{D}_2} \{m(v)\}$, todėl globalusis maksimumas pasiekiamas viršūnėje v_{010}, arba/ir viršūnėje v_{101}.

Įrodytų teiginių iliustracijai 1 pav. pateiktos funkcijos $m(v)$ verčių lygio linijos $(m(v) = C, C \geqslant 1)$ pjūvyje $\alpha = \alpha_* = const$, kurių analizinės išraiškos, jei $\beta \leqslant \gamma$

$$\gamma = C\beta + \frac{(C - 1)}{\alpha_*},$$



1 pav. Funkcijos $m(\alpha, \beta, \gamma)$ lygio linijos $m(\alpha, \beta, \gamma) = C$ pjūvyje, kai $\alpha = 0.35$ ir $C = 1,00;\ 1,25;\ 1,50;\ 1,75;\ 2,00$.

tai tiesių (su krypties koeficientu didesniu už vienetą) pluoštas su bendru tašku, nepriklausančiu nuo C vertės, kurio koordinatės $\beta_* = -\alpha^{-1}$, $\gamma_* = -\alpha^{-1}$.

Jei $\beta > \gamma$

$$\gamma = -\frac{L^2(\alpha_*, C)}{C\left[\beta + L(\alpha_*, C)\right]} + \frac{L(\alpha_*, C)}{C}, \quad L(\alpha_*, C) = \frac{C}{\alpha_*(C-1)},$$

tai hiperbolės turinčios horizontalias asimptotes $\gamma = L(\alpha_*, C)C^{-1}$ ir du bendrus taškus, nepriklausančius nuo C vertės, kurių koordinatės $\beta_* = -\alpha_*^{-1}$, $\gamma_* = -\alpha_*^{-1}$ ir $\beta_{**} = 0$, $\gamma_{**} = 0$. Suprantama, kad kiekvienoje plokštumoje $\alpha = \alpha_*$ kiekviena lygio linija kerta tieses $\gamma = \text{const}$ arba $\beta = \text{const}$ tik vieną kartą.

Remiantis įrodytais teiginiais galima nurodyti paprastas globaliųjų ekstremumų skaičiavimo algoritmus:

1. Jei $\beta_1 < \gamma_0$, tai

$$\min_{\overline{D}} m(v) = \frac{\alpha_0\gamma_0 + 1}{\alpha_0\beta_1 + 1}, \quad \max_{\overline{D}} m(v) = \frac{\alpha_1\gamma_1 + 1}{\alpha_1\beta_0 + 1}.$$

2. Jei $\beta_0 > \gamma_1$, tai

$$\min_{\overline{D}} m(v) = \frac{\alpha_1\beta_0\gamma_1 + \beta_0}{\alpha_1\beta_0\gamma_1 + \gamma_1}, \quad \max_{\overline{D}} m(v) = \frac{\alpha_0\beta_1\gamma_0 + \beta_1}{\alpha_0\beta_1\gamma_0 + \gamma_0}.$$

3. Jei $\beta_0 > \gamma_1$ ir $\beta_1 > \gamma_0$, tai

$$\min_{\overline{D}} m(v) = 1, \quad \max_{\overline{D}} m(v) = \max\left\{\frac{\alpha_1\gamma_1 + 1}{\alpha_1\beta_0 + 1}, \frac{\alpha_1\beta_0\gamma_1 + \beta_0}{\alpha_1\beta_0\gamma_1 + \gamma_1}\right\}.$$

Literatūra

1. J. Bareišis, V. Kleiza, Investigation of limiting loads of stretched (compressed) multilayer rods under plastic strain, *Mechanika*, ISSN 1392-1207, **2**(40), 5–11 (2003).
2. V. Kleiza, Tampriai plastinio uždavinio sprendimas komutuojančių matricų erdvėje, *Liet. matem. rink.*, ISSN 0132-2818, **41**(spec. nr.), 511–516 (2001).
3. J. Bareišis, V. Kleiza, Research in the limiting efficiency of plastic deformation of multilayer tension (compression) bars, *Mechanics of Composite Materials*, ISSN 0191-5665, Plenum Publishing Corporation, **40**(2), 135–144 (2004).

SUMMARY

V. Kleiza, J. Bareišis. The optimization of a multilayer structural element in plasto-elastic zone

To estimate the efficiency of plasto-elastic strain multilayer rods, a concept of the efficiency coefficient has been introduced. In this paper, it has been proved that, if the efficiency coefficient, as a function of three variables is defined in a rectangular parallelepiped, then both the global minimum and the maximum are in the vertices of this domain.

Keywords: multilayer rod, limiting load, elasticity, plasticity, optimization, nonlinear programing.