

Nuostabios plokštumos kreivės

Edmundas Mazėtis^a , Grigorijus Melničenko^b

^a *Matematikos institutas, Vilniaus universitetas*
Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius, Lietuva

^b *Švietimo akademija, Vytauto Didžiojo universitetas*
K. Donelaičio g. 58, LT-44248 Kaunas, Lietuva

✉ Korespondentas: edmundas.mazetis@mif.vu.lt
el. paštas: gmelnicenko@gmail.com

Įteiktas 2025 liepos 2; publikuotas 2025 gruodžio 21

Santrauka. Kreivės sąvoka buvo intuityviai supраста dar gilioje senovėje. Stebėdami mesto akmens trajektoriją, upės krantų išlinkimus, augalų ir gėlių lapų kontūrus, žmonės palaipsniui vystė kreivės sąvokos sampratą. Straipsnyje bandoma aptarti tokias kreives, kurios privertė matematikus giliau pažvelgti į kreivės sąvoką ir rimčiau užsiimti kreivių savybių nagrinėjimu. Terminu „ypatingosios kreivės“ autoriai vadina tas trečiosios ir ketvirtosios eilės kreives, kurias generuoja apskritimai (generuojantys apskritimai). Tokių kreivių lygtis dekartinėse koordinatėse galima išvesti tik elementariosios geometrijos metodais, dažniausiai taikant trikampių panašumą. Autoriai mano, kad straipsnyje išdėstytos mintys padės matematikos mokytojams paskatinti mokinius rimčiau domėtis labai įdomiu mokslu – matematika.

Raktiniai žodžiai: apskritimas; algebrinė kreivė; cirkuliarioji kreivė; cirkuliarioji trečiosios eilės kreivė; bicirkuliarioji ketvirtosios eilės kreivė; kubo dvigubinimas; kampo trisekcija; epicikloidė; hipocicloidė; trochoidė; epitrochoidė; hipotrochoidė; Anjezi kreivė; anjezina; Dioklo cisoidė; kapa kreivė; kardioidė; Paskalio sraigė; nefroide

AMS: 97G40

1 Kreivė kaip geometrinė sąvoka

Paprastai mokykloje kreivė suprantama kaip glodžiai išlenkta linija, panašiai kaip apskritimas ar parabolė. Bet matematikoje kreivės sąvoka apima ir tiesę, ir figūrą, sudarytą iš tiesių atkarpų, pvz., trikampiai ar kvadratai.

Supratimą apie kreivę žmonės turėjo jau gilioje senovėje, bet prireikė daug laiko, kol buvo imta lyginti įvairias kreives, skirti vieną kreivę nuo kitos. Pirmieji piešiniai olų sienose, primityvūs ornamentai rodo, kad žmonės sugebėjo ne tik skirti tiesę nuo kreivės, bet ir skirti įvairias kreives. Senovės paminklai liudija, kad visos tautos žinojo apskritimo ir tiesės sąvokas.

Teoriniai matematikos pagrindai, geometrinio turinio uždaviniai, mechanikos, fizikos ir technikos uždaviniai – tai sritis, kurioje vystėsi kreivių teorija. Kreivių geometrinės ir mechaninės savybės taikomos, kuriant įvairius mechanizmus, mašinų detales [1, 5, 6, 8, 22], statybines konstrukcijas, optinius prietaisus [19, 18, 36], architektūros ir vaizduojamojo meno kūrinius. Susipažinimas su įvairiomis kreivėmis ir jų savybių nagrinėjimas padėtų mokiniams vystyti geometrinę intuiciją, pagilinti žinias, paskatinti domėtis ne tik geometrija, bet ir fizika, astronomija bei kitais mokslais.

Kreivės sąvokos formuluotė istoriškai vystėsi nuo intuityvių aprašymų (kaip, pvz., pas Euklidą „ilgis be pločio“), arba nuo konkrečių kreivių, kaip plokštumos ar erdvės taškų geometrinių vietų, iki bendros kreivės sampratos kaip plokštumos ar erdvės taškų aibės, tenkinančios tam tikras savybes, ir tas aibės galima pavaizduoti grafiškai. Griežtas kreivės apibrėžimas reikalauja žinių, toli išsėinančių iš mokyklinės matematikos kurso. Kadangi šis darbas yra skirtas mokiniams ir mokytojams, tai tikslaus kreivės apibrėžimo nepateikiame.

Kai kurios kreivės yra sutinkamos kasdieniniame gyvenime, nors dažnai to nė nepastebime. Pvz., apžvalgos ratas juda apskritimu, dangaus mechanikoje objektai, kurių greitis įgalina juos įveikti centrinio kūno traukos jėgą, juda hiperbole, planetos apie Saulę juda elipsėmis [19, 18], kampu į horizontą mestas kūnas, veikiamas Žemės traukos, juda parabole [19, 18], važiuojančio automobilio fiksuotas rato taškas juda cikloide [3, 19, 18] ir pan. Todėl nuo senų laikų iki dabar kreivės yra matematikų dėmesio centre. Kai kurios įdomios kreivės pasižymi įvairiomis geometrinėmis ir mechaninėmis savybėmis, su kuriomis susiję daug matematinių atradimų. Todėl įvairių kreivių ir jų savybių nagrinėjimas padeda vystyti matematinę mąstymą, įgalina pastebėti ryšį tarp matematikos teorijos ir praktikos [2, 6, 7, 9, 22].

Mokslininkai nagrinėja ne tik kreivių geometrines savybes, bet ir jų mechanines savybes. Pvz., Ch. Huigensas (Ch. Huygens) atrado cikloidės izochroniškumą arba tautochroniškumą [2, 3, 6, 10, 15, 21, 35, 36], kas padėjo pagerinti Galilėjaus svyruoklę. J. Bernuli (J. Bernoulli) įrodė, kad vakuume cikloidė yra brachistochronė, tai reiškia, kad ji yra greičiausio nusileidimo kreivė [3, 6, 10, 19, 18, 21, 25, 35, 36]. Taip pat buvo nagrinėjamos Neilio parabolės, grandininės linijos, Kasinio ovalų, Dekarto ovalų ir kitų dabar gerai žinomų kreivių geometrinių ir mechaninių savybės.

Dažnai sutinkama sąvoka „nuostabios kreivės“. Su šiomis kreivėmis susiduriama gamtoje, jos dažniausiai pasižymi tam tikromis ypatingomis savybėmis, arba jos užrašomos gražiomis lygtimis. Tokios kreivės dažnai pasitaiko praktikoje, šiomis kreivėmis aprašomi kai kurie gamtos dėsniai, jų savybės dažnai taikomos įvairiuose mechanizmuose, prietaisuose. [19, 18] darbuose autoriai nuostabiomis plokštumos kreivėmis vadina elipsę, parabolę, lemniskatę, cikloidę, Archimedo spiralę, grandininę liniją, logaritminę spiralę, apskritimo evolutę. [25, 19, 18] darbe nurodoma dar daugiau plokščiųjų kreivių, priskiriamų nuostabioms. Šiame darbe nuostabiomis kreivėmis vadinsime tas algebrines kreives, kurios yra glaudžiai susijusios su apskritimais (gautomis iš apskritimo, atliekant įvairias geometrines konstrukcijas).

Du klasikiniai senovės Graikijos uždaviniai apie kubo dvigubinį ir kampo trisekciją [13, 30] suvaidino svarbų vaidmenį kreivių teorijos vystyme. Graikai šiuos

uždavinius bandė spręsti skriestuvu ir liniuote, bet to padaryti jiems nepavyko. Taisant nuostabias kreives – Dioklo cisoide (5 skyrelis) ir Paskalio sraigę (8 skyrelis), buvo rasti kubo dvigubavimo ir kampo trisekcijos uždavinių sprendimai.

Išgirdęs žodžius „Dioklo cisoide“ šiuolaikinis mokinys kreipiasi į internetą ir sužino apie senovės Graikiją daugiau, negu per istorijos pamokas. Jis sužino, kad atėniečiams kreipiantis pas orakulą, siekiant apraminti jų dievus, pasiuntusius graikams marą, orakulas liepė jiems du kartus padidinti kubo formos dievo altoriaus turį [10, 21, 23, 30]. Graikų meistrai labai nuliūdo, nes nežinojo, kaip kubo turį padaryti du kartus didesnį. Todėl kreipėsi į filosofą Platoną, kuris atsakė, kad orakulai šį uždavinį davė ne tam, kad pagamintų du karus didesnio turio altorių, o kaip ženklą graikams, kad jie nerūpestingai mokosi matematikos ir geometrijos [11, 30].

Įvairių kreivių nagrinėjimas ne tik savaime įdomus, leidžia vystyti matematinę mąstymą, parodo matematikos ryšį su kitais mokslais ir praktika, bet ir sudaro galimybes kurti įvairius plokščiųuosius mechanizmus, kurių atskiros grandys brėžia tam tikrų kreivių lankus [1, 8, 9]. Tokių mechanizmų kūrimo pradininku laikomas vokiečių mokslininkas L. Burmesteris (L. Burmester, 1840–1927), kuris išvystė geometrinių vietų metodą ir pritaikė jį kai kurių trečiosios eilės kreivių konstravimui [5, 8].

Pastebėkime, kad paprastai kreivių lygtys dekartinėse koordinatėse gaunamos iš jų lygčių polinėse koordinatėse. Šiame darbe atvirkščiai – pirmiau išvedamos kreivių lygtys dekartinėse koordinatėse, o po to gaunamos jų lygtys polinėse koordinatėse.

2 Algebrinės ir transcendentinės kreivės

Nagrinėsime gerai žinomas kreives, kurios pagal šiuolaikinę klasifikaciją skirstomos į algebrines kreives ir transcendentines kreives.

Kreivės lygtis išreiškia tos kreivės charakteringąsias savybes ir jos ypatumus. Todėl tikslinga kreives klasifikuoti pagal jų lygtis – ar šios lygtys yra algebrinės, ar transcendentinės. Šioje vietoje gali kilti sunkumų, nes kreivės lygtis priklauso ne tik nuo pačios kreivės savybių, bet ir nuo koordinačių sistemos, kurioje ji yra nagrinėjama. Tos pačios kreivės lygtis vienoje koordinačių sistemoje gali būti algebrinė, o kitoje koordinačių sistemoje – transcendentinė. Kartais užtenka pakeisti kreivės padėtį arba pakeisti koordinačių sistemos pradžios tašką, kai kreivės algebrinė lygtis tampa transcendentine. Pvz., polinėje koordinačių sistemoje apskritimo, kurio centras yra polius, lygtis yra algebrinė $\rho = a$. Bet jei to paties apskritimo centras polinėse koordinatėse yra taškas (ρ_1, φ_1) , tai tokio apskritimo lygtis yra transcendentinė $a^2 = \rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1 \cos(\varphi - \varphi_1)$ [21].

Kitaip yra, kai kreivių lygtys užrašomos stačiakampėse Dekarto koordinačių sistemoje. Koordinačių sistemos centro postūmiai ir ašių krypčių pokyčiai nekeičia ne tik šių kreivių rūšies, bet ir algebrinių kreivių lygties eilės. Todėl logiška skirstyti kreives į algebrines ir transcendentines pagal tai, ar jų lygtys kurioje nors stačiakampėje Dekarto koordinačių sistemoje (o tai reiškia, ir visose tokiose sistemoje) yra algebrinė, ar transcendentinė.

1 apibrėžimas. Algebrinės kreivės – tai tokios plokštumos kreivės, kurių lygtis kurioje nors stačiakampėje Dekarto koordinačių sistemoje yra $f(x, y) = 0$, čia $f(x, y)$ yra n -ojo laipsnio daugianaris nuo dviejų kintamųjų x, y su realiaisiais koeficientais, t. y. sandaugų $ax^p y^q$ suma, čia a – realusis skaičius, $p, q, p + q \leq n$ – sveikieji neneigiamieji skaičiai.

Daugianario $f(x, y)$ laipsnis yra vadinamas algebrinės kreivės eile. Kitaip tariant daugianario laipsniu laikomas didžiausias jo narių laipsnis. Pvz., $f(x, y) = x^2y^3 + 5x^2y^2 - 3x^3 - xy + x + 6 = 0$ yra 5 laipsnio daugianaris. Pirmosios eilės algebrinės kreivės pavyzdys yra tiesė, kurios lygtis, pvz., yra $x = a$, o antrosios eilės kreivės pavyzdžiu gali būti apskritimas, kurio lygtis, pvz., $x^2 + y^2 = a^2$.

2 apibrėžimas. Transcendentinės kreivės – tai plokštumos kreivės, kurios nėra algebrinės. Tiksliau, transcendentinės kreivės – tai tokios plokštumos kreivės, kurių lygtys stačiakampėse Dekarto koordinatų sistemose nėra algebrinės.

Skirtingai nuo algebrinių kreivių, transcendentinės kreivės gali turėti be galo daug sankirtos taškų su kuria nors tiese, turėti be galo daug persilenkimo taškų, o tokių kreivių liestinės gali turėti su kreive be galo daug lietimosi taškų.

Transcendentinių kreivių pavyzdžiai yra funkcijų $y = a^x$, $y = \ln x$, $y = \sin x$ ir kitų trigonometrinių funkcijų grafikai, o taip pat visos cikloidės, visos spiralės ir kitos kreivės [2, 4, 7, 10, 14, 15, 19, 18, 20, 21, 22].

Yra glaudžiai susijusios su apskritimais kreivės, ir tai apskritimo taško trajektorijos, kai šis apskritimas be slydimo juda kitu nejudančiu apskritimu. Taip gaunamos kreivės yra vadinamos cikloidalinėmis kreivėmis (anglų kalba cycloidal arba roulette curve) [2, 10, 14, 15, 21, 22, 25].

Jei vienas apskritimas juda kito apskritimo išore, ta judančio (generuojančio) apskritimo nubrėžiama kreivė vadinama epicikloide, o jei apskritimas juda nejudančio apskritimo vidinėje dalyje – hipocikloide [2, 3, 7, 9, 10, 14, 15, 20, 21, 25, 35, 36].

Pažymėtina, kad epicikloidės ir hipocikloidės būna algebrinės, ir būna transcendentinės kreivės [10, 21]. Epicikloidės pavyzdys – kardioidė yra ketvirtosios eilės algebrinė kreivė, ją brėžia apskritimo taškas, kai tas apskritimas be slydimo juda nejudančiu tokio pat spindulio apskritimu (žr. 7 skyrelį ir 5 pav.). Kitas pavyzdys – algebrinė šeštosios eilės kreivė nefroidė, kurią brėžia fiksuotas apskritimo taškas šiam apskritimui judant dvigubai didesnio apskritimo išorine puse (žr. 7 skyrelį ir 6 pav.).

Kaip minėta, epicikloidės ir hipocikloidės yra atskiras atvejis cikloidalinių kreivių. Bendruoju atveju tariama, kad fiksuotas taškas yra ne ant generuojančio apskritimo, o yra nutolęs nuo jo centro tam tikru atstumu. Šiuo būdu gautos kreivės vadinamos trochoidėmis. Pagal tai, ar generuojantis apskritimas juda išorine ar vidine nejudančio apskritimo puse, išskiriamos epitrochoidės ir hipotrochoidės [2, 3, 4, 10, 14, 20, 21, 25, 35, 36]. Epitrochoidės pavyzdys – Paskalio sraigė, ketvirtosios eilės algebrinė kreivė (žr. 8 skyrelį, 7 pav.).

Kai kurios transcendentinės kreivės taip pat yra glaudžiai susijusios su apskritimais: kvadratriksa [14, 25], cikloidė [3, 4, 14, 15, 19, 18], apskritimo evolventė [3, 7, 19, 18, 21, 25, 36].

3 Cirkuliariosios (apskritosios) algebrinės kreivės ir jų ryšiai su apskritimais

Mokykloje plokštumoje nagrinėjamos daugiausia antrosios eilės kreivės – apskritimai, hiperbolės, parabolės ir viena trečiosios eilės kreivė – kubinė parabolė. Netgi elipsei nėra skiriama daugiau dėmesio, nors su šia kreive mokiniai susiduria astronomijos kurse. Tuo tarpu yra daug algebrinių kreivių, kurios per įvairias geometrines konstrukcijas yra susiję su apskritimais. Minėtos konstrukcijos suteikia pirminį kreivės

vaizdą dar iki to, kai išvedama tos kreivės lygtis ir galima detaliau nagrinėti kreivės savybes, taip pademonstruojant įvairiapusių ryšius tarp visiems pažįstamo apskritimo su kitomis sudėtingesnėmis ir įdomiomis algebrinėmis kreivėmis. Pažymėtina, kad jau antikinėje geometrijoje buvo sukurti įvairūs geometriniai mechanizmai, kurių pagalba gaunamos algebrinės kreivės, ir ši tematika yra turininga ir įdomi [6, 8, 9, 22].

3 apibrėžimas. n -osios eilės algebrinė kreivė vadinama cirkuliariąja, jei jos lygtis stačiakampėse Dekarto koordinačių sistemose užrašoma taip [12, 27]:

$$f_n + f_{n-1} + \dots + f_1 + f_0 = 0,$$

čia kiekvienas dėmuo $f_i = f_i(x, y)$, $i = 1, 2, \dots, n$ – homogeninis i -ojo laipsnio daugianaris su realiaisiais koeficientais, o aukščiausiojo laipsnio daugianaris f_n dalijasi iš dvinaro $x^2 + y^2$.

Iš šio apibrėžimo seka trečiosios eilės cirkuliariosios kreivės lygties bendrasis pavidas.

4 apibrėžimas. Trečiojo laipsnio algebrinė kreivė su sąlyga, kad kreivė eina per koordinačių pradžios tašką, yra cirkuliarioji, jei jos lygtis užrašoma taip [16, 24]:

$$(ax + by)(x^2 + y^2) + Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = 0.$$

Dauguma nuostabios trečiosios eilės algebrinių kreivių yra cirkuliariosios ir daug informacijos apie jas galima rasti [2, 8, 12, 20, 21] darbuose.

Akivaizdu, kad trečiosios eilės cirkuliarioji kreivė polinėse koordinatėse užrašoma tokia lygtimi:

$$(a \cos \varphi + b \sin \varphi)\rho^2 + (A \cos^2 \varphi + B \cos \varphi \sin \varphi + C \sin^2 \varphi)\rho + D \cos \varphi + E \sin \varphi = 0.$$

Taigi norint rasti polinio spindulio išraišką, reikia išspręsti kvadratinę lygtį. Jei $D = E = 0$, tai lygtis tampa tiesine, todėl

$$\rho = -\frac{A \cos^2 \varphi + B \cos \varphi \sin \varphi + C \sin^2 \varphi}{a \cos \varphi + b \sin \varphi}.$$

Įdomiomis savybėmis pasižymi cirkuliariosios kreivės, turinčios simetrijos ašį, pvz. Dioklo cisoidė (apie šią kreivę plačiau 5 skyrelyje). Pastebėkime, kad simetrijos ašimi pasirinkus abscesių ašį, o koordinačių sistemos pradžios tašką parinkus taip, kad jis sutaptų su kreivės viršūne (t. y. su kreivės ir simetrijos ašies sankirtos tašku), tai šios kreivės lygtis užrašoma taip [21]:

$$ax(x^2 + y^2) + Ax^2 + Cy^2 + Bx = 0, \quad (1)$$

arba polinėse koordinatėse

$$\rho^2 + \frac{A \cos^2 \varphi + C \sin^2 \varphi}{a \cos \varphi} \rho + \frac{B}{a} = 0. \quad (2)$$

Dauguma nuostabios ketvirtosios eilės algebrinių kreivių yra bicirkuliariosios.

5 apibrėžimas. Ketvirtosios eilės algebrinė kreivė su sąlyga, kad kreivė eina per koordinatinių pradžių tašką, yra bicirkuliarioji, jei jos lygtis užrašoma taip [12, 16]:

$$(x^2 + y^2)^2 + (ax + by)(x^2 + y^2) + Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = 0.$$

Tuomet polinėse koordinatėse bicirkuliariosios kreivės lygtis yra tokio pavidalo:

$$\rho^3 + (a \cos \varphi + b \sin \varphi) \rho^2 + (A \cos^2 \varphi + B \cos \varphi \sin \varphi + C \sin^2 \varphi) \rho + D \cos \varphi + E \sin \varphi = 0.$$

Taigi ir šiuo atveju norint rasti polinio spindulio išraišką, reikia išspręsti kubinę lygtį. Jei $A = B = C = D = E = 0$, tai lygtis tampa tiesine, todėl

$$\rho = -(a \cos \varphi + b \sin \varphi).$$

Daug informacijos apie bicirkuliariasias kreives galima rasti [2, 8, 20, 21] darbuose.

Trečiosios ir ketvirtosios eilės cirkuliariosios kreivės – tai ypatingos kreivės, kurios yra generuojamos ne tik apskritimais, bet ir kitomis antrosios eilės kreivėmis, o kai kada ir pirmosios eilės kreivėmis. Pvz., Nikomedo konchoidės generuojanti kreivė yra tiesė [2, 5, 10, 14, 15, 21, 25].

Nagrinėdamas trečiosios eilės algebrinių kreivių teoriją, Izaokas Niutonas pasiūlė mechanizmus cirkuliariųjų kreivių konstravimui [1, 6].

Straipsnyje nagrinėjamos trečiosios ir ketvirtosios eilės cirkuliariosios kreivės, kurios konstruojamos naudojant jas generuojančius apskritimus. Jų lygtys dekartinėse koordinatėse išvedamos naudojant gerai žinomi mokyklinės geometrijos faktai, dažniausiai trikampių panašumas, ir tokios tematikos ryšys su apskritimais yra įdomus.

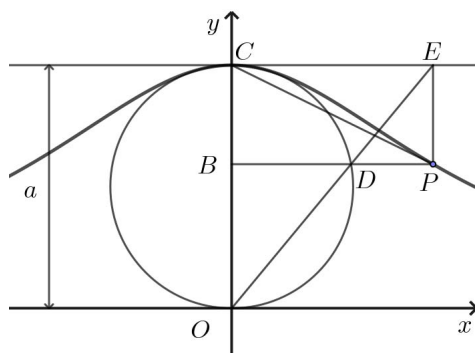
Reikia pažymėti, kad egzistuoja necirkuliariosios trečiosios eilės kreivės, kurios yra generuojamos apskritimais, pvz., Anjezi kreivė (3), arba anjeziana (4).

4 Anjezi kreivė ir anjezianai

Anjezi kreivė ir anjeziana yra trečiosios eilės algebrinės kreivės (žr. (3) ir (4) lygtis), šios kreivės pasižymi charakteringu varpo formos arba kupolo formos pavidalu (1 pav.) [2, 14, 16, 22, 24, 25, 34]. Anjezi kreivė (versiera) taip pavadinta pagerbiant XVIII amžiaus italų matematikę Mariją Gaetaną Anjezi (Maria Gaetana Agnesi, 1718–1799), kuri išnagrinėjo šios kreivės savybes. Anglakalbėje literatūroje dažnai ši kreivė vadinama “witch of Agnesi” (Anjezi ragana) [2, 14, 34].

Anjezi kreivės braižymas naudojant apskritimą. Anjezi kreivė gaunama tokiu būdu [2, 14, 16, 20, 24, 25]. Nagrinėjame skersmens a apskritimą, kurio centras yra taškas $(0, \frac{a}{2})$. Per koordinatinių pradžių tašką O nubrėžiame tiesę, kuri dar kartą kerta apskritimą taške D , ir dar nubrėžiame su abscisių ašimi lygiagrečią apskritimo liestinę $y = a$, kuri liečia apskritimą taške C . Sakykime, kad tiesė OD kerta šią liestinę taške E , per tašką D brėžiame tiesę BD , $B \in Oy$, lygiagrečią su abscisių ašimi, o iš taško E iškeliame statmenį tiesei EC ; šio statmens ir tiesės BD susikirtimo taškas P yra Anjezi kreivės taškas (1 pav.). Tiesę OD sukanant apie tašką O ir atliekant aprašytą konstrukciją, gaunami kiti Anjezi kreivės taškai.

Anjezi kreivės lygties išvedimas. Išvesime Anjezi kreivės lygtį dekartinėse koordinatėse. Sakykime, kad kad taškas $P = (x, y)$ priklauso Anjezi kreivei (1 pav.). Pastebėkime, kad $\triangle OBD \sim \triangle OCE$, iš čia seka proporcija $OB : BD = OC : CE$. Kadangi $OB = y$, $CE = x$, $BC = a - y$, o $BD = \sqrt{OB \cdot BC} = \sqrt{y(a - y)}$ (lygybė



1 pav. Anjezi kreivė.

$BD = \sqrt{OB \cdot BC}$) seka iš teoremos apie stačiojo trikampio statmens BD į įžambinę iš stačiojo kampo viršūnės ilgio formulės ir ši teorema gaunama iš atitinkamų trikampių panašumo), tai $y : \sqrt{y(a-y)} = a : x$. Iš čia gauname Anjezi kreivės lygtį dekartinėse koordinatėse

$$y(x^2 + a^2) = a^3. \quad (3)$$

Akivaizdu, kad Anjezi kreivė yra simetriška ordinačių ašies atžvilgiu, abscisių ašis yra jos asimptotė, taškas C yra bendras generuojančio apskritimo ir Anjezi kreivės taškas – Anjezi kreivės viršūnė; šiame taške Anjezi kreivė ir apskritimas turi bendrą liestinę, lygiagrečią su abscisių ašimi.

Pagal 3 apibrėžimą ir (3) lygties matome, kad Anjezi kreivė nėra cirkulioji kreivė. Todėl norint rasti polinio spindulio išraišką reikia spręsti kubinę lygtį, nes Anjezi lygtis polinėse koordinatėse yra [14]:

$$\rho^3(\cos^2 \varphi \sin \varphi) + \rho(a^2 \sin \varphi) - a^3 = 0.$$

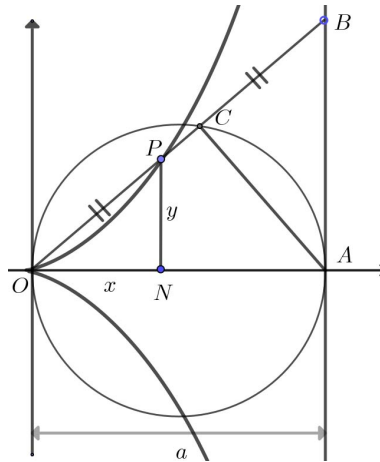
Anjeziana. Anjezi kreivės konstrukciją galima apibendrinti, kai gaunama kreivė, vadinama anjeziana (žr. [16, 22, 24]). Šiuo atveju nagrinėjamas apskritimas $x^2 + y^2 = by$, brėžiama tiesė iš taško O kertanti apskritimą taške D o tiesę $y = a$ taške E . Iš taškų E ir D nubrėžtų tiesių, lygiagrečių atitinkamai Oy ir Ox ašimis, sankirtos taškas P yra anjezianos taškas. Šios kreivės lygties išvedimas yra analogiškas Anjezi kreivės lygties išvedimui, todėl užrašysime tik lygtį, detales palikdami skaitytojams:

$$y(x^2 + a^2) = ba^3. \quad (4)$$

5 Dioklo cisoidė

Ši kreivė yra cirkulioji algebrinė trečiosios eilės kreivė (žr. (5) lygtį). Tai klasikinės kreivės, kuri apibūdinama geometriškai, pavyzdys.

Apie šios kreivės atsiradimą pasakojama graži legenda, pagal kurią Delo salos gyventojai kentėjo nuo maro, kurį jiems pasiuntė dievai. Pagal orakulo pranašystę dievų rūstybę būtų galima sumažinti, padvigubinus kubo formos Dievo Apolono altoriaus tūrį [23, 30]. Uždavinio esmė tame, kad reikia nustatyti kubo briaunos ilgį, kai to kubo tūris būtų du kartus didesnis už duotojo kubo tūrį. Kubo dvigubtinimo uždaviniui



2 pav. Dioklo cisoidė.

išspręsti graikų matematikas Dioklas (150–100 m. pr. Kr.) panaudojo Dioklo cisoidę [2, 4, 14, 21]. Ši legenda paaiškina, kodėl graikai tiek daug dėmesio skyrė tokiam neturinčiam didelės praktinės naudos uždaviniui kaip kubo tūrio dvigubinimas. Cisoidės pavadinimas kilo nuo graikiško žodžio „kissos“ (panašus į gebenės lapą), taigi kilęs iš kreivės formos (2 pav.).

Dioklo cisoidės braižymas naudojant apskritimą. Nubrėžkime generuojantį apskritimą, kurio skersmuo $OA = a$ ir to apskritimo liestinę taške A [2, 4, 10, 14, 15, 21, 25, 28]. Per tašką O nubrėžiame apskritimo kirstinę, kuri apskritimą kerta taške C , o liestinę – taške B . Toje kirstinėje randame tokį tašką P , kad būtų teisinga lygybė $OP = CB$ (2 pav.). Taip gautas taškas P yra cisoidės taškas. Pasukę spindulį OB apie tašką O kuriuo nors kampu ir pakartoję aprašytą konstrukciją, gauname kitą cisoidės tašką ir t. t.

Dioklo cisoidės lygties išvedimas. Cisoidės lygtis dekartinėse koordinatėse paprastai gaunama iš jos lygties polinėse koordinatėse [2, 14, 21, 28]. Mes gausime cisoidės lygtį iš karto dekartinėse koordinatėse, taikydami tik mokyklinę geometriją – trikampių panašumą. Sakykime, kad taškas N yra taško P ortogonalioji projekcija abscisų ašyje. Iš to, kad $\triangle ONP \sim \triangle OAB$ ir $\triangle ONP \sim \triangle OCA$ gauname proporcijas $OB : a = \sqrt{x^2 + y^2} : x$ ir $OC : a = x : \sqrt{x^2 + y^2}$. Iš čia seka, kad

$$OB = a \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}, \quad OC = a \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Kadangi $\sqrt{x^2 + y^2} = OB - OC$, tai iš čia gauname cisoidės lygtį:

$$x(x^2 + y^2) - ay^2 = 0. \quad (5)$$

Iš šios lygties išplaukia, kad cisoidė yra cirkuliarioji kreivė simetriška abscisų ašies atžvilgiu, ši lygtis yra (1) lygties atskiras atvejis. Cisoidės šakos eina į begalybę, tiesės $x = a$ – generuojančio apskritimo liestinė, koordinatų pradžios taškas $(0, 0)$ yra cisoidės viršūnė o taip pat jos ypatingasis taškas – pirmojo tipo grįžimo taškas.

Tokio tipo ypatingųjų taškų antrosios eilės kreivės neturi, juos turi tik trečiosios ir aukštesniųjų eilių kreivės.

Taikydami polinių ir dekartinių koordinačių ryšius, gauname cisoidės lygtį polinėse koordinatėse

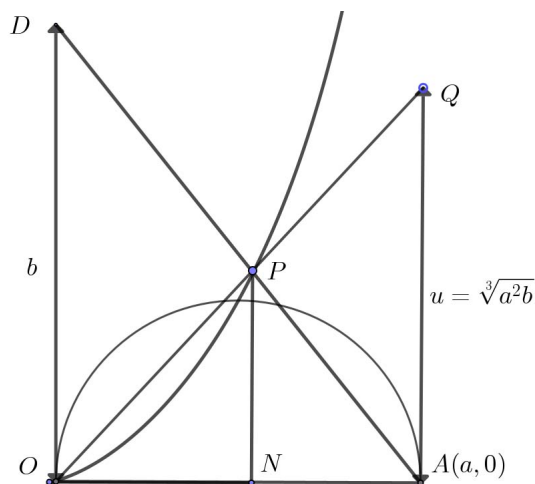
$$\rho = a \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi}$$

(palyginkite su (2) lygtimi).

Kubo dvigubtinimo uždavinio formuluotė. Kubo dvigubtinimo uždavinio formuluotė paprasta: sakykime, kad duotojo kubo briaunos ilgis a , o x – ieškomojo kubo briaunos ilgis, tuomet $x^3 = 2a^3$, o $x = \sqrt[3]{2}$. Kitaip tariant, kubo tūris lygus a^3 , jo briaunos ilgis a , o kubo, kurio tūris du kartus didesnis – briaunos ilgis $\sqrt[3]{2}a$. Dar paprasčiau – kubo tūris $1^3 = 1$, jo briaunos ilgis 1, o kubo, kurio tūris du kartus didesnis $2 \cdot 1^3 = 2$, briaunos ilgis $\sqrt[3]{2}$, nes $(\sqrt[3]{2} \cdot 1)^3 = (\sqrt[3]{2})^3 \cdot 1^3 = 2 \cdot 1$.

Graikai nemokėjo skriestuvu ir liniuote nubrėžti atkarpos, kurios ilgis lygus $\sqrt[3]{2}$. Jie mokėjo nubrėžti atkarpą, kurios ilgis lygus $\sqrt{2}$, kaip kvadrato, kurio kraštinės ilgis lygus 1, įstrižainę. Tik 1837 metais prancūzų matematikas Pjeras Vancelis įrodė, kad skriestuvu ir liniuote negalima nubrėžti kubo briaunos, lygios $\sqrt[3]{2}$ [6, 13, 17, 28, 29, 30]. Tai reiškia, kad skriestuvu ir liniuote negalima išspręsti kubo dvigubtinimo uždavinio. Šį uždavinį galima išspręsti taikant Dioklo cisoidę.

Kubo dvigubtinimas taikant Dioklo cisoidę. Duotosioms atkarpoms a ir b rasime tokią atkarpą u , kad būtų teisinga lygybė $u^3 = a^2b$ [2, 28]. Tuo tikslu nagrinėjame cisoidę (3 pav.), čia O – koordinačių pradžios taškas, taškas $A(a, 0)$, tuomet gene-



3 pav. Kubo dvigubtinimas.

ruojančio apskritimo skersmens ilgis $OA = a$. Ordinačių ašyje atidėkime atkarpą $OD = b$, nubrėžkime tiesę DA ir sakykime, kad taške $P = (x, y)$ ši tiesė kerta cisoidę. Nubrėžkime tiesę OP ir sakykime, kad taške Q ši tiesė kerta generuojančio apskritimo liestinę $x = a$. Jei taškas $N = (x, 0)$, tai tiesės PN ir OA yra statmenos ir eina per tašką N . Tuomet $u = AQ = \sqrt[3]{a^2b}$ – ieškomoji atkarpa (3 pav.). Kad

Kappa kreivės braižymas naudojant apskritimą. Kappa kreivė yra aibė plokštumos taškų, apibrėžiama tokiu būdu. Bet kuriam abscisių ašies taškui D braižomas apskritimas su centru D ir fiksuotu spinduliu a (4 pav. šis apskritimas nubrėžtas štrichuota linija). Iš koordinatinių pradžios taško O nubrėžiame šiam apskritimui liestinę, kuri liečia apskritimą taške P . Kai apskritimų centrai D yra bet kurie abscisių ašies taškai, tai nurodytu būdu gauti taškai P apibrėžia kreivę, vadinamą kappa kreive.

Kitaip tariant šią kreivę galima apibrėžti kaip lietimosi taškų, kuriuose iš koordinatinių pradžios taško nubrėžtos liestinės liečia apskritimus, kurių spinduliai lygus a , o centrai yra Ox ašyje [21]. Istoriskai kappa kreivės nagrinėjimas susijęs su uždaviniu, kuriame reikia rasti tokią kreivę: iš fiksuoto taško, pvz. O , brėžiame radius vektorių iki konkrečio kreivės taško; iš to taško iškelsime statmenį iki spindulio Ox ; tuomet statmens ilgis yra duotoji atkarpa (4 pav.). Iš šio apibrėžimo matome, kad jis ekvivalentus aukščiau duotajam [21].

Tačiau yra kitas būdas braižyti kappa kreivę naudojant jau generuojantį apskritimą. Tuo tikslu brėžiame generuojantį (neštrichuotą) apskritimą, kurio centras yra koordinatinių pradžioje O , o spindulys lygus duotajai atkarpai a (4 pav.). Toliau nubrėžiame bet kurį apskritimo spindulį $OQ = a$ ir per tašką Q brėžiame tiesę v , lygiagrečią su Ox ašimi. Per tašką O nubrėžiame spinduliui OQ statmeną tiesę u , kuri kerta tiesę v taške $P = (x, y)$. Tiesių u ir v sankirtos taškas P yra kappa kreivės taškas.

Įrodymui nubrėžiame atkarpai OP statmenį PD , čia D yra Ox ašyje. Kadangi $QP \parallel OD$, tai $\angle QPO = \angle POD$. Tuomet $\triangle POD = \triangle OPQ$, nes jie yra statieji, turi lygius smailiuosius kampus ir OP yra bendras statinis. Iš čia seka, kad $DP = OQ = a$, taigi štrichuotas spindulio a apskritimas su centru taške D liečia tiesę u , o tai reiškia, kad taškas P priklauso kappa kreivei.

Kappa kreivės lygties išvedimas. Paprastai kappa kreivės Dekarto lygtis yra išvedama naudojant jos polinę lygtį [21]. Išvesime lygtį, naudojant tik mokyklinę geometriją (trikampių panašumą). Sakysime, kad $OD = l$, $OP = \rho$, $PD = a$, $PA = y$ ir $OA = x$ (4 pav.). Kadangi $\triangle OPD \sim \triangle PDA$, tai gauname proporciją $x : \rho = \rho : l$, todėl $l = \rho^2 / x = (x^2 + y^2) / x$, o iš Pitagoro teoremos turime $l^2 = \rho^2 + a^2$. Iš šių lygybių seka, kad

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2 + y^2}{x} \right)^2 &= \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)^2 + a^2, \\ \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2} - (x^2 + y^2) &= a^2, \\ (x^2 + y^2) \frac{(x^2 + y^2 - x^2)}{x^2} &= a^2, \\ (x^2 + y^2)y^2 &= a^2x^2. \end{aligned}$$

Taigi gavome kappa kreivės lygtį dekartinėse koordinatėse

$$(x^2 + y^2)y^2 - a^2x^2 = 0. \quad (7)$$

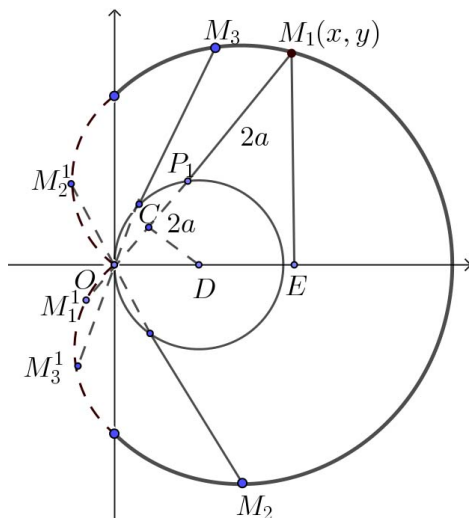
Kitas šios lygties išvedimo be polinių koordinatinių būdas nurodytas [14] darbe.

Iš kappa kreivės lygties matyti, kad ji yra cirkulioji ketvirtosios eilės kreivė simetriška abscisių ašies atžvilgiu. Jos šakos yra begalinio ilgio, koordinatinių pradžios taškas yra jos viršūnė. Polinėse koordinatėse kappa kreivė užrašoma tokia lygtimi

$$\rho = a \operatorname{ctg} \varphi.$$

7 Kardioidė

Ši kreivė yra ketvirtosios eilės bicirkuliarioji algebrinė kreivė (žr. (9) lygtį). Kardioidė – tai kreivė, kurią brėžia fiksuotas duotojo apskritimo taškas, kai apskritimas be slydimo juda išorine kito tokio paties spindulio apskritimo (vadinamo generuojančiu apskritimu) puse [10, 14, 16, 21, 25, 26, 35]. Šios kreivės pavadinimas kilo iš to, kad jos vaizdas (matematikų nuomonė) panašus į širdies vaizdą, o žodis kardioidė graikų kalba reiškia panašus į širdį (5 pav.). Kardioidė yra atskiras Paskalio sraigės atvejis [21], ji yra epicikloidės pavyzdys (žr. 2 skyrelį).



5 pav. Kardioidė.

Kardioidės braižymas naudojant apskritimą. Nubrėžkime generuojantį apskritimą, kurio spindulys a , o centras $D(a, 0)$ (5 pav.) [3]. Iš koordinatų pradžios O brėžiame spindulį, kuris apskritimą kerta taške P_1 . Atidėkime šiame spindulyje į abi puses nuo taško P_1 atkarpas lygias apskritimo skersmeniui $2a$, tuomet gauname du taškus: M_1 , brėžinyje pažymėtą ant ištisinės linijos, ir M_1^1 , pažymėtą ant štrichuotos linijos. Pasukę spindulį OP_1 kuriuo nors kampu ir atlikę nurodytus veiksmus, gauname kitus kardioidės taškus $M = (M_1, M_2, M_3, \dots)$ ir $M^1 = (M_1^1, M_2^1, M_3^1, \dots)$ pavaizduotus ant ištisinės ir ant štrichuotos kreivių. Tokių taškų aibė M ir M^1 yra kardioidė.

Kardioidės lygties išvedimas. Išvesime kardioidės, esančios dešinėje ordinačių ašies pusėje, lygtį dekartinėse koordinatėse. Turime $OD = a$, $P_1M_1 = 2a$, $OM_1 = OP_1 + P_1M_1 = 2OC + 2a$. Tarkime E – taško M_1 ortogonalioji projekcija abscisų ašyje. Kadangi $\triangle OEM_1 \sim \triangle OCD$, tai gauname, kad $CD/OC = y/x$, todėl $CD = OC \frac{y}{x}$. Iš Pitagoro teoremos randame, kad

$$a^2 = OC^2 + CD^2 = OC^2 + \left(OC \frac{y}{x}\right)^2 = OC^2 + OC^2 \frac{y^2}{x^2} = OC^2 \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right).$$

Iš čia seka, kad

$$OC = \frac{ax}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (8)$$

Kadangi $\triangle OEM_1 \sim \triangle OCD$ todėl $OD/OC = OM_1/EM_1$, taigi $a/OC = (2OC + 2a)/x$. Iš čia seka lygybė $ax = OC(2OC + 2a)$, į kurią įrašome OC išraišką (8) ir, atlikę nesudėtingus pertvarkymus

$$\begin{aligned} ax &= \frac{ax}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(2 \frac{ax}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2a \right), \\ 1 &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(\frac{2ax + 2a\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), \\ x^2 + y^2 &= 2ax + 2a\sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

gauname kardioidės lygtį dekartinėse koordinatėse [35]

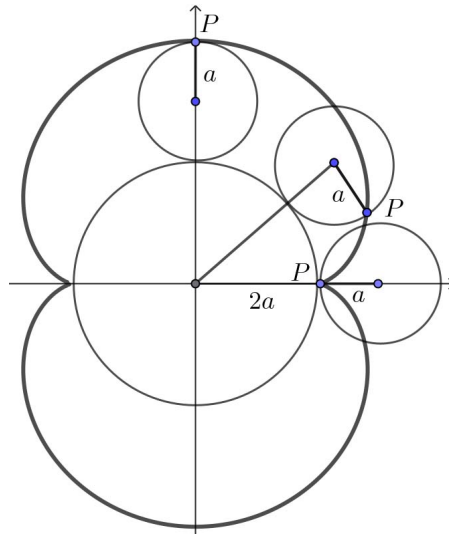
$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) = 0. \quad (9)$$

Belieka įrodyti (paliekame tai skaitytojams), kad kairysis (štrichuotasis) lankas papildoma dešinįjį lanką iki visos kardioidės.

Iš gautosios lygties seka, kad kardioidė yra bicirkuliarioji ketvirtosios eilės kreivė, simetriška abscisų ašies atžvilgiu. Taikydami ryšius tarp polinių ir dekartinių koordinatų, kardioidės lygtį polinėse koordinatėse užrašome taip:

$$\rho = 2a(\cos \varphi + 1).$$

Nefroide. Pažymėkime įdomų faktą: jei judančio apskritimo spindulys yra du kartus mažesnis už nejudančio apskritimo spindulį, tai analogiškai gaunama kreivė (6 pav.), vadinama nefroide (graikų kalba inkstas) [14, 16, 22, 33, 35, 36]. Kitaip tariant nef-



6 pav. Nefroide.

roidė – kreivė, kurią brėžia fiksuotas duotojo apskritimo taškas P (6 pav.), kai apskritimas be slydimo juda dvigubai didesnio apskritimo išorine puse.

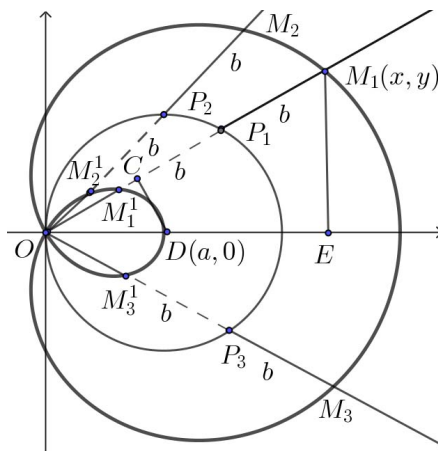
Ši kreivė yra cirkuliarioji algebrinė šeštosios eilės kreivė (žr. (10) lygtį). Nefroidė irgi yra atskiras epicikloidės atvejis (žr. 2 skyrelį). Nefroidės kreivės lygtis dekartinėse koordinatėse [33, 35]:

$$(x^2 + y^2 - 4a^2)^3 - 108a^4y^2 = 0. \quad (10)$$

8 Paskalio sraigė

Ši kreivė yra bicirkuliatioji ketvirtosios eilės algebrinė kreivė (žr. (12) lygtį) [10, 14, 16, 21, 25, 32, 35]. Su Paskalio vardu siejama daug atradimų matematikoje ir fizikoje. Paskalio sraigė (angliškai limaçon of Pascal arba Pascal's snail) pavadinta ne garsiojo Blezo Paskalio garbei, o jo tėvo Etjeno Paskalio garbei, kuris buvo matematikos mėgėjas. Paskalio sraigė yra priskiriama traktrisėms, t. y. kreivėms, kurių dėka atliekama kampo trisekcija. Paskalio sraigė yra epitrochoidės pavyzdys (žr. 2 skyrelį).

Paskalio sraigės braižymas naudojant apskritimą. Nubrėžiame apskritimą, kurio spindulys lygus a , o centras $D(a, 0)$ (7 pav.). Per koordinatinių sistemos pradžios



7 pav. Paskalio sraigė.

tašką O nubrėžiame spindulį, kertantį apskritimą taške P_1 . Nuo taško P_1 [10, 14, 16, 21, 25, 35] spindulyje OP_1 į vieną pusę atidedame atkarpą $P_1M_1 = b$, čia b – pasirinkta atkarpa. Sukant spindulį OM_1 nuo 0° iki 180° , taip gaunama taškų $M = (M_1, M_2, M_3, \dots)$ aibė. Sukant spindulį OM_1 nuo 180° iki 360° , tokią pačią atkarpą atidedame nuo taško P_1 tik į kitą pusę, nei atidėjome anksčiau, ir gauname aibę taškų $M^1 = (M_1^1, M_2^1, M_3^1, \dots)$. Taškų M ir M^1 aibė ir yra Paskalio sraigė.

Paskalio sraigės lygties išvedimas. Paskalio sraigės lygties išvedimui randame atkarpos OP_1 vidurio tašką C , tuomet $OD = a$, $P_1M_1 = P_1M_1 = b$, $OM_1 = OP_1 + P_1M_1 = 2OC + b$ (7 pav.). Iš Pitagoro teoremos gauname, kad $OD^2 = OC^2 + CD^2$. Jei E – taško M_1 ortogonalioji projekcija abscisių ašyje, tai $\triangle OEM_1 \sim \triangle OCD$, todėl

$CD : OC = y : x$ t. y. $CD = OC \frac{y}{x}$, Tuomet

$$a^2 = OC^2 + CD^2 = OC^2 + \left(OC \frac{y}{x}\right)^2 = OC^2 + OC^2 \frac{y^2}{x^2} = OC^2 \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right).$$

Iš čia gauname, kad

$$OC = \frac{ax}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (11)$$

Kadangi $\triangle OEM_1 \sim \triangle OCD$, tai teisinga lygybė $OD/OC = OM_1/EM_1$, taigi $a/OC = ((2OC + b))/x$, iš čia seka, kad

$$ax = OC(2OC + b).$$

Irašę į šią lygybę OC išraišką iš (11) ir atlikę nesudėtingus pertvarkymus

$$\begin{aligned} ax &= \frac{ax}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(2 \frac{ax}{\sqrt{x^2 + y^2}} + b\right), \\ 1 &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(\frac{2ax + b\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \\ x^2 + y^2 &= 2ax + b\sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

gauname Paskalio sraigės lygtį dekartinėse koordinatėse

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 - b^2(x^2 + y^2) = 0. \quad (12)$$

Skaitytojams paliekame įrodyti, kad taškų M^1 aibė sudaro kreivės lanką, esantį viduje taškų M aibės.

Iš lygties (12) matome, kad Paskalio sraigė yra bicirkuliarioji ketvirtosios eilės algebrinė kreivė. Akivaizdu, kai $b = a$, čia a generuojančio apskritimo spindulys, tai Paskalio sraigė yra kardioidė (žr. (9) lygtį).

Taikydami ryšio tarp polinių ir dekartinių koordinačių formules, lengvai randame Paskalio sraigės lygtį polinėse koordinatėse:

$$\rho = 2a \cos \varphi + b.$$

Kampo trisekcijos uždavinio sprendimas Paskalio sraigės pagalba. Nagrinėkime Paskalio sraigę, einančią per generuojančio apskritimo centrą L , ir tarkime, kad $a = b$ (8 pav.). Sakykime, kad reikia kampą $\angle KLN$ padalyti į tris lygias dalis. Tuo tikslu nukopijuojame Paskalio sraigę taip, kad kampo $\angle KLN$ viršūnė būtų generuojančio apskritimo centras, o kreivės ašis AA' sutaptų su kampo kraštine KL .

Pratęskime kampo kraštinę NL iki susikirtimo su Paskalio sraigę taške D ir sujunkime šį tašką su tašku A . Tuomet kampas $\angle ADL$ yra ieškomasis, t. y. $\angle ADL = 1/3\angle KLN$ [2, 21].

Iš tikrųjų, sakykime, kad tiesė AD kerta generuojantį apskritimą taške B , sujunkime šį tašką su tašku L . Trikampiai $\triangle ABL$ ir $\triangle LBD$ yra lygiašoniai, nes $AL = LB = BD = a$, todėl $\angle ADL = \angle BLD = \alpha$. Todėl $\angle ABL = 2\alpha$, taigi $\angle BAL = 2\alpha$. Iš čia gauname, kad $\angle KLN = \angle BDL + \angle BAL = \alpha + 2\alpha = 3\alpha = 3\angle ADL$, taigi $\angle ADL = \alpha = 1/3\angle KLN$ (8 pav.).

- [12] H. Hilton. *Plane Algebraic Curves*. Oxford, The Clarendon Press, 1920. <https://archive.org/details/cu31924001544216/page/n5/mode/2up>.
- [13] F. Klein. *Famous Problems of Elementary Geometry. The Duplication of the Cube, the Trisection of an Angle, the Quadrature of the Circle*. Boston, Ginn and Co, 1897. <https://archive.org/details/famousproblemsof00kleiiala>.
- [14] J.D. Lawrence. *A Catalog of Special Plane Curves*. New York, Dover Publications, 1972. <https://archive.org/details/catalogofspecial00lawr>.
- [15] E.H. Lockwood. *A Book of Curves*. Cambridge, Eng., University Press, 1963. <https://archive.org/details/bookofcurves0000lock/mode/2up>.
- [16] G. Loria. *Spezielle Algebraische und Transzendente Ebene Kurven; Theorie und Geschichte*. Leipzig, Berlin, Teubner, 1911. <https://archive.org/details/speziellealgebra01lori>.
- [17] J. Lützen. Why was Wantzel overlooked for a century? The changing importance of an impossibility result. *Hist. Math.*, **36**(4):374–394, 2009. <https://doi.org/10.1016/j.hm.2009.03.001>.
- [18] A.I. Markushevich. *Zamechatelnye krivye*. Moskva, Nauka, 1978. https://www.mathedu.ru/text/markushevich_zamechatelnye_krivye_1978/p0/.
- [19] A.I. Markushevich. *Remarkable Curves*. Moscow, Mir Publishers, 1980. <https://archive.org/details/1ml-remarkable-curves>.
- [20] G. Salmon. *Treatise on Higher Plane Curves. Intended as a Sequel to a Treatise on Conic Sections*. Dublin Hodges, Foster and Figgis, 1879. <https://archive.org/details/3edtreatiseonhighesalmuoft>.
- [21] A.A. Savelov. *Ploskiye krivyye [Plane curves]. Sistematika, svoystva, primeneniya*. Moskva, FML, 1960. <http://www.vixri.ru/d/Savelov%20A.A.%20-%20Ploskie%20krivyye%20-%201960.pdf>.
- [22] E.V. Shikin, M.M. Frank-Kameneczkij. *Krivye na ploskosti i v prostranstve*. Moskva, FAZIS, 1997.
- [23] D.E. Smith. *History of Mathematics. General Survey of the History of Elementary Mathematics, Vol. 1*. N.Y., Dover Publication, 1951. https://www.hlevkin.com/hlevkin/90MathPhysBioBooks/mathHistory/Smith_History-Of-Mathematics-Vol1_1923.pdf.
- [24] A.S. Smogorzhevskij, E.S. Stolova. *Spravochnik po teorii ploskix krivy'x 3-go poryadka*. Moskva, Fizmatgiz, 1961.
- [25] M.Ya. Vygodskij. *Spravochnik po vysshej matematike*. Moskva, FML, 1977. <https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Vygodskij1977ru-1.pdf>.
- [26] Free encyclopedia. Wikipedia. Cardioid. <https://en.wikipedia.org/wiki/Cardioid> (žiūrėta 2025-11-28).
- [27] Free encyclopedia. Wikipedia. Circular algebraic curve. https://en.wikipedia.org/wiki/Circular_algebraic_curve (žiūrėta 2025-11-28).
- [28] Free encyclopedia. Wikipedia. Cissoid of Diocles. https://en.wikipedia.org/wiki/Cissoid_of_Diocles (žiūrėta 2025-11-28).
- [29] Free encyclopedia. Wikipedia. Constructible number. https://en.wikipedia.org/wiki/Constructible_number (žiūrėta 2025-11-28).
- [30] Free encyclopedia. Wikipedia. Doubling the cube. https://en.wikipedia.org/wiki/Doubling_the_cube (žiūrėta 2025-11-28).
- [31] Free encyclopedia. Wikipedia. Kappa curve. https://en.wikipedia.org/wiki/Kappa_curve (žiūrėta 2025-11-28).

- [32] Free encyclopedia. Wikipedia. Limaçone. <https://en.wikipedia.org/wiki/Lima%C3%A7on> (žiūrėta 2025-11-28).
- [33] Free encyclopedia. Wikipedia. Nephroid. <https://en.wikipedia.org/wiki/Nephroid> (žiūrėta 2025-11-28).
- [34] Free encyclopedia. Wikipedia. Witch of Agnesi. https://en.wikipedia.org/wiki/Witch_of_Agnesi (žiūrėta 2025-11-28).
- [35] R.C. Yates. *A Handbook on Curves and Their Properties*. Ann Arbor, J. W. Edwards, 1947. <https://archive.org/details/YatesHandbookCurves1947/page/n5/mode/2up>.
- [36] C. Zwikker. *The Advanced Geometry of Plane Curves and Their Applications*. New York, Dover Publications, Inc., 1963. <https://mathphyche.wordpress.com/wp-content/uploads/2019/12/advanced-geometry.pdf>.

SUMMARY

Remarkable plain curves

E. Mazėtis, G. Melničenko

People understood the concept of a curve intuitively in ancient times. By observing the trajectory of a thrown stone, the curvature of riverbanks, the contours of leaves of plants and flowers, people gradually developed the concept of curve. The paper attempts to discuss such curves, which have led mathematicians to take a deeper look at the concept of curve and to study the properties of curves more seriously. The authors use the term “remarkable curves” for those curves of third and fourth order that give rise to circles (generating circles). The equations of such curves in Cartesian coordinates can be derived using elementary geometry methods, usually using the similarity of triangles. The authors believe that the ideas presented in this article will help mathematics teachers to encourage students to take a more serious interest in the very interesting science of mathematics.

Keywords: circle; algebraic curve; circular curves; circular curves of 3rd order; bicircular curves of 4th order; doubling of cube; trisection of angle; epicycloid; hypocycloid; trochoid; epitrochoid; hypotrochoid; witch of Agnesi; agnesian; cissoids of Diocles; kappa; cardioid; Pascal’s snail; nephroid