

Netaisyklingos matematikos pavyzdžiai lietuviškuose vadovėliuose

Rimas Norvaiša 

Matematikos ir informatikos fakultetas, Vilniaus universitetas, Lietuva 

✉ Korespondentas: rimas.norvaisa@mif.vu.lt

Įteiktas 2025 gruodžio 3; publikuotas 2025 gruodžio 21

Santrauka. Straipsnyje aptariami netaisyklingos matematikos atvejai vadovėliuose. Pavyzdžiui, vietoje matematinės sąvokos apibrėžties vadovėliuose aiškinami matematiniai simboliai ir terminai. Kitais atvejais, pagrindžiant ar įrodant teiginius naudojami klaidingi ar netriivialūs faktai taip, lyg būtų savaime suprantami. Pateikiame ir loginio samprotavimo klaidų pavyzdžių. Dalį netaisyklingumo atvejų vadovėliuose paaiškiname matematikos programos problemišku. Kita dalis netaisyklingumo kyla dėl tų pačių temų skirtingo traktavimo skirtinguose vadovėliuose. Visais aptariamais atvejais siūlome alternatyvius taisyklingus sprendimus.

Raktiniai žodžiai: mokyklinės matematikos turinys; matematikos vadovėliai; taisyklinga matematika; apibrėžtis; įrodymas

AMS: 97E50

Tyrimo tikslas, kontekstas ir klausimas

Šis tyrimas yra anksčiau publikuotų tyrimų tęsinys. Juose buvo nagrinėtas trupmenos sąvokos vadovėliuose problemiškas [10] ir geometrinių transformacijų mokymosi trajektorija [11]. Dabartinio tyrimo tikslas – identifikuoti netaisyklingos matematikos atvejus lietuviškuose vadovėliuose susijusius su sąvokų apibrėžimais, matematine kalba ir teiginių įrodinėjimu, atskleidžiant tokių atvejų priežastis ir pasiūlant alternatyvius variantus.

Netaisyklingos matematikos identifikavimas ir alternatyvų jai paieška gali padėti lavinant mokinių mąstymo discipliną. Racionalaus mąstymo, loginio samprotavimo ir argumentavimo gyvybingumui mokyklinėje matematikoje būtina laikytis šių pagrindinių mokyklinės matematikos principų [16]:

1. Kiekviena sąvoka yra tiksliai apibrėžiama, o sąvokų apibrėžimai yra loginių išvedimų pagrindas;
2. Kiekvienas teiginys yra tiksliai suformuluotas, visada aišku, kas yra žinoma ir kas nėra žinoma;
3. Kiekvienas teisingas teiginys gali būti pagrindžiamas logiškai taisyklingu samprotavimu;
4. Matematika yra koherentiška: tai audinys, kurį sudaro sąvokos ir gebėjimai, logiškai suaugę į vieną visumą;
5. Matematikos žinios yra kuriamos tikslingai, todėl kiekviena standartinėje mokyimo programoje pateikiama sąvoka ar gebėjimas turi savo konkrečią paskirtį.

Netaisyklinga matematika laikome tai, kas vienaip ar kitaip prieštarauja pagrindiniams mokyklinės matematikos principams, įskaitant matematines ir logines klaidas. Iliustruosime tai funkcijos traktavimo netaisyklingumo pavyzdžiais.

Pirma problema, funkcijos sąvoka naudojama tame pačiame vadovėlyje ją traktuojant pagal dvi skirtingas apibrėžtis. Funkcija tapatinama su reiškiniu. Tai skirtingos sąvokos. Viena jų yra taisyklė (sąryšis), o kita yra skaičius. Su tuo susijęs dviprasmiškas kintamojo traktavimas laikant jį „kintančiu“, dydžiu (priklausomas kintamasis) ir skaičių aibės elementu, t. y. skaičiumi. Dviprasmiškumas pasireiškia skaičiuojant išvestines: $x' = 1$, o $2' = 0$. Išvestinių formulėse turėtume rašyti $(f + g)' = f' + g'$, o rašome $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$. Be to, funkcijos apibrėžimo sritys nusakomos skirtingai [2, 57 p. ir 12 p.]. Arba, sudėtinė funkcija be apibrėžimo srities [2, 43 p.].

Apie funkcijos traktavimo problemas rašė A. Kavaliauskas dar 2008 metais. Cituoją [5]: „Mokyklinėje matematikoje kartais nesilaikoma apibrėžimų, svarbios vietos taip sutrumpinamos, kad jos tampa dviprasmiškomis arba net klaidinančiomis. Taip atsiranda prielaidos painiotis ir painioti matematinius objektus. Mokiniai išmoksta naudotis savybėmis, nesuprasdami pačių sąvokų“. Matysime, kad situacija vadovėliuose nepagerėjo.

Antra problema, nėra griežtos atskirties tarp intuityvaus termino apibūdinimo ir teiginio pagrindimo, nuo matematinės apibrėžties ir matematinio įrodymo. Reikalingi abu, intuityvus aiškinimas ir loginis samprotavimas. Pastarasis formuoja pirmąjį ir tuo būdu lavina matematinį mąstymą. Matematinis įrodymas yra dedukcinis argumentas grindžiamas nuorodomis į sąvokų (matematines) apibrėžtis ir/arba įrodytus teiginius (teoremas).

Šiame tyrime palietėme dvi netaisyklingos matematikos temas:

- (1) Netaisyklinga matematinė apibrėžtis ir terminologija. Šiai temai priskiriame tai, kas prasilenkia su matematikos mokymo tyrimuose dominuojančiais matematinės apibrėžties reikalavimais (žr. Torkildsen ir kiti [13]). Pavyzdžiui, vietoje sąvokų apibrėžties aiškinami matematiniai simboliai-reprezentacijos arba formuluojamos taisyklės ar procedūros. Ši tema nagrinėjama 2 skyrelyje.
- (2) Netaisyklingi matematiniai įrodymai. Šiai temai visų pirma priklauso klaidingi teiginių įrodymai. Pavyzdžiui, įrodymai ir pagrindimai grindžiami neįvardintais faktais arba lygybėmis. Pavyzdžiui, laipsnių su sveikais rodikliais savybės, logaritmų savybės 11 kl vadovėlyje. Ši tema nagrinėjama 3 skyrelyje.

Tyrimo klausimai. Kokie netaisyklingos matematinės apibrėžties, matematinės kalbos ir teiginių įrodinėjimo pavyzdžiai sutinkami lietuviškuose vadovėliuose, kokios galimos tokių pavyzdžių priežastys ir kaip jų išvengti?

1 Teorinė prieiga ir metodologija

Mokyklinės matematikos turinio prasmei analizuoti naudojame semantinę prieigą (E. Martin-Fernandez *et al.* [7]). Ją sudaro G. Frege semantinis trejetas: ženklas, prasmė ir reikšmė (angl. *sign, sense and reference*).

Semantinis trejetas (ženklas, prasmė, reikšmė) sudaro straipsnio teorinę prieigą nagrinėjant kaip matematikos vadovėliuose pateikiamos ir interpretuojamos matematinės sąvokos. Ši prieiga padeda suprasti ryšį tarp simbolinio vaizdavimo (ženklo), suteikiamos prasmės ar interpretacijos (prasmės) ir išorinės tikrovės arba referento, su kuriuo siejasi sąvoka (reikšmė). Semantinio trejeto taikymo analizuojant matematikos vadovėlius pavyzdžiai:

1. Ženklas: gali reikšti vadovėlyje naudojamus matematinius simbolius, terminus ir išraiškas. Pavyzdžiui, analizės temoje simboliu gali būti išvestinės simbolis ($f'(x)$), terminas – išvestinė taške, integralo simbolis (f) arba lygtis, pvz., $y = mx + b$.
2. Prasmė: tai ženklui (simboliui) suteikiama prasmė arba interpretacija (aiškinimas). Išvestinės simbolio atveju prasmė gali būti funkcijos kitimo greitis konkrečiame taške. Integralo simbolio prasme gali būti plotas po funkcijos grafiku.
3. Reikšmė: tai išorinis pasaulis arba referentas, su kuriuo susijusi matematinė sąvoka. Analizės temos kontekste reikšmė galėtų būti matiniai dydžiai, pvz., poslinkis, greitis arba pagreitis realaus pasaulio scenarijuose. Pavyzdžiui, plotas po greičio ir laiko grafiku gali reikšti objekto poslinkį.

Teorinės prieigos analizuojant vadovėlių taikymo pavyzdžiai:

- Nuoseklumas: Ar vadovėlyje nuosekliai naudojamas tas pats ženklas (simbolis) tai pačiai prasmei reikšti ir siejamas su ta pačia reikšme?
- Aiškumas: Ar matematinės sąvokos paaiškintos aiškiai ir tiksliai, kad mokiniai galėtų lengvai suvokti prasmę ir susieti ją su reikšme?
- Pavyzdžiai: Ar vadovėlyje pateikiama pakankamai realaus pasaulio pavyzdžių ar taikymų, kurie susieja matematinės sąvokas su jų reikšmėmis?
- Gylis: Ar vadovėlyje gilinamasi į matematinių sąvokų niuansus ir sudėtingus aspektus, ar jie pateikiami tik paviršutiniškai?
- Skirtingos interpretacijos: Ar vadovėlyje pripažįstamos ir aptariamoms skirtingoms galimos tos pačios matematinės sąvokos interpretacijos ir kaip jos susijusios su skirtingomis reikšmėmis?
- Mokymosi progresija: Ar vadovėlis logiškai ir nuosekliai remiasi ankstesnėmis matematinėmis sąvokomis, kreipdamas mokinius nuo paprastesnio prie sudėtingesnių?

Netaisyklingos matematikos pavyzdžiai paimti iš atsitiktinai pasirinktų matematikos vadovėlių. Panašios problemos būdingos daugumai mūsų vadovėlių.

2 Matematinės sąvokos ir jų apibrėžtys

Šiame skyriuje aptarsime vadovėliuose sutinkamas funkcijos, funkcijos grafiko, logaritminės funkcijos ir funkcijos konvergavimo bei jos ribos apibrėžtis. Šiais pavyzdžiais iliustruosime kaip yra nesilaikoma matematinės apibrėžties savybių.

Kai kuriomis apibrėžtimis įvardijamos tam tikros savybės ir jos pavadinamos matematinio terminu. Pavyzdžiui, logaritmo ir laipsnio terminai. Tačiau nėra nei pagrindo, nei komentaro apie tai, kad objektas su įvardintomis savybėmis egzistuoja ir yra vienintelis. Tokios sąvokos turinys tuščias. Jas vadiname *tuščiomis sąvokomis*.

2.1 Funkcijos samprata

Tai viena sudėtingiausių savo abstraktumu sąvokų mokyklinėje matematikoje. Jos sampratos evoliucija matematikos istorijoje patyrė ne vieną reikšmingą pasikeitimą. Labai svarbu mokytojams žinoti šiuos pokyčius ir savo samprotavimuose nenaudoti skirtingų sampratų. Deja, vadovėliai įtvirtindami funkcijos sampratą įvairovę mokytojui nepadedą. Tai iliustruojame 2023 metais Šviesos leidyklos išleistu 9 klasės 2 dalies vadovėliu Horizontai [2]. 12-me jo puslapyje rašoma:

Sakykime, X ir Y yra skaičių aibės. Funkcija yra taisyklė, kuri kiekvienam skaičiui $x \in X$ priskiria vienintelį skaičių $y \in Y$. Taisyklė dažniausiai žymima viena iš raidžių f , g , h ar kt. Funkcija užrašoma taip: $y = f(x)$. Skaičius $x \in X$ vadinamas funkcijos argumentu, o aibė X vadinama funkcijos apibrėžimo sritimi ir žymima $D(f)$. Skaičius $y \in Y$ vadinamas funkcijos reikšme, o aibė Y vadinama funkcijos reikšmių sritimi ir žymima $E(f)$.

Taisyklingumas matematikoje reikalauja tolesniuose samprotavimuose laikytis apibrėžto matematinio objekto savybių. Pagal šią apibrėžtį funkciją sudaro apibrėžimo sritis X , reikšmių sritis Y ir jas siejanti taisyklė f . Apibrėžtyje naudojamas loginis kvantorius „kiekvienam“, kuris reikalauja nurodyti kintamojo x visų galimų reikšmių aibę, šiuo atveju aibę X . Pagal šią apibrėžtį, funkcija yra duota tik tada, kai yra nurodyta jos apibrėžimo sritis. Tačiau likusioje vadovėlio dalyje ši matematinio objekto savybė dažnai ignoruojama. Pavyzdžiui, funkcijos tyrimo užduotyse siūloma mokiniui nustatyti apibrėžimo sritį arba atspėti pagal pasiūlytą paveikslėlį. Tokios užduotys yra ne funkcijos tyrimas, bet jos konstravimas. Kitas pavyzdys yra vadovėlio 43 puslapyje siūlomas sudėtinės funkcijos apibūdinimas ignoruojant jos apibrėžimo sritį.

Kitas matematinio taisyklingumo pažeidimas cituojamoje apibrėžtyje yra siūlomas funkcijos „užrašymas“, simboliais $y = f(x)$. Toliau vadovėlyje šiais simboliais žymima funkcija. Tuo būdu yra tapatinama funkcija (taisyklė) su savo reikšme (skaičiumi). Taisyklingu ir funkcijos esmę atspindinčiu žymėjimu galėtų būti simboliai $f: X \rightarrow Y$.

Be funkcijos žymėjimo, cituotoje apibrėžtyje yra dar vienas dviprasmiškumas – funkcijos reikšmių sritis. Joje nėra nurodyta ar funkcijos reikšmių aibė $\{f(x): x \in X\}$ sutampa su funkcijos reikšmių sritimi Y , ar ne. Sprendžiant pagal vadovėlio turinį, šios dvi aibės yra laikomos lygiomis.

Minėti netaisyklingo apibrėžties taikymo atvejai rodo, kad funkcija vadovėlyje traktuojama ir pagal kitą apibrėžtį (cituojama pagal 2004 [3, 124 p.]):

Taisyklę, kuri kiekvienai vieno kintamojo reikšmei priskiria vienintelę kito kintamojo reikšmę, vadiname funkcija. Pirmąjį kintamąjį vadiname funkcijos nepriklausomu kintamuoju (argumentu), o antrąjį – priklausomu kintamuoju. Aibę tų reikšmių, kurias gali įgyti nepriklausomas kintamasis,

vadiname funkcijos apibrėžimo sritimi. Aibę tų reikšmių, kurias įgyja priklausomas kintamasis – funkcijos reikšmių sritimi. Jeigu x yra funkcijos nepriklausomas kintamasis, o y – priklausomas kintamasis, tai rašome $y = f(x)$. Raidė f yra tarsi priskyrimo taisyklės vardas. Dažnai patogiau sakyti trumpai: y yra kintamojo x funkcija. Kai nėra būtina nurodyti, kaip pažymėtas priklausomas kintamasis, sakome: $f(x)$ yra funkcija. Aišku, kad vietoj f galima vartoti ir kitas raides.

Šioje apibrėžtyje funkcijos apibrėžimo sritis yra nusakyta miglotai. Tai aibė tų reikšmių, kurias nepriklausomas kintamasis *gali* įgyti. Todėl, prieš tai apibrėžtyje minimas loginis kvantorius „kiekvienam“, neturi aiškiai nurodytos kintamojo reikšmių aibės.

Sekančiame to paties 2004 metų vadovėlio puslapyje rašoma:

Kai funkcija yra išreikšta formule ir nėra atskirai nurodyta, kokias reikšmes gali įgyti nepriklausomas kintamasis, sakome, kad funkcijos apibrėžimo sritį sudaro visos šio kintamojo reikšmės, su kuriomis formulės reiškinys turi prasmę.

Ši pastaba rodo, kad anksčiau cituotos 2023 metų funkcijos apibrėžimo srities statusas yra skirtingas nuo 2004 metų apibrėžties. Pastaroji apibrėžtis atitinka reiškinių, ne funkcijos, apibrėžimo sritį.

Šie du cituoti vadovėliai savo funkcijos sampratą nėra išskirtiniais. Daugumoje vadovėlių funkcijoms taikoma priklausomo kintamojo samprata, bet kartu įterpiami funkcijos su iš anksto apibrėžta apibrėžimo sritimi bruožai. Tokią padėtį galima paaiškinti tradicija atėjusia iš sovietinių vadovėlių. Pavyzdžiui, 1972 metais publikuotame Kočetkovų vadovėlyje [6, 127 p.] rašoma:

Jei vieno kintamojo dydžio x kiekvieną reikšmę koku nors būdu atitinka apibrėžta kito dydžio y reikšmė, tai sakome, kad turime funkciją. Dydį y šiuo atveju vadiname priklausomu kintamuoju dydžiu, arba funkcija, o dydį x – nepriklausomu kintamuoju dydžiu, arba argumentu. Norėdami pasakyti, kad y yra argumento x funkcija, paprastai rašome taip: $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = \phi(x)$ ir t. t..

Funkcijos apibrėžimo sritis ir jos kitimo sritis apibrėžiami kitame šio vadovėlio skyrelyje, atskirai nuo cituotos funkcijos apibrėžties. Apibrėžimo sritis traktuojama kaip funkcijos savybė ir siūlomos užduotys skirtos nustatyti apibrėžimo sritį pagal tai, kurioje argumentų aibėje funkciją apibėžiantis reiškinys turi prasmę. Šio pobūdžio užduotys išliko mūsų vadovėliuose iki šių dienų, nepaisant pasikeitusio funkcijos traktavimo.

2.2 Funkcija ir jos grafikas

Funkcijos grafikas yra sutvarkytų porų aibė, porų, kurių pirmoji komponentė yra funkcijos argumentas, o antroji komponentė – funkcijos reikšmė. Simboliais grafiko aibė yra $\{(x, f(x)) : x \in X\}$, čia X yra funkcijos f apibrėžimo sritis. Sutvarkyta pora yra matematinė sąvoka, vienareikšmiškai nusakanti dviejų skaičių poros tvarką, t. y. $(u, v) = (s, t)$ tada ir tik tada, kai $u = s$ ir $v = t$. Taip suprantamas funkcijos grafikas galėtų būti naudojamas apibrėžti funkciją, kaip sutvarkytų porų aibę. Tokiu būdu

funkcija taptų atskiru sąryšio atveju. Priminsime, kad sąryšio sąvoka naudojama matematikos programoje nuo 1 iki 12 klasės.

Anksčiau minėtame 2023 m. leidimo Šviesos leidyklos vadovėlyje funkcijos grafiku suprantama geometrinė figūra plokštumoje su koordinatčių sistema. Cituoju [2, 14 p.]:

Funkcijos $y = f(x)$ grafiku vadinama visuma koordinatinės plokštumos taškų (x, y) , kurių abscisės yra argumento x reikšmės, o ordinatės – atitinkamos funkcijos $y = f(x)$ reikšmės.

Šioje vietoje nėra paaiškinimo, kad taško koordinatės yra sutvarkyta pora ir ką tai reiškia. Tuo būdu nepasinaudojama galimybe įrodinėti, kad funkcijos savybės yra ekvivalenčios atitinkamoms geometrine figūra traktuojamo grafiko savybėms. Tai iliustruosime funkcijos nulių vadovėline samprata. Cituoju [2, 20 p.]:

Funkcijos nuliais vadinamos x reikšmės tų taškų, kuriuose funkcijos grafikas kerta Ox ašį.

Alternatyvi funkcijos nulio sąvokos apibrėžtis grindžiama funkcijos apibrėžtimi. Būtent, skaičius c yra *funkcijos f nulis*, jei argumentą c atitinkanti funkcijos reikšmė $f(c) = 0$. Kai funkcijos reikšmė $f(x)$ yra daugianaris, funkcijos nulių radimas gali būti formuluojamas kaip atitinkamos lygties sprendimas. Skaičius r yra *lygties $f(x) = 0$ šaknis*, jei $f(r) = 0$. Tokiu atveju funkcijos nulių apibūdinimas grafiko taškais galėtų būti formuluojamas įrodomu teiginiu [17, 71 p.].

1 teorema. *Funkcijos f nuliais yra jos grafiko ir x -jų ašies sankirtos taškų pirmoji komponentė (arba x -koordinatė, arba abscisė).*

Nors vadovėlyje funkcijos nulis yra apibrėžtas aukščiau suformuluota jos grafiko savybe, bet kai kuriose vietose ji randama funkcijos reiškinį prilyginant nuliui ir sprendžiant gautą lygtį. Toks sąvokos sampratos keitimas vadovėlyje daromas be paaiškinimo: vadovėlio [2, 30 p.] 4 pavyzdžio sprendimo patarime. Matematiškai taisyklingas tokios situacijos komentavimas turėtų būti grindžiamas įrodymu. Šią temą pratęsimė žemiau kalbėdami apie taisykles (žr. 3.1 skyrelį).

Panašiai dviprasmiškai traktuojamos kitos funkcijos savybės, tokios kaip, teigiamos funkcijos reikšmės, didėjančioji funkcija, mažiausia funkcijos reikšmė. Skirtingos reprezentacijos minėtoms savybėms turėtų būti aiškinamos įrodymais. Pavyzdžiui, užduotis apie teigiamas funkcijos reikšmes.

2 teorema. *Tegul $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ yra funkcija ir $x \in X$. Funkcijos grafiko taškas $(x, f(x))$ yra virš Ox ašies tada ir tik tada, kai teisinga nelygybė $f(x) > 0$.*

Įrodymas. Tarkime, kad funkcijos grafiko taškas $P = (x, f(x))$ yra virš Ox ašies. Iš taško P brėžiame statmenį į Ox ašį iki susikirtimo taške $A = (x, 0)$. Per taškus A ir P brėžiame skaičių tiesę ℓ , kurios 0 yra taške A , o 1 pažymėtas virš Ox ašies atstumu lygiu atstumui tarp 0 ir 1 y -ašyje. Tuo būdu skaičių tiesę ℓ yra skaičių tiesės y -ašyje kopija ir taškas P yra tiesėje ℓ tuo pačiu atstumu nuo nulinio, kaip ir taškas $(0, f(x))$ y -ašyje. Kadangi taškas P yra virš Ox ašies, tai jo antroji koordinatė $f(x)$ skaičių tiesėje ℓ užima atitinkamą padėtį tarp teigiamų skaičių. Pagal apibrėžimą, skaičius $f(x)$ yra teigiamas kai teisinga nelygybė $f(x) > 0$. $\square$

Dar vienas funkcijos grafiko traktavimo problemiškas susijęs su standartinių funkcijų grafikų identifikavimu. Pavyzdžiui, ignoruojamas faktas, kad tiesinės funkcijos grafikas ir plokštumos figūra tiesė yra skirtingi objektai. Šio fakto įvardijimas ir dviejų reprezentacijų sąryšio paaiškinimas suteiktų prasmę mokyklinei matematikai.

Tą patį galima pasakyti apie kvadratinę funkciją ir parabolę. Vadovėlyje parabolėi suteikiamos dvi skirtingos sampratos ir neužsimenama, kad vadovėlio kontekste abi jos apibrėžia tą patį objektą. Cituoju 2023 m. Šviesos vadovėlį 9 klasei 2 dalis 95 p.: „Bet kurios kvadratinės funkcijos grafikas vadinamas parabole“. Toliau, 98 puslapyje, grafikas tapatinamas su lygtimi: „Kvadratinės funkcijos $f(x) = ax^2$ grafiko – parabolės – lygtis užrašoma taip $y = ax^2$ “. Skyrelio gale, 138 puslapyje, parabolė tampa aibe plokštumos taškų, kurie yra vienodai nutolę nuo duoto taško (židinio) ir duotos tiesės (direktrisės). Kaip minėta, nėra paaiškinimo, kad vadovėlio kontekste šios kreivės taškų aibė ir tam tikros kvadratinės funkcijos grafiko taškų aibė yra lygios. Šis faktas yra įrodytas metodinėje medžiagoje mokytojams [12].

2.3 Laipsnis ir rodiklis

Vadovėliuose laipsniu vadinamas reiškiny a^b , čia a ir b yra realieji skaičiai, $a > 0$. Skaičius a vadinamas laipsnio pagrindu, skaičius b – laipsnio rodikliu. Su šiais terminais susiję kiti du terminai laipsninė funkcija $x \mapsto x^n$, $x \in \mathbb{R}$, ir rodiklinė funkcija $x \mapsto a^x$, $x \in \mathbb{R}$. Kai kuriuose vadovėlių sakiniuose žodis „laipsnis“ naudojamas rodiklio prasme. Pavyzdžiui, [14, 33 p.] rašoma „keliamo sveikuoju laipsniu“ ir ši frazė kartojama daug kartų.

Kai kuriais atvejais dviprasmybė sukelia neaiškumų. Pavyzdžiui, vadovėlio [4, 26 p.] skyrelio pavadinimas: „Kaip kelti laipsniu, kurio rodiklis yra 0?“. Toliau rašoma kitaip: „keliant skaičių nuliniu laipsniu“.

Vadovėlyje [15, 44 p.] rašoma „Abiejuose funkcijų išraiškose argumentas pakeltas laipsniu, todėl šios funkcijos vadinamos *laipsninėmis funkcijomis*“. Pagal šį sakinį, klaidingai naudojamas terminas yra kito termino pagrindimas. Be to, tekste esančios funkcijos apibrėžtos reiškiniais kx^n . Teisingiau būtų sakyti: funkcija, kurios argumentu yra laipsnio pagrindas, vadinama laipsnine. Bet ir tai kelia abejones, nes laipsnine vadinama funkcija $k(x+a)^b + c$. Ten pat, bet sekančiame 45 puslapyje atsiranda terminas „natūraliojo laipsnio funkcija“, kuri reiškia laipsninę funkciją, kurios rodiklis natūralusis skaičius. 46 puslapyje – „neigiamojo sveikąjo laipsnio funkcija“ $f(x) = x^{-n}$, o faktiškai $f(x) = kx^{-n}$.

Programoje taip pat nėra vienodo laipsnio traktavimo. 7 klasė (30.1.1): „laipsnis su sveikuoju rodikliu“, „laipsnio kėlimas laipsniu“. (34.1.2): „kvadratinė šaknis iš antrojo laipsnio $\sqrt{a^2} = |a|$ “. (34.1.3): „laipsniai su racionaliuoju rodikliu“, „laipsniai su natūraliuoju rodikliu“. (3.4.2.2.1): „Apibrėžiamos ir tiriamos laipsninė funkcija x^n , $n \in \{-1, 1, 2, 3\}$, šaknies funkcijos $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \{2, 3\}$ “.

2.4 Logaritmas ir logaritminė funkcija

Matematikos programoje logaritmas ir logaritminė funkcija traktuojami dviem būdais, kaip skaičiai ir kaip funkcijos. Šis skirstymas atkartojamas vadovėliuose. Aptarsime Šviesos leidyklos 11 klasės vadovėlius. I ciklo skaičiai ir skaičiavimai 51 puslapyje apibrėžiamas teigiamojo realiojo skaičiaus logaritmas, kurio pagrindas taip pat teigiamas, nelygus vienam realusis skaičius. Tam naudojamas laipsnis, kurio rodiklis – realusis

skaičius. Nepaisant to, kad prieš tai, 33 puslapyje rašoma tik apie laipsnius, kurių rodikliai racionalieji skaičiai.

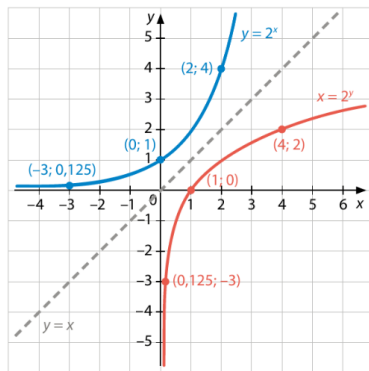
Skaičiaus b ($b > 0$) logaritmu pagrindu a ($\log_a b$) vadinamas rodiklis tokio laipsnio, kuriuo pakėlus skaičių a ($a > 0$, $a \neq 1$) gaunamas skaičius b . Skaičius a vadinamas logaritmo pagrindu, b – logaritmuojamu skaičiumi.

Vadovėlyje nėra paaiškinta, kodėl „mokame teigiamuosius realiuosius skaičius pakelti bet kokių laipsniu, kurio rodiklis – realusis skaičius“. Taip pat nepaaiškinta, kodėl kiekvienam duotam teigiamam b *egzistuoja* skaičius $\log_a b$. Kol nėra paaiškinta, kad skaičius su nurodytomis savybėmis egzistuoja, tol matematinė sąvoka nėra apibrėžta. Vietoje matematinės sąvokos turime tuščią sąvoką.

Kas vadinama logaritmine funkcija?

Nagrinėjame rodiklinę funkciją $y = 2^x$. Jos grafikui pritaikyme atspindžio tiesės $y = x$ atžvilgiu transformaciją. Nesunku pastebėti, kad rodiklinės funkcijos $y = 2^x$ grafiko taškų koordinatės bus apskaičiuojamos pagal taisyklę $(x; y) \rightarrow (y; x)$. Taškų abscisės ir ordinatės sukeičiamos vietomis, todėl gauname naują funkciją $x = 2^y$.

Pirmajame šio vadovėlio cikle išsiaiškinome, kad skaičiaus x ($x > 0$) logaritmu pagrindu a ($\log_a x$) vadinamas rodiklis tokio laipsnio, kuriuo pakėlus skaičių a ($a > 0$, $a \neq 1$) gaunamas skaičius x . Sakykime, kad tai y , tad $\log_a x = y$, nes $a^y = x$. Nagrinėjamoji funkcija yra $x = 2^y$, todėl galime užrašyti, kad $\log_2 x = y$. Nubrėžkime dalį tiesės $y = x$ ir simetriškai jos atžvilgiu atvaizduokime dalį funkcijos $y = 2^x$ grafiko. Taigi, pasinaudoję rodiklinės funkcijos apibrėžtimi ir funkcijų transformacijomis, gavome jai atvirkštinę funkciją $f(x) = \log_2 x$, kuri vadinama **logaritmine funkcija**.



Šviesos leidyklos 11 klasės 2 dalies vadovėlyje apibrėžiama logaritminė funkcija [15, 75 p.]. Ištrauka su šia apibrėžtimi matoma paveikslėlyje. Šioje apibrėžtyje naudojami keli matematiniai faktai apie atspindžio transformaciją ir atvirkštinę funkciją. Toliau šiame skyrelyje suformuosime reikalingas sąvokas ir įrodysime apibrėžtyje naudojamąsias savybes. Gale pasiūlysime trumpą logaritminės funkcijos apibrėžimo mokyklinį aiškinimo variantą.

Sąryšis $F \subset X \times Y$ vadinamas funkciniu, jei kiekvienam $x \in X$ egzistuoja viena nintelė sutvarkyta pora $(x, y) \in F$ su kuriuo nors $y \in Y$. Priminsime, kad funkcijos $f: X \rightarrow Y$ grafikas, žymimas Γ_f , yra aibė $\{(x, f(x)): x \in X\}$. Šios funkcijos reikšmių aibė, žymima $f[X]$, yra aibė $\{f(x): x \in X\} = \{y \in Y: \exists x \in X: y = f(x)\}$. Taip pat priminsime atvirkštinės funkcijos sampratą.

1 apibrėžimas. Tegul f yra funkcija iš aibės X į aibę Y . Sakoma, kad funkcija f yra apverčiama, jei egzistuoja tokia funkcija g iš Y į X , su kuria galioja lygybės

$$g(f(x)) = x \quad \forall x \in X \quad \text{ir} \quad f(g(y)) = y \quad \forall y \in Y.$$

Sekantis faktas apie atspindžio transformacija vadovėliuose yra aiškinamas todėl jo įrodymą praleidžiame.

1 lema. Tegul Λ yra plokštumos atspindys diagonalės $x = y$ atžvilgiu. Tada $\Lambda((x, y)) = (y, x)$ su bet kuriais $x, y \in \mathbb{R}$.

Tačiau dar vieną faktą įrodysime. Priminsime, kad funkcija $f: X \rightarrow Y$ yra *injekcija*, jei kiekvienam $y \in Y$ yra ne daugiau kaip vienas $x \in X$, kuriam $f(x) = y$. Toliau tarsime, kad funkcijos reikšmių sritis Y yra lygi funkcijos reikšmių aibei $f[X]$, nes tokia prielaida daroma vadovėliuose. Esant šiai prielaidai, atvirkštinės funkcijos egzistavimui nėra reikalinga funkcijos surjekcija.

3 teorema. Tegul $f: X \rightarrow f[X]$ yra funkcija, Γ_f yra funkcijos f grafikas ir Λ yra plokštumos atspindys diagonalės $x = y$ atžvilgiu. Funkcija f yra injekcija tada ir tik tada, kai atspindžio vaizdas $\Lambda(\Gamma_f)$ yra funkcinis sąryšis.

Įrodymas. Reikia įrodyti dviejų (priešingų) implikacijų teisingumą. Tarkime, kad teisinga tiesioginės implikacijos prielaida, jog funkcija f yra injekcija. Įrodysime, kad $\Lambda(\Gamma_f) = \{(f(x), x) : x \in X\}$ yra funkcinis sąryšis. Tegul $y \in f[X]$. Reikia įrodyti, kad egzistuoja vienintelis $x \in X$ toks, kad $(y, x) \in \Lambda(\Gamma_f)$. Kadangi $y \in f[X]$, egzistuoja toks $x \in X$, kad $y = f(x)$. Tarkime priešingai, egzistuoja du tokie elementai x_1 ir x_2 , kad $f(x_1) = y = f(x_2)$. Kadangi f yra injekcija ir $f(x_1) = f(x_2)$, tai $x_1 = x_2$. Įrodėme, kad $\Lambda(\Gamma_f)$ yra funkcinis sąryšis. Pirmoji implikacija įrodyta.

Dabar tarkime, kad teisinga atvirkštinės implikacijos prielaida, jog $\Lambda(\Gamma_f)$ yra funkcinis sąryšis. Įrodysime, kad f yra injekcija. Tegul $x_1, x_2 \in X$ ir $f(x_1) = f(x_2)$. Tegul $y := f(x_1) = f(x_2)$. Pagal prielaidą, egzistuoja vienintelė sutvarkyta pora $(y, x) \in \Lambda(\Gamma_f)$ su kuriuo nors $x \in X$. Tada $(f(x_1), x_1) = (f(x_2), x_2)$ ir, pagal sutvarkytos poros apibrėžimą, $x_1 = x_2$. Įrodėme, kad f yra injekcija. Įrodyta antroji implikacija, o tuo pačiu ir visa teorema. $\square$

Sekanti teorema papildo 3 teoremą sekančių teiginių (a) ir (b) ekvivalentumu. Tai universitetinės matematikos faktas įrodytas daugelyje vadovėlių. Mokykloje jį galima pakeisti funkcijos didėjimo savybe.

4 teorema. Tegul $f: X \rightarrow f[X]$ yra funkcija, Γ_f yra funkcijos f grafikas ir Λ yra plokštumos atspindys diagonalės $x = y$ atžvilgiu. Sekantys teiginiai yra ekvivalentūs:

- (a) f yra apverčiama;
- (b) f yra injekcija;
- (c) atspindžio vaizdas $\Lambda(\Gamma_f)$ yra funkcinis sąryšis.

Funkcinis sąryšis $\Lambda(\Gamma_f) \subset f[X] \times X$ yra funkcija $g: f[X] \rightarrow X$, kuri kiekvienam elementui $y \in f[X]$ priskiria tokį elementą $g(y) \in X$, kad $(y, g(y)) \in \Lambda(\Gamma_f)$. Ar g yra atvirkštinė funkcijai f ? Teigiamą atsakymą patvirtinsime naudodami lygybę $\Gamma_g = \Lambda(\Gamma_f)$, t. y.

$$A := \{(y, g(y)) : y \in f[X]\} = \{(f(x), x) : x \in X\} =: B.$$

Aibių lygybė ekvivalenti tam, kad viena yra kitos poaibiu: $A \subset B$ ir $B \subset A$. Tegul $y \in f[X]$. Tada $(y, g(y)) \in A$. Kadangi $A \subset B$, egzistuoja toks $x \in X$, kad $(y, g(y)) = (f(x), x)$. Todėl $y = f(x)$ ir $g(y) = x$. Įstatę antrąją lygybę į pirmąją gauname $y = f(g(y))$ su laisvai pasirinktu $y \in f[X]$. Dabar tegul $x \in X$. Tada $(f(x), x) \in B$.

Kadangi $B \subset A$, egzistuoja toks $y \in f[X]$, kad $(f(x), x) = (y, g(y))$. Todėl $y = f(x)$ ir $g(y) = x$. Įstatę pirmąją lygybę į antrąją gauname $x = g(f(x))$ su laisvai pasirinktu $x \in X$. Remiantis 1 apibrėžtimi, funkcija g yra atvirkštinė funkcijai f .

1 išvada. Tarkime, kad teisingos 3 teoremos prielaidos. Jei f yra didėjanti funkcija, tai $\Lambda(\Gamma_f)$ apibrėžia funkcijos f atvirkštinę funkciją.

3 teoremos taikymui iliustruoti nagrinėkime rodiklinę funkciją $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ su reikšmėmis $f(x) = 2^x$, reikšmių aibę $f[X] = (0, \infty)$ ir grafiku Γ_f . Kadangi rodiklinė funkcija yra didėjanti, jos grafiko atspindys atžvilgiu diagonalės $\Lambda(\Gamma_f) = \{(2^x, x): x \in \mathbb{R}\}$ yra funkcinis sąryšis. Todėl egzistuoja funkcija $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, kuri kiekvienam $y \in (0, \infty)$ priskiria $g(y) = x \in \mathbb{R}$ taip, kad $y = 2^x$. Funkcija g paprastai vadinama logaritmu pagrindu 2 ir žymima simboliu $\log_2$.

Vietoje vadovėlio ištraukos, intuityvus bet matematiškai taisyklingas logaritminės funkcijos apibrėžimo aiškinimas (telegrafiniu stiliumi) galėtų atrodyti taip.

Plokštumos taškas (x, y) atspindžiu diagonalės atžvilgiu yra atvaizduojamas į tašką (y, x) . Funkcija f yra apverčiama tada ir tik tada, kai jos grafiko atspindys diagonalės atžvilgiu yra funkcinis sąryšis. Šiuo sąryšiu apibrėžiama funkcija yra atvirkštinė funkcijai f . Funkcija yra apverčiama, jei ji yra didėjanti. Kadangi rodiklinė funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ su reikšmėmis $f(x) = 2^x$ yra didėjanti, jos grafiko atspindys diagonalės atžvilgiu apibrėžia atvirkštinę funkciją iš $(0, \infty)$ į $\mathbb{R}$, vadinamą logaritmine pagrindu 2. Kiekvienam $y \in (0, \infty)$ logaritminė funkcija priskiria tokią reikšmę $\log_2 y = x$, su kuria $y = 2^x$.

2.5 Funkcijos konvergavimas ir riba

Konvergavimo terminas, kaip ir kai kurie kiti matematiniai terminai mokyklinėje matematikoje yra sulietuvinti, o atitinkamos sąvokos dažniausiai nėra apibrėžiamos. Šiuo atveju, vietoje konvergavimo naudojamas žodis „artėjimas“ arba frazė „ribų skaičiavimas“. Vietoje matematinės apibrėžties mokiniams lieka jas interpretuoti remiantis intuicija ir gyvenimiška patirtimi. Nesant matematinės apibrėžties nėra galimybių gilinti ir koreguoti intuiciją.

Žodžiai „artėjimas“ ir riba naudojami programoje. Pavyzdžiui, jos 37.1.2 paragrafe „Funkcijos išvestinė“ rašoma: „analizuojama tolydžiosios funkcijos visuose funkcijos apibrėžimo srities intervaluose (sic) samprata“. Daugelyje vietų pabrėžiama, kad riba skaičiuojama tik tolydžiosioms funkcijoms. Tai reiškia, kad sekų konvergavimas nėra numatytas, bet yra reikalingas, kai apibrėžiamas integralas ir begalinės mažėjančios progresijos suma. Sekos konvergavimas yra konceptualiai paprastesnis už (tolydaus argumento) funkcijos konvergavimą. Be to, sekos konvergavimo pakanka apibrėžiant (tolydaus argumento) funkcijos konvergavimą. Situacija tampa dar labiau sudėtingesne apibrėžiant funkcijos išvestinę. Tenka aiškinti ribos egzistavimą taške, kuriame neegzistuoja funkcijos skirtuminio santykio reikšmė.

2 apibrėžimas. Sakoma, kad skaičių seka (a_n) konverguoja į skaičių a kai $n \rightarrow \infty$, rašoma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{arba} \quad a_n \rightarrow a,$$

jei kiekvienam $\epsilon > 0$ egzistuoja toks $N \in \mathbb{N}$, kad visiems $n > N$ $|a_n - a| < \epsilon$. Toks skaičius a vadinamas sekos (a_n) sekos riba.

Funkcijos konvergavimą taške ir begalybėje galima apibrėžti naudojant sekos konvergavimą sekančiu būdu.

3 apibrėžimas. Tegul X yra realiųjų skaičių aibė ir $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ yra funkcija. Skaičiui a esant X aibės elementų sekos riba, sakoma, kad f konverguoja taške a į skaičių A ir žymima

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A,$$

jei su kiekviena X aibės elementų seka (x_n) , konverguojančia į a ir visiems $x_n \neq a$, $f(x_n) \rightarrow A$.

2.6 Geometrinių figūrų kongruencija ir panašumas

Vadovėliuose geometrinių figūrų kongruencijos terminas pakeistas jų lygybės terminu. Tuo tarpu figūrų lygybė kaip aibių lygybė vadinama „sutapdinimu“. Kitaip tariant matematinių terminų pora kongruencija ir lygybė pakeista pora, atitinkamai, lygybe ir sutapimu. Problema atsiranda tada, kai reikia įrodyti figūrų sutapimą, nes tada reikia naudotis aibių lygybės apibrėžtimi. Turime terminų painiavą.

Kai kuriuose vadovėliuose [1, 124 p.], trikampių panašumas apibrėžiamas remiantis tik atitinkamų kampų porų dydžių lygybe ir atitinkamų kraštinių porų ilgių santykių lygybe. Tokia panašumo samprata praleidžia esminę dalį – egzistavimą transformacijų, kurių nuoseklus taikymas vieną figūrą atvaizduoja į kitą figūrą (16 užduotis mokytojų knygoje [18, 32 p.]). Analogiška problema atsiranda kai trikampių kongruentumas apibrėžiamas tik metrinėmis trikampių savybėmis.

2.7 Reiškiniai

Šviesos leidyklos 9 kl 1 d [1, 33 p.] skaitome: „raidinis reiškiny – tai skaičiai ir kintamieji, sujungti matematinius veiksmus apibūdinančiais ženklais pagal matematikoje priimtas taisykles“. Tai simbolio apibūdinimas, ne apibrėžtis, nusakanti matematinį objektą.

Tame pačiame vadovėlyje [1, 85 p.] aptariami veiksmai su reiškiniais. Aiškinamos simbolių pertvarkymo taisyklės. Pavyzdžiui, rašoma: „atskliaučiamo $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ “. Kodėl tokia taisyklė teisinga? Turėtume kalbėti apie skaičių kairėje ir dešinėje lygybę, gaunamą vietoje a , b ir c įstačius konkrečius skaičius. Tokia lygybė galėtų būti vadinama tapatybe. Pagal vadovėlio reiškinio sampratą negalime kalbėti apie reiškinių lygybę tarpusavyje, jų lygybę skaičiui, nes lygybė turi prasmę tik tarp skaičių.

Toliau 87 puslapyje nagrinėjamas reiškinio reikšmės apskaičiavimas. Klausimas, kokias reikšmes galime naudoti? Toliau 89 puslapyje nagrinėjamas trupmeninis reiškinys ir jo apibrėžimo sritis.

„Reiškinys, sudarytas iš raidžių ir skaičių (jų gali ir nebūti), susietų sudėties, atimties, daugybos, dalybos, kėlimo laipsniu, šaknies traukimo veiksmais ir skliaustais, vadinamas algebriniu (raidiniu) reiškinium“. Siūloma algebrinių reiškinių klasifikacija pavyzdžiais – netiksli. Kitame puslapyje trupmeninis reiškinys tiksliau: $\frac{f(x)}{g(x)}$. „Visų

kintamojo x reikšmių, su kuriomis trupmeninis reiškinys turi prasmę, visuma vadinama trupmeninio reiškinio apibrėžimo sritimi, arba leistinomis x reikšmėmis“.

Toliau 92 puslapyje nagrinėjamas trupmeninių reiškinų prastinimas. Atsiranda problema – suprastinus keičiasi reiškinio apibrėžimo sritis. Ar pradinis ir suprastintas reiškiniai yra lygūs? Pavyzdžiui 103 puslapyje 6 užduotis: „Patikrinkite, ar lygybės teisingos. Savo sprendimą pagrįskite“. Pagal ką sprendžiame apie reiškinų lygybę? Simbolių vienodumą abiejose lygybės pusėse ar skaičių lygybę? 1 pav. dešinėje esančio reiškinio apibrėžimo sritis $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, o kairėje esančio reiškinio apibrėžimo sritis $\mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$. Tikriausiai lygybė suprantama ne tarp skaičių, o tarp simbolių.

$$\frac{(x+6)(x-3)}{x(x-3)} = ? \quad \rightarrow \quad \frac{(x+6)(\cancel{x-3})}{x(\cancel{x-3})} = \frac{x+6}{x}$$

1 pav. Reiškinų lygybė.

Taisyklingas reiškinų lygybės formulavimas šiuo atveju yra toks: visiems realiesiems skaičiams x , išskyrus $x = 0$ ir $x = 3$, teisinga reiškinų lygybė

$$\frac{(x+6)(x-3)}{x(x-3)} = \frac{x+6}{x}.$$

Tai yra reiškinų lygybė bendroje jų apibrėžimo srityje.

Toliau 97 puslapyje nagrinėjamas trupmeninių reiškinų bendravardiklinimas – vardiklių sandauga. Skiriasi nuo trupmenų bendravardiklinimo – bendras mažiausias kartotinis. Naudojamos abi sampratos. Pavyzdžiui, 99 puslapyje 5 užduotis: nustatyti trupmenų mažiausią bendrąjį vardiklį. Tuo tarpu 114 puslapyje „mažiausiu bendruoju vardikliu“ vadinama vardiklių sandauga?

2.8 Tiesės krypties koeficientas

Šviesos leidyklos 9 klasės 2 dalies vadovėlyje [2, 88 p.] formuluojama tiesės krypties koeficiento formulė. Kodėl siūloma formulė korektiška, t.y. kodėl jos reikšmė nepriklauso nuo pasirinktų taškų (x_1, y_1) ir (x_2, y_2)

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} ?$$

Šis klausimas tikriausiai tinka absoliučiai daugumai vadovėlių, kuriuose pateikiama ši formulė. Tiesės krypties koeficiento korektiškumas aptariamas ir įrodinėjamas metodinėje medžiagoje [12].

3 Teiginių įrodinėjimas

Įrodinėjimui svarbios matematinių objektų apibrėžtys, jų savybės bei logika besiremiantys samprotavimai. Visais šiais aspektais susiduriame su netaisyklingu matematikos traktavimu.

Tipiškas netaisyklingas įrodinėjimas vyksta ignoruojant naudojamų sąvokų apibrėžtis ir nurodant ne visas, o tik kelias priežastis. Iliustruosime tai TEV leidyklos 7 klasės 1 dalies skyrelyje „1.3 Įrodymas“ [8, 22 p.]. 1 teoremos įrodyme neįvardinta stačiakampio apibrėžtis ir nėra nurodoma naudojamų faktų kilmė ir ryšiai su kitais faktais. Tačiau ta pati teorema, bet su stačiakampio apibrėžtimi, yra šio vadovėlio 2 dalyje [9, 16 p.]. 2 teoremos teiginio loginėje formoje naudojamas visuotinumų kvantorius „kiekvienam“. Tuo ji skiriasi nuo 1 teoremos teiginio loginės formos. Dėl visuotinumų kvantoriaus įrodinėjimas prieštaros būdu reikalauja paaiškinimo. Apskritai, nėra aptariamų galimos skirtingos teoremų teiginių loginės formos.

3.1 Taisyklės

Taisyklės – teiginiai be pagrindimo – naudojami vietoje pagrindimo. Geriausiai žinomi taisyklių pavyzdžiai yra aritmetiniai veiksmai su trupmenomis. Tačiau taisyklės dominuoja kiekvieno vadovėlio turinyje.

Čia pateiksime tik vieną taisyklės pavyzdį ir atitinkamo teiginio įrodymą. Šviesos leidyklos 9 klasės 2 dalies vadovėlyje [2, 59 p.] formuluojama taisyklė: „Norint apskaičiuoti taško, kuriame funkcijos grafikas kerta Ox ašį, koordinates, vietoje y arba $f(x)$ įrašomas nulis (sic) ir apskaičiuojama to taško x koordinatė. Šio taško koordinatės yra $(x; 0)$ “. Vietoje taisyklės galėtų būti teiginys.

1 teiginys. *Įrodyti, kad funkcijos f grafikas kerta Ox ašį taške $(x, 0)$ tada ir tik tada, kai x yra lygties $f(x) = 0$ sprendinys. (Šis sprendinys vadinamas funkcijos nuliumi).*

Įrodymas. Tegul $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ yra funkcija. Funkcijos f grafikas Γ_f yra aibė $\{(x, f(x)): x \in X\}$. Koordinatinių Ox ašis O_x yra taškų aibė $\{(x, 0): x \in \mathbb{R}\}$. Grafiko ir ašies susikirtimo taškų aibė yra sankirta $\Gamma_f \cap O_x$. Pagal apibrėžimą, dvi sutvarkytos skaičių poros lygios tada ir tik tada, kai jų pirmosios ir antrosios komponentės yra lygios. (Toks apibrėžimas formuluojamas aiškinant koordinatinių sistemą.) Jei $x \in X$ ir $(x, f(x)) = (x, 0)$, tai $f(x) = 0$. Lygybę traktuojant kaip lygtį, randame x reikšmę. $\square$

3.2 Laipsnis ir rodiklinė funkcija

Keletas bendro pobūdžio pastabų apie mūsų vadovėliuose pristatomus laipsnius, šaknis ir rodiklines funkcijas. Pirma, reikėtų aiškiai skirti apibrėžties motyvavimą euristiciniais argumentais nuo teoremos ar savybės teiginio pateikiamus su įrodymais. Matysime, kad 7 klasės vadovėliuose šio reikalavimo nepaisoma apibrėžiant laipsnius su sveikais neteigiamais rodikliais.

Antra, atkreipsime dėmesį į tai, kad laipsniai su racionaliaisiais rodikliais yra rodiklinių funkcijų reikšmės, o ne tik faktai apie skaičius, kuriuos reikia prisiminti. Funkcijos samprata suteikia rodiklinės funkcijos savybėms reikalingą paaiškinantį kontekstą. Laipsniai ir šaknys vadovėliuose pateikiami kaip skaičių faktai vadovaujantis programa.

Trečia, matematinė apibrėžtis nesukuria matematinio objekto su nurodytomis savybėmis. Tokio objekto egzistavimas ir vienatis formuluojami teorema, kuri, esant galimybei, įrodoma. Mūsų vadovėliuose apibrėžiama šaknis be jokio komentaro apie jos egzistavimą ir vienatį. Be vienaties dauguma teiginių apie skaičių lygybes yra nepagrįsti.

Laipsniai su sveikuoju neteigiamu rodikliu Laipsniai su sveikais teigiamais rodikliais apibrėžiami, pagal vadovėlį „užrašomi“, kartotinė sandauga, t.y. $a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$, n dauginamųjų, [8, 28 p.]. Pirmos problemos kyla tada, kai laipsnių rodikliai yra neteigiami sveikieji skaičiai a^0 ir a^{-n} . TEV ir Šviesos leidyklų 7 klasės vadovėliuose šie laipsniai apibūdinami tekstu, kurio sakiniai neturi nurodyto loginio statuso: apibrėžtis ar teorema. Tačiau siekiama daryti įrodinėjimo įspūdį. Parodysime, kad siūlomas įrodinėjimas yra klaidingas.

2.6. Laipsnis su sveikuoju neigiamuoju rodikliu

Raskime laipsnių 4^5 ir 4^5 dalmenį: $4^5 : 4^5 = 1$, nes dalinys ir daliklis yra lygūs.

Taikydami laipsnių su vienodais pagrindais dalmens taisyklę, gautume, kad $4^5 : 4^5 = 4^{5-5} = 4^0$.

Gavome, kad $4^0 = 1$.

Skaičiaus, nelygaus nuliui, nulinis laipsnis lygus vienetui, t.y. $a^0 = 1$.

Reiškinys 0^0 neturi prasmės.

Iš tikrųjų: kai $a \neq 0$, tai $a^n : a^n = \frac{a^n}{a^n} = 1$, nes dalinys ir daliklis yra lygūs.

Bet $a^n : a^n = a^{n-n} = a^0$. Vadinas, $a^0 = 1$ ($a \neq 0$).

Pavyzdžiui: $(-8)^0 = 1$; $(\frac{2}{3})^0 = 1$; $(-0,7)^0 = 1$.

Taikydami laipsnių su vienodais pagrindais dalmens taisyklę, raskime laipsnių 4^2 ir 4^5 dalmenį:

$4^2 : 4^5 = 4^{2-5} = 4^{-3}$.

Bet $4^2 : 4^5 = \frac{4^2}{4^5} = \frac{4 \cdot 4}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{1}{4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{1}{4^3}$. Gavome, kad $4^{-3} = \frac{1}{4^3}$.

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ($a \neq 0$; n yra natūralusis skaičius).

Iš tikrųjų: viena vertus, $a^k : a^{k+n} = a^{k-(k+n)} = a^{-n}$.

Kita vertus, $a^k : a^{k+n} = \frac{a^k}{a^{k+n}} = \frac{a^k}{a^k \cdot a^n} = \frac{1}{a^n}$. Taigi, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

2 pav. TEV leidyklos vadovėlio 36 puslapis.

Siekiant gauti lygybę $4^0 = 1$, samprotaujama pasitelkiant laipsnių 4^5 ir 4^5 dalmenį $4^5 : 4^5$. Iš vienos pusės, turime išraišką $4^5 : 4^5 = 1$, nes, pagal dalmens apibrėžtį, $4^5 = 4^5 \cdot 1$. Iš kitos pusės, taikant „laipsnių su vienodais pagrindais dalmens taisyklę“, rašoma kita to paties dalmens išraiška

$$4^5 : 4^5 = 4^{5-5}. \quad (1)$$

Kadangi $5-5=0$, tai abi dalmens $4^5 : 4^5$ išraiškos, dėl lygybės sąryšio tranzityvumo, tariamai, duoda norimą lygybę $4^0 = 1$. Šis samprotavimas yra pirmos trys eilutės matomos 2 paveikslėlyje. Vienintelis neaiškus dalykas šiame samprotavime yra (1) išraišką pagrindžianti taisyklė.

Minėta laipsnių su vienodais pagrindais dalmens taisyklė yra laipsnių a^m ir a^n su natūraliaisiais rodikliais m ir n , atitinkamai, dalmens lygybė laipsniui a^{m-n} , kai $m > n$, t.y.

$$a^m : a^n = a^{m-n}. \quad (2)$$

Ji įrodyta tame pačiame vadovėlyje 6 puslapiais anksčiau (žr. 3 paveikslėlį).

(1) lygybė vadovėlyje nėra pagrįsta dėl dviejų priežasčių. Pirmą, rodikliai $m=5$ ir $n=5$ netenkina prielaidos, kad $m > n$. Antra, skaitinis reiškiny 4^{5-5} neturi

Padalykime, pavyzdžiui, laipsnį 4^5 iš laipsnio 4^3 :

$$4^5 : 4^3 = \frac{4^5}{4^3} = \frac{\overbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}^{5 \text{ dauginamieji}}}{\underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4}_{3 \text{ dauginamieji}}} = \underbrace{4 \cdot 4}_{2 \text{ dauginamieji}} = 4^2.$$

Dalydami 4^5 iš 4^3 , gavome laipsnį, kurio pagrindas yra toks pat, kaip ir dalinio su dalikliu, t. y. 4, o laipsnio rodiklis lygus laipsnių 4^5 ir 4^3 rodiklių skirtumui, t. y. $5 - 3 = 2$.

Dalydami laipsnius su vienodais pagrindais, laipsnio pagrindą paliekame tokį pat, o iš dalinio rodiklio atimame daliklio rodiklį, t. y.

$a^m : a^n = a^{m-n}$ (čia m, n yra natūralieji skaičiai, $m > n; a \neq 0$).

$$\text{Iš tikrųjų: } a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{m \text{ dauginamųjų}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ dauginamųjų}}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m-n \text{ dauginamųjų}} = a^{m-n}.$$

3 pav. TEV leidyklos vadovėlio 30 puslapis

prasmės tol, kol nėra apibrėžtas laipsnis 4^0 . Matematinė lygybė turi prasmę, kai abiejose lygybės pusėse yra skaičiai. Šiuo atveju tokio skaičiaus dešinėje nėra. Todėl (1) lygybė nepagrįsta, kaip ir iš jos daroma išvada $4^0 = 1$. Naudojamas klaidingas samprotavimas vadinamas ciklišku argumentu²

Analogiškas samprotavimas naudojamas siekiant gauti lygybę $a^0 = 1$ kai laipsnio pagrindas yra bet koks nelygus nuliui realusis skaičius a . Pirma, pasiūlomas teisingas teiginys $a^n : a^n = 1$. Antra, pasiūlomas nepagrįstas teiginys $a^n : a^n = a^{n-n}$. Dešinėje lygybės pusėje esantis algebrinis reiškiny neturi prasmės nei su viena a arba n reikšme tol, kol neapibrėžtas reiškiny a^0 . Todėl išvada „vadinasi $a^0 = 1$ “ nepagrįsta, ji taip pat yra cikliškas argumentas.

Taisyklingais argumentais gali būti vienas arba kitas iš sekančių dviejų. Pirma, laipsnis su nuliniu rodikliu *apibrėžiamas*. Antra, laipsnis su nuliniu rodikliu įrodomas remiantis [12, 9.2 teorema], kaip ten įrodoma (39) išvada.

Panašus samprotavimas naudojamas toliau gaunant laipsnio su neigiamu sveikuoju rodikliu išraišką (žr. 2 pav. antrą frazę mėlyname fone). Būtent, remiantis laipsnių su vienodais pagrindais dalmens taisykle (2), rašoma lygybė

$$a^k : a^{k+n} = a^{k-(k+n)}, \quad (3)$$

čia k ir n yra natūralieji skaičiai. Šiuo atveju laipsnių a^k ir a^{k+n} rodikliai netenkina naudojamos taisyklės prielaidos $k > k+n$. Kadangi (3) lygybės dešinėje esantis reiškiny yra kaip tik toks, kuriam šis samprotavimas turėtų suteikti prasmę, turime dar vieną cikliško argumento pavyzdį. Vėl gi, taisyklingais argumentais yra arba apibrėžtis, arba įrodymas remiantis [12, 9.2 teorema], kaip ten įrodoma (41) išvada.

Cikliško argumento diagnozė paskirta TEV leidyklos vadovėlyje naudojamame samprotavime. Ta pati samprotavimo klaida daroma pagrindžiant laipsnių su sveikais neteigiamais rodikliais išraiškas Šviesos leidyklos 7 klasės vadovėlyje [4]. Atsivertus 26 puslapį, lentelių stulpelyje „Kodėl?“ matome, kad skaičiaus kėlimo nuliniu ir neigiamu rodikliu išraiškos gaunamos taikant laipsnių su vienodais pagrindais dalybos

² Cikliškas argumentas (lot. *circulus in demonstrando*, dar žinomas kaip *petitio principii*) – argumentacijos klaida, daroma tuomet, kai išvada, kurią norima įrodyti, tame pačiame argumente panaudojama kaip galimai perfrazuota prielaida. Pagal Wikipedia

formulę

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad (4)$$

čia $a \neq 0$, m ir n – natūralieji skaičiai. Ši formulė pateikiama 17 vadovėlio puslapyje be komentarų ir nutylint, kad jos nepagrindžiamos tame puslapyje esančiomis iliustracijomis, kai laipsnių rodikliai susiję nelygybe $m \leq n$. Būtent tokiu atveju formulė taikoma 26 puslapyje.

To paties vadovėlio 30 puslapyje suformuluotos dėsniais vadinamos laipsnių savybės, kai rodikliai yra sveikieji skaičiai. Niekur aplinkui nesimato, kad būtų bandoma pagrįsti dėsnių teisingumą. Pagrindimo nebuvimas šiame vadovėlyje reiškia, kad mokiniui dėsnius reikia mokytis mintinai.

Ne ką geriau TEV leidyklos vadovėlyje [8] pagrindžiami laipsnių su sveikaisiais rodikliais dėsniai. Vietoje klaidingo argumento, dabar samprotaujant atsiranda nuoseklumo plyšiai. 38-ame vadovėlio puslapyje, pagrindžiant lygybę $a^{-m} \cdot a^n = a^{-m+n}$, kai m ir n yra natūralieji skaičiai samprotaujama taip:

$$a^{-m} \cdot a^n = \frac{1}{a^m} \cdot a^n = \frac{a^n}{a^m} \stackrel{(3)}{=} a^{n-m} = a^{-m+n}.$$

Klausimas, kodėl teisinga 3-ioji lygybė? 30 puslapyje esantis šios lygybės pagrindimas galioja tik esant teisingai prielaidai $n > m$. Viena galimybė būtų pasinaudoti kartotinės daugybos apibrėžtimi ir suprastinti bendruosius daugiklius. Kita galimybė būtų naudoti tuos pačius dėsnius kai rodikliai yra natūralieji skaičiai. Pavyzdžiui, jei $m > n$, tai atliekame tokį vardiklio pertvarkymą $a^m = a^{(m-n)+n} = a^{m-n} \cdot a^n$, skaitiklyje ir vardiklyje suprastiname daugiklius a^n ir gauname reikalingą 3-iąją lygybę:

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{a^n}{a^{m-n} \cdot a^n} = \frac{1}{a^{m-n}} = a^{-m+n}.$$

Jei $n > m$, panašiai pertvarkome skaitiklį. Ta pati samprotavimo nuoseklumo problema kyla aiškinantis kitų dėsnių įrodymus TEV leidyklos vadovėlyje. Samprotavimas su nuoseklumo plyšiais mokiniui gali kelti supratimo sunkumų.

Laipsniai su racionaliuoju rodikliu Pagal išplėstinio kurso 11 klasei matematikos programą, laipsniai su racionaliuoju rodikliu nagrinėjami skyriuje 35.1.3 skaičiai ir skaičiavimai. Aptarsime šios temos dėstymą Šviesos leidyklos 11 klasės vadovėlyje [14]. Pagal programą, turėtų būti apibrėžiama laipsnių su racionaliuoju rodikliu sąvoka. Vadovėlyje apibrėžtimi laipsnio simboliui $a^{\frac{m}{n}}$ suteikiamas tik terminas (žr. 4 pav.).

APIBRĖŽTIS

Laipsnis $a^{\frac{m}{n}}$, kurio pagrindas $a > 0$, m – sveikasis skaičius, o n – natūralusis skaičius, vadinamas **laipsniu su racionaliuoju rodikliu**.

4 pav. Laipsnio apibrėžtis [14, 33 p.] vadovėlyje.

Laipsnio su racionaliuoju rodikliu sąvokos matematinės apibrėžties nėra. Kai kuriuose vadovėliuose ši sąvoka apibrėžiama naudojant n -tojo laipsnio šaknies sąvoką. Bet programa eliminuoja šią galimybę reikalaujant įrodyti atitinkamų laipsnio ir šaknies lygybę: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Vadovėlyje n -tojo laipsnio šaknis nagrinėjama po laipsnio.

Toliau aptarsime laipsnių su vienodais pagrindais daugybos formulę

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}, \quad (5)$$

čia $a > 0$, p ir q yra racionalieji skaičiai. Šios formulės įrodymas vadovėlyje matomas 5 pav.

Jei $a > 0$, $b > 0$, o p ir q – bet kokie racionalieji skaičiai, tai yra teisinga lygybė $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$.

Įrodymas

Kai $a > 0$, $p = \frac{l}{k}$, o $q = \frac{m}{n}$ (l ir m – sveikieji skaičiai, k ir n – natūralieji skaičiai), kairiąją lygybės $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ pusę keliame sveikuoju laipsniu nk :

$$(a^p \cdot a^q)^{nk} = a^{p \cdot nk} \cdot a^{q \cdot nk} = a^{\frac{l}{k} \cdot nk} \cdot a^{\frac{m}{n} \cdot nk} = a^{l \cdot n} \cdot a^{m \cdot k}.$$

Gauto reiškinio laipsnių rodikliai yra sveikieji skaičiai, todėl taikome laipsnių su sveikuoju rodikliu daugybos savybę:

$$a^{l \cdot n} \cdot a^{m \cdot k} = a^{l \cdot n + m \cdot k}.$$

Dešiniąją lygybės pusę keliame sveikuoju laipsniu nk :

$$(a^{p+q})^{nk} = a^{p \cdot nk + q \cdot nk} = a^{\frac{l}{k} \cdot nk + \frac{m}{n} \cdot nk} = a^{l \cdot n + m \cdot k}.$$

Vadinasi, $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$.

Įrodyta.

5 pav. Laipsnio savybė 33 puslapyje.

(5) lygybės įrodymas vadovėlyje grindžiamas teiginiu: jei du skaičius pakėlus tuo pačiu laipsniu gausime lygybę, tai skaičiai yra lygūs [12, 9.6 lema]. Teiginys panašioje formoje vadovėlyje niekur nėra formuluojamas, nors daugelyje vietų naudojamas. Pati n -tojo laipsnio apibrėžtis formuluojama toliau, 42-ame puslapyje.

Įrodymas pradedamas lygybe: $(a^p \cdot a^q)^{nk} = a^{p \cdot nk} \cdot a^{q \cdot nk}$. Vienoje lygybėje apjungtos dvi savybės: laipsnių su vienodais natūraliaisiais rodikliais daugyba ir laipsnio kėlimas laipsniu. Taikant jas skyrium ir nuosekliai, gauname dvi lygybes:

$$(a^p \cdot a^q)^{nk} \stackrel{(1)}{=} (a^p)^{nk} \cdot (a^q)^{nk} \stackrel{(2)}{=} a^{p \cdot nk} \cdot a^{q \cdot nk}.$$

(1) lygybė yra laipsnių su vienodais natūraliaisiais rodikliais daugyba, t. y. $(u \cdot v)^{nk} = u^{nk} \cdot v^{nk}$, čia $u = a^p$ ir $v = a^q$. Ji buvo deklaruojama 7-oje klasėje. Ką reiškia ir kodėl teisinga (2) lygybė? Imkime pavyzdį $p = \frac{1}{2}$ ir $nk = 2$. Tada (2) lygybės abiejose pusėse esantys pirmieji daugikliai yra

$$(a^p)^{nk} = (a^{\frac{1}{2}})^2 = (a^{\frac{1}{2}}) \cdot (a^{\frac{1}{2}}) \quad \text{ir} \quad a^{p \cdot nk} = a^{\frac{1}{2} \cdot 2} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}.$$

Tam, kad jie būtų lygūs turime remtis lygybe, kuri įrodinėjama vadovėlyje su $p = q = \frac{1}{2}$ ir kurios įrodymą nagrinėjame čia. Vadovėlio įrodymas yra loginė klaida vadinama ciklišku argumentu.

Laipsnio kėlimas laipsniu

Jei $a > 0$, $b > 0$, o p ir q – bet kokie racionalieji skaičiai, tai yra teisinga lygybė $(a^p)^q = a^{pq}$.

Įrodymas

Kai $a > 0$, $p = \frac{l}{k}$, o $q = \frac{m}{n}$ (l ir m – sveikieji skaičiai, k ir n – natūralieji skaičiai), kairiąją lygybės $(a^p)^q = a^{pq}$ pusę keliame sveikuoju laipsniu nk :

$$((a^p)^q)^{nk} = (a^p)^{q \cdot nk} = a^{p \cdot q \cdot nk} = a^{\frac{l}{k} \cdot \frac{m}{n} \cdot nk} = a^{l \cdot m}.$$

Dešiniąją lygybės pusę keliame sveikuoju laipsniu nk :

$$(a^{pq})^{nk} = a^{pq \cdot nk} = a^{\frac{l}{k} \cdot \frac{m}{n} \cdot nk} = a^{l \cdot m}.$$

Vadinasi, $(a^p)^q = a^{pq}$.

Įrodyta.

6 pav. Laipsnio savybė [14, 34 p.] vadovėlyje.

Antroji savybė, laipsnio kėlimas laipsniu, iki šiol buvo deklaruojama tik sveikiems skaičiams p ir q . Kitame vadovėlio puslapyje pateikiamas šios savybės apibendrinimo racionaliesiems laipsniams įrodymas (žr. 6 pav).

Pirmoji įrodymo lygybė turi problemą – laipsnis su racionaliuoju rodikliu q keliama laipsniu su natūraliuoju rodikliu nk . Ši savybė dar nėra įrodyta, ji tik įrodinėjama. Antroji lygybė turi tą pačią problemą. Veiksmai atliekami su dešinėje lygybės pusėje esančiu reiškiniu taip pat turi tos pačios rūšies problemą. Visų likusių 34 puslapyje esančių laipsnių savybių įrodymai taip pat klaidingi.

Taisyklinga alternatyva Rodiklinė ir logaritminė funkcijos yra naudingos savo savybėmis realių reiškinių modeliavimui ir todėl svarbios. Rodikline funkcija aprašomas kitimas vadinamas eksponentiniu. Tuo pačiu jų matematinė apibrėžtis ir savybių pagrindimas yra sudėtingi. Aptarsime keletą eksponentinio kitimo pateikimo variantų. Jų formulavimas yra elegantiškesnis kai apibrėžtis

$$a^n := a \cdot \dots \cdot a \quad n \text{ dauginamųjų.}$$

papildoma reikšme nulyje, t. y. $a^0 := 1$, čia a yra teigiamas realusis skaičius.

5 teorema. *Sekantys teiginiai apie funkciją $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ yra ekvivalentūs:*

(E1) *kiekvienam $d \in \mathbb{N}$ egzistuoja toks $\lambda \in \mathbb{R}_+$, kad*

$$f(n+d) = \lambda \cdot f(n) \quad \text{kiekvienam } n \in \mathbb{N};$$

(E2) kiekvienam $d \in \mathbb{N}$ egzistuoja toks $k \in \mathbb{R}$, $k > -1$, kad

$$f(n+d) - f(n) = k \cdot f(n) \quad \text{kiekvienam } n \in \mathbb{N};$$

(E3) egzistuoja tokie $a, c \in \mathbb{R}_+$, kad

$$f(n) = c \cdot a^n \quad \text{kiekvienam } n \in \mathbb{N}.$$

(E4) seka $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ yra geometrinė progresija, t.y. seka, kurios bet kurių dviejų gretimų narių santykis yra pastovus skaičius.

Rodiklines funkcijas, o tuo pačiu ir logaritminę funkciją, mokyklinėje matematikoje galima konstruoti dviem būdais. Pirmuoju būdu apibrėžiame natūralaus logaritmo funkciją naudodami integralą, o tada rodiklinę funkciją su pagrindu e , t.y. eksponentinė funkcija, yra atvirkštine funkcija logaritminei. Šis būdas matematiniu požiūriu yra elegantiškiausias bet reikalauja santykinai sudėtingų priemonių mokyklinio amžiaus vaikams. Juo geriau naudotis 11/12 klasėse.

Antruoju būdu rodiklinę funkciją apibrėžiama racionaliųjų skaičių aibėje darant prielaidą, kad egzistuoja apibrėžtyje nurodyta funkcija.

4 apibrėžimas. Tegul $a \in \mathbb{R}_+$. Funkcija $f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ vadinama eksponentine, jei ji yra vienintelė, tolydi, $f_a(1) = a$ ir

$$f_a(x+y) = f_a(x) \cdot f_a(y) \quad \text{kiekvienam } x, y \in \mathbb{R}.$$

Šios funkcijos egzistavimas įrodomas pirmuoju būdu vėliau, kai tam paruošiami mokiniai. Tokiu būdu galima susipažinti su rodiklinės funkcijos savybėmis pakankamai anksti naudojant tik elementarias priemones ir paprastus samprotavimus. Tada logaritminę funkciją yra apibrėžiama kaip atvirkštinę rodiklinei funkcijai. Mūsų vadovėliuose tradiciškai rodiklinę funkciją konstruojama su racionaliaisiais laipsniais naudojant n -tojo laipsnio šaknis.

4 Priežastys ir pasekmės

Matematikoje apibrėžtis suteikia sąvokai arba terminui tikslią prasmę. Pavyzdžiui, funkcija yra sąryšis (taisyklė) tam tikru būdu siejantis skaičius priklausančius nurodytoms aibėms. Apibrėžtimi nurodomos tokios savybės, kurios yra pakankamos identifikuoti objektą ir nustatyti visas kitas jo savybes. Kadangi matematiniai objektai yra abstraktūs, išskyrus jų savybes, nėra kitų būdų juos vienareikšmiškai identifikuoti.

Kai nėra paaiškinimo, kad sąvokos turinys nėra tuščias, t.y. egzistuoja matematiniai objektai su nurodytomis savybėmis, formuojamas požiūris, kad matematika yra tik kalba. Tiksliau formuojamas požiūris, kad matematika turi sintaksę, bet neturi semantikos. Kalbos dalyko atveju tai reikštų, kad turime kalbos gramatiką, bet nėra ta kalba reiškiamų objektų. Tokia kalba neturi paskirties, o tuo pačiu ir prasmės.

Matematikoje įrodymas yra priemonė įgalinanti palyginti ir tarpusavyje sieti skirtingas sąvokas. Tuo būdu konstruojamas paveikslas, kuriame ryškėja įvairūs matematinės veiklos tikslai. Kitaip tariant, matematikos žinios įgyja prasmę ir motyvuoja besimokantįjį gilintis į dalyko nagrinėjimą. Kitu būdu visa tai yra išreikšta įvade suformuluotais pagrindiniais matematikos principais.

Priežastimi nesilaikyti aptariamų principų gali būti matematikos mokymosi tikslo lavinti mąstymą nevertinimas. Toleruodami netaisyklingą matematiką prarandame galimybę siekti matematikos mokymo tikslų. Šiame straipsnyje apžvelgėme tik dalį vadovėliuose pastebėtų netaisyklingos matematikos pavyzdžių. Apie kitus pavyzdžius bus rašoma ateityje.

Literatūra

- [1] J. Gedminienė, I. Šukienė, D. Riukienė, J. Jačiauskaitė. *Matematika. Vadovėlis 9 klasei 1 dalis. Serija Horizontai*. Šviesa, 2023.
- [2] J. Gedminienė, I. Šukienė, D. Riukienė, J. Jačiauskaitė, I. Brazauskienė. *Matematika. Vadovėlis 9 klasei 2 dalis. Serija Horizontai*. Šviesa, 2023.
- [3] K. Intienė, A. Skūpas, V. Stakėnas, E. Stankus, V. Vitkus. *Matematika 11. I dalis*. TEV, 2004.
- [4] N. Jasiūnaitė, A. Barkauskienė, A. Berniukevičius, D. Česnuitis. *Matematika. Vadovėlis 7 klasei 1 dalis. Serija Horizontai*. Šviesa, 2024.
- [5] A. Kavaliauskas. Matematinų objektų ypatumai. Funkcija. *Liet. mat. rink. LMD darbai*, **48/49**:105–108, 2008.
- [6] J. Kočetkovas, J. Kočetkova. *Algebra ir Elementarinės Funkcijos. II dalis, X–XI klasei*. Šviesa, Kaunas, 1972.
- [7] E. Martin-Fernandez, J.F. Ruis-Hidalgo, L. Rico. Meaning and understanding of school mathematical concepts by secondary students: the study of sine and cosine. *EURASIA J. Math., Sci. Tech. Ed.*, **15**(12):em1782, 2019.
- [8] V. Meškauskaitė, V. Pipirienė, Ž. Stundžienė. *Matematika visiems. Vadovėlis 7 klasei 1 dalis*. TEV, 2024.
- [9] V. Meškauskaitė, V. Pipirienė, Ž. Stundžienė. *Matematika visiems. Vadovėlis 7 klasei 2 dalis*. TEV, 2024.
- [10] R. Norvaiša. Sąvokos, terminai ir simboliai matematikos vadovėliuose. *Liet. matem. rink., Ser. B*, **64**:59–74, 2023.
- [11] R. Norvaiša. Geometrinės transformacijos mokyklinėje matematikoje. *Liet. matem. rink., Ser. B*, **65**:45–75, 2024.
- [12] R. Norvaiša. *Mokyklinė algebra mokytojams*. Metodinė medžiaga, 2025.
- [13] Torkildsen, H.A. and Forbregd, T.A. and Kaspersen, E. and Solstad, T. Toward a unified account of definitions in mathematics education research: a systematic literature review. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, **56**:29–56, 2025.
- [14] V. Šileikienė ir kiti. *Matematika. Vadovėlis III gimnazijos klasei, 1 dalis. Serija Horizontai*. Šviesa, 2024.
- [15] V. Šileikienė ir kiti. *Matematika. Vadovėlis III gimnazijos klasei, 2 dalis. Serija Horizontai*. Šviesa, 2024.
- [16] H.-H. Wu. Phoenix rising: Bringing the common core state mathematics standards to life. *Am. Educ.*, **35**:3–13, 2011.
- [17] H.-H. Wu. *Algebra and Geometry*. American Mathematical Society, 2020.
- [18] H.-H. Wu. *Pre-Calculus, Calculus and Beyond*. American Mathematical Society, 2020.

SUMMARY

Examples of incorrect mathematics in Lithuanian textbooks*R. Norvaiša*

The article discusses the cases of incorrect mathematics in textbooks. For example, instead of defining of a mathematical concept, textbooks explain mathematical symbols and terms. In other cases, false or non-trivial facts are used to justify or prove statements as if they were self-evident. We also provide examples of logical reasoning errors. We explain some cases of incorrect mathematics in textbooks by the problematic nature of mathematics syllabus. Other cases of incorrect mathematics arises from the different treatment of the same topics in different textbooks. In all the cases discussed, we offer alternative correct solutions.

Keywords: content of school mathematics; mathematics textbooks; correct mathematics; definition; proof