



**Matematikos ir
informatikos
fakultetas**

VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MAGISTRO STUDIJS
FINANSŲ IR DRAUDIMO MATEMATIKOS STUDIJŲ PROGRAMA

Rizikos paskirstymo metodų (RAM) taikymas verslo paskolų portfelio analizei

**Risk Attribution Methods (RAM) Applied to
Business Loan Portfolio Analysis**

Magistro baigiamasis darbas

Autorė: Ugnė Aleksejūnaitė

VU el. pašto adresas: ugne.aleksejunaite@mif.stud.vu.lt

Darbo vadovas: Doc. dr. Martynas Manstavičius

Vilnius
2025

Rizikos paskirstymo metodų (RAM) taikymas verslo paskolų portfelio analizei

Santrauka

Šiame darbe nagrinėjami rizikos paskirstymo metodai (angl. *Risk Attribution Methods* (RAM)) ir jų taikymas verslo paskolų portfelio analizei. Rizikos vertinimui naudojami koherentinių rizikos matų principai ir aptariami klasikiniai rizikos paskirstymo metodai, Euler rizikos paskirstymo principas bei lošimų teorijos pagrindu sukurti atribucijos metodai, leidžiantys išskaidyti bendrą portfelio riziką į atskirų komponentų įnašus. Rizikos paskirstymo metodika iliustruojama skaitiniu pavyzdžiu, parodančiu, kaip portfelio uodegos rizika gali būti paskirstyta atskiriems portfelio komponentams. Toliau ši metodika taikoma realiems verslo paskolų portfelio duomenims. Gauti rezultatai leidžia įvertinti rizikos koncentraciją ir nustatyti segmentus, labiausiai prisidedančius prie kraštutinių nuostolių verslo paskolų portfelyje.

Raktiniai žodžiai: rizikos matas, rizikos paskirstymas, RAM, kredito rizika, verslo paskolų portfelis.

Risk Attribution Methods (RAM) Applied to Business Loan Portfolio Analysis

Abstract

This thesis examines risk attribution methods (RAM) and their application to business loan portfolio analysis. The analysis is based on coherent risk measure principles and classical risk attribution methods like the Euler risk allocation principle and game-theory based attribution methods. That makes it possible to decompose total portfolio risk into contributions of individual components. Risk attribution is illustrated using a numerical example, demonstrating how portfolio tail risk can be allocated to individual portfolio components. The methodology is then applied to real business loan portfolio data. The obtained results make it possible to assess risk concentration and identify the segments that contribute most to extreme losses in a business loan portfolio.

Keywords: risk measure, risk attribution, RAM, credit risk, business loan portfolio.

Turinys

1 Įvadas	5
2 Rizikos matų teorija	6
2.1 Rizikos samprata finansuose	6
2.2 Rizikos matas	6
2.3 Koherentiniai rizikos matai	7
2.4 Klasikiniai rizikos matai	8
3 Rizikos paskirstymo metodai	11
3.1 Klasikiniai rizikos paskirstymo metodai	11
3.2 Lošimų teorija	13
3.3 Shapley vertė	14
3.4 Baziniai atribucijos metodai (BAM)	16
4 Rizikos paskirstymo metodai (RAM)	17
4.1 RAM apibrėžimas	17
4.2 RAM ir Shapley vertės ryšys	19
4.3 RAM metodo taikymo pavyzdžiai	20
5 Empirinė analizė	21
5.1 Euler rizikos paskirstymo principas CVaR atveju	21
5.2 Rizikos paskirstymas verslo paskolų portfelyje	24
6 Išvados	30
7 Priedai	32
7.1 Python kodas	32
Literatūros sąrašas	39

1 Įvadas

Finansinių sprendimų priėmimas neatsiejamas nuo rizikos sąvokos, kuri ekonomikos ir finansų teorijoje analizuojama jau kelis šimtmečius. Dar XVII–XVIII amžiuje tikimybių teorijos atsiradimas sudarė prielaidas formaliai aprašyti neapibrėžtumą, o XX amžiuje, sparčiai vystantis finansų rinkoms, rizikos analizė tapo viena centrinių finansų mokslo ir praktikos sričių. Ypač didelį postūmį šios srities raidai suteikė portfelio teorijos atsiradimas, kai H. Markowitzo darbuose buvo parodyta, jog rizika turėtų būti vertinama ne atskirų pozicijų, o viso portfelio lygmeniu [6]. Istorinė patirtis rodo, kad netinkamas rizikos vertinimas gali turėti reikšmingų neigiamų pasekmių tiek pavienėms finansų institucijoms, tiek visai finansų sistemai. Tokie įvykiai kaip 2008 m. pasaulinė finansų krizė atskleidė, jog tradiciniai rizikos matavimo rodikliai dažnai nepakankamai atspindi ekstremalius, bet ekonomiškai itin reikšmingus nuostolius. Tai paskatino didesnę dėmesį skirti vadinamiesiems uodegos rizikų matams, kurie orientuojasi į blogiausius galimus scenarijus, o ne į vidutinius ar tipinius svyravimus.

Kredito rizika užima ypatingą vietą finansų institucijų rizikos struktūroje, kadangi paskolos sudaro reikšmingą bankų ir kitų kredito tarpininkų turto dalį. Verslo paskolų portfeliai pasižymi dideliu heterogeniškumu: paskolos skiriasi pagal dydį, trukmę, skolininkų finansinę būklę, veiklos sektorius bei kitus veiksnius. Dėl šios priežasties ne mažiau svarbu suprasti, kurie portfelio segmentai ar charakteristikos labiausiai prisideda prie bendros rizikos. Rizikos paskirstymo metodai yra svarbūs ne tik teoriniu požiūriu, bet ir praktikoje, nes jie sudaro pagrindą kapitalo paskirstymui, kainodarai, rizikos limitų nustatymui bei strateginiams portfelio valdymo sprendimams.

Nepaisant spartaus teorinio vystymosi, rizikos paskirstymo metodų praktinis taikymas realiems kredito portfeliams vis dar kelia metodologinių ir interpretacinių klausimų. Tad, atsižvelgiant į paminėtus šios temos aktualumus, yra svarbu išnagrinėti iš kur kilo rizikos paskirstymo metodai (RAM) ir kaip jie gali būti pritaikomi portfelio analizėje. Tad šiame darbe bus analizuojama rizikos matų teorija ir paskirstymo metodai, o vėliau pritaikomi praktiniame kontekste ir interpretuojami gauti rezultatai.

2 Rizikos matų teorija

2.1 Rizikos samprata finansuose

Viena esminių finansų sektoriaus sąvokų yra rizika. Ji yra apibrėžiama kaip neapibrėžtumas dėl būsimos finansinės būklės, susijęs su galimais nuostoliais. Finansinė rizika paprastai suvokiama kaip galimo nepalankaus rezultato tikimybė [7]. Investavimo kontekste rizika reiškia potencialų nuostolį, kylantį iš rinkų nepastovumo, kredito įsipareigojimų nevykdymo, likvidumo trūkumo ar kitų finansinių veiksnių. Finansų teorija pabrėžia, jog vien vidutinė grąža nėra pakankamas kriterijus investiciniams sprendimams priimti, kadangi du instrumentai su vienoda būsimąja grąža gali turėti skirtingus rizikos lygius, tad yra privaloma atsižvelgti ne tik į tikėtiną rezultatą, bet ir į jo sklaidą, t.y. galimų baigčių kintamumą [6].

Rizika taip pat glaudžiai siejama su nuostolio pasiskirstymu, kadangi investuotojus domina ne tik nepalankių situacijų tikimybė, bet ir galimo nuostolio dydis. Šiuolaikinės rizikos teorijos, ypač suderintų rizikos matų koncepcija [1], išplėtė rizikos supratimą, pabrėždamos, kad rizika gali būti apibūdinta vienos dimensijos rodikliu – rizikos matu $\rho(X)$. Nors $\rho(X)$ apskaičiuojamas remiantis visu galimų rezultatų pasiskirstymu, pats rizikos mato rezultatas yra vienas skaičius, nusakantis reikalingą kapitalo ar rezervo dydį. Finansinė rizika nėra vien investavimo aspektas, ji taip pat svarbi kredito įstaigose, kur nuostoliai kyla dėl skolininkų nemokumo ar draudimo įstaigose, kur rizika siejama su žalos atsiradimu.

2.2 Rizikos matas

Matematiškai rizikos matas apibrėžiamas kaip funkcionalas

$$\rho : L^p(\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow \mathbb{R},$$

kur L^p erdvė susideda iš atsitiktinių nuostolių X , tenkinančių $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$. Čia Ω – baigčių erdvė, $\mathcal{F}$ – Ω poaibių σ -algebra, o P – tikimybinis matas. Funkcijos reikšmė $\rho(X)$ atspindi nuostolio X rizikos dydį, priklausantį nuo jo pasiskirstymo. Toliau darbe X interpretuojamas kaip nuostolis, šios prielaidos laikomasi formuluojant rizikos mato aksiomas.

Rizikos mato tikslas – kiekybiškai įvertinti nepalankius rezultatus, susijusius su nuostolių ar gražos sumažėjimu. Kad rizikos matas būtų ekonomiškai prasmingas, jis turi tenkinti tam tikras aksiomas, kurios užtikrina nuoseklumą sprendžiant rizikos valdymo problemas. Dėl šios priežasties rizikos mato formalus apibrėžimas yra esminis tolimesnei koherentinių rizikos matų ir rizikos paskirstymo metodų analizei [1].

2.3 Koherentiniai rizikos matai

Pastaba. Darbe nagrinėjami vadinamieji koherentiniai rizikos matai yra su aksiomomis suderinti rizikos matai.

Artzner et al. (1999) formaliai apibrėžė koherentinį rizikos matą kaip tokį, kuris tenkina keturias aksiomas. Šios aksiomos lemia, kad rizikos matas atspindi intuityvias ir ekonomines rizikos valdymo savybes, tokias kaip diversifikacijos nauda ir nuostolių vertinimo nuoseklumas.

Tegu X ir Y – atsitiktiniai nuostoliai. Rizikos matas ρ yra koherentinis, jei jis tenkina šias aksiomas:

2.3.1 Monotoniškumas

$$X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y).$$

Jei vienas nuostolių scenarijus yra blogesnis už kitą visose galimose baigtys, jo rizika turi būti ne mažesnė. Tai yra minimali racionalumo sąlyga rizikos matui.

2.3.2 Subadityvumas

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y).$$

Čia atspindi diversifikacijos principas: sudedant du atsitiktinius nuostolius, jungtinė rizika neturi viršyti atskirų rizikų sumos. Jei ρ nebūtų subadityvus, tuomet rizika didėtų jungiant portfelius, o tai prieštarautų pagrindiniam portfelio teorijos principui.

2.3.3 Invariantiškumas postūmio atžvilgiu

$$\rho(X + c) = \rho(X) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ši aksioma teigia, jog rizikos matas turi tiesiogiai reaguoti į tam tikrą deterministinį poveikį. Jei visoms galimoms baigtims pridedas tas pats dydis c (t.y. nuostolis padidėja), tuomet rizika proporcingai padidėja. Jei $c < 0$, nuostolis sumažėja, todėl ir rizika atitinkamai sumažėja.

2.3.4 Teigiamas homogeniškumas

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X), \quad \lambda > 0.$$

Jei nuostoliai padidėja λ kartų, tuomet ir rizika taip pat turi padidėti λ kartų. Ši savybė svarbi, kai analizuojamas portfelio dydžio keitimas arba naudojama jautrumo analizė (angl. *stress testing*) [1].

2.4 Klasikiniai rizikos matai

Rizikos matų teorija apima įvairius funkcionalus, kurie siekia kiekybiškai įvertinti atsitiktinio nuostolio pasiskirstymą ir jo nepalankiausias dalis. Nors koherentinių rizikos matų aksiomos suteikia teorinę pagrindą ekonomiškai racionaliam rizikos vertinimui (Artzner et al., 1999), praktikoje plačiai naudojami ir tokie matai, kurie šių reikalavimų netenkina.

2.4.1 Value-at-Risk (VaR)

Value-at-Risk yra α -kvantilio principu paremtas rizikos matas, kuris apibūdinamas

$$VaR_\alpha(X) = \inf\{x | \mathbb{P}(X \leq x) \geq \alpha\},$$

kur $\alpha \in (0, 1)$ yra pasiklovimo lygmuo [1]. Šis matas pateikia mažiausią nuostolio dydį, kuris nėra viršijamas su tikimybe α .

VaR pasižymi šiomis savybėmis:

- monotoniškumas: jei $X \leq Y$ (beveik visur), tuomet

$$VaR_\alpha(X) \leq VaR_\alpha(Y);$$

- invariantiškumas postūmio atžvilgiu: bet kuriam $c \in \mathbb{R}$,

$$VaR_\alpha(X + c) = VaR_\alpha(X) + c;$$

- teigiamas homogeniškumas: bet kuriam $\lambda > 0$,

$$VaR_\alpha(\lambda X) = \lambda VaR_\alpha(X).$$

Bendruoju atveju VaR gali pažeisti subadityvumą, ir Artzner et al. (1999) pateikia kontrapavyzdį su nepriklausomais nuostoliais

$$VaR_\alpha(X + Y) > VaR_\alpha(X) + VaR_\alpha(Y),$$

Tai reiškia, jog VaR nėra koherentinis rizikos matas [1].

2.4.2 Conditional Value-at-Risk (CVaR)

Conditional Value-at-Risk parodo tikėtiną nuostolio dydį viršijus VaR ribą, kuris apibrėžiamas

$$CVaR_\alpha(X) = E[X|X \geq VaR_\alpha(X)].$$

Pastaba. Pateiktas apibrėžimas galioja, kai X turi tolydų skirstinį. Jei $P(X = VaR_\alpha(X)) > 0$, t.y. kvantilis yra šuolio vietoje, bendrasis CVaR apibrėžimas reikalauja papildomo korekcinio dėmens (žr. Acerbi ir Tasche (2002) deficito vidurkio formulę).

CVaR tenkina visas keturias koherentinio mato aksiomas:

- monotoniškumas: jei $X(\omega) \leq Y(\omega)$ visoms ω , tai bet kuri α -kvantilio reikšmė X atveju yra ne didesnė nei bet kuri α -kvantilio reikšmė Y atveju. Todėl $VaR_\alpha(X) \leq VaR_\alpha(Y)$, o iš čia seka $CVaR_\alpha(X) \leq CVaR_\alpha(Y)$;
- subadityvumas: $CVaR_\alpha(X + Y) \leq CVaR_\alpha(X) + CVaR_\alpha(Y)$;
- invariantiškumas postūmio atžvilgiu: $CVaR_\alpha(X + c) = CVaR_\alpha(X) + c$;
- teigiamas homogeniškumas: $CVaR_\alpha(\lambda X) = \lambda CVaR_\alpha(X)$, kur $(\lambda > 0)$.

Kadangi CVaR tenkina visas keturias aksiomas – jis yra koherentinis rizikos matas [1], [7], [10].

2.4.3 Dispersija

Dispersija yra vienas seniausių rizikos matų, pristatytų Markowitz (1952) portfelio teorijoje. Ji apibrėžiama kaip gražos nuokrypio nuo vidurkio kvadratinė vidutinė reikšmė

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2].$$

Tačiau šis matas nėra koherentinis, kadangi nėra:

- monotoniškumo: galima rasti X ir Y , tokius kad $X \leq Y$, bet $Var(X) < Var(Y)$ nebus teisinga;
- invariantiškumo postūmio atžvilgiu: $Var(X + c) = Var(X)$;
- teigiamo homogeniškumo: $Var(\lambda X) = \lambda^2 Var(X)$.

Nors šis rizikos matas nėra koherentinio mato pavyzdys, tačiau praktikoje tebėra plačiai naudojamas dėl interpretacijos paprastumo [7].

Šiame skyriuje aptarti rizikos matai parodo, kad ne visi praktikoje naudojami matavimo metodai tenkina suderintų matų aksiomas. VaR ir dispersija yra naudingi instrumentai tam tikrose situacijose, tačiau dėl savo savybių neatitinka koherentinio rizikos mato kriterijų. Tuo tarpu CVaR yra koherentinis, todėl jis dažniausiai pasirenkamas kaip pagrindinis matas moderniose rizikos analizės ir paskirstymo metodikose.

Šis rezultatas yra esminė prielaida pereiti prie rizikos paskirstymo teorijos, kurioje dažniausiai reikalaujama, kad rizikos matas būtų koherentinis, nes tai užtikrina nuoseklų ir aksiomatiškai pagrįstą paskirstymą tarp portfelio komponentų.

3 Rizikos paskirstymo metodai

Nors rizikos matas $\rho(X)$, kur X yra portfelio nuostoliai, suteikia vieną skaitinę bendros portfelio rizikos vertę, toks agreguotas dydis neatskleidžia, kaip rizika pasiskirsto tarp portfelio komponentų ar modelio kintamųjų. Kitaip tariant, investuotojas žino, kiek rizikos turi visas portfelis, bet nežino, kuri jo dalis tą riziką sukelia [6]. Finansų institucijoms būtina nustatyti, kiek kapitalo priskirti kiekvienam verslo padaliniui, produktui ar portfelio segmentui. Kapitalo paskirstymo taisyklės, tokios kaip horizonto testai ir ekonominio kapitalo metodai, remiasi rizikos įnašų išskaidymu [12].

Klasikinėje literatūroje analizuojami keli pagrindiniai rizikos paskirstymo būdai, tarp kurių svarbiausi yra marginalūs rizikos įnašai, komponentiniai rizikos įnašai ir Euler metodo pagrindu paremtas paskirstymas [12]. Tačiau šie metodai turi ribotą taikymą netiesiniuose arba aukštos dimensijos modeliuose, todėl šiuolaikinėje literatūroje vis daugiau dėmesio skiriama lošimų teorijos pagrindu sukurtiems metodams, tokiems kaip Shapley vertės paskirstymas, bei moderniems modelių paaiškinamumo (BAM) metodams. Tasche (2008) parodė, kad kapitalo paskirstymo taisyklės tarpusavyje susijusios su rizikos mato koherentiškumu – koherentinis rizikos matas leidžia paskirstyti riziką nuosekliai ir neprieštarinčiai.

Pastaba. Šiame darbe sąvokos rizikos paskirstymas ir rizikos atribucija vartojamos sinonimiškai, vadovaujantis Chen (2025).

3.1 Klasikiniai rizikos paskirstymo metodai

Klasikinė rizikos paskirstymo literatūra remiasi tuo, kad bendras portfelio rizikos matas $\rho(X)$ kinta keičiantis portfelio svoriams, todėl analizuojamas rizikos mato jautrumas šiems svoriams. Jei portfelis išreiškiamas kaip

$$X = \sum_{i=1}^n \omega_i X_i,$$

kur ω_i yra svoriai, o X_i yra individualūs nuostolių komponentai, tokiu atveju rizikos paskirstymo tikslas yra nustatyti, kokia bendros rizikos dalis tenka kiekvienam komponentui [12].

3.1.1 Marginalus rizikos įnašas

Marginalus rizikos įnašas matuoja, kaip pasikeičia bendras rizikos matas, nežymiai padidinus vieno portfelio komponento svorį. Jis apibrėžiamas kaip išvestinė

$$MR_i = \frac{\partial \rho(X)}{\partial \omega_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Šis dydis parodo, koku greičiu rizika auga portfelio rizika padidinus komponento X_i įtaką. Marginalus rizikos įnašas yra svarbus portfelio optimizavimo kontekste, nes optimalumo sąlygos dažnai priklauso nuo $\partial \rho(X)/\partial \omega_i$ egzistavimo [12].

3.1.2 Komponentinis rizikos įnašas ir Euler dekompozicija

Komponentinis rizikos įnašas siekia paskirstyti bendrą riziką proporcingai kiekvieno portfelio elemento svarbai

$$CR_i = \omega_i \cdot MR_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Jeigu rizikos matas $\rho(X)$ yra teigiamai homogeniškas (1 laipsnio) ir diferencijuojamas, tuomet, pagal Eulerio teoremą apie 1 laipsnio homogeniškas funkcijas, galioja rizikos dekompozicija [12], apibrėžiama

$$\rho(X) = \sum_{i=1}^n \omega_i \frac{\partial \rho(X)}{\partial \omega_i} = \sum_{i=1}^n CR_i.$$

Ši lygybė rodo, kad bendras portfelio rizikos kapitalo reikalavimas gali būti be liekanos išskaidytas į atskirų portfelio komponentų rizikos įnašus. Todėl Euler principas (angl. *Euler allocation*) yra vienas plačiausiai taikomų kapitalo paskirstymo metodų rizikos modeliuose [4], [12].

Nors šie metodai yra matematiškai aiškūs ir teoriškai patrauklūs, tačiau jie turi reikšmingų ribotumų: reikalauja diferencijuojamumo, yra priklausomi nuo bazinių svorių ir nesprendžia sąžiningumo rizikos kapitalo paskirstymo klausimo. Dėl šių priežasčių šiuolaikinėje literatūroje daugiau dėmesio skiriama kooperatyvinių lošimų teorijos metodams.

3.2 Lošimų teorija

Rizikos paskirstymo problema gali būti traktuojama kaip specialus kooperatyvinio lošimo atvejis, kuriame portfelio komponentai, modelio kintamieji ar institucijos laikomi „žaidėjais“, o bendras rizikos matas $\rho(X)$ atlieka lošimo vertės funkcijos vaidmenį. Kooperatyvinė lošimų teorija tiria, kaip teisingai paskirstyti lošimo generuojamą bendrą vertę tarp visų dalyvių taip, kad paskirstymas būtų aksiomatiškai pagrįstas ir neprieštaringas [11].

3.2.1 Kooperatyvinis lošimas

Kooperatyviniame lošime su baigtine žaidėjų aibe $N = \{1, 2, \dots, n\}$ kiekvienam poaibiui $S \subseteq N$ priskiriama skaliarinė vertė $v(S)$. Funkcija

$$v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$$

vadinama charakteristine funkcija [11]. Interpretacija finansuose:

- N – portfelio aktyvai, rizikos veiksniai arba modelio kintamieji.
- $v(S)$ – rizikos matas arba kitas rezultatas, gaunamas aktyvams S veikiant kartu.
- $v(N)$ – bendras portfelio rizikos matas.

Tokiu būdu rizikos paskirstymas tampa uždaviniu rasti tokius $\phi_1, \dots, \phi_n$, kur ϕ_i žymi i -tojo portfelio komponento rizikos kapitalo įnašą, tenkinantį

$$\sum_{i=1}^n \phi_i = v(N),$$

o pats paskirstymas būtų aksiomatiškai pagrįstas. Konkretūs paskirstymo metodai bus nagrinėjami kitame skyriuje.

3.2.2 Vertės paskirstymo aksiomos

Šiame poskyryje remiamasi [11], [15].

Pagrindinės aksiomos yra:

1. Efektyvumas

$$\sum_{i=1}^n \phi_i = v(N),$$

Visi žaidėjai kartu turi gauti bendrą lošimo vertę, t.y. bendras rizikos matas pilnai išskaidomas tarp portfelio komponentų.

2. Simetrija

Jeigu žaidėjai i ir j įneša identišką vertę visose kombinacijose, turi galioti $\phi_i = \phi_j$.

3. Nenaudingo žaidėjo aksioma (angl. *null player*)

Jeigu žaidėjas i niekada nepadidina jokios komandų kombinacijos vertės, t.y.

$$v(S \cup \{i\}) = v(S) \quad \forall S,$$

tada $\phi_i = 0$. Jei aktyvas nedidina rizikos, jo indėlis turi būti nulis.

4. Adityvumas

Jeigu lošimo vertė yra dviejų lošimų suma $v = v^1 + v^2$, tada

$$\phi(v) = \phi(v^1) + \phi(v^2).$$

Šios aksiomos veda prie vienintelės galimos paskirstymo taisyklės – Shapley vertės.

3.3 Shapley vertė

Šiame poskyryje remiamasi teorija iš [11].

Kooperatyvinių lošimų teorijoje Shapley vertė yra viena žinomiausių ir plačiausiai taikomų vertės paskirstymo taisyklių. Ją pristatė Lloyd S. Shapley savo klasikiniam darbe *A value for n -person games* [11], kuriame parodė, kad pagal

tam tikras aksiomas vertės paskirstymas yra vienareikšmiškai apibrėžtas. Dėl savo matematinių ir aksiomatinių savybių Shapley vertė tapo fundamentaliu metodu ekonomikoje, vertinanti sisteminę riziką, draudime, portfelių analizėje ir modelių interpretavimo teorijoje.

Intuicija – Shapley vertė kiekvienam žaidėjui (portfelio komponentui) priskiria jo „teisingą“ įnašą į bendrą vertę, vidutiniškai įvertinant, kiek papildomos vertės sukuria jam prisijungiant prie bet kurios kombinacijos, atsižvelgiant į visas galimas žaidėjų jungimosi tvarkas. Iš esmės tai yra vidutinis ribinis naudingumas visose kombinacijose.

3.3.1 Shapley vertės apibrėžimas

Tarkime, turime n žaidėjų kooperatyvinį lošimą su charakteristine funkcija $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$. Žaidėjo i Shapley vertė apibrėžiama

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(n - |S| - 1)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S)).$$

čia S – bet kuris žaidėjų poaibis be i , $v(S)$ – kombinacijos vertė, $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ – žaidėjo ribinis įnašas į kombinaciją S , o koeficientas $\frac{|S|!(n - |S| - 1)!}{n!}$ nusako tikimybę, jog atsitiktinai parinktoje visų n žaidėjų jungimosi tvarkoje žaidėjas i prisijungia būtent po kombinacijos S , kai visos $n!$ galimos tvarkos laikomos vienodai tikėtinomis.

Shapley taip pat įrodė, jog egzistuoja būtent viena vertės paskirstymo taisyklė, kuri tenkina visas keturias vertės paskirstymo aksiomas: efektyvumo, simetrijos, nenaudingo žaidėjo ir adityvumo.

3.3.2 Shapley vertė rizikos paskirstymui

Taikant rizikos matą ρ , vertė dažniausiai apibrėžiama

$$v(S) = \rho \left(\sum_{i \in S} X_i \right),$$

kur X_i yra portfelio nuostolių komponentai.

Tuomet Shapley vertė ϕ_i suteikia informaciją kaip kiekvienas komponentas prisideda prie bendros rizikos, atsižvelgiant į visas galimas jų kombinacijas, įskaitant sąveikas, nepriklausomai nuo modelio formos (tiesinio ar netiesinio). Taip daro Shapley vertę tinkama net labai sudėtingiems finansiniams

modeliams, pavyzdžiui portfeliams su opcionais, kredito rizikos portfeliams, neuroninių tinklų rizikos prognozėms ar sandorių rizikai [13].

3.4 Baziniai atribucijos metodai (BAM)

Baziniai atribucijos metodai (angl. *Baseline Attribution Methods (BAM)*) yra funkcijų paskirstymo metodai, skirti išskaidyti modelio išvestį į atskirų įvesties kintamųjų įnašus. Šie metodai plačiai taikomi mašininio mokymosi modelių interpretavime, tačiau jų aksiomatinė struktūra yra glaudžiai susijusi su rizikos paskirstymo problema [2].

BAM remiasi idėja, kad modelio įvesties realizacijai $x = (x_1, \dots, x_n)$ prognozė gali būti suskaidyta į adityvius komponentus

$$f(x) = \phi_0 + \sum_{i=1}^n \phi_i,$$

kur ϕ_0 žymi bazinę (angl. *baseline*) prognozės vertę, dažniausiai apibrėžiamą kaip modelio išvesties tikėtiną reikšmę baziniame paskirstyme, o ϕ_i nusako - konkrečios įvesties realizacijos x_i įnašą į modelio prognozę. Ši forma dera su Shapley vertės aksioma dėl efektyvumo ir adityvumo [5].

Vienas iš BAM metodų yra SHAP (angl. *SHapley Additive exPlanations*), kuris remiasi Shapley verte ir užtikrina, kad kintamųjų įnašai ϕ_i tenkina tas pačias savybes kaip ir lošimų teorijos paskirstymo taisyklės. Todėl SHAP galima laikyti funkcijų pasaulio Shapley verte.

4 Rizikos paskirstymo metodai (RAM)

Modernios rizikos kontekste svarbu ne tik apskaičiuoti bendrą rizikos matą $\rho(X)$, bet ir suprasti, kaip ši rizika pasiskirto tarp kintamųjų. Atsižvelgiant į anksčiau minėtų tradicinių metodų ribotumus, Chen D. (2025) pasiūlė RAM (angl. *Risk Attribution Methods*) - bendrą aksiomatinę sistemą ir metodų klasę, skirtą rizikos įnašų paskirstymui koherentinių rizikos matų kontekste. RAM metodas sujungia rizikos matų teoriją [1], lošimų teorijos vertės paskirstymo aksiomas [11] ir BAM metodų principus [5]. RAM gali būti laikomas universalėsiu ir lankstesniu nei tradiciniai metodai, kadangi jį galima taikyti tiek finansiniams portfeliams, tiek statistiniams mašininio mokymosi modeliams.

RAM esminė idėja yra ta, jog rizikos paskirstymas turi būti aksiomatiškai pagrįstas (kaip Shapley), suderinamas su koherentinio rizikos mato struktūra, tinkamas netiesiniams modeliams, realizuojamas kaip funkcijos $\rho(X)$ paskirstymas portfelio komponentams. Norint paskirstyti rizikos matą, būtina turėti atribucijos metodą, kuris elgtųsi stabiliai, būtų jautrus sąveikoms, nepriklausytų nuo modelio parametrizacijos, atitiktų koherentiškumo principus [2].

Sekančiuose poskyriuose remiamasi teorija iš [2].

4.1 RAM apibrėžimas

Tarkime, rizikos matas yra $\rho(X)$, o portfelis susideda iš n komponentų

$$X = \sum_{i=1}^n X_i.$$

Tuomet RAM metodo tikslas yra rasti įnašus $c_1, \dots, c_n$, tokius kad

$$\sum_{i=1}^n c_i = \rho(X),$$

ir kiekvienas c_i atitiktų aksiomatiškai pagrįstą rizikos paskirstymą.

Taip pat Chen (2025) teigia, jog rizikos atribucijos metodas $c_i = RAM_i(X)$ turi tenkinti šias savybes:

1. Efektyvumas:

$$\sum_{i=1}^n RAM_i(X) = \rho(X).$$

Atribucija turi pilnai išskaidyti riziką.

2. Simetrija:

Jeigu du komponentai X_i ir X_j sukuria identišką įtaką kiekvienoje scenarijų aibėje, turi galioti

$$RAM_i(X) = RAM_j(X).$$

3. Nenaudingo žaidėjo aksioma:

Jeigu komponentas X_i nekeičia jokios kombinacijos rizikos

$$\rho(X_S + X_i) = \rho(X_S), \quad S \subseteq \{1, \dots, n\} \setminus \{i\},$$

kur

$$X_S = \sum_{j \in S} X_j,$$

tuomet

$$RAM_i(X) = 0.$$

4. Monotoniškumas:

Jeigu komponentai X_i ir Y_i tenkina

$$X_i(\omega) \geq Y_i(\omega) \quad \text{beveik visur } \omega,$$

tuomet

$$RAM_i(X) \geq RAM_i(Y).$$

5. Rizikai koherentiškas adityvumas (angl. *Risk-coherent additivity*):

Jeigu rizikos matas yra adityvus

$$\rho(X) = \rho_1(X) + \rho_2(X),$$

tuomet RAM turi būti adityvus

$$RAM_i = RAM_i^{(1)} + RAM_i^{(2)}.$$

Šios aukščiau paminėtos aksiomos sudaro koherentinių rizikos atribucijos metodų klasę. Pavyzdžiui, šios aksiomos natūraliai tenkinamos situacijose, kai portfelio nuostolis gali būti išskaidytas į kelias tarpusavyje nepriklausomas rizikos dalis (pvz.: pagal rizikos šaltinius), o bendras rizikos matas yra koherentinis, o nepriklausomiems rizikos šaltiniams – adityvus.

4.2 RAM ir Shapley vertės ryšys

Shapley vertė suteikia aksiomatiškai pagrįstą sprendinį kooperatyvinių lošimų vertės paskirstymo problemai. RAM metodas remiasi ta pačia logika, tačiau pritaiko ją rizikos matų aplinkoje, kur nėra natūralaus kombinacijų apibrėžimo. Todėl RAM gali būti laikomas Shapley vertės generalizacija rizikos matams, o Shapley – RAM specialiuoju atveju, kai rizika išreiškiama per kombinacijų vertes.

Jeigu rizikos matas ρ būtų aprašomas kombinacijų verte

$$v(S) = \rho \left(\sum_{i \in S} X_i \right),$$

tuomet rizikos paskirstymas pagal Shapley vertę būtų

$$c_i = \phi_i(v),$$

kur ϕ_i – Shapley vertė. Tačiau ši formulė nėra tinkama visiems rizikos matams, kadangi ne visi ρ yra adityvūs ar turi natūralią kombinacijos interpretaciją, taip pat rizikos matas ρ gali būti tolydus, netiesinis, netraktuojamas kaip $v(S)$. Tad Chen (2025) parodė, jog RAM aksiomos yra analogiškos Shapley aksiomoms, tačiau jų interpretacija adaptuota rizikos matams.

RAM naudą autorius argumentuoja sakydamas, jog Shapley vertė yra labai naudinga, bet per siaura rizikos matų pasaulyje. Taip pat BAM metodai parodė, jog Shapley idėja turi būti taikoma funkcijoms. Tad RAM sujungia koherentinio rizikos mato teoriją, Shapley aksiomas ir BAM funkcijų atribucijos logiką.

4.3 RAM metodo taikymo pavyzdžiai

RAM metodas gali būti taikomas įvairioms rizikos funkcijoms ir portfelių struktūroms, nepriklausomai nuo to, ar rizika yra tiesinė, konveksiška ar įvertinta simuliacijos būdu. Toliau pateikiami keli iliustraciniai pavyzdžiai, kaip RAM atribucija priskiria riziką portfelio komponentams.

4.3.1 RAM taikymas CVaR rizikos matui

Tarkime, portfelio nuostolį sudaro trys komponentai

$$X = X_1 + X_2 + X_3,$$

o rizikos matas yra $\rho(X) = CVaR_\alpha(X)$.

Kadangi CVaR yra koherentinis rizikos matas, teigiamai homogeniškas ir tinkamomis sąlygomis diferencijuojamas rizikos matas [12], jam galima taikyti 3.1.2 poskyryje aprašytą Euler rizikos paskirstymo principą. Tokiu atveju kiekvienam portfelio komponentui priskiriami įnašai RAM_i , kurie tenkina

$$RAM_1 + RAM_2 + RAM_3 = CVaR_\alpha(X).$$

Šie įnašai nebūtinai sutampa su dispersija ar vidutiniu nuostoliu – jie atspindi kraštutinių nuostolių indėlį CVaR apibrėžiamoje uodegos srityje.

4.3.2 RAM taikymas kredito portfeliui

Tarkime, turime kredito portfelį su sektoriais: $X_{prekyba}$, $X_{statybos}$, X_{gamyba} , $X_{buhalterija}$ ir rizikos matas yra $\rho(X) = CVaR_{0.99}(X)$.

RAM gali parodyti, kuris sektorius labiausiai prisideda prie kraštutinio nuostolio, turi stipriausią sąveiką su kitais sektoriais, generuoja daugiau ekstremalių praradimų scenarijų.

Pavyzdžiui, galime interpretuoti, jog $RAM_{statybos}$ gali būti aukštas dėl didelio įsipareigojimų neįvykdymo (angl. *default*) kiekio; $RAM_{buhalterija}$ gali būti žemas, kadangi jei nuostoliai yra dažni – jie nėra ekstremalūs; $RAM_{prekyba}$ ir RAM_{gamyba} gali dalintis sąveikos efektu, jei jų rizika stipriai koreliuoja.

5 Empirinė analizė

5.1 Euler rizikos paskirstymo principas CVaR atveju

Šiame poskyryje pateikiama skaitinė iliustracija, kurios tikslas – parodyti, kaip teorinėje dalyje aptartas Euler rizikos paskirstymo principas realizuojasi konkrečiam koherentiniam rizikos matui. Pavyzdžio paskirtis yra empiriškai iliustruoti, kaip rizikos atribucijos metodas (RAM), apibrėžtas per rizikos mato išvestines, virsta konkrečiais skaičiuojamais dydžiais.

Tarkime, kad portfelio nuostolis išreiškiamas kaip trijų komponentų suma

$$X = X_1 + X_2 + X_3,$$

kur kiekvienas X_i atitinka atskirą portfelio dalį (pvz.: rizikos šaltinį arba segmentą). Portfelio elgsena aprašoma baigtiniu, vienodai tikėtinų scenarijų rinkiniu, pateiktu lentelėje:

Scenarijus	X_1	X_2	X_3	X
1	1	0	1	2
2	2	1	1	4
3	3	1	2	6
4	6	3	3	12
5	8	4	4	16

Toliau pasirenkamas patikimumo lygmuo $\alpha = 0.8$. Tai reiškia, kad CVaR apskaičiuojamas kaip nuostolių vidurkis uodegoje, t.y. tarp blogiausių $(1-\alpha) \cdot 100\%$ atvejų.

Iš lentelės matome, jog bendrieji nuostoliai yra $X \in \{2, 4, 6, 12, 16\}$. Tuomet, kadangi scenarijai vienodai tikėtini, turime $\mathbb{P}(X \leq 2) = 0.2$, $\mathbb{P}(X \leq 4) = 0.4$, $\mathbb{P}(X \leq 6) = 0.6$, $\mathbb{P}(X \leq 12) = 0.8$ ir $\mathbb{P}(X \leq 16) = 1$, pagal ankstesnį apibrėžimą

$$VaR_\alpha(X) = \inf\{x | \mathbb{P}(X \leq x) \geq \alpha\}.$$

Todėl mažiausia reikšmė, prie kurios sukaupia tikimybė pasiekia bent 0.8, yra 12. Taigi, $VaR_{0.8}(X) = 12$.

Toliau skaičiuojama sąlyginė uodegos rizika (CVaR), apibrėžiama kaip nuostolio vidurkis uodegoje

$$CVaR_{0.8}(X) = \mathbb{E}[X|X \geq VaR_{0.8}(X)].$$

Kadangi $VaR_{0.8}(X) = 12$, uodegą sudaro tie scenarijai, kuriuose $X \geq 12$, t.y. 4-tasis ir 5-tasis scenarijai, kuriuose $X \in \{12, 16\}$. Kadangi visi scenarijai laikomi vienodai tikėtinais, turime

$$CVaR_{0.8}(X) = \mathbb{E}[X|X \geq 12] = \frac{\mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_{\{X \geq 12\}}]}{\mathbb{P}(X \geq 12)} = \frac{12 \cdot \frac{1}{5} + 16 \cdot \frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = 14.$$

Tuomet apskaičiuojami komponentiniai rizikos įnašai (RAM). Remiantis Euler rizikos paskirstymo principu, portfelio nuostolis užrašomas kaip

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^3 \omega_i X_i,$$

kur ω_i žymi i -tojo komponento svorį, o X_i – atitinkamą nuostolį. Tokiu atveju rizikos matas $\rho(X)$ tampa svorių $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ funkcija. Jei rizikos matas yra teigiamai homogeniškas ir tinkamomis sąlygomis diferencijuojamas, galima nagrinėti kaip bendra portfelio rizika kinta nedideliais komponento svorio pokyčiais. Šis ribinis poveikis aprašomas daline išvestine $\partial \rho(X) \backslash \partial \omega_i$.

Atsižvelgiant į komponento mastą portfelyje, i -tojo komponento rizikos įnašas apibrėžiamas kaip svorio ir ribinio poveikio sandauga

$$RAM_i = \omega_i \frac{\partial \rho(X)}{\partial \omega_i}.$$

Pagal Euler teoremą homogenišioms funkcijoms šie komponentiniai įnašai tiksliai susideda į bendrą portfelio riziką

$$\rho(X) = \sum_{i=1}^3 \omega_i \frac{\partial \rho(X)}{\partial \omega_i} = \sum_{i=1}^3 RAM_i.$$

CVaR rizikos mato atveju Euler rizikos paskirstymo formulė turi išreikštinį pavidalą

$$\frac{\partial CVaR_{\alpha}(X)}{\partial \omega_i} = \mathbb{E}[X_i|X \geq VaR_{\alpha}(X)].$$

Pastaba. Šiame pavyzdyje portfelio nuostolis apibrėžiamas kaip komponentų suma $X = X_1 + X_2 + X_3$, kur kiekvienas komponentas į portfelį įeina be papildomo skalavimo. Todėl laikoma, jog $\omega_i = 1$ visiems i .

Tad komponentiniai rizikos įnašai apskaičiuojami kaip

$$RAM_i = \mathbb{E}[X_i | X \geq VaR_{0.8}(X)], \quad i = 1, 2, 3.$$

Ši išraiška aiškiai parodo, kaip abstrakti Euler rizikos paskirstymo formulėje atsirandanti išvestinė virsta tiesiogiai skaičiuojamu dydžiu konkrečiam rizikos matui. Nagrinėjamame pavyzdyje uodegą sudaro 4-tasis ir 5-tasis scenarijai, todėl

$$RAM_1 = \frac{6+8}{2} = 7, \quad RAM_2 = \frac{3+4}{2} = 3.5, \quad RAM_3 = \frac{3+4}{2} = 3.5.$$

Sudedant komponentinius įnašus

$$RAM_1 + RAM_2 + RAM_3 = 7 + 3.5 + 3.5 = 14.$$

Taigi

$$RAM_1 + RAM_2 + RAM_3 = CVaR_{0.8}(X).$$

Gauta lygybė iliustruoja, jog CVaR rizikos mato atveju Euler rizikos paskirstymas yra konkretus atribucijos metodas, priklausantis RAM klasei. Apibrėžus komponentinius rizikos įnašus per rizikos mato išvesties, RAM leidžia nuosekliai išskaidyti bendrą portfelio uodegos riziką į atskirų komponentų indėlius, kurie gali būti tiesiogiai apskaičiuoti ir interpretuoti kaip vidutiniai komponentų nuostoliai blogiausiais portfelio realizacijų atvejais.

Toliau analogiška skaičiavimo schema bus taikoma realių duomenų atvejui, siekiant įvertinti, kurie verslo paskolų portfelio segmentai labiausiai prisideda prie uodegos rizikos.

5.2 Rizikos paskirstymas verslo paskolų portfelyje

Šiame poskyryje taikomas rizikos paskirstymo principas verslo paskolų portfelio kontekste. Analizės tikslas – išskaidyti bendrą portfelio riziką į interpretuojamus struktūrinius komponentus ir įvertinti, kurie paskolų segmentai labiausiai prisideda prie bendros rizikos.

Analizė orientuota ne į individualių paskolų rizikos prognozavimą, bet į portfelio rizikos išskaidymą. Rizikos paskirstymas atliekamas paskolos lygmeniu, naudojant skolininko charakteristikas, paskolos struktūrą ir kitus kintamuosius kaip portfelio komponentus.

5.2.1 Duomenys

Empirinėje analizėje yra naudojami viešai prieinami JAV SBA (angl. *U.S. Small Business Administration*) [14] verslo paskolų portfelio duomenys. Kiekvienas stebėjimas atitinka vieną paskolos sutartį ir apima informaciją apie paskolos dydį, terminą, palūkanų normą, paskolos struktūrą, skolininko charakteristikas bei paskolos patvirtinimo procesą. Duomenys yra pateikti .csv formatu bei juos sudaro apie 330 tūkst. eilučių.

Analizėje naudojamas "LoanStatus" kintamasis, kuris apibrėžia galutinę paskolos baigtį. Siekiant užtikrinti vienareikšmę interpretaciją, į imtį įtraukti tik stebėjimai su analizei prasmingomis baigtimis: "PIF" – paskola gražinta pilnai ir "CHGOFF" – paskola nutrūko. Kiti su analize nesusiję statusai pašalinti. Taip pat, pašalinti ir duomenys nesusiję su rizikos paskirstymu, kaip pvz.: kliento adresas, pašto kodas, garantijos tipas, darbuotojų skaičius ir kt, dėl duomenų trūkumo, neaktualumo ar papildomai keliamo triukšmo duomenų analizei. Kai kurie duomenys buvo agreguojami, pvz.: sektorius, kadangi šie duomenys yra svarbūs, tačiau turi per daug skirtingų reikšmių. Agregavimu buvo siekiama sumažinti dimensiją ir pagerinti interpretaciją. Sektoriai buvo suskirstyti į mažesnes prasmingas kategorijas remiantis oficialia NAICS (angl. *North American Industry Classification System*) pateikta informacija apie Amerikos pramonės klasifikavimo sistemą [9].

Po duomenų valymo ir kintamųjų konstrukcijos galutinė analizės imtis sudaro apie 41 tūkst. verslo paskolų. Iš jų 3223 stebėjimai atitinka nutrūkusių paskolų statusą. Toks imties dydis ir negražinimų skaičius užtikrina pakankamą statistiką tiek portfelio rizikos paskirstymo, tiek vėlesnių empirinės analizės etapų interpretacijai.

Tyrime rizikos atribucija atliekama naudojant ribotą skaičių struktūrinių kintamųjų, kurie interpretuojami kaip portfelio komponentai. Konkrečiai, rizikos paskirstymo analizei naudojami penki komponentai: ekonominės veiklos sektorius, paskolos patvirtinimo procesas, skolininko verslo amžius, paskolos struktūra (terminuota paskola ar atsinaujinanti kredito linija) bei užtikrinimo (angl. *collateral*) indikatorius. Šie kintamieji parinkti siekiant parodyti pagrindinius kredito rizikos kanalus ir užtikrinti interpretuojamą portfelio rizikos išskaidymą.

5.2.2 Rizikos paskirstymo metodika

Portfelio rizika vertinama taikant sąlyginės uodegos rizikos (CVaR) matą. Tegu L žymi paskolos nuostolį, apibrėžtą kaip nurašytą sumą sutarties nutrūkimo atveju. Kadangi didžioji dalis stebėjimų turi nulinius nuostolius, t.y. paskola nenutrūko, VaR riba skaičiuojama remiantis teigiamais nuostoliais, sąlygine $L > 0$ imtimi.

Pasirenkamas patikimumo lygmuo $\alpha = 0.9$, kadangi stebimi ekstremalūs nuostoliai. CVaR apibrėžiamas kaip

$$CVaR_{\alpha}(L) = \mathbb{E}[L | L \geq VaR_{\alpha}(L)],$$

kur $VaR_{\alpha}(L)$ yra α -kvantilis teigiamų nuostolių pasiskirstyme. Tokiu būdu CVaR atspindi vidutinį nuostolį blogiausiuose 10% įsipareigojimų neįvykdymo atvejuose. Pagal šį kriterijų CVaR uodegą sudaro 318 stebėjimų, o apskaičiuotos reikšmės yra $VaR_{0.9}(L) \approx 274$ tūkst. JAV dolerių ir $CVaR_{0.9}(L) \approx 607$ tūkst. JAV dolerių.

Rizikos paskirstymas atliekamas taikant segmentinę CVaR dekompoziciją.

Tegul g žymi konkretų portfelio segmentą, apibrėžtą pagal pasirinktą kintamąjį. Segmento g indėlis į bendrą CVaR apibrėžiamas kaip

$$RC(g) = \mathbb{E}[L \cdot \mathbb{1}_g | L \geq VaR_{\alpha}(L)],$$

kur $\mathbb{1}_g$ yra segmento indikatorius. Šis dydis skaičiuojamas kaip segmento nuostolių suma CVaR uodegoje, padalinta iš uodegos stebėjimų skaičiaus. Tokia konstrukcija užtikrina pilną paskirstymą

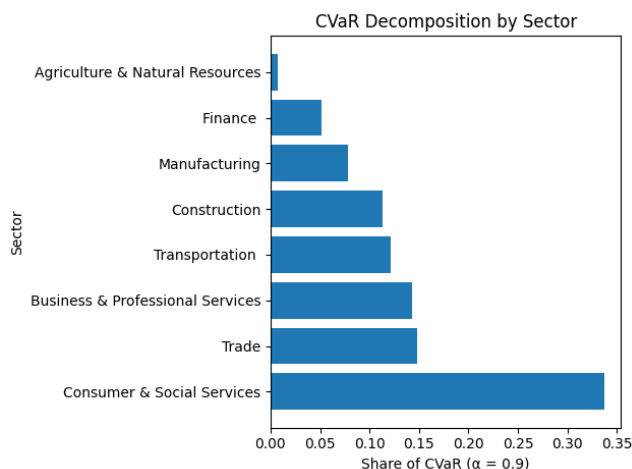
$$\begin{aligned}\sum_g RC(g) &= \mathbb{E}\left[\sum_g L \cdot \mathbb{1}_g \mid L \geq VaR_\alpha(L)\right] \\ &= \mathbb{E}[L \mid L \geq VaR_\alpha(L)] \\ &= CVaR_\alpha(L).\end{aligned}$$

Skirtingai nei 5.1 poskyryje, čia taikomas ne analizinis Euler paskirstymas, o ex post CVaR dekompozicija, paremta sąlyginiu nuostolių pasiskirstymu uodegoje. Nors Euler rizikos paskirstymo principas yra vienas plačiausiai naudojamų ir teoriškai pagrįstų metodų koherentinių rizikos matų atveju, jo taikymas realių kreditų portfelių empirinėje analizėje susiduria su reikšmingais praktiniais apribojimais. Euler principas remiasi prielaida, jog rizikos matas yra diferencijuojamas portfelio svorių atžvilgiu ir kad portfelio struktūra gali būti prasmingai aprašyta per nuolatinius svorius. Tačiau nagrinėjamame verslo paskolų portfelyje portfelio komponentai nėra natūraliai aprašomi per skaliarinius svorius, o greičiau per diskrečius segmentus ar kategorinius kintamuosius. Ex post CVaR paskirstymas remiasi realizuotų nuostolių sąlyginiu pasiskirstymu uodegoje ir leidžia tiesiogiai įvertinti, kurie portfelio segmentai faktiškai generuoja kraštutinius nuostolius. Šis metodas nereikalauja diferencijuojamumo ar svorių parametrizacijos ir yra natūraliai pritaikomas diskretiškiems, heterogeniškiems portfeliams. Tokiu būdu rizikos paskirstymas tampa tiesiogiai interpretuojamas kaip segmentų vidutinis indėlis blogiausiuose portfelio realizacijų scenarijuose. Svarbu pabrėžti, kad ex post metodas šiame darbe nėra traktuojamas kaip Euler principo pakaitalas, o veikiau kaip jo empirinė alternatyva, leidžianti išlaikyti rizikos paskirstymo aksiomatiką ir CVaR koherentiškumą realių duomenų kontekste. Tai leidžia suderinti teorinį rizikos paskirstymo pagrindą su praktiniu portfelio rizikos koncentracijos vertinimu.

Segmentinė CVaR dekompozicija atliekama pagal anksčiau minėtus rizikos paskirstymo (RAM) komponentus: ekonominės veiklos sektorius, paskolos patvirtinimo procesas, skolininko verslo amžius, paskolos struktūra bei užtikrinimo indikatorius. Papildomai naudojami kontroliniai kintamieji, kurie nėra įtraukiami į CVaR paskirstymą, tačiau naudojami uodegos profilio analizei ir rezultatų interpretacijai.

5.2.3 Segmentinės CVaR dekompozicijos pagal RAM rezultatai

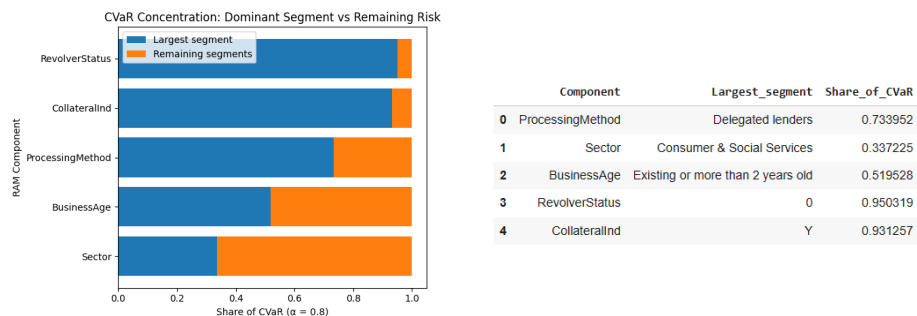
Ekonominių sektorių pjūvyje CVaR uodegos rizika pasiskirsto netolygiai, tačiau nėra visiškai dominuojama vieno segmento. Didžiausią indėlį sudaro vartotojų ir socialinių paslaugų sektorius (apie 34%), tačiau likusi rizika panašiau pasiskirsto tarp sektorių. Čia būtų galima interpretuoti, jog didžiausi nuostoliai kyla iš sektoriaus veiklos cikliškumo ir jautrumo makroekonominiams padariniams. Šio tipo įmonės dažnai pasižymi mažesniu kapitalo rezervų lygiu, ribotomis užtikrinimo galimybėmis bei didesne priklausomybe nuo vartotojų paklausos. Taip pat šis sektorius dažnai atitinka SVV (smulkaus ir vidutinio verslo) apibrėžimą, tad ekstremalių nuostolių scenarijai ir atsispindi aukštoje CVaR uodegos dalyje net ir tada, kai vidutinė rizika nėra išskirtinai didelė. Viso galime matyti, jog penki didžiausi sektoriai kartu sudaro apie 86% visos CVaR (1 pav.).



1 pav.: CVaR dekompozicija pagal ekonominius sektorius ($\alpha = 0.9$)

Analizuojant didžiausio segmento CVaR dalį, išryškėja skirtumai tarp rizikos paskirstymo komponentų. Šiems požymiams – *RevolverStatus* ir *CollateralInd* daugiau nei 90% visos CVaR tenka vienam segmentui, kas rodo labai didelę uodegos rizikos koncentraciją, kai tuo tarpu *BusinessAge* tenka apie 52% dominuojančiajam segmentui. Tačiau, reikia turėti omenyje, jog *RevolverStatus* ir *CollateralInd* yra komponentai su dviem lygiais, tad rizika pasiskirsto tik iš jų. Tokius rezultatus nesunku interpretuoti, kadangi pvz.: *CollateralInd* indikuoja, jog verslo paskolos su nekilnojamojo turto įkeitimu nutrukimo atveju

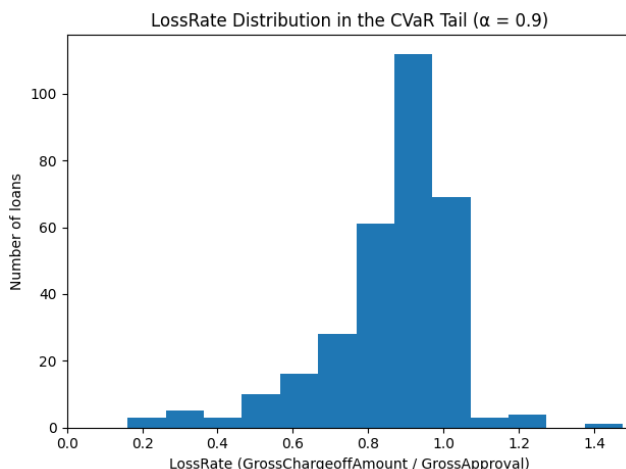
sukelia didesnius nuostolius, kadangi ir pati paskolos suma įprastai būna didesnė. Taip pat svarbu paminėti, jog šioje vietoje negalime teigti, kad paskolos be nekilnojamojo turto įkeitimo yra mažiau rizikingos, kadangi nagrinėjama yra kraštutinių nuostolių rizika. Siekiant tiksliau interpretuoti koncentracijos rezultatus, kiekvienam rizikos paskirstymo komponentui identifikuotas segmentas, generuojantis didžiausią CVaR dalį (2 pav.).



2 pav.: CVaR koncentracija ir dominuojantys segmentai

Santykinio nuostolio rodiklio (LossRate) pasiskirstymas CVaR uodegoje rodo, kad LossRate mediana siekia apie 0.9, o didelė dalis stebėjimų yra arti visiško paskolos praradimo. Toks LossRate pasiskirstymas CVaR uodegoje rodo, kad portfelio uodegos riziką lemia ne vidutiniai daliniai nuostoliai, o scenarijai, kuriuose realizuojasi beveik visiškai paskolos praradimas. Tai reiškia, kad CVaR matas šiame portfelyje yra formuojamas ne palaipsniui didėjančiais nuostoliais, bet diskrečiais ir itin nepalankiais įsipareigojimų neįvykdymo atvejais. Šis rezultatas taip pat paaiškina, kodėl CVaR pagrindu atliekama rizikos paskirstymo analizė gali ženkliai skirtis nuo analizės, paremtos vidutiniais nuostoliais ar įsipareigojimų neįvykdymo dažniu. Net jei tam tikri portfelio segmentai pasižymi vidutine ar net žema įsipareigojimų neįvykdymo tikimybe, jų indėlis į uodegos riziką gali būti didelis, jei ekstremaliais atvejais nuostoliai yra beveik visiški (3 pav.).

Pastaba. Kai kuriais atvejais pastebime, jog praradimo suma viršija išduotą sumą, tačiau tai galima lengvai paaiškinti – prie nutrūkusios paskolos sumos yra sumuojami delspinigiai, teisinės išlaidos bei kiti su paskolos nutrūkimu susiję kaštai.



3 pav.: LossRate pasiskirstymas CVaR uodegoje ($\alpha = 0.9$)

Aptarus rezultatus galima išrinkti svarbiausius pastebėjimus. Pirmasis, jog sektorių pjūvis diversifikuoja uodegos riziką ir nerodo ekstremalios koncentracijos viename segmente. Tai reiškia, jog sektorius yra informatyvus, bet ne dominuojantis rizikos paskirstymo (RAM) komponentas. Antrasis, dominuojantis segmentas nebūtinai reiškia individualią riziką, bet atspindi nuostolių intensyvumą ir segmento masto sąveiką uodegoje. Ir trečiasis, jog CVaR uodegos riziką lemia ne „šiek tiek blogesnės“ paskolos, o beveik visiško nuostolio scenarijai.

Atlikta segmentinė CVaR dekompozicija pagal RAM parodė, kad portfelio uodegos rizika nėra tolygiai paskirstyta tarp skirtingų segmentų, o jos koncentracija reikšmingai priklauso nuo pasirinkto RAM komponento. Todėl galima teigti, jog CVaR kartu su rizikos paskirstymo metodais yra tinkamas įrankis uodegos rizikos koncentracijai identifikuoti verslo paskolų portfelyje.

6 Išvados

Taigi, šiame darbe buvo išnagrinėti rizikos paskirstymo metodai ir jų taikymas verslo paskolų portfelio analizei, remiantis koherentinių rizikos matų teorija. Teorinėje dalyje parodyta, kad nors bendras rizikos matas leidžia įvertinti portfelio rizikos lygį, vien jo nepakanka gilesnei rizikos struktūros analizei. Turėti vieną bendrą rizikos matą $\rho(X)$ nepakanka, jei norime suprasti, kaip portfelyje riziką generuoja atskiri veiksniai, todėl rizikos paskirstymo metodai tampa būtini tiek teoriniame, tiek praktiniame rizikos valdymo kontekste.

Literatūros analizė parodė, kad nuoseklus rizikos paskirstymas yra galimas tik tuomet, kai naudojamas koherentinis rizikos matas. CVaR šiame darbe pasirinktas kaip tinkamas uodegos rizikos matas, kadangi jis leidžia vertinti ne tik nuostolių tikimybę, bet ir jų intensyvumą kraštutiniais atvejais. Skaitinis pavyzdys iliustravo, kad CVaR atveju Euler rizikos paskirstymo principas suteikia aiškia ir interpretuojamą bendros rizikos dekompoziciją į atskirų komponentų indėlius.

Empirinėje dalyje rizikos paskirstymo metodika buvo pritaikyta realiams verslo paskolų portfelio duomenims. Atsižvelgiant į duomenų struktūrą, nulinių nuostolių dominavimą ir portfelio komponentų aprašymą per kategorinius kintamuosius, buvo pasirinkta segmentinė ex post CVaR dekompozicija. Šis metodas leido išvengti papildomų modelio prielaidų ir tiesiogiai įvertinti, kurie portfelio segmentai faktiškai prisideda prie kraštutinių nuostolių formavimosi. Gauti rezultatai parodė, kad portfelio uodegos rizika nėra tolygiai paskirstyta tarp skirtingų segmentų ir pasižymi ryškia koncentracija tam tikruose portfelio pjūviuose. Ekonominių sektorių analizė atskleidė didžiausią sektoriaus indėlį į CVaR uodegą, tačiau bendra sektorių rizika išliko pakankamai diversifikuota. Tuo pačiu nustatyta, kad kai kuriems rizikos paskirstymo komponentams būdinga itin didelė uodegos rizikos koncentracija, kurią lemia ne vien įsipareigojimų neįvykdymo dažnis, bet ir nuostolių dydis ekstremaliais atvejais.

Papildoma CVaR uodegos profilio analizė parodė, kad portfelio kraštutinę riziką lemia ne palaipsniui didėjantys daliniai nuostoliai, o scenarijai, kuriuose realizuojasi beveik visiškas paskolos praradimas. Tai paaiškina, kodėl rizikos paskirstymo rezultatai, paremti CVaR, gali reikšmingai skirtis nuo analizės, paremtos vidutiniais nuostoliais ar įsipareigojimų nevykdymo tikimybe. Tokie rezultatai pabrėžia rizikos paskirstymo metodų naudą identifikuojant uodegos rizikos šaltinius, kurie nėra matomi vertinant tik agreguotus rizikos rodiklius.

Apibendrinant galima teigti, kad CVaR kartu su rizikos paskirstymo metodais sudaro informatyvų ir praktiškai pritaikomą įrankį verslo paskolų portfelio uodegos rizikos analizei. Darbo rezultatai parodo, jog RAM metodai leidžia ne tik įvertinti bendrą portfelio riziką, bet ir geriau suprasti jos kilmę bei koncentraciją, o tai gali būti naudinga priimant sprendimus dėl rizikos valdymo, kapitalo paskirstymo ir portfelio struktūros optimizavimo.

7 Priedai

7.1 Python kodas

```
import numpy as np
import pandas as pd

df = pd.read_excel("data.xlsx")
df.head()

# Default indikatorius
df["Default"] = (df["GrossChargeoffAmount"] > 0).astype(int)
df["Default"].value_counts()

# Kiek nuostoli sudaro didiausi defaultai
loss_positive = df.loc[df["Default"] == 1, "GrossChargeoffAmount"]

quantiles = loss_positive.quantile([0.5, 0.75, 0.9, 0.95, 0.99])
quantiles

df.groupby("LoanStatus").agg(
    loans=("GrossApproval", "count"),
    default_rate=("Default", "mean"),
    avg_loss=("GrossChargeoffAmount", "mean"),
    total_loss=("GrossChargeoffAmount", "sum")
).sort_values("total_loss", ascending=False)

# RAM komponentai
ram_components = [
    "ProcessingMethod",
    "Sector",
    "BusinessAge",
    "RevolverStatus",
    "CollateralInd"
```

```

]

# Kontroliniai kintamieji
control_vars = [
    "GrossApproval",
    "InterestRate",
    "TermMonths",
    "ApprovalFY"
]

X_ram = df[ram_components].copy()
X_ctrl = df[control_vars].copy()
y = df["GrossChargeoffAmount"].copy()

X_ram.head(), X_ctrl.head(), y.describe()

alpha = 0.9
loss_pos = df.loc[df["GrossChargeoffAmount"] > 0, "
    GrossChargeoffAmount"]

VaR = loss_pos.quantile(alpha)
tail_mask = df["GrossChargeoffAmount"] >= VaR

CVaR = df.loc[tail_mask, "GrossChargeoffAmount"].mean()
VaR, CVaR, tail_mask.mean(), tail_mask.sum()

tail = df.loc[tail_mask]
tail["GrossChargeoffAmount"].min(), VaR

def cvar_decomp_by_levels(df, comp_col, loss_col="
    GrossChargeoffAmount", alpha=0.9):
    loss = df[loss_col].astype(float)

    # VaR skai iuojam tik i teigiam nuostoli (default
        atvej )
    loss_pos = loss[loss > 0]
    VaR = loss_pos.quantile(alpha)

```

```

# uodega: visi raai , kuri nuostolis >= VaR
tail = df.loc[loss >= VaR, [comp_col, loss_col]].copy()
n_tail = len(tail)
CVaR = tail[loss_col].mean()

# Ind lis: vidutinis nuostolis uodegoje, priskirtas
segmentui
tbl = (tail.groupby(comp_col)[loss_col].sum() / n_tail).
to_frame("CVaR_contribution")
tbl["Share_of_CVaR"] = tbl["CVaR_contribution"] / CVaR
tbl = tbl.sort_values("CVaR_contribution", ascending=
False)

return VaR, CVaR, n_tail, tbl

ram_components = [
    "ProcessingMethod",
    "Sector",
    "BusinessAge",
    "RevolverStatus",
    "CollateralInd"
]

alpha = 0.9

results = {}
for comp in ram_components:
    VaR_c, CVaR_c, n_tail, tbl = cvar_decomp_by_levels(df,
        comp, alpha=alpha)
    results[comp] = {"VaR": VaR_c, "CVaR": CVaR_c, "n_tail":
        n_tail, "table": tbl}

results["Sector"]["table"].head(10)

results["Sector"]["VaR"], results["Sector"]["CVaR"], results
["Sector"]["n_tail"]
results["Sector"]["table"]["CVaR_contribution"].sum()

```

```

summary_rows = []
for comp in ram_components:
    tbl = results[comp]["table"]
    top1 = tbl["Share_of_CVaR"].iloc[0]
    top3 = tbl["Share_of_CVaR"].head(3).sum()
    summary_rows.append([comp, results[comp]["CVaR"], top1,
                        top3, len(tbl)])

cvar_comp_summary = pd.DataFrame(
    summary_rows,
    columns=["Component", "CVaR", "Top1_share", "Top3_share",
            "Num_levels"]
).sort_values("Top3_share", ascending=False)

cvar_comp_summary

import matplotlib.pyplot as plt

sector_tbl = results["Sector"]["table"]

plt.figure()
plt.barh(
    sector_tbl.index,
    sector_tbl["Share_of_CVaR"]
)

plt.xlabel("Share of CVaR (    = 0.9)")
plt.ylabel("Sector")
plt.title("CVaR Decomposition by Sector")

plt.tight_layout()
plt.show()

import matplotlib.pyplot as plt

# Rikiuojame pagal dominuojanį segmentą
plot_data = cvar_comp_summary.sort_values("Top1_share")

```

```

plt.figure()
plt.barh(
    plot_data["Component"],
    plot_data["Top1_share"],
    label="Largest segment"
)

plt.barh(
    plot_data["Component"],
    1 - plot_data["Top1_share"],
    left=plot_data["Top1_share"],
    label="Remaining segments"
)

plt.xlabel("Share of CVaR (    = 0.9)")
plt.ylabel("RAM Component")
plt.title("CVaR Concentration: Dominant Segment vs Remaining
    Risk")
plt.legend()

plt.tight_layout()
plt.show()

largest_segments = []

for comp in ram_components:
    tbl = results[comp]["table"]
    largest_segments.append([comp, tbl.index[0], tbl["
        Share_of_CVaR"].iloc[0]])

largest_segments_df = pd.DataFrame(
    largest_segments,
    columns=["Component", "Largest_segment", "Share_of_CVaR"
    ]
)

largest_segments_df

```

```

ctrl = ["GrossApproval", "InterestRate", "TermMonths", "
        ApprovalFY"]

tmp = df.loc[:, ctrl].copy()
tmp["tail"] = tail_mask

summary = tmp.groupby("tail")[ctrl].agg(["count", "mean", "
        median"])
summary

tail_stats = tmp[tmp["tail"]][ctrl].describe().T[["mean", "
        50%"]].rename(columns={"50%": "median"})
base_stats = tmp[~tmp["tail"]][ctrl].describe().T[["mean", "
        50%"]].rename(columns={"50%": "median"})

compare = tail_stats.join(base_stats, lsuffix="_tail",
        rsuffix="_non_tail")
compare["mean_ratio"] = compare["mean_tail"] / compare["
        mean_non_tail"]
compare["median_ratio"] = compare["median_tail"] / compare["
        median_non_tail"]
compare

df["LossRate"] = df["GrossChargeoffAmount"] / df["
        GrossApproval"]
df.groupby(tail_mask)["LossRate"].agg(["count", "mean", "
        median", "quantile"])

df.loc[tail_mask, "LossRate"].quantile
        ([0.25, 0.5, 0.75, 0.9, 0.95])

plt.figure()
plt.hist(df.loc[tail_mask, "LossRate"], bins=30)

plt.xlim(0, 1.5)

```

```
plt.xlabel("LossRate (GrossChargeoffAmount / GrossApproval)"
           )
plt.ylabel("Number of loans")
plt.title("LossRate Distribution in the CVaR Tail (    = 0.9)
          ")

plt.tight_layout()
plt.show()
```

Literatūra

- [1] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M., and Heath, D. Coherent Measures of Risk, 1999.
- [2] Chen D. Explaining risks: axiomatic risk attribution for financial models. Quantitative Finance, 2025.
- [3] Jorion, P. Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk (3rd ed.). McGraw–Hill, 2007.
- [4] Litterman, R. Hot spots and hedges. The Journal of Portfolio Management, 1996.
- [5] Lundberg, S. M. and Lee, S.-I. A unified approach to interpreting model predictions. Advances in Neural Information Processing Systems, 2017.
- [6] Markowitz H. Portfolio selection. The Journal of Finance, 1952.
- [7] McNeil A. J., Frey R., Embrechts P. Quantitative Risk Management, 2005.
- [8] Meucci, A. Risk and Asset Allocation, 2005.
- [9] North American Industry Classification System. Prieiga per: <https://www.naics.com/search>.
- [10] Rockafellar, R. T. and Uryasev, S. Optimization of Conditional Value-at-Risk, 2000.
- [11] Shapley, L. S. A value for n-person games. In H. W. Kuhn and A. W. Tucker (Eds.), Contributions to the Theory of Games, Volume II, 1953.
- [12] Tasche, D. Capital allocation to business units and sub-portfolios: The Euler principle. In P. J. Brandimarte (Ed.), Handbook of Financial Engineering, 2008.
- [13] Tarashev, N., Borio, C., Tsatsaronis, K. Principles for allocating systemic risk. Journal of Financial Intermediation, 2016.
- [14] U.S. Small Business Administration. Atviri duomenys. Prieiga per: <https://data.sba.gov/>.
- [15] Young, H. P. Monotonic solutions of cooperative games. International Journal of Game Theory, 1985.