



**Matematikos ir
informatikos
fakultetas**

VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MAGISTRO STUDIJŲ PROGRAMA
FINANSŲ IR DRAUDIMO MATEMATIKA

**Rizikos vertinimas taikant sąlyginio
heteroskedastiškumo modelius**

**Risk assessment using conditional
heteroskedasticity models**

Baigiamasis magistro darbas

Atliko: Vaiva Aukštakalnytė

VU el. p.: vaiva.aukstakalnyte@mif.stud.vu.lt

Vadovas: doc. dr. Martynas Manstavičius

Vilnius

2026

Rizikos vertinimas taikant sąlyginio heteroskedastiškumo modelius

Santrauka

Šiame darbe analizuojamas vertės pokyčio rizikos (VaR) ir deficito vidurkio (ES) rizikos matų prognozavimo tikslumas taikant sąlyginio heteroskedastiškumo modelius. Teoriškai nagrinėjami rizikos matai, trys inovacijų skirstiniai – normalusis, Stjudento t ir asimetrišnis Stjudento t bei sąlyginio heteroskedastiškumo modeliai – GARCH ir APARCH. Vertės pokyčio rizikos prognozių tikslumui įvertinti taikomi besąlyginio padengimo, nepriklausomumo ir sąlyginio padengimo testai, o deficito vidurkio – regresijos modeliu pagrįstas ES testas.

Raktiniai žodžiai: rizikos matai, VaR, ES, GARCH, APARCH.

Risk assessment using conditional heteroskedasticity models

Abstract

This thesis analyzes the forecasting accuracy of Value at Risk (VaR) and Expected Shortfall (ES) using conditional heteroscedasticity models. The theoretical analysis includes risk measures, three innovation distributions – normal, Student's t and skewed Student's t – and conditional heteroskedasticity models – GARCH and APARCH. The accuracy of forecasting Value at Risk is assessed using unconditional coverage, independence and conditional coverage tests, while the accuracy of forecasting Expected Shortfall is assessed using a regression-based ES test.

Key words: risk measures, VaR, GARCH, APARCH.

Turinys

1	Įvadas	5
2	Teorinė dalis	6
2.1	Rizikos matai	6
2.1.1	Vertės pokyčio rizika – VaR	7
2.1.2	Deficito vidurkis – ES	9
2.2	Parametrinių modelių taikymas	10
2.2.1	Normalusis skirstinys	10
2.2.2	Stjudento t skirstinys	12
2.2.3	Asimetrinis Stjudento t skirstinys	13
2.3	Sąlyginio heteroskedastiškumo modeliai	15
2.3.1	GARCH modelis	15
2.3.2	APARCH modelis	16
2.3.3	Rizikos matų skaičiavimas	16
2.4	Rizikos matų prognozavimo modelių tikslumo testavimas	17
2.4.1	VaR testavimas	17
2.4.2	ES testavimas	20
3	Praktinė dalis	22
3.1	Duomenų analizė	22
3.2	Modelių taikymas	26
3.3	Vertės pokyčio rizikos testavimas	28
3.4	Deficito vidurkio testavimas	30
3.5	Modelių tinkamumo vertinimas	32
4	Išvados	34

Įvadas

Šiuolaikinėse finansų rinkose, pasižyminčiose vis didėjančiu kintamumu bei greita informacijos sklaida, vis aktualesnis tampa ir patikimas galimų nuostolių įvertinimas. Rizikos valdymo praktikoje finansų rinkos dalyviai neretu atveju naudoja vertės pokyčio rizikos (VaR) ir deficito vidurkio (ES) rizikos matus, kurių tikslumas ir praktinis naudingumas gali priklausyti nuo pasirinkto sąlyginio heteroskedastiškumo modelio ir prielaidos apie sąlyginę grąžos skirstinį.

Darbo tikslas yra įvertinti, kaip sąlyginio heteroskedastiškumo modeliai su skirtingomis skirstinių prielaidomis tiksliai prognozuoja vertės pokyčio rizikos bei deficito vidurkio rizikos matų dydžius. Šiam tikslui pasiekti, bus įgyvendinti tokie uždaviniai, kaip rizikos matų teorijos nagrinėjimas, parametrinių ir sąlyginio heteroskedastiškumo modelių analizavimas. Taip pat rizikos matų prognozavimo modelių tikslumo testavimo tiek teorinis pristatymas, tiek ir praktinis taikymas realiems akcijų duomenims.

Baigiamasis magistro darbas sudarytas iš dviejų pagrindinių dalių – teorinės ir praktinės. Pirmiausia teorinėje dalyje apibrėžiami VaR ir ES rizikos matai, jų savybės, pristatomi normaliojo, Stjudento t ir asimetrinio Stjudento t skirstiniai. Tuomet suformuluojami GARCH ir APARCH sąlyginio heteroskedastiškumo modeliai bei abiejų rizikos matų prognozavimo modelių tikslumo testai. Praktinėje darbo dalyje modeliuojamos dviejų akcijų grąžos, naudojant sąlyginio heteroskedastiškumo modelius su skirtingomis skirstinių prielaidomis. Tuomet visų modelių prognozuotoms vieno laiko momento į priekį rizikos matų reikšmėms atliekami pristatyti tikslumo testai. Galiausiai, abiejų akcijų grąžoms nustatomas tinkamiausias rizikos vertinimo modelis.

Teorinė dalis

2.1 Rizikos matai

Vienas pagrindinių rizikos valdymo tikslų yra kiekybiškai įvertinti portfelio būsimos vertės neapibrėžtumo riziką. Praktikoje toks vertinimas dažniausiai atliekamas modeliuojant portfelio grąžą kaip atsitiktinį dydį ir vėliau pritaikant atitinkamą funkcionalą, kuris vadinamas rizikos matu [12].

Tarkime, kad Ω yra baigtinė ekonominių būsenų aibė ir $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ yra atsitiktinis dydis, žymintis galutinę investuotojo pozicijos grynąją vertę. Tuomet $\mathcal{G} := \{X \mid X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}\}$ yra visų pozicijų aibė ir rizikos matas yra apibrėžiamas taip [3]:

2.1.1 apibrėžimas. *Rizikos matas ρ yra bet kuris atvaizdis iš $\mathcal{G}$ į realiųjų skaičių aibę $\mathbb{R}$.*

Artzner ir kiti bendraautoriai 1999 metais ne tik pateikė klasikinį rizikos mato apibrėžimą, bet ir suformulavo reikalaujamas savybes, kurias turėtų tenkinti tinkamas rizikos matas – toks rizikos matas bus vadinamas suderintuoju (*angl. coherent*) rizikos matu [20].

2.1.2 apibrėžimas ([16]). *Atvaizdis $\rho : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ yra vadinamas suderintuoju rizikos matu, jei tenkinamos tokios aksiomos:*

1. *Monotoniškumas:*

$$X, Y \in \mathcal{G}, \quad X \leq Y \implies \rho(X) \geq \rho(Y),$$

2. *Subadityvumas:*

$$X, Y \in \mathcal{G} \implies \rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y),$$

3. *Teigiamas homogeniškumas:*

$$X \in \mathcal{G}, \quad h \geq 0 \implies \rho(hX) = h \rho(X),$$

4. *Invariantiškumas poslinkio atžvilgiu:*

$$X \in \mathcal{G}, \quad a \in \mathbb{R} \implies \rho(X + a) = \rho(X) - a.$$

Darant prielaidą, kad pinigų vertė laike laikoma nekintančia, aksiomas galima paaiškinti taip: monotoniškumo aksioma teigia, kad jeigu X yra mažesnis (blogesnis) už Y , tai kapitalo poreikis X turėtų būti didesnis negu Y . Invariantiškumas poslinkio atžvilgiu reiškia, kad prie X pridėjus a kapitalo dydį, kapitalo poreikis sumažėja būtent a kapitalo dydžiu. Jeigu tenkinama teigiamo homogeniškumo aksioma, tai kapitalo reikalavimai kinta tiesiškai (proporcingai h) dauginant grynąsias vertes iš neneigiamų konstantų h . Galiausiai, subadityvumo aksioma užtikrina, kad kapitalo poreikis bendrai diskontuotai grynajai vertei $X + Y$ neturi būti didesnis nei atskirai reikalaujamų X ir Y kapitalų suma [6].

2.1.1 Vertės pokyčio rizika – VaR

Vertės pokyčio rizikos matas (VaR) buvo sukurtas atsižvelgiant į praėjusio amžiaus 10-tojo dešimtmečio finansines krizes [16]. Rizikos matas VaR įvertina mažiausią ribą, kurios per tam tikrą laikotarpį nuostolis neviršys esant pasirinktam pasiklikovimo lygmeniui α , arba atvirkščiai, nuostolis viršys šią ribą su ne didesne tikimybe nei $(1 - \alpha)$ [11]. Toliau pateikiamas vertės pokyčio rizikos (VaR) apibrėžimas [27]:

2.1.3 apibrėžimas. *Tegul L yra atsitiktinis dydis, žymintis nuostolį ir pasiklikovimo lygmuo $\alpha \in (0, 1)$. Tuomet vertės pokyčio rizika – VaR, esant pasirinktam pasiklikovimo lygmeniui α , apibrėžiama kaip:*

$$\text{VaR}_\alpha(L) = \inf\{l \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(L > l) \leq 1 - \alpha\} = \inf\{l \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(L \leq l) \geq \alpha\},$$

kur $\mathbb{P}(L \leq l)$ nurodo tikimybę, kad nuostolis L neviršys ribos l .

2.1.4 teiginys ([25]). *Vertės pokyčio rizika $\text{VaR}_\alpha(L)$ yra nuostolio L apatinis α -kvantilis.*

Dėl paprasto skaičiavimo ir praktinio taikymo VaR tapo plačiai naudojamas finansinės rizikos valdyje, pavyzdžiui, rinkos, kredito ir operacinės rizikų. Nepaisant

to, šis rizikos matas turi esminių trūkumų – jis neįvertina galimų nuostolių viršijančių VaR ribą.

2.1.5 teiginys ([28]). *Vertės pokyčio rizika (VaR) nėra suderintasis rizikos matas, nes bendruoju atveju yra netenkinama subadityvumo aksioma.*

Šį teiginį galima įrodyti remiantis nesudėtingu pavyzdžiu [29].

2.1.6 pavyzdys. *Tarkime, kad X ir Y yra atsitiktiniai dydžiai, apibūdinantys pozicijos nuostolius ir priklausančius nuo atsitiktinio dydžio U , kuris yra tolygiai pasiskirstęs intervale $(0,1)$, tai yra $U \sim \text{Uniform}(0,1)$:*

$$X = \begin{cases} 1000, & U \leq 0,04; \\ 0, & U > 0,04. \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 0, & U \leq 0,96; \\ 1000, & U > 0,96. \end{cases}$$

Tuomet gaunama, kad:

$$\mathbb{P}(X = 1000) = \mathbb{P}(U \leq 0,04) = 0,04, \quad \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(U > 0,04) = 0,96.$$

Analogiškai,

$$\mathbb{P}(Y = 1000) = \mathbb{P}(U > 0,96) = 0,04, \quad \mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(U \leq 0,96) = 0,96.$$

Skaiciuojant VaR_α , kai pasiklikovimo lygmuo $\alpha = 0,95$:

$$\mathbb{P}(X \leq 0) = \mathbb{P}(Y \leq 0) = 0,96 > 0,95$$

todėl

$$\text{VaR}_{0,95}(X) = 0$$

ir

$$\text{VaR}_{0,95}(Y) = 0.$$

Toliau, atsitiktinių dydžių suma $X + Y$, priklausomai nuo U , įgyja tokias reikšmes:

$$X + Y = \begin{cases} 1000, & \text{jei } U \leq 0,04; \\ 0, & \text{jei } 0,04 < U \leq 0,96; \\ 1000, & \text{jei } U > 0,96. \end{cases}$$

Taigi:

$$\mathbb{P}(X + Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = \mathbb{P}(U > 0,04, U \leq 0,96) = 0,92,$$

$$\mathbb{P}(X + Y = 1000) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 1000) + \mathbb{P}(X = 1000, Y = 0) = 0,08.$$

Skaiciuojant VaR_α , kai pasiklikovimo lygmuo $\alpha = 0,95$:

$$\mathbb{P}(X + Y \leq 0) = \mathbb{P}(X + Y = 0) = 0,92,$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X + Y \leq 1000) &= \mathbb{P}(X + Y = 0) + \mathbb{P}(X + Y = 1000) \\ &= 0,92 + 0,08 = 1 > 0,95\end{aligned}$$

todėl

$$\text{VaR}_{0,95}(X + Y) = 1000.$$

Taigi, galiausiai gaunama, kad

$$\text{VaR}_{0,95}(X + Y) = 1000 > 0 + 0 = \text{VaR}_{0,95}(X) + \text{VaR}_{0,95}(Y).$$

□

2.1.2 Deficito vidurkis – ES

Siekiant ištaisyti VaR rizikos matui būdingas problemas, buvo pasiūlytas daugiau informacijos apie nuostolius pateikiantis rizikos matas – deficito vidurkis (ES), kuris apibrėžiamas kaip sąlyginis nuostolio vidurkis, kai nuostoliai viršija vertės pokyčio rizikos ribą. Toliau pateikiamas deficito vidurkio (ES) apibrėžimas [27]:

2.1.7 apibrėžimas. *Tegul L yra tolydus atsitiktinis dydis, žymintis nuostolį, ir pasiklikovimo lygmuo $\alpha \in (0,1)$. Tuomet deficito vidurkis – ES, esant pasirinktam pasiklikovimo lygmeniui α , apibrėžiamas kaip:*

$$\text{ES}_\alpha(L) = \mathbb{E}[L \mid L \geq \text{VaR}_\alpha(L)].$$

Ekvivalentiškai, deficito vidurkį (ES) galima apibrėžti ir kaip:

$$\text{ES}_\alpha(L) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 \text{VaR}_u(L) du. \quad (2.1)$$

2.1.8 teiginys ([28]). *Rizikos matas ES tenkina subadityvumo bei kitas 2.1.2 apibrėžime nurodytas aksiomas, todėl yra suderintasis rizikos matas*

2.2 Parametrinių modelių taikymas

Rizikos matų vertinimas taikant parametrinius metodus, yra pagrįstas prielaida, kad duomenys pasiskirstę pagal tam tikrą konkretų tikimybinį skirstinį [18]. Šiame darbe bus naudojami ir toliau apibūdinami trys skirstiniai: normalusis, Stjudento t bei asimetrinis Stjudento t.

Normaliojo skirstinio pranašumas yra nesudėtingas ir patogus taikymas, tačiau jis dažnai neatitinka finansinių duomenų pasiskirstymo, ypač esant didelių nuostolių tikimybei. Todėl tinkamesnis skirstinys gali būti Stjudento t skirstinys, kuris suteikia galimybę modeliuoti skirstinio uodegas, kurios yra sunkesnės nei normaliojo, tačiau Stjudento t skirstinys yra simetriškas. Dėl šios priežasties dar taikomas Stjudento t skirstinio plėtinys – asimetrinis Stjudento t skirstinys, turintis papildomą asimetrijos parametą. Šiuo atveju išlaikomos sunkesnės uodegos, bet papildomai asimetrinis Stjudento t skirstinys leidžia kairiąją ir dešiniąją uodegas modeliuoti nevienodai [22].

2.2.1 Normalusis skirstinys

Atsitiktinio dydžio Z skirstinys vadinamas normaliuoju (Gauso) skirstiniu, jei jo tankio funkcija $f(z)$ aprašoma [15, 10]:

$$f(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad -\infty < z < \infty,$$

čia parametrai μ ir σ atitinkamai žymi vidurkį bei standartinį nuokrypį. Normalusis skirstinys žymimas

$$Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2).$$

Jeigu atsitiktinio dydžio Z vidurkis yra lygus 0, standartinis nuokrypis lygus 1, o tankio funkcija $f(z)$ aprašoma:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right), \quad -\infty < z < \infty,$$

tai Z turi standartinį normalųjį skirstinį, kuris žymimas

$$Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Toliau pateikiamos rizikos matų išraiškos remiantis [21].

2.2.1 pavyzdys. Tegul atsitiktinis dydis Z yra pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį su parametrais μ ir σ . Tada, kai $\alpha \in (0, 1)$, vertės pokyčio rizika apskaičiuojama pagal formulę:

$$\text{VaR}_\alpha(Z) = \mu + \sigma \Phi^{-1}(\alpha),$$

čia Φ žymi standartinę normaliąją pasiskirstymo funkciją, o $\Phi^{-1}(\alpha)$ yra Φ funkcijos α -kvantilis.

Irodymas. Tegul $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$. Tada $X = \frac{Z - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ ir atsitiktinio dydžio Z pasiskirstymo funkcija yra:

$$F_Z(x) = \mathbb{P}(Z \leq x) = \mathbb{P}\left(\frac{Z - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right).$$

Kadangi F_Z yra griežtai didėjanti, tai egzistuoja vienintelis x_α toks, kad $F_Z(x_\alpha) = \alpha$, kur $x_\alpha = \text{VaR}_\alpha(Z)$. Taigi, reikia parodyti, kad

$$\Phi\left(\frac{x_\alpha - \mu}{\sigma}\right) = \alpha.$$

Pritaikius atvirkštinę funkciją, gaunama

$$\frac{x_\alpha - \mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(\alpha) \implies x_\alpha = \mu + \sigma \Phi^{-1}(\alpha).$$

Taigi,

$$\text{VaR}_\alpha(Z) = x_\alpha = \mu + \sigma \Phi^{-1}(\alpha).$$

□

2.2.2 pavyzdys. Tegul atsitiktinis dydis Z yra pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį su parametrais μ ir σ . Tada, kai $\alpha \in (0, 1)$, deficito vidurkis apskaičiuojamas taikant tokią formulę:

$$\text{ES}_\alpha(Z) = \mu + \sigma \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1 - \alpha},$$

čia ϕ žymi standartinio normaliojo skirstinio tankio funkciją.

Irodymas. Kai $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$, tai iš rezultato, gauto 2.2.1 pavyzdyje, turime, kad $\text{VaR}_\alpha(Z) = \mu + \sigma \Phi^{-1}(\alpha)$. Remiantis prieš tai apibrėžta deficito vidurkio 2.1 formule,

gaunama

$$\begin{aligned}
\text{ES}_\alpha(Z) &= \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \text{VaR}_u(Z) du \\
&= \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 (\mu + \sigma \Phi^{-1}(u)) du \\
&= \frac{1}{1-\alpha} \left[\int_\alpha^1 \mu du + \sigma \int_\alpha^1 \Phi^{-1}(u) du \right] \\
&= \frac{1}{1-\alpha} \left[\mu(1-\alpha) + \sigma \int_\alpha^1 \Phi^{-1}(u) du \right] \\
&= \mu + \frac{\sigma}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \Phi^{-1}(u) du.
\end{aligned}$$

Toliau reikia apskaičiuoti integralą $\int_\alpha^1 \Phi^{-1}(u) du$. Įvedame keitinį:

$$x = \Phi^{-1}(u),$$

$$u = \Phi(x),$$

$$du = \phi(x) dx.$$

Taip pat, kai $u = \alpha$, gaunama $x = \Phi^{-1}(\alpha)$, ir kai $u \rightarrow 1$, gaunama $x \rightarrow \infty$. Taigi

$$\int_\alpha^1 \Phi^{-1}(u) du = \int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^\infty x \phi(x) dx.$$

Kadangi $\phi'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \right) = -x\phi(x)$, tai

$$\int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^\infty x \phi(x) dx = [-\phi(x)]_{\Phi^{-1}(\alpha)}^\infty = 0 - (-\phi(\Phi^{-1}(\alpha))) = \phi(\Phi^{-1}(\alpha)).$$

Taigi, gaunama, kad

$$\text{ES}_\alpha(Z) = \mu + \frac{\sigma}{1-\alpha} \phi(\Phi^{-1}(\alpha)).$$

□

2.2.2 Stjudento t skirstinys

Atsitiktinio dydžio Z skirstinys vadinamas Stjudento t skirstiniu, jei jo tankio funkcija $f(z)$ aprašoma [19]:

$$f(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{z^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad -\infty < z < +\infty,$$

kur $\nu > 0$ yra laisvės laipsnių skaičius, o $\Gamma(\cdot)$ žymi gama funkciją, kuri apibrėžiama taip [26]:

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt, \quad \text{Re}(a) > 0.$$

Tarkime, kad toliau atsitiktinis dydis $\tilde{Z}$ yra toks, kad $\tilde{Z} = \frac{Z - \mu}{\sigma}$.

2.2.3 pavyzdys ([21]). Tegul atsitiktinis dydis $\tilde{Z}$ turi Stjudento t skirstinį su $\nu > 2$ laisvės laipsnių ir $E(\tilde{Z}) = 0$, $\text{Var}(\tilde{Z}) = \frac{\nu}{\nu - 2}$. Tuomet vertės pokyčio rizika apskaičiuojama pagal formulę:

$$\text{VaR}_\alpha(Z) = \mu + \sigma t_\nu^{-1}(\alpha),$$

čia t_ν yra Stjudento t pasiskirstymo funkcija.

2.2.4 pavyzdys ([21]). Tegul atsitiktinis dydis $\tilde{Z}$ turi Stjudento t skirstinį su $\nu > 2$ laisvės laipsnių. Tuomet deficito vidurkis apskaičiuojamas taikant tokią formulę:

$$\text{ES}_\alpha(Z) = \mu + \sigma \frac{g_\nu(t_\nu^{-1}(\alpha))}{1 - \alpha} \cdot \frac{\nu + (t_\nu^{-1}(\alpha))^2}{\nu - 1},$$

čia g_ν yra Stjudento t skirstinio tankio funkcija.

2.2.3 Asimetrinis Stjudento t skirstinys

Remiantis Lambert and Laurent (2001) siūlymu, atsitiktinio dydžio Z skirstinys vadinamas (standartizuotu) asimetriniu Stjudento t skirstiniu (angl. *skewed Student t distribution*), jei jo tankio funkcija yra [14]:

$$f(z \mid \xi, \nu) = \begin{cases} \frac{2}{\xi + \frac{1}{\xi}} \text{sg} \left(\xi(sz + m) \mid \nu \right), & \text{jei } z < -\frac{m}{s}, \\ \frac{2}{\xi + \frac{1}{\xi}} \text{sg} \left((sz + m)/\xi \mid \nu \right), & \text{jei } z \geq -\frac{m}{s}, \end{cases}$$

kur $g(\cdot \mid \nu)$ žymi vienetinės dispersijos standartinio Stjudento t tankio funkciją, $\xi > 0$ yra asimetrijos parametras, $\nu > 2$ yra laisvės laipsnių skaičius, o m ir s^2 žymi nestandartizuoto asimetrinio Stjudento t skirstinio vidurkį ir dispersiją atitinkamai:

$$m = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right) \sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(\xi - \frac{1}{\xi} \right),$$

$$s^2 = \left(\xi^2 + \frac{1}{\xi^2} - 1 \right) - m^2.$$

Taip pat tie patys autoriai parodė, kad nestandartizuoto asimetrinio Stjudento t skirstinio atvirkštinė pasiskirstymo funkcija yra:

$$\text{skst}_{\nu, \xi}^*(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\xi} \text{st}_{\alpha, \nu} \left(\frac{\alpha}{2} (1 + \xi^2) \right), & \text{jei } \alpha < \frac{1}{1 + \xi^2}, \\ -\xi \text{st}_{\alpha, \nu} \left(\frac{1 - \alpha}{2} (1 + \xi^{-2}) \right), & \text{jei } \alpha \geq \frac{1}{1 + \xi^2}, \end{cases}$$

kur $st_{\alpha,\nu}$ žymi vienetinės dispersijos Stjudento t skirstinio atvirkštinę pasiskirstymo funkciją. Tada standartizuoto asimetrinio Stjudento t skirstinio atvirkštinę pasiskirstymo funkcija gaunama:

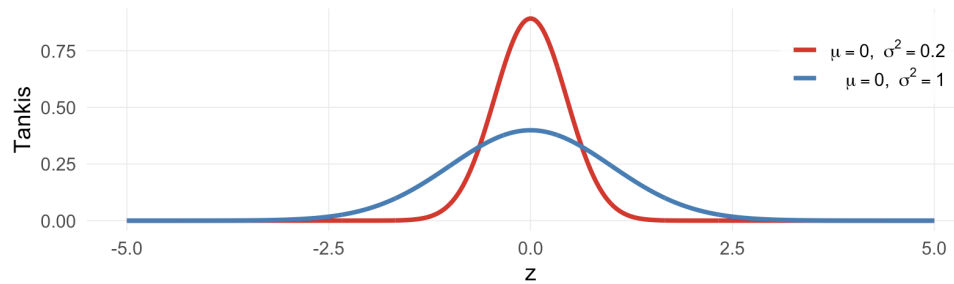
$$skst_{\nu,\xi}(\alpha) = \frac{skst_{\nu,\xi}^*(\alpha) - m}{s}.$$

Tuomet rizikos matavimai VaR ir ES, kai atsitiktinis dydis Z turi asimetrinį Stjudento t skirstinį, galima įvertinti tokiomis formulėmis:

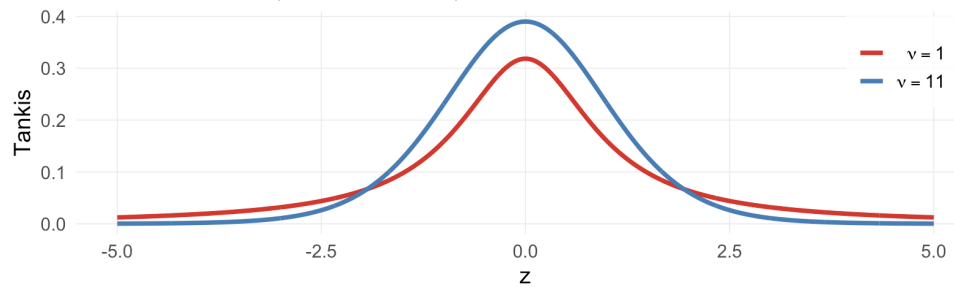
$$VaR_{\alpha}(Z) = \mu + \sigma skst_{\nu,\xi}(\alpha),$$

$$ES_{\alpha}(Z) = \mu + \frac{\sigma}{1 - \alpha} \int_{\alpha}^1 skst_{\nu,\xi}(u) du.$$

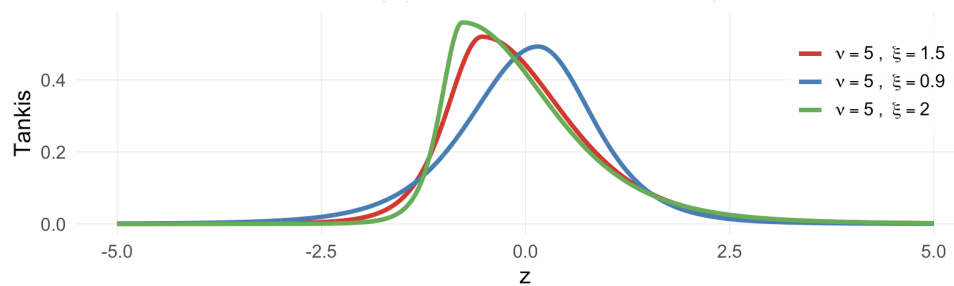
Visų trijų minėtų skirstinių tankių grafikai vizualiniam palyginimui pavaizduoti 2.1 paveikslėlyje.



(a) Normaliojo skirstinio tankio grafikas



(b) Stjudento t skirstinio tankio grafikas



(c) Asimetrinio Stjudento t skirstinio tankio grafikas

2.1 pav.: Skirstinių tankių grafikai

2.3 Sąlyginio heteroskedastiškumo modeliai

Finansų rinkos pasižymi dideliu kintamumu, todėl laiko eilučių modeliavime ir prognozavime yra taikomi sąlyginio heteroskedastiškumo modeliai, kurie vertina finansinių grąžų sąlyginę dispersiją. Toliau aprašomi trys: autoregresijos sąlyginio heteroskedastiškumo (angl. *autoregressive conditional heteroskedasticity*) – ARCH, apibendrintas autoregresijos sąlyginio heteroskedastiškumo (angl. *generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*) – GARCH ir asimetrinės galios ARCH (angl. *asymmetric power ARCH*) – APARCH modeliai.

Tegul finansinė grąža r_t laiko momentu t aprašoma:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu_t + \varepsilon_t, \\ \varepsilon_t &= z_t \sigma_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

čia μ_t žymi sąlyginį vidurkį, z_t yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę inovacijų atsitiktiniai dydžiai su vidurkiu lygiu 0 ir dispersija lygia 1, o σ_t yra standartinis nuokrypis.

Engle 1981 metais pasiūlė ARCH(q) modelį ir išreiškė sąlyginę dispersiją, tiesiškai priklausančią nuo q praeities paklaidų kvadratų reikšmių:

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2,$$

kur kiekvienam laiko momentui t parametrai tenkina $a_0 > 0$ ir $a_i \geq 0$ visiems $i = 1, \dots, q$ [2].

2.3.1 GARCH modelis

Bollerslev 1986 metais pasiūlė ARCH(q) modelio apibendrinimą – GARCH(p, q) modelį, kur sąlyginė dispersija priklauso ne tik nuo q praeities paklaidų kvadratų reikšmių, bet ir nuo p praeities sąlyginių dispersijų. Taigi GARCH(p, q) modelis reiškia, kad kiekvienam laiko momentui t , $t \in \mathbb{Z}$, tenkinamos lygybės:

$$\varepsilon_t = z_t \sigma_t,$$

$$\mathbb{E}(z_t) = 0, \quad \text{Var}(z_t) = 1,$$

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p b_j \sigma_{t-j}^2,$$

kur $a_0 > 0$ ir $a_i \geq 0$ visiems $i = 1, \dots, q$, ir $b_j \geq 0$ visiems $j = 1, \dots, p$.

Dėl paprasto taikymo vienas populiariausių ir praktikoje bei literatūroje dažniausiai naudojamų GARCH modelių yra GARCH(1, 1) modelis. Tokiame modelyje, sąlyginė dispersija gali būti pateikiama taip:

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2 + b_1 \sigma_{t-1}^2,$$

čia $a_0 \geq 0$, $a_1, b_1 \geq 0$ ir $a_1 + b_1 < 1$. Didelė b_1 reikšmė rodo, kad kintamumas ilgą laiką išliks panašiam lygyje, tai yra keisis lėtai, o didelė a_1 reikšmė – rodo staigų kintamumą ir greitą reagavimą į rinkos pokyčius [9].

2.3.2 APARCH modelis

Ding, Granger ir Engle 1993 metais pristatė asimetrinės galios ARCH modelį, vadinamą APARCH. APARCH(p, q) sąlyginė dispersija, kiekvienam laiko momentui t , $t \in \mathbb{Z}$, gali būti apibrėžiama taip:

$$\varepsilon_t = z_t \sigma_t,$$

$$\mathbb{E}(z_t) = 0, \text{ Var}(z_t) = 1,$$

$$\sigma_t^\delta = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i \left(|\varepsilon_{t-i}| - \gamma_i \varepsilon_{t-i} \right)^\delta + \sum_{j=1}^p b_j \sigma_{t-j}^\delta,$$

čia $\delta > 0$ ir $a_0 > 0$, $-1 < \gamma_i < 1$ ir $a_i \geq 0$ visiems $i = 1, \dots, q$, o $b_j \geq 0$ visiems $j = 1, \dots, p$. Teigiamą (neigiamą) γ_i reikšmę reiškia, kad neigiamą (teigiamą) informacija gražos kintamumui daro didesnę poveikį negu teigiamą (neigiamą) informacija [23].

2.3.3 Rizikos matų skaičiavimas

Remiantis prieš tai apibrėžta finansinės gražos formule:

$$r_t = \mu_t + \sigma_t z_t,$$

toliau pateikiamos vieno laikotarpio į priekį rizikos matų VaR ir ES prognozavimo formulės, taikant sąlyginio heteroskedastiškumo modelius. Daroma prielaida, kad μ ir σ gali būti kintantys laike, o inovacijos z_t yra nepriklausomos ir vienodai pasiskirsčiusios (pagal normalųjį, Stjudento t arba asimetrinį Stjudento t skirstinį) su

vidurkiu lygiu 0 ir dispersija lygia 1. Tuomet, remiantis [21], laiko momentu t vieno laikotarpio į priekį rizikos matai grąžai r_{t+1} apskaičiuojami pagal šias formules:

$$\text{VaR}_t^\alpha(r_{t+1}) = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} \text{VaR}_\alpha(z),$$

$$\text{ES}_t^\alpha(r_{t+1}) = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} \text{ES}_\alpha(z),$$

čia $\text{VaR}_\alpha(z)$ ir $\text{ES}_\alpha(z)$ atitinkamai yra inovacijų z vertės pokyčio rizika (VaR) ir deficito vidurkis (ES), apskaičiuoti pagal pasirinktą šiuo atveju normalųjį, Stjudento t arba asimetrinį Stjudento t inovacijų z skirstinį.

2.4 Rizikos matų prognozavimo modelių tikslumo testavimas

Pasirinkus skirtingas skirstinio prielaidas (normaliojo, Stjudento t , asimetrinio Stjudento t) ir sąlyginio heteroskedastiškumo modelius (GARCH, APARCH) gaunami skirtingi rizikos matų VaR ir ES prognozavimo modeliai. Siekiant įvertinti ir palyginti jų tikslumą, bus taikomi keli testavimo metodai.

Vertės pokyčio rizikos (VaR) prognozavimo modeliams naudojami besąlyginio padengimo, nepriklausomumo ir sąlyginio padengimo testai, o deficito vidurkio (ES) prognozavimo modeliams – regresijos modeliu pagrįstas ES testas.

2.4.1 VaR testavimas

Prieš atliekant vertės pokyčio rizikos (VaR) prognozavimo modelių testus, pirmiausia apibrėžiamas indikatorius arba VaR „pažeidimų“ seka [5, 7]:

$$I_{t+1} = \begin{cases} 1, & \text{jei } r_{t+1} < -\text{VaR}_{t+1}^\alpha, \\ 0, & \text{jei } r_{t+1} \geq -\text{VaR}_{t+1}^\alpha, \end{cases}$$

čia VaR_{t+1}^α žymi gautą VaR rezultatą laiko momentu $t + 1$ ir esant pasikliovimo lygmeniui α . Indikatorius I_{t+1} įgyja reikšmę 1, jeigu laiko momentu $t + 1$ grąža yra mažesnė negu to paties laiko momentu prognozuotas neigiamas VaR rezultatas. Jeigu toks pažeidimas neįvyksta, tai I_{t+1} įgyja reikšmę 0.

Pagal VaR pažeidimų nulinę hipotezę, I_{t+1} turėtų būti nepriklausomas Bernulio atsitiktinis dydis, tai yra

$$H_0 : I_{t+1} \sim B(1, \alpha),$$

kur Bernulio skirstinio $B(1, \alpha)$ tikimybių funkcija yra:

$$f(I_{t+1}, \alpha) = (1 - \alpha)^{1-I_{t+1}} \alpha^{I_{t+1}}.$$

Besąlyginis padengimo testas (angl. *unconditional coverage testing*), pristatytas Kupiec 1995 metais, lygina stebimų pažeidimų dalį, toliau žymimą π , su teorine VaR pažeidimo tikimybe α . Norint patikrinti, ar skirtumas tarp šių dydžių yra reikšmingas, naudojama Bernulio tikėtinumo funkcija:

$$L(\pi) = \prod_{t=1}^T (1 - \pi)^{1-I_{t+1}} \pi^{I_{t+1}} = (1 - \pi)^{T_0} \pi^{T_1},$$

kur T_0 ir T_1 yra atitinkamai nulių, kiek kartų pažeidimo nebuvo, ir vienetų, kiek kartų pažeidimas įvyko, skaičiai imtyje $T = T_0 + T_1$. Didžiausio tikėtinumo įvertis yra:

$$\hat{\pi} = \frac{T_1}{T_0 + T_1} = \frac{T_1}{T}.$$

Šį įvertį įstačius į tikėtinumo funkciją, gaunama:

$$L(\hat{\pi}) = \prod_{t=1}^T (1 - \hat{\pi})^{1-I_{t+1}} \hat{\pi}^{I_{t+1}} = (1 - T_1/T)^{T_0} (T_1/T)^{T_1}.$$

Pagal besąlyginio padengimo testo nulinę hipotezę $H_0 : \pi = \alpha$, tikėtinumo funkcija gaunama:

$$L(\alpha) = \prod_{t=1}^T (1 - \alpha)^{1-I_{t+1}} \alpha^{I_{t+1}} = (1 - \alpha)^{T_0} \alpha^{T_1}.$$

Besąlyginio padengimo testo hipotezę tikrinama apskaičiuojant tikėtinumo santykį:

$$LR_{uc} = -2 \ln \left[\frac{L(\alpha)}{L(\hat{\pi})} \right] = -2 \ln \left[\frac{(1 - \alpha)^{T_0} \alpha^{T_1}}{\left(1 - \frac{T_1}{T}\right)^{T_0} \left(\frac{T_1}{T}\right)^{T_1}} \right] \sim \chi^2(1),$$

kuris yra asimptotiškai pasiskirstęs pagal χ^2 su vienu laisvės laipsniu. Nulinė hipotezė atmetama, jeigu statistika LR_{uc} viršija χ^2 su vienu laisvės laipsniu kritinę reikšmę, arba ekvivalenčiai, jeigu apskaičiuota p-reikšmė yra mažesnė už pasirinktą reikšmingumo lygmenį.

Tačiau norint kokybiškai įvertinti vertės pokyčio rizikos (VaR) prognozavimo modelio tikslumą, neužtenka remtis tik šiuo besąlyginio padengimo testu. Svarbu tikrinti ir tai, ar pažeidimai neįvyksta priklausomai vienas kito. Tam naudojamas kitas testas, pristatytas Christoffersen 1998 metais, vadinamas nepriklausomumo testu (angl. *independence test*), kuris vertina pažeidimų sekos nepriklausomumą.

Tarkime, kad pažeidimų seka yra priklausoma laike ir apibrėžiama kaip pirmos eilės Markovo grandinė su tokia perėjimo tikimybių matrica:

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} \pi_{00} & \pi_{01} \\ \pi_{10} & \pi_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \pi_{01} & \pi_{01} \\ 1 - \pi_{11} & \pi_{11} \end{pmatrix},$$

kur

$$\pi_{ij} = \mathbb{P}(I_t = i \mid I_{t+1} = j), \quad i, j = 0, 1,$$

pavyzdžiui, π_{01} reiškia tikimybę, kad laiko momentu $t + 1$ įvyks pažeidimas ($I_{t+1} = 1$), jeigu laiko momentu t pažeidimas neįvyko ($I_t = 0$).

Tuomet pirmos eilės Markovo grandinės tikėtinumo funkcija užrašoma:

$$L(\Pi_1) = (1 - \pi_{01})^{T_{00}} \pi_{01}^{T_{01}} (1 - \pi_{11})^{T_{10}} \pi_{11}^{T_{11}},$$

kur T_{ij} , $i, j = 0, 1$ yra perėjimų skaičiai, kai iš būsenos i pereinama į j . Šių tikimybių didžiausi tikėtinumo įverčiai yra:

$$\hat{\pi}_{01} = \frac{T_{01}}{T_{00} + T_{01}}, \quad \hat{\pi}_{11} = \frac{T_{11}}{T_{10} + T_{11}}$$

ir gaunama tokia perėjimo tikimybių matrica:

$$\hat{\Pi}_1 = \begin{bmatrix} 1 - \hat{\pi}_{01} & \hat{\pi}_{01} \\ 1 - \hat{\pi}_{11} & \hat{\pi}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T_{00}}{T_{00} + T_{01}} & \frac{T_{01}}{T_{00} + T_{01}} \\ \frac{T_{10}}{T_{10} + T_{11}} & \frac{T_{11}}{T_{10} + T_{11}} \end{bmatrix}.$$

Šiuo atveju $\pi_{01} \neq \pi_{11}$.

Darant priešingą prielaidą, kad pažeidimų seka yra nepriklausoma laike, tai reiškia, kad pažeidimo tikimybė laiko momentu $t + 1$ nepriklauso nuo to, ar laiko momentu t pažeidimas įvyko ar ne, tai pagal nepriklausomumo testo nulinę hipotezę $H_0 : \pi_{01} = \pi_{11} = \pi$. Tada gaunama tokia perėjimo tikimybių matrica:

$$\hat{\Pi} = \begin{pmatrix} 1 - \hat{\pi} & \hat{\pi} \\ 1 - \hat{\pi} & \hat{\pi} \end{pmatrix},$$

turinti tokią pačią tikėtinumo funkciją $L(\hat{\pi})$ kaip apibrėžta besąlyginio padengimo teste.

Nepriklausomumo testo hipotezė tikrinama apskaičiuojant tikėtinumo santykį:

$$LR_{\text{ind}} = -2 \ln \left[\frac{L(\hat{\pi})}{L(\hat{\Pi}_1)} \right] \sim \chi^2(1),$$

kuris taip pat yra asimptotiškai pasiskirstęs pagal χ^2 su vienu laisvės laipsniu ir nulinė hipotezė atmetama, jeigu LR_{ind} viršija χ^2 su vienu laisvės laipsniu kritinę reikšmę.

Kadangi tiek sąlyginio padengimo testas, tiek ir nepriklausomumo testas yra svarbūs kokybiškam vertės pokyčio rizikos (VaR) prognozavimo modelio tikslumo įvertinimui, Christoffersen pasiūlė apjungti šiuos testus – sudėjus abiejų atskirų testų statistikas LR_{uc} ir LR_{ind} , gaunamas sąlyginio padengimo testas (angl. *conditional coverage test*):

$$\begin{aligned} LR_{cc} &= LR_{uc} + LR_{ind} = -2 \ln \left[\frac{L(\alpha)}{L(\hat{\pi})} \right] - 2 \ln \left[\frac{L(\hat{\pi})}{L(\hat{\Pi}_1)} \right] \\ &= -2 \ln \left(\left[\frac{L(\alpha)}{L(\hat{\pi})} \right] \left[\frac{L(\hat{\pi})}{L(\hat{\Pi}_1)} \right] \right) \\ &= -2 \ln \left[\frac{L(\alpha)}{L(\hat{\Pi}_1)} \right] \sim \chi^2(2), \end{aligned}$$

kuris yra asimptotiškai pasiskirstęs pagal χ^2 su dviem laisvės laipsniais, o nulinė hipotezė $H_0 : \pi_{01} = \pi_{11} = \alpha$ bus atmetama, jeigu statistika LR_{cc} yra didesnė už χ^2 su dviem laisvės laipsniais kritinę reikšmę.

Nors gali atrodyti, jog jungtinis dviejų atskirų statistikų testas turėtų efektyviausiai patikrinti abi savybes vienu metu, nereikėtų remtis vien tik juo. Sąlyginio padengimo testas pilnai neįvertina modelio netinkamumo ir atmetimo, kai tenkinama tik viena savybė iš dviejų. Taigi, jeigu jungtinis testas neparodo modelio atmetimo, vertėtų atlikti atskirus sąlyginio padengimo bei nepriklausomumo testus [24].

2.4.2 ES testavimas

Bayer ir Dimitriadis 2020 metais pristatė regresijos modeliu pagrįstus deficito vidurkio (ES) testus, kurie tikrina, ar ES prognozės teisingai atitinka stebėtas grąžas. Jie modeliuoja sąlyginį deficito vidurkį kaip tiesinę funkciją, kur grąža yra atsako (priklausomas) atsitiktinis dydis, o ES prognozė yra aiškinamasis (nepriklausomas) atsitiktinis dydis, įskaitant laisvąjį narį. Tuomet ES prognozių tikslumui vertinti naudojamas sudarytas tiesinės regresijos modelis [4, 17]:

$$r_t = \gamma_1 + \gamma_2 \hat{e}_t + u_t^e,$$

kur r_t yra graža, $\hat{e}_t$ žymi deficito vidurkio (ES) prognozę, u_t^e yra liekamosios paklaidos ir $\text{ES}_\alpha(u_t^e | \mathcal{F}_{t-1}) = 0$ beveik visada. Kadangi prognozės $\hat{e}_t$ yra generuojamos remiantis $\mathcal{F}_{t-1}$, tai yra σ -algebra, apimančia informaciją iki laiko momento $t - 1$, tai ši sąlyga liekamosios paklaidos nariui yra ekvivalenti $\text{ES}_\alpha(r_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \gamma_1 + \gamma_2 \hat{e}_t$. Jeigu ES prognozė yra teisinga, tai laisvasis narys γ_1 turėtų būti lygus nuliui, o krypties koeficientas γ_2 turėtų būti lygus vienetui.

Norint patikrinti, ar deficito vidurkio (ES) prognozė yra sistemingai nepakankamai įvertinta, tie patys autoriai siūlo laisvojo nario ES regresijos (angl. *intercept ES regression*) testą (toliau žymima ESR), kur krypties koeficientas γ_2 fiksuojamas lygiu vienetui ir tikrinamas tik laisvasis narys γ_1 . ESR testavime taikomas regresijos modelis:

$$r_t - \hat{e}_t = \gamma_1 + u_t^e,$$

kur kaip ir prieš tai: $\text{ES}_\alpha(u_t^e | \mathcal{F}_{t-1}) = 0$ beveik visada.

ESR testo vienpusė hipotezė užrašoma taip:

$$H_0 : \gamma_1 \geq 0,$$

$$H_1 : \gamma_1 < 0,$$

ir tikrinama taikant t-testą su įvertinta asimptotine kovariacija. Šio testo t-statistika gali būti apibūdinama taip:

$$t_I = \frac{\hat{\gamma}_1 - \gamma_1^0}{\sqrt{\hat{\Sigma}_{22}/T}},$$

čia γ_1^0 yra reikšmė pagal nulinę hipotezę, T – imties dydis, o $\hat{\Sigma}_{22}$ yra antros eilutės, antro stulpelio asimptotinės kovariacijų matricos elementas, gautas bendrai įvertinant imties kvantilį ir deficito vidurkį (ES), kaip siūlo tie patys autoriai Bayer ir Dimitriadis [8]. Matricos Σ elementai:

$$\Sigma_{11} = \frac{\alpha(1 - \alpha)}{f_R^2(\text{VaR}_\alpha)},$$

$$\Sigma_{12} = \Sigma_{21} = (1 - \alpha) \frac{\text{VaR}_\alpha - \text{ES}_\alpha}{f_R(\text{VaR}_\alpha)},$$

$$\Sigma_{22} = \frac{1}{\alpha} \text{Var}(R - \text{VaR}_\alpha | R \leq \text{VaR}_\alpha) + \frac{1 - \alpha}{\alpha} (\text{VaR}_\alpha - \text{ES}_\alpha)^2,$$

čia VaR_α ir ES_α atitinkamai yra vertės pokyčio rizikos bei deficito vidurkio, esant pasirinktam pasiklivimo lygmeniui α , reikšmės pagal nulinę hipotezę, R žymi atsitiktinį vieno laiko momento gražos dydį, kurio realizacijos skirtingais laiko momentais yra $r_1, \dots, r_T$. Ir daroma prielaida, kad R turi absoliučiai tolydų skirstinį su tankio funkcija $f_R(\cdot)$ [13].

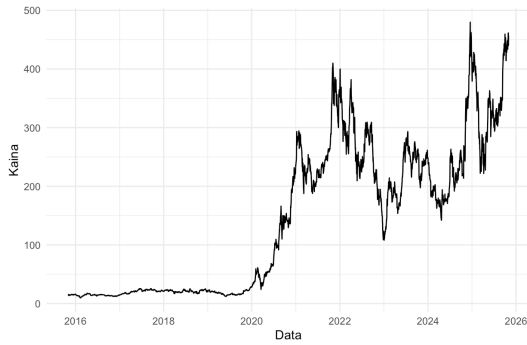
Praktinė dalis

Šiame skyriuje pristatomas praktinis rizikos matų prognozavimo modelių tikslumo testavimo taikymas. Pirmiausia pristatomi analizuojami duomenys, tuomet sąlyginio heteroskedastiškumo modeliams GARCH ir APARCH su normaliojo, Stjudento t ir asimetrinio Stjudento t skirstiniais taikomi testai. Modelių prognozuojamų vertės pokyčio rizikos matų tikslumo vertinimui naudojami besąlyginio padengimo, nepriklausomumo ir sąlyginio padengimo testai, o deficito vidurkio prognozavimui, taikomas regresijos modeliu pagrįstas ES testas – ESR. Visa praktinė dalis atliekama naudojant RStudio programą.

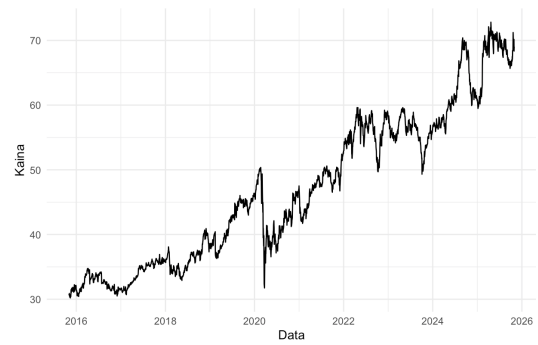
3.1 Duomenų analizė

Praktinei analizei bus naudojamos Tesla (TSLA) bei Coca-Cola (KO) akcijų dešimties metų laikotarpio, t. y. nuo 2015-11-01 metų iki 2025-11-01 metų laikotarpio, dienos uždarymo kainos, gautos iš „Yahoo Finance“. Abiejų akcijų uždarymo kainų grafikai vaizduojami 3.1 paveikslėlyje. Šių duomenų pasirinkimą lėmė ryškus abiejų akcijų uždarymo kainų kintamumo skirtumas, todėl galima tikėtis ir skirtingų rizikos modelių rezultatų.

Iš 3.1 grafiko galima matyti, kad Tesla akcijos kaina per pasirinktą analizuojamą laikotarpį stipriai išaugo, ryškiausi kainos šuoliai įvyko 2020-2021 metų laikotarpyje. Taip pat vėlesniais laikotarpiais matyti ir dažni bei gana didelės amplitudės ne tik kilimai, bet ir kritimai, kas būdinga rizikingai akcijai. O Coca-Cola akcijos kaina augo pakankamai stabiliai, be palyginti tokių ekstremalių šuolių. Tokie skirtumai suteiks galimybę įvertinti, kaip rizikos matai veikia tiek ekstremalesnėmis, tiek labiau stabilesnėmis sąlygomis.



(a) TSLA



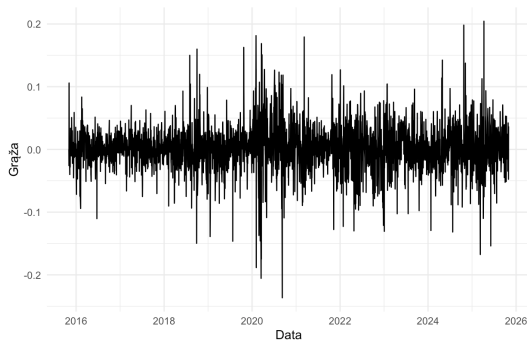
(b) KO

3.1 pav.: Akcijų uždarymo kainų grafikai

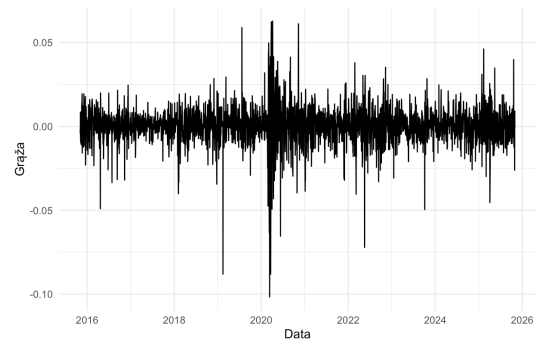
Toliau apskaičiuojamos analizuojamų akcijų logaritminės grąžos pagal formulę

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right),$$

kur P_t yra akcijos uždarymo kaina laiko momentu t . Grąžų grafikai vaizduojami 3.2 paveikslėlyje.



(a) TSLA



(b) KO

3.2 pav.: Logaritminių grąžų grafikai

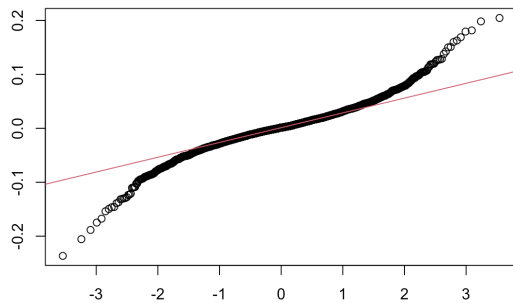
Akcijų logaritminių grąžų atrąšomoji statistika pateikiama 3.1 lentelėje.

Iš gautų duomenų 3.1 lentelėje matyti, kad Coca-Cola grąžos vidurkis yra mažesnis nei Tesla, kas reiškia, kad Tesla nagrinėjamu laikotarpiu vidutiniškai generavo kiek didesnę dienos grąžą. Tačiau standartinis nuokrypis, dispersija bei didesnis intervalas tarp mažiausios ir didžiausios reikšmių signalizuoja apie didesnę Tesla grąžų kintamumą ir riziką. Asimetrijos koeficientas rodo pakankamai didelę Coca-Cola logaritminių grąžų neigiamą asimetriją, o abiem atvejais gautos didelės eksceso koeficiento reikšmės reiškia grąžų pasiskirstymą su sunkesnėmis uodegomis.

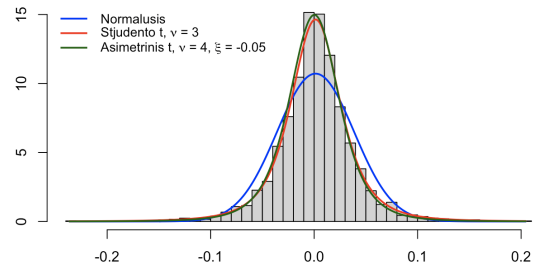
Statistika	TSLA	KO
Vidurkis	0.001379	0.000320
Mediana	0.001331	0.000646
Standartinis nuokrypis	0.037243	0.011445
Dispersija	0.001387	0.000130
Mažiausia reikšmė	-0.236518	-0.101728
Didžiausia reikšmė	0.204491	0.062783
Ekscesas	7.205268	13.456350
Asimetrijos koeficientas	-0.052747	-0.859827

3.1 lentelė: Akcijų logaritminių grąžų aprašomoji statistika

Toliau 3.3 ir 3.4 paveikslėliuose atitinkamai vaizduojamos Tesla ir Coca-Cola akcijų logaritminių grąžų kvantilių palyginimo (QQ) diagramos, lyginant su normaliuoju skirstiniu, bei histogramos, palygintos su normaliojo skirstinio, žymimo mėlyna kreive, Stjudento t skirstinio, žymimo raudona kreive, ir asimetrinio Stjudento t, žymimo žalia kreive, tankiais.



(a) Logaritminių grąžų QQ diagrama, lyginant su normaliuoju skirstiniu

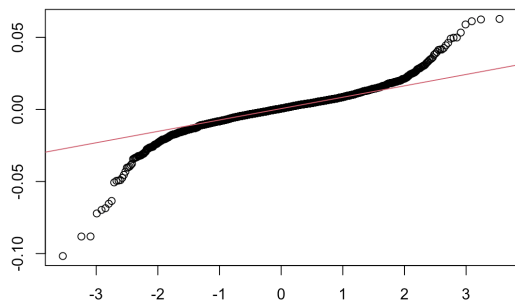


(b) Logaritminių grąžų histograma, lyginant su skirstinių tankiais

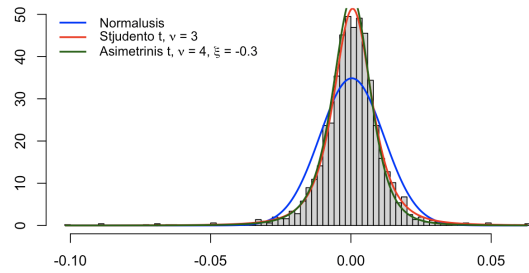
3.3 pav.: TSLA logaritminių grąžų aprašomieji grafikai

Iš 3.3 paveikslėlyje esančios Tesla logaritminių grąžų QQ diagramos, galima matyti kaip duomenų taškai abiejose uodegose nukrypsta nuo raudona linija žymimo normaliojo skirstinio. Tai, jog normaliojo skirstinio prielaida nėra tenkinama, parodo ir logaritminių grąžų histograma – Stjudento t ir asimetrinio Stjudento t skistinių tankio kreivės ypač uodegose geriau ir tiksliau atitinka Tesla logaritminių grąžų pasiskirstymą lyginant su normaliojo tankio kreive.

Panaši situacija matoma ir 3.4 paveikslėlyje – Coca-Cola logaritminių grąžų pa-



(a) Logaritminių grąžų QQ diagrama, lyginant su normaliuoju skirstiniu



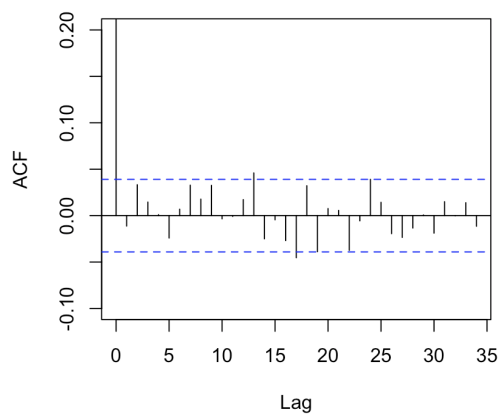
(b) Logaritminių grąžų histograma, lyginant su skirstinių tankiais

3.4 pav.: KO logaritminių grąžų aprašomieji grafikai

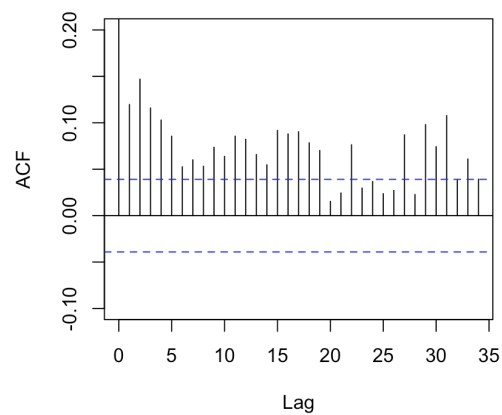
siskirstymas turi sunkesnes uodegas nei normalusis skirstinys, o histograma patvirtina, jog Stjudento t ir asimetrinio Stjudento t skirstinių tankio kreivės geriau atitinka duomenų pasiskirstymą nei normaliojo tankio kreivė.

Abiejų analizuojamų akcijų logaritminių grąžų pasiskirstymo grafikai, vizualiai rodantys storesnes uodegas, ir gautos aprašomosios statistikos reikšmės pagrindžia tolimesnę Stjudento t ir asimetrinio Stjudento t skirstinių taikymą.

Tesla ir Coca-Cola akcijų grąžų bei kvadratinų grąžų autokoreliacijos funkcijų (ACF) grafikus galima atitinkamai matyti 3.5 ir 3.6 paveikslėliuose.



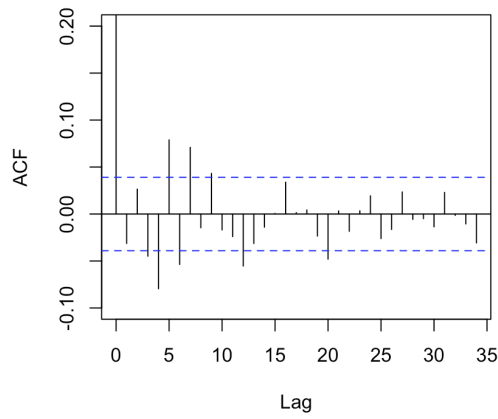
(a) Grąžų autokoreliacijos funkcija



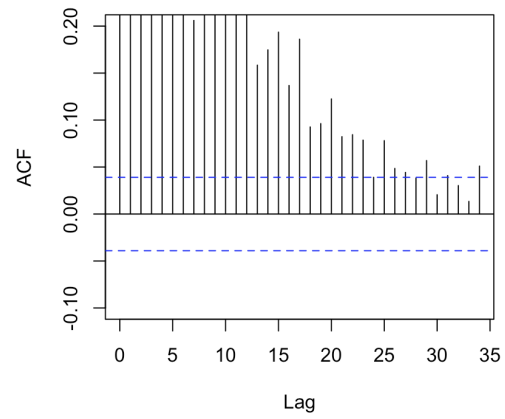
(b) Kvadratinų grąžų autokoreliacijos funkcija

3.5 pav.: TSLA autokoreliacijos funkcijų grafikai

Iš 3.5 ir 3.6 grafikų galima matyti, kad tiek Tesla, tiek ir Coca-Cola akcijų grąžų autokoreliacijos funkcijų grafikuose didžioji dalis autokoreliacijos koeficientų yra artimi nuliui ir patenka į pasikliovimo lygmens ribas, kas rodo silpną koreliaciją tarp gretimų laikotarpių grąžų. Kvadratinų grąžų autokoreliacijos funkcijos grafikuose



(a) Gražų autokoreliacijos funkcija



(b) Kvadratinių gražų autokoreliacijos funkcija

3.6 pav.: KO autokoreliacijos funkcijų grafikai

daugiausia matomos teigiamos ir pasiklivimo lygmenį viršijančios reikšmės, o tai rodo kintamumo klasterizaciją ir sąlyginės dispersijos priklausomybę nuo praeities reikšmių. Tai pagrindžia motyvą toliau taikyti GARCH ir APARCH sąlyginio heteroskedastiškumo modelius.

3.2 Modelių taikymas

Visų tolimesnėje rizikos matų prognozavimo tikslumo analizėje taikomų modelių sąrašas ir atitinkami jų žymėjimai pateikiami 3.2 lentelėje.

G_{norm}	:	GARCH(1,1) su normaliojo skirstinio prielaida
G_{st}	:	GARCH(1,1) su Stjudento t skirstinio prielaida
G_{sst}	:	GARCH(1,1) su asimetrinio Stjudento t skirstinio prielaida
A_{norm}	:	APARCH(1,1) su normaliojo skirstinio prielaida
A_{st}	:	APARCH(1,1) su Stjudento t skirstinio prielaida
A_{sst}	:	APARCH(1,1) su asimetrinio Stjudento t skirstinio prielaida

3.2 lentelė: Taikomų modelių sąrašas

Taikomi GARCH(1,1) ir APARCH(1,1) sąlyginio heteroskedastiškumo modeliai su trimis skirtingomis: normaliojo, Stjudento t ir asimetrinio Stjudento t skirstinių prielaidomis inovacijoms.

Tesla ir Coca-Cola akcijų gražų visų minėtų modelių parametrų įverčiai atitinkamai nurodyti 3.3 ir 3.4 lentelėse.

Modelis	a_0	a_1	b_1	ν	δ	γ_1	ξ
G_{norm}	0.000006	0.029965	0.965570				
G_{st}	0.000014	0.036521	0.955276	3.5531			
G_{sst}	0.000014	0.036524	0.955274	3.5537			0.9994
A_{norm}	0.000004	0.025912	0.969647		2.0390	-0.1119	
A_{st}	0.000108	0.057539	0.943071	3.5683	1.4578	0.1238	
A_{sst}	0.000108	0.057570	0.943072	3.5699	1.4572	0.1239	0.9974

3.3 lentelė: TSLA gražos taikomų modelių parametrų įverčiai

Tesla akcijos gražos modelių parametrų įverčių 3.3 lentelėje matomos visų modelių didelės b_1 reikšmės, lyginant su a_1 , kas reiškia, kad kintamumas keičiasi gana lėtai ir išlieka panašiam lygyje ilgą laiką. Modeliuose, kai daroma prielaida apie asimetrinį Stjudento t skirstinį, gauti ξ įverčiai yra artimi nuliui, vadinasi gražos skirstinio asimetrija egzistuoja, bet yra nedidelė.

Modelis	a_0	a_1	b_1	ν	δ	γ_1	ξ
G_{norm}	0.000002	0.050141	0.938063				
G_{st}	0.000004	0.114094	0.858747	4.2173			
G_{sst}	0.000003	0.108872	0.864222	4.3348			0.9223
A_{norm}	0.000047	0.063543	0.935075		1.3035	0.2237	
A_{st}	0.000387	0.142394	0.852441	4.3541	1.0245	0.2013	
A_{sst}	0.000463	0.131925	0.861880	4.5111	0.9781	0.2955	0.9039

3.4 lentelė: KO gražos taikomų modelių parametrų įverčiai

Coca-Cola akcijos gražos modelių parametrų įverčių 3.4 lentelėje taip pat matomos didelės b_1 reikšmės, rodančios lėtą kintamumo kitimą, o ξ įverčiai šiuo atveju rodo reikšmingesnį skirtumą nuo vieneto, tad laikoma, kad neigiama asimetrija čia yra statistiškai reikšminga. Taip pat gautos teigiamos γ_1 reikšmės APARCH modeliuose rodo, kad neigiama informacija šiuo atveju kintamumui daro didesnę poveikį nei teigiama.

3.3 Vertės pokyčio rizikos testavimas

Šioje skyriaus dalyje pateikiami vertės pokyčio rizikos (VaR) prognozavimo atliktų testų rezultatai. Abiems akcijoms analizė atlikta dviem rizikos lygiais, tai yra, kai pasiklivimo lygmuo α yra lygus 0.01 ir 0.05.

Vertės pokyčio rizikos prognozės apskaičiuojamos remiantis „slenkančio lango“ (angl. *rolling window*) principu, naudojant R paketo *rugarch* funkciją *ugarchroll*. Pirmiausia, pirmi 1200 laiko momentų – dienų stebėjimai yra naudojami įvertinti pradinis modelių parametrus. Tuomet, kas 25 dienas modeliai „slenkančiame lange“ vertinami iš naujo ir kiekvienam laiko momentui gaunami vieno laikotarpio į priekį vertės pokyčio rizikos VaR_{t+1}^α prognozuojami dydžiai, esant atitinkamam pasiklivimo lygmeniui α .

Tesla ir Coca-Cola akcijų VaR prognozavimo tikslumo testavimo rezultatai, kai $\alpha = 0.01$ ir $\alpha = 0.05$, pateikti 3.5, 3.6, 3.7 ir 3.8 lentelėse. Lentelėse pateikiamas pažeidimų santykis (ang. *violation ratio*) – stebėtų VaR pažeidimų ir teoriškai tikėtino pažeidimų skaičiaus santykis, žymimas VR. Jei šis rodiklis yra žymiai didesnis už vienetą, daroma prielaida, kad modelis nepakankamai įvertiną riziką, nes šiuo atveju stebėtų pažeidimų skaičius viršija tikėtiną, ir atvirkščiai, jeigu VR yra mažesnis už vienetą – rizika pervertinama. Taip pat lentelėse pateikiamos besąlyginio padengimo – UC, nepriklausomumo – IND ir sąlyginio padengimo – CC testų gautos p-reikšmės, kurios bus lyginamos su reikšmingumo lygmeniu lygiu 0.05.

Modelis	G_{norm}	G_{st}	G_{sst}	A_{norm}	A_{st}	A_{sst}
VR	1.667	0.984	0.984	1.591	0.909	0.909
UC	0.025	0.967	0.967	0.045	0.746	0.746
IND	0.387	0.610	0.610	0.409	0.638	0.638
CC	0.056	0.877	0.877	0.096	0.850	0.850

3.5 lentelė: TSLA VaR prognozavimo testų rezultatai, kai $\alpha = 0.01$

Iš Tesla akcijos vertės pokyčio rizikos (VaR), kai pasiklivimo lygmuo $\alpha = 0.01$, prognozavimo testų rezultatų 3.5 lentelėje matyti, kad abu sąlyginio heteroskedastiškumo modeliai GARCH ir APARCH su normaliojo skirstinio prielaida generuoja per daug pažeidimų – pažeidimų santykis VR abiem atvejais yra didesnis nei 1.5, o

tai reiškia, kad rizika yra nuvertinama. Šių modelių netinkamumą parodo ir mažesnės nei 0.05 gautos besąlyginio padengimo testo p-reikšmės, todėl UC testo nulinė hipotezė, kuri reiškia teisingą pažeidimų dažnį, yra atmetama. Likusių modelių, su Stjudento t ir asimetrinio Stjudento t skirstinių prielaidomis, pažeidimų santykio VR dydžiai yra artimi vienetui, visų trijų testų p-reikšmės viršija 0.05, todėl galima daryti išvadą, kad teisingo pažeidimų dažnio ir pažeidimų nepriklausomumo nulinės hipotezės nėra atmetamos, todėl šie modeliai tinkamai generuoja Tesla vertės pokyčio rizikos prognozes, kai $\alpha = 0.01$.

Modelis	G_{norm}	G_{st}	G_{sst}	A_{norm}	A_{st}	A_{sst}
VR	0.957	1.079	1.063	0.942	1.079	1.063
UC	0.726	0.512	0.594	0.632	0.512	0.594
IND	0.161	0.072	0.081	0.176	0.280	0.303
CC	0.352	0.161	0.188	0.357	0.449	0.511

3.6 lentelė: TSLA VaR prognozavimo testų rezultatai, kai $\alpha = 0.05$

Kai $\alpha = 0.05$, Tesla akcijos VaR prognozavimo testų rezultatai 3.6 lentelėje rodo, kad visų šešių analizuojamų modelių, šiuo atveju net ir modelių su normaliojo skirstinio prielaida, visų atliktų testų p-reikšmės yra didelės, todėl neatmetamos nei besąlyginio padengimo, nei nepriklausomumo testų nulinės hipotezės. Taigi, nėra pagrindo teigti, kad šiuo atveju bent vienas modelis yra netinkamas.

Apibendrinant Tesla VaR prognozavimo testų rezultatus, matyti, kad problema išryškėja tik tuomet, kai pasirenkamas pasiklivimo lygmuo $\alpha = 0.01$. Tuomet reikalaujama rinktis skirstinių, kurie leidžia modeliuoti sunkesnes uodegas, prielaidas. Kitu atveju, kai $\alpha = 0.05$, nei sąlyginio heteroskedastiškumo modelio, nei skirstinio prielaidos pasirinkimas reikšmingo skirtumo rezultatams nesudaro.

Iš Coca-Cola akcijos VaR prognozavimo testų, kai $\alpha = 0.01$, rezultatų 3.7 lentelėje matyti, kad kaip ir buvo galima tikėtis – GARCH modelis su normaliojo skirstinio prielaida yra visiškai netinkamas. Tai pagrindžia ne tik stipriai vienetą viršijantis VR rodiklis, bet ir gautos labai mažos ir sąlyginio, ir besąlyginio testų p-reikšmės, kas rodo, kad nulinės testų hipotezės yra atmetamos. Kiti modeliai, net ir APARCH su normaliojo skirstinio prielaida, šiuo atveju rodo didesnes nei 0.05 p-reikšmes, tad laikoma, kad jie pakankamai teisingai pateikia vertės pokyčio rizikos prognozes.

Modelis	G_{norm}	G_{st}	G_{sst}	A_{norm}	A_{st}	A_{sst}
VR	1.742	1.136	0.758	1.364	1.136	0.530
UC	0.014	0.616	0.362	0.203	0.616	0.061
IND	0.365	0.556	0.696	0.480	0.556	0.784
CC	0.032	0.742	0.611	0.346	0.742	0.167

3.7 lentelė: KO VaR prognozavimo testų rezultatai, kai $\alpha = 0.01$

Modelis	G_{norm}	G_{st}	G_{sst}	A_{norm}	A_{st}	A_{sst}
VR	0.836	1.049	0.957	0.851	1.018	0.942
UC	0.162	0.683	0.726	0.206	0.875	0.632
IND	0.317	0.089	0.161	0.293	0.109	0.176
CC	0.228	0.217	0.352	0.259	0.274	0.357

3.8 lentelė: KO vertės VaR prognozavimo testų rezultatai, kai $\alpha = 0.05$

Rezultatai 3.8 lentelėje rodo, kad Coca-Cola akcijos VaR, kai $\alpha = 0.05$, prognozavimo testo rezultatai atkartoja Tesla akcijos rezultatų, kai pasirenkamas toks pat α dydis, tendenciją, kuomet nei vienas modelis nėra laikomas netinkamu. Čia visų modelių testų rezultatai rodo pakankamai dideles p-reikšmes, tad nei viena nulinė hipotezė nėra atmetama ir daroma išvada, kad visi nagrinėti modeliai yra tinkami praktiniam taikymui.

Bendrai apžvelgiant gautus abiejų analizuotų akcijų vertės pokyčio rizikos prognozavimo testų rezultatus, galima įžvelgti gana panašią tendenciją. Abiem atvejais, pasirinkus $\alpha = 0.01$, tinkami sąlyginio heteroskedastiškumo modeliai tik turintys Stjudento t arba asimetrinio Stjudento t skirstinių prielaidas, nors Coca-Cola akcijos atveju neatmetamas ir APARCH modelis su normaliojo skirstinio prielaida. Tuo tarpu, kai $\alpha = 0.05$, visi nagrinėti modeliai pateikia statistiškai priimtinas vertės pokyčio rizikos prognozes.

3.4 Deficito vidurkio testavimas

Toliau pereinama prie rizikos mato deficito vidurkio (ES) prognozavimo tikslumo vertinimo taikant laisvojo nario ES regresijos (ESR) testą, kuriam atlikti naudojama R paketo *esback* funkcija *esr_backtest*.

Analizė taip pat atliekama dviem tais pačiais rizikos lygiais – kai α lygus 0.01 ir 0.05. Naudojamas tas pats „slenkančio lango“ principas kaip ir VaR testuose ir apskaičiuojamos vieno laikotarpio į priekį deficito vidurkio ES_{t+1}^α prognozės, esant pasirinktam pasiklovimo lygmeniui α .

Gautos ESR testų p-reikšmės abiemis akcijoms ir pasirinktiems skirtingiems α pateiktos 3.9, 3.10, 3.11 ir 3.12 lentelėse.

Modelis	G_{norm}	G_{st}	G_{sst}	A_{norm}	A_{st}	A_{sst}
ESR	0.098	1.000	0.821	0.025	1.000	0.841

3.9 lentelė: TSLA ES prognozavimo testų rezultatai, kai $\alpha = 0.01$

Modelis	G_{norm}	G_{st}	G_{sst}	A_{norm}	A_{st}	A_{sst}
ESR	0.063	1.000	0.737	0.094	1.000	0.813

3.10 lentelė: TSLA ES prognozavimo testų rezultatai, kai $\alpha = 0.05$

Iš Tesla akcijos ESR testų rezultatų lentelėse 3.9 ir 3.10 matyti, kad pasirinkus $\alpha = 0.01$, dėl itin mažos p-reikšmės sąlyginio heteroskedastiškumo modelis APARCH su normaliojo skirstinio prielaida neteisingai prognozuoja rizikos mato ES dydį. Kai $\alpha = 0.05$, visų analizuotų modelių p-reikšmės viršija 0.05, tačiau galima matyti, kad ir čia modeliai su normaliojo skirstinio prielaida išlieka silpnesni, nes reikšmingumo lygmens riba 0.05 viršijama tik minimaliai, kai tuo tarpu modelių su Stjudento t ir asimetriniu Stjudento t skirstinių prielaidomis gautos p-reikšmės artimos vienetui.

Modelis	G_{norm}	G_{st}	G_{sst}	A_{norm}	A_{st}	A_{sst}
ESR	0.027	0.988	0.644	0.140	0.952	0.665

3.11 lentelė: KO ES prognozavimo testų rezultatai, kai $\alpha = 0.01$

Modelis	G_{norm}	G_{st}	G_{sst}	A_{norm}	A_{st}	A_{sst}
ESR	0.145	1.000	0.801	0.173	1.000	0.851

3.12 lentelė: KO ES prognozavimo testų rezultatai, kai $\alpha = 0.05$

Coca-Cola akcijų ESR testo rezultatai esantys 3.11 ir 3.12 lentelėse rodo pasikartojančią situaciją. Kai $\alpha = 0.01$, vienareikšmiškai netinkamas modelis yra GARCH sąlyginio heteroskedastiškumo modelis su normaliojo skirstinio prielaida. Ir vėlgi abiem rizikos lygiais modeliai su Stjudento t ir asimetrinio Stjudento t skirstinių prielaidomis rodo reikšmingai dideles ESR testų p-reikšmes, tad laikoma, kad jie tinkamiausiai nurodo rizikos mato ES prognozes, esant pasirinktam α .

Apibendrinant gautus abiejų akcijų ESR testų rezultatus, daromos išvados analogiškos gautoms prieš tai aptartuose vertės pokyčio rizikos (VaR) prognozavimo tikslumo testuose. Abiejų akcijų modeliai su normaliojo skirstinio prielaida neteisingai prognozuoja tiek VaR, tiek ir ES rizikos matų dydžius, kai $\alpha = 0.01$. Tuo tarpu modeliai su skirstinių, modeliuojančių sunkesnes uodegas nei normalusis skirstinys, prielaidomis – abiem rizikos lygiais laikomi statistškai priimtini ir VaR, ir ES prognozavime. Tad nors pasirinkus $\alpha = 0.05$, nepriklausomai nei nuo sąlyginio heteroskedastiškumo modelio, nei nuo skirstinio prielaidos pasirinkimo visi modeliai generuoja statistškai priimtinas abiejų rizikos matų prognozes, darant bendrą atliktos analizės išvadą – sakoma, kad abiems akcijoms atmetami modeliai turintys normaliojo skirstinio prielaidą.

3.5 Modelių tinkamumo vertinimas

Siekiant įvertinti, kuris iš statistškai priimtinių modelių (GARCH ir APARCH modelių su Stjudento t ir asimetrinio Stjudento t skirstinių prielaidomis) abiems akcijoms yra tinkamiausias praktiniame taikyme – naudojamas Akaike informacijos kriterijus (AIC). Šis informacijos kriterijus apibūdinamas taip [1]:

$$AIC = 2k - 2 \ln(L),$$

čia k yra modelio parametrų skaičius ir L yra maksimali modelio tikėtinumo funkcijos reikšmė. Pagal Akaike informacijos kriterijų – tinkamiausias modelis yra tas, kurio AIC reikšmė yra mažiausia.

Gautos Tesla ir Coca-Cola akcijų gražų modelių AIC reikšmės pateikiamos 3.13 ir 3.14 lentelėse.

Pagal gautus rezultatus, esančius 3.13 lentelėje, daroma išvada, kad Tesla akcijos gražai tinkamiausiu modeliu laikomas GARCH(1,1) modelis su Stjudento t skirstinio

Modelis	G_{st}	G_{sst}	A_{st}	A_{sst}
AIC	-4.2310	-4.2293	-4.2289	-4.2272

3.13 lentelė: TSLA akcijos gražos modelių AIC reikšmės

prielaida. Šis rezultatas atitinka anksčiau aptartus parametrų įverčius, rodančius gražų pasiskirstymą su sunkiomis uodegomis.

Modelis	G_{st}	G_{sst}	A_{st}	A_{sst}
AIC	-6.5755	-6.5768	-6.5811	-6.5838

3.14 lentelė: KO akcijos gražos modelių AIC reikšmės

Coca-Cola akcijos gražai, pagal mažiausią AIC reikšmę 3.14 lentelėje, daroma išvada, kad tinkamiausias yra APARCH modelis su asimetrinio Stjudento t skirstinio prielaida. Šis rezultatas atitinka prieš tai gautus parametrų įverčius, rodančius ne tik sunkias gražos skirstinio uodegas, bet ir reikšmingą skirstinio asimetriją.

Išvados

Šiame darbe teoriškai pristatyti rizikos matai – vertės pokyčio rizika (VaR) ir deficito vidurkis (ES), jų svarba ir savybės. Taip pat nagrinėti parametriniai ir sąlyginio heteroskedastiškumo modeliai, rizikos matų prognozavimo modelių tikslumo testai. Pritaikius pateiktą teoriją Tesla bei Coca-Cola akcijų gražoms ir atrinkus tik tuos modelius, kurių VaR ir ES prognozės pagal atliktus testus yra statistiškai priimtinos, tolesniam palyginimui buvo taikomas Akaike informacijos kriterijus. Galiausiai nustatyta, kad Tesla akcijos gražai tinkamiausias yra GARCH(1,1) modelis su Stjudento t skirstinio prielaida, o Coca-Cola akcijos gražai – APARCH(1,1) modelis su asimetrinio Stjudento t skirstinio prielaida. Tokie gauti rezultatai leidžia daryti išvadą, kad šių nagrinėjamų akcijų gražoms normaliojo skirstinio prielaida rizikos matų skaičiavimui yra netinkama.

Tolimesniuose darbuose būtų galima analizuoti didesnio laikotarpio akcijų uždarymo kainas, kitus rizikos matus bei skirstinius. Taip pat palyginti šiuos gautus rezultatus su kitais sąlyginio heteroskedastiškumo modeliais bei atlikti papildomus VaR ir ES prognozavimo modelių tikslumo testus.

Literatūra

- [1] Onoja M Akpa and Emmanuel I Unuabonah. Small-sample corrected akaike information criterion: an appropriate statistical tool for ranking of adsorption isotherm models. *Desalination*, 272(1-3):20–26, 2011.
- [2] Timotheos Angelidis, Alexandros Benos, and Stavros Degiannakis. The use of garch models in var estimation. *Statistical Methodology*, 1(1-2):105–128, 2004.
- [3] Philippe Artzner, Freddy Delbaen, Jean-Marc Eber, and David Heath. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9(3):203–228, 1999.
- [4] Sebastian Bayer and Timo Dimitriadis. Regression-based expected shortfall backtesting. *Journal of Financial Econometrics*, 20(3):437–471, 2022.
- [5] Guglielmo Maria Caporale and Timur Zekokh. Modelling volatility of cryptocurrencies using markov-switching garch models. *Research in International Business and Finance*, 48:143–155, 2019.
- [6] Patrick Cheridito and Tianhui Li. Risk measures on orlicz hearts. *Mathematical Finance: An International Journal of Mathematics, Statistics and Financial Economics*, 19(2):189–214, 2009.
- [7] Peter F. Christoffersen. *Elements of Financial Risk Management*. Academic Press, 2003.
- [8] Timo Dimitriadis and Sebastian Bayer. A joint quantile and expected shortfall regression framework. *Electronic Journal of Statistics*, 13:1823–1871, 2019.
- [9] Kevin Dowd. *Measuring market risk*. John Wiley & Sons, 2007.
- [10] Omar M Eidous and Mohammad Y Al-Rawwash. Approximations for standard normal distribution function and its invertible. *Journal of Algorithms & Computational Technology*, 19:17483026251322100, 2025.

- [11] Paul Embrechts, Hansjörg Furrer, and Roger Kaufmann. Quantifying regulatory capital for operational risk. *Derivatives Use, Trading and Regulation*, 9(3): 217–233, 2003.
- [12] Hans Föllmer and Alexander Schied. Convex and coherent risk measures. *Encyclopedia of Quantitative Finance*, p. 355–363, 2010.
- [13] Florentijn Gelling. Expected shortfall backtesting. Master’s thesis, Erasmus University Rotterdam, 2019.
- [14] Pierre Giot and Sébastien Laurent. Value-at-risk for long and short trading positions. *Journal of Applied Econometrics*, 18(6):641–663, 2003.
- [15] Sue Gordon. The normal distribution. *Sydney: Mathematics Learning Centre, University of Sydney*, 2006.
- [16] Fotios C Harmantzis, Linyan Miao, and Yifan Chien. Empirical study of value-at-risk and expected shortfall models with heavy tails. *The Journal of Risk Finance*, 7(2):117–135, 2006.
- [17] Wei Kuang. Oil tail-risk forecasts: From financial crisis to covid-19. *Risk Management*, 24(4):420, 2022.
- [18] Lindsay A Lechner and Timothy C Ovaert. Value-at-risk: Techniques to account for leptokurtosis and asymmetric behavior in returns distributions. *The Journal of Risk Finance*, 11(5):464–480, 2010.
- [19] Rui Li and Saralees Nadarajah. A review of student’s distribution and its generalizations. *Empirical Economics*, 58(3):1461–1490, 2020.
- [20] Guillermo Magnou. An application of extreme value theory for measuring financial risk in the uruguayan pension fund. *Compendium: Cuadernos de Economía y Administración*, 4(7):1–19, 2017.
- [21] Alexander J McNeil, Rüdiger Frey, and Paul Embrechts. *Quantitative risk management: concepts, techniques and tools-revised edition*. Princeton University Press, 2005.
- [22] Khaled Mokni, Zouheir Mighri, and Faysal Mansouri. On the effect of subprime crisis on value-at-risk estimation: Garch family models approach. *International Journal of Economics and Finance*, 1(2):88–104, 2009.

- [23] Carolyn Ogutu, Betuel Canhanga, and Pitos Biganda. Modeling exchange rate volatility using aparch models. *Journal of the Institute of Engineering*, 14(1): 96–106, 2018.
- [24] Krzysztof Piontek. The analysis of power for some chosen var backtesting procedures: Simulation approach. *Advances in Data Analysis, Data Handling and Business Intelligence*, p. 481–490. Springer, 2009.
- [25] Sergey Sarykalin, Gaia Serraino, and Stan Uryasev. Value-at-risk vs. conditional value-at-risk in risk management and optimization. *State-of-the-art decision-making tools in the information-intensive age*, p. 270–294. Informs, 2008.
- [26] Asifa Tassaddiq. A new representation of the k-gamma functions. *Mathematics*, 7(2):133, 2019.
- [27] Xinsheng Xu, Zhiqing Meng, Ping Ji, Chuangyin Dang, and Hongwei Wang. On the newsvendor model with conditional value-at-risk of opportunity loss. *International Journal of Production Research*, 54(8):2449–2458, 2016.
- [28] Yasuhiro Yamai and Toshinao Yoshida. Value-at-risk versus expected shortfall: A practical perspective. *Journal of Banking & Finance*, 29(4):997–1015, 2005.
- [29] Chuancun Yin and Dan Zhu. New class of distortion risk measures and their tail asymptotics with emphasis on var. *arXiv preprint arXiv:1503.08586*, 2015.