



VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
FINANSŲ IR DRAUDIMO MATEMATIKOS MAGISTRO STUDIJŲ PROGRAMA

Baigiamasis magistro darbas

**Konkordacijos matų analizė ir taikymas priklausomybių
modeliavimui finansų duomenyse**

(Analysis of Concordance Measures and Their Application to Dependency
Modeling in Financial Data)

Atliko: Paulina Bilinskaitė

VU el. p.: paulina.bilinskaite@mif.stud.vu.lt

Darbo vadovas:

Doc. dr. Martynas Manstavičius

Vilnius
2026

Turinys

Santrauka	2
Abstract	3
Įvadas	4
1. Koreliacijos ir konkordacijos teoriniai aspektai	6
1.1. Kovariacija ir Pearson koreliacijos koeficientas	6
1.2. Sklar teorema ir kopulų vaidmuo	7
1.2.1. Kopulos tankis	7
1.3. Konkordacija ir konkordacijos matų aksiomos	8
1.4. Kendall τ ir jo apibendrinimai	9
1.5. Spearman ranginė koreliacija	11
1.6. Blomqvist β ir koreliacijos tipo konkordacijos matai	11
1.7. Kopulų parametrizavimas pagal Kendall τ	12
1.8. Priklausomybės stiprumas, stop-loss tvarka ir portfelio rizika	13
1.9. Konkordacijos matų įverčiai	15
1.10. Empirinė kopula ir pseudo-stebėjimai	16
1.11. Kopulų parametrų įvertinimas pagal Kendall τ	16
1.12. Didžiausio tikėtinumo metodas (MLE)	17
1.13. Pseudo-didžiausio tikėtinumo metodas	18
1.14. Monte Carlo simuliacijos	18
1.15. Uodegų priklausomybė	18
1.16. VaR ir CVaR teorinis pagrindas	19
1.17. Modelių tinkamumo vertinimas	20
2. Duomenų struktūra ir standartizavimas	21
2.1. Aktyvų kainų dinamika ir preliminari vizualizacija	21
2.2. Logaritminių grąžų skaičiavimas	22
2.3. Trūkstamų reikšmių ir datų suderinimas	23
2.4. Pseudo-stebėjimai ir kopulų kalibravimas	23
3. Rezultatų analizė	25
3.1. Konkordacijos matų įverčiai	25
3.1.1. Kendall τ	25
3.1.2. Spearman ρ	26
3.1.3. Blomqvist β	28
3.2. Priklausomybės struktūra sklaidos grafikais	29
3.3. Kendall τ ir Spearman ρ šilumos žemėlapiai	32
3.4. Gauso kopulos simuliacijos ir atitikimas	33
3.5. Monte Carlo simuliacijų rezultatai	34
3.6. Portfelio rizikos priklausomybė nuo Kendall τ	35
4. Išvados	37
Priedas Nr.1	
Priedas Nr.2	

Santrauka

Šiame darbe tiriama konkordacijos matai - Kendall τ , Spearman ρ ir Blomqvist β bei jų ryšys su kopulų teorija, taikant juos finansų rinkų priklausomybės modeliavimui. Konkordacijos matai suteikia nparametrinį būdą vertinti atsitiktinių dydžių priklausomybę, nepriklausomai nuo marginaliųjų pasiskirstymų, todėl jie yra itin tinkami finansų duomenims, kurie dažnai pasižymi netiesine struktūra. Darbo teorinė dalis remiasi Sklar teorema, kuri leidžia bendrą pasiskirstymo funkciją išskaidyti į marginalias pasiskirstymo funkcijas ir kopulą, bei Scarsini aksiomomis, apibrėžiančiomis konkordacijos matų klasę.

Praktinėje darbo dalyje analizuojami penkerių metų (dieninių uždarymo kainų) duomenys, apimančius dešimt pasirinktų bendrovių ir indeksų: *Microsoft* (MSFT), *S&P 500* (SP500), *SAP* (SAP), *Nasdaq* (NDAQ), *Apple* (AAPL), *SAPGF* (SAPGF), *Nestlé* (NSRGY), *Vokietijos DAX indeksas* (DAX), *iShares MSCI France ETF* (EWQ) ir *AstraZeneca* (AZN). Šie duomenys buvo gauti iš viešai prieinamos finansinės platformos stocknear.com. Duomenys transformuojami į logaritmines grąžas, apskaičiuojami konkordacijos matai ir modeliuojama priklausomybė Gauso, Stjudent'o t , Clayton ir Gumbel kopulomis. Monte Carlo simuliacijos parodo, kad Kendall τ stabiliai atkuria teorinę priklausomybę įvairių šeimų kopulose, o Gauso ir Stjudent'o t tiksliausiai atitinka empirines finansų rinkų struktūras. Stjudent'o t pasižymi stipria uodegų priklausomybe ir generuoja didesnę portfelio riziką esant toms pačioms Kendall τ reikšmėms.

Gauti rezultatai rodo, kad Kendall τ yra stabiliausias ir informatyviausias empirinis priklausomybės matas, Spearman ρ reikšmės dažniausiai didesnės, o Blomqvist β – mažiausios. Portfelio rizikos analizė atskleidžia, jog didėjant Kendall τ , portfelio standartinis nuokrypis auga monotoniškai, o Stjudent'o t atveju, sparčiau, dėl uodegų priklausomybės efekto. Darbe daroma išvada, kad konkordacijos matai ir kopulos sudaro tvirtą matematinę pagrindą pažangiam finansų rizikos modeliavimui ir gali būti taikomi portfelių optimizavimui bei streso testams.

Raktiniai žodžiai – konkordacijos matai, Kendall τ , Spearman ρ , Blomqvist β , kopulų teorija, Sklar teorema, Scarsini aksiomos, Gauso kopula, Stjudent'o t kopula, Clayton kopula, Gumbel kopula, Monte Carlo simuliacijos.

Abstract

This thesis investigates measures of concordance, namely Kendall's τ , Spearman's ρ , and Blomqvist's β , and their relationship with copula theory, with applications to dependence modeling in financial markets. Measures of concordance provide a nonparametric framework for assessing the dependence between random variables independently of their marginal distributions, which makes them particularly suitable for financial data that often exhibit nonlinear dependence structures. The theoretical part of the thesis is based on Sklar's theorem, which allows a joint distribution function to be decomposed into marginal distribution functions and a copula, as well as on Scarsini's axioms, which characterize the class of concordance measures.

The empirical part of the study analyzes five years of daily closing price data for ten selected companies and indices: *Microsoft* (MSFT), *S&P 500* (SP500), *SAP* (SAP), *Nasdaq* (NDAQ), *Apple* (AAPL), *SAPGF* (SAPGF), *Nestlé* (NSRGY), the *German DAX index* (DAX), the *iShares MSCI France ETF* (EWQ), and *AstraZeneca* (AZN). The data were obtained from the publicly available financial platform stocknear.com. The price series are transformed into logarithmic returns, concordance measures are computed, and dependence structures are modeled using Gaussian, Student's t , Clayton, and Gumbel copulas. Monte Carlo simulations show that Kendall's τ reliably reproduces the theoretical dependence structure across different copula families, while the Gaussian and Student's t copulas provide the best fit to empirical financial market data. The Student's t copula exhibits strong tail dependence and generates higher portfolio risk for the same values of Kendall's τ .

The results indicate that Kendall's τ is the most stable and informative empirical measure of dependence, while Spearman's ρ typically attains larger values and Blomqvist's β the smallest ones. Portfolio risk analysis reveals that the portfolio standard deviation increases monotonically with Kendall's τ , with a more pronounced growth in the case of the Student's t copula due to tail dependence effects. The thesis concludes that measures of concordance and copula models provide a solid mathematical foundation for advanced financial risk modeling and can be effectively applied to portfolio optimization and stress testing.

Keywords – measures of concordance, Kendall's τ , Spearman's ρ , Blomqvist's β , copula theory, Sklar's theorem, Scarsini's axioms, Gaussian copula, Student's t copula, Clayton copula, Gumbel copula, Monte Carlo simulations.

Įvadas

Finansų rinkų priklausomybės modeliavimas sudaro esminę šių laikų rizikų valdymo, portfelio teorijos ir draudimo matematikos dalį. Tradiciniai koreliacijos matavimo įrankiai, tokie kaip Pearson koreliacijos koeficientas, vertina tik tiesinę priklausomybę ir yra nejautrūs netiesinei, asimetrinei ar uodeginei grąžų struktūrai. Toks ribotumas yra kritinis finansams, kur logaritminės grąžos dažnai turi sunkias uodegas, ekstremalius bendrus nuostolius ir nestabilias koreliacijas bei pasižymi staigiais šuoliais.

Dėl šių priežasčių, pastaraisiais dešimtmečiais vis daugiau dėmesio sulaukia **konkordacijos matai** ir **kopulų teorija**, kurios leidžia modeliuoti bendrą priklausomybės struktūrą nepriklausomai nuo marginaliųjų pasiskirstymų. Konkordacijos matai, tokie kaip Kendall τ , Spearman ρ bei Blomqvist β , suteikia neparametrinę priemonę priklausomybei matuoti, remiantis rangais ir yra atsparūs ekstremalioms reikšmėms ar netiesiniams ryšiams. Tuo tarpu kopulos, remiantis Sklar teorema [11], leidžia tiksliai modeliuoti atsitiktinių dydžių tarpusavio priklausomybę, atskiriant ją nuo marginaliųjų skirstinių savybių. Šis požiūris yra ypač aktualus finansų, draudimo ir rizikos valdymo srityse, kur būtina tiksliai įvertinti bendrų nuostolių riziką, uodegų priklausomybes bei priklausomybės struktūros asimetriją [4, 7].

Darbo tikslas – išanalizuoti konkordacijos matų (Kendall τ , Spearman ρ , Blomqvist β) teorines savybes, jų ryšį su kopulų modeliais ir įvertinti šių matų praktinį taikymą finansų rinkų priklausomybės bei portfelio rizikos analizei, naudojant 5 metų dieninių akcijų indeksų duomenis.

Darbo uždaviniai:

1. Išanalizuoti koreliacijos ir konkordacijos teorinius aspektus, jų skirtumus ir taikymo ribotumus finansų rinkose.
2. Aptarti Scarsini konkordacijos matų aksiomas, Sklar teoremą ir kopulų vaidmenį priklausomybės modeliavime.
3. Matematiškai suformuluoti pagrindinius konkordacijos matus: Kendall τ , Spearman ρ ir Blomqvist β , pateikiant jų savybes ir ryšius su kopulomis.
4. Surinkti ir apdoroti 5 metų 10 finansinių aktyvų dieninių uždarymo kainų duomenis, apskaičiuojant logaritmines grąžas ir porinius priklausomybės matų įverčius.
5. Įvertinti empirines priklausomybes tarp aktyvų, naudojant konkordacijos matus ir vizualizacijas (scatter grafikus, šilumos žemėlapius).
6. Parametrizuoti Gauso ir Stjudent'o t pagal konkordacijos matų reikšmes ir palyginti jų gebėjimą atkurti realių duomenų priklausomybės struktūrą.
7. Atlikti Monte Carlo simuliacijas skirtingų kopulų šeimoms, analizuojant Kendall τ stabilumą ir teorinių – empirinių įverčių sutapimą.
8. Įvertinti portfelio rizikos pokyčius priklausomai nuo Kendall τ reikšmės ir palyginti rezultatus tarp Gauso bei Stjudent'o t modelių.
9. Suformuluoti išvadas dėl konkordacijos matų tinkamumo priklausomybės modeliavimui bei jų taikymo finansų rizikos analizėje.

1. Koreliacijos ir konkordacijos teoriniai aspektai

Koreliacijos ir konkordacijos matai yra pagrindiniai įrankiai atsitiktinių dydžių priklausomybės struktūrai apibūdinti. Klasikinė koreliacijos teorija orientuota į *tiesinį* ryšį, o šiuolaikinė konkordacijos ir kopulų teorija leidžia nagrinėti bendresnes, netiesinės priklausomybes, atskiriant priklausomybės struktūrą nuo marginaliųjų skirstinių [6, 7].

1.1. Kovariacija ir Pearson koreliacijos koeficientas

Pearson koreliacijos koeficientas yra bene dažniausiai taikomas priklausomybės matas ekonomikoje ir finansuose. Jis remiasi kovariacijos sąvoka ir matuoja, kiek X ir Y nukrypimai nuo jų vidurkių linkę sutapti.

Apibrėžimas 1. Tarkime X ir Y yra atsitiktiniai dydžiai su baigtinėmis dispersijomis $\text{Var}(X) < \infty$ ir $\text{Var}(Y) < \infty$.

Kovariacija tarp X ir Y apibrėžiama kaip:

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y.$$

Pearson koreliacijos koeficientas (kai $\sigma_X > 0$ ir $\sigma_Y > 0$) apibrėžiamas taip:

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y},$$

kur $\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)}$, $\sigma_Y = \sqrt{\text{Var}(Y)}$. Tokiu atveju $\rho_{X,Y} \in [-1, 1]$.

Apibrėžimas 2. Atsitiktiniai dydžiai X ir Y vadinami nekoreliuotais, jei $\text{Cov}(X, Y) = 0$ (arba ekvivalentiškai $\rho_{X,Y} = 0$). Pastaba: Nekoreliuotumas paprastai *nereiškia* nepriklausomumo, išskyrus specialius atvejus, pavyzdžiui, kai vektorius (X, Y) turi bendrai normalų skirstinį. Yra pavyzdžių, kai net ir nekoreliuoti dydžiai yra stipriai priklausomi, pavyzdžiui: Tarkime $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ir $Y = X^2$. Tuomet

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(X, X^2) = \mathbb{E}[X^3] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X^2].$$

Kadangi X turi simetrišką normalųjį skirstinį,

$$\mathbb{E}[X] = 0, \quad \mathbb{E}[X^3] = 0,$$

todėl

$$\text{Cov}(X, Y) = 0.$$

Tačiau atsitiktiniai dydžiai X ir X^2 nėra nepriklausomi, nes X^2 yra deterministinė X funkcija. Pavyzdžiui,

$$\mathbb{P}(X^2 \leq 1 \mid X > 0) = \mathbb{P}(0 < X \leq 1) \neq \mathbb{P}(X^2 \leq 1),$$

vadinas, X ir X^2 yra priklausomi [7].

Koreliacijos koeficientas yra simetriškas ($\rho_{X,Y} = \rho_{Y,X}$), invariantiškas afininėms transformacijoms su teigiamais koeficientais (t.y. $\rho_{aX+b, cY+d} = \rho_{X,Y}$, kai $a, c > 0$), tačiau jis priklauso nuo marginaliųjų skirstinių. Esant netiesinei, bet monotoniškai priklausomybei, Pearson koreliacija gali būti artima nuliui, nors ryšys yra stiprus. Tokios situacijos dažnos finansų rinkose, kur gražos pasižymi asimetriškais ir „sunkiomis uodegomis“ pasižyminčiais skirstiniais [7].

Dėl šių priežasčių, vien koreliacijos analizė gali būti klaidinanti, ir atsiranda poreikis *ranginiams* priklausomybės matams, kurie nekinta taikant monotonines transformacijas ir geriau atspindi bendrą elgseną.

1.2. Sklar teorema ir kopulų vaidmuo

Sklar teorema [11] yra kopulų teorijos kertinis akmuo. Tarkime H – dvimatė pasiskirstymo funkcija su marginaliosiomis pasiskirstymo funkcijomis F_X ir F_Y . Tuomet egzistuoja kopula C tokia, kad

$$H(x,y) = C(F_X(x), F_Y(y)) \quad \forall x,y.$$

Jei F_X ir F_Y yra tolydžios, C yra vienintelė.

Atvirkščiai, duota bet kokia kopula C ir marginaliosios pasiskirstymo funkcijos F_X, F_Y , funkcija H apibrėžta aukščiau yra korektiška jungtinė skirstinio funkcija. Taigi, priklausomybės struktūra ir marginaliosios pasiskirstymo funkcijos gali būti modeliuojamos atskirai, o konkordacijos matai iš esmės yra kopulų erdvės funkcionalai. Kopulų teorija ir jos taikymas priklausomybei modeliuoti plačiai aprašyti [6, 7].

1.2.1. Kopulos tankis

Tarkime (X,Y) yra dvimatis atsitiktinis vektorius su tolydžiomis marginaliosiomis pasiskirstymo funkcijomis F_X ir F_Y , o H – jų bendra pasiskirstymo funkcija. Pagal Sklaro teoremą egzistuoja kopula C , tokia kad

$$H(x,y) = C(F_X(x), F_Y(y)), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

ir, esant tolydžiomis marginaliosiomis pasiskirstymo funkcijomis, ši kopula yra vienareikšmiškai apibrėžta. Sklaro teorema leidžia griežtai atskirti marginaliųjų skirstinių poveikį nuo priklausomybės struktūros, kuri pilnai aprašoma kopula [11].

Apibrėžimas 5. Jeigu kopula C yra absoliučiai tolydi Lebesgue mato λ^2 atžvilgiu vienetiniame kvadrato $[0,1]^2$, tai egzistuoja funkcija

$$c(u,v) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u,v), \quad (u,v) \in (0,1)^2,$$

vadinama *kopulos tankiu* [2, 6].

Tokiu atveju, kopula gali būti išreikšta integraline forma

$$C(u, v) = \int_0^u \int_0^v c(s, t) ds dt,$$

o su kopula susietas Borelio tikimybinis matas μ_C tenkina

$$d\mu_C(u, v) = c(u, v) du dv.$$

Kopulos tankis c nusako lokalią priklausomybės struktūrą vienetiniame kvadrato $[0, 1]^2$ ir nepriklauso nuo marginaliųjų pasiskirstymo funkcijų. Jis pilnai aprašo monotonišką (ranginę) priklausomybę tarp atsitiktinių dydžių [10].

Svarbu pabrėžti, kad ne kiekviena kopula turi tankį. Egzistuoja singuliarios kopulos, pavyzdžiui, komonotoniškumo kopula

$$M(u, v) = \min\{u, v\},$$

kurios atitinkamas tikimybinis matas nėra absoliučiai tolydus Lebesgue mato atžvilgiu. Tokiais atvejais kopula interpretuojama, kaip integralas stačiakampio $[0, u] \times [0, v]$ dvimačio tikimybino mato atžvilgiu, o ne per tankio funkciją [6].

Ryšys su bendra tankio funkcija. Jeigu atsitiktinis vektorius (X, Y) turi bendrą tankį $f_{X, Y}$, o marginaliosios pasiskirstymo funkcijos turi tankius f_X ir f_Y , tai galioja faktorizacija

$$f_{X, Y}(x, y) = c(F_X(x), F_Y(y)) f_X(x) f_Y(y),$$

kuri parodo, kad kopulos tankis veikia kaip priklausomybės korekcinis daugiklis, modifikuojantis nepriklausomų marginaliųjų pasiskirstymo funkcijų sandaugą [7].

1.3. Konkordacija ir konkordacijos matų aksiomos

Konkordacija intuityviai nusako tendenciją dviejų atsitiktinių dydžių būti „dideliais kartu“ arba „mažais kartu“. Vietoj konkrečių skaitinių reikšmių lyginimo, analizuojamas jų *rangų* suderinamumas.

Tarkime, kad (X_1, Y_1) ir (X_2, Y_2) yra nepriklausomos poros (X, Y) kopijos. Sakoma, kad:

- Poros yra *suderintos*, jei $(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0$ (t.y. didesniai X paprastai tenka didesnis Y , o mažesniai X mažesnis Y);
- Poros yra *nesuderintos*, jei $(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0$ (didesniai X tenka mažesnis Y).

Homogenizuojant šią idėją kopulų erdvėje, konkordacijos matai interpretuojami kaip funkciniai $\kappa : \mathcal{C} \rightarrow [-1, 1]$, kur $\mathcal{C}$ – visų dvimačių kopulų aibė. Remiantis [2, 10], konkordacijos matas turi tenkinti šias savybes:

1. Normalizacija:

$$\kappa(M) = 1, \quad \kappa(W) = -1,$$

kur $M(u,v) = \min\{u,v\}$ ir $W(u,v) = \max\{u+v-1,0\}$ yra standartinės kopulos, apibrėžtos srityje $(u,v) \in [0,1]^2$:

- $M(u,v)$ atitinka *didžiausią teigiamą priklausomybę* (komonotoniškumą),
- $W(u,v)$ atitinka *didžiausią neigiamą priklausomybę* (kontramotoniškumą).

Ši savybė užtikrina, kad mato κ reikšmė būtų intervale $[-1,1]$, lyginant su šiais kraštiniais atvejais.

2. Simetrija:

$$\kappa(C) = \kappa(C^T), \quad C^T(u,v) := C(v,u).$$

3. **Monotoniškumas:** Jei $C_1 \preceq C_2$ konkordacijos tvarkos prasme, tai yra $C_1(u,v) \leq C_2(u,v)$ visiems $(u,v) \in [0,1]^2$, tuomet:

$$\kappa(C_1) \leq \kappa(C_2).$$

Tai reiškia, kad jei kopula C_2 atspindi stipresnę teigiamą priklausomybę nei C_1 , tai ir jos konkordacijos matas turi būti ne mažesnis.

4. Aprėžtumas:

$$\kappa(C) \in [-1,1], \quad \text{visoms } C \in \mathcal{C},$$

t.y. konkordacijos matas visada priklauso intervalui nuo -1 iki 1 , nepriklausomai nuo pasirinktos kopulos C .

5. **Invariantiškumas rangų transformacijoms:** jei (X,Y) ir (X',Y') turi tą pačią kopulą, bet skirtingas marginaliąsias pasiskirstymo funkcijas, jų konkordacijos matas sutampa.

Dolati ir Úbeda-Flores [2] parodo, kad šios aksiomos suderinamos ir su daugiamaite ($d > 2$) konkordacijos teorija: galima apibrėžti daugiamačius matų šeimos narius, kurie sutampa su klasikiais Kendall τ , Spearman ρ_S ir Blomqvist β dvimačiu atveju.

1.4. Kendall τ ir jo apibendrinimai

Kendall τ yra vienas seniausių ir labiausiai paplitusių konkordacijos matų. Jis natūraliai siejasi su porų suderinamumo ir nesuderinamumo tikimybių skirtumu.

Apibrėžimas 3. Tarkime X ir Y yra du realūs atsitiktiniai dydžiai su bendra dvimate skirstinio funkcija $H(x,y)$.

Kendall konkordacijos koeficientas τ apibrėžiamas taip:

$$\tau = \mathbb{P}((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0) - \mathbb{P}((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0),$$

kur (X_1, Y_1) ir (X_2, Y_2) yra dvi nepriklausomos (X, Y) kopijos.

Šis koeficientas matuoja tikimybės skirtumą tarp suderintų ir nesuderintų porų:

- pora laikoma *suderinta*, jei $(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0$,
- pora laikoma *nesuderinta*, jei $(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0$.

Alternatyvi forma, išreiškianti τ kaip matematinę viltį:

$$\tau = \mathbb{E} [\text{sign}((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2))] .$$

Kopulinė forma. Tarkime atsitiktiniai dydžiai X ir Y turi bendrą pasiskirstymo funkciją $H(x, y)$ bei marginaliasias funkcijas $F_X(x)$ ir $F_Y(y)$. Pagal **Sklar teoremą** [11], jei $F_X(x)$ ir $F_Y(y)$ yra tolydžios, egzistuoja unikali kopula $C: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, tokia kad:

$$H(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y)), \quad \text{visiems } x, y \in \mathbb{R}.$$

Kopula C visiškai apibūdina priklausomybės tarp X ir Y struktūrą, nepriklausomai nuo jų marginaliųjų skirstinių.

Kendall konkordacijos koeficientas kopulų teorijoje gali būti išreikštas vien per kopulą C :

$$\tau(C) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1,$$

kur integruojama pagal patį C , t.y. naudojama kopulos indukuotas tikimybinis matas. Diferencialinė kopula dC stačiakampėms aibėms išreiškiama kaip skirtumas tarp kraštinių reikšmių pagal dviejų kintamųjų pasiskirstymo funkcijos augimą. Tokiu būdu, kopulos indukuotas matas dC realizuojamas kaip Borelio matas μ_C vienetiniame kvadrato $[0, 1]^2$, t. y.

$$\mu_C(A \times [0, 1]) = \mu_C([0, 1] \times A) = \lambda(A) \quad \text{visoms Borelio aibėms } A \subseteq [0, 1],$$

kur λ žymi viematį Lebego matą. Ši konstrukcija leidžia formaliai taikyti integravimą pagal kopulą, išreiškiant jį kaip integralą pagal atitinkamą matą:

$$\int_{[0, 1]^2} f(u, v) dC(u, v) = \int_{[0, 1]^2} f(u, v) d\mu_C(u, v),$$

kas yra esminis pagrindas tiek teorinei kopulų analizei, tiek praktiniam jų įverčiui bei taikymams priklausomybės modeliavime. Ši formulė rodo, kad τ priklauso tik nuo priklausomybės struktūros tarp X ir Y , o ne nuo jų marginaliųjų pasiskirstymo funkcijų [7].

Tokiu būdu Kendall τ yra vienas iš klasikinių konkordacijos matų, ypač tinkamų netiesinei ar negausiai parametrizuotai priklausomybei modeliuoti.

Manstavičiaus darbe [9] nagrinėjami kelių tipų Kendall mato apibendrinimai. Juose siūlomi ne tik alternatyvūs integraliniai pavidalai, bet ir *svertiniai* Kendall tipo matai, kurie gali būti jautresni

uodegoms ar centrinei priklausomybei. Tai svarbu finansų rizikos analizėje, kur ypatingą vaidmenį vaidina bendras „ekstremalių“ pokyčių pasireiškimas.

Statistiškai, Kendall τ natūraliai pasireiškia kaip U -statistika, o jo įverčiai turi gerai ištirtas asimptotines savybes, nagrinėtas, pavyzdžiui, [3].

1.5. Spearman ranginė koreliacija

Tarkime X ir Y yra atsitiktiniai dydžiai su nenutrūkstamomis skirstinio funkcijomis F_X ir F_Y . Spearmano ρ_S apibrėžiamas kaip Pearsono koreliacija tarp jų rangų:

$$\rho_S = \text{corr}(R_X, R_Y),$$

kur R_X ir R_Y žymi X ir Y rangus imtyje.

Teorijoje laikoma, kad atsitiktiniai dydžiai $U = F_X(X)$ ir $V = F_Y(Y)$ yra standartizuoti rangai, jų tolygų pasiskirstymą intervale $[0, 1]$ žymi $U(0,1)$. Tokiu atveju Spearmano ρ_S yra tiesiog Pearsono koreliacija tarp U ir V :

$$\rho_S = \text{corr}(U, V).$$

Pagal Sklar teoremą, poros (U, V) priklausomybė aprašoma kopula $C(u, v)$, kuri atitinka:

$$\mathbb{P}(U \leq u, V \leq v) = C(u, v), \quad (u, v) \in [0, 1]^2.$$

Tokiu būdu Spearman ρ_S galima išreikšti vien per kopulą:

$$\rho_S(C) = 12 \int_0^1 \int_0^1 [C(u, v) - uv] du dv.$$

Ši formulė parodo, kad $\rho_S(C)$ priklauso tik nuo priklausomybės struktūros tarp X ir Y , t.y. nuo kopulos C , ir yra nepriklausoma nuo marginaliųjų skirstinių.

Spearman ρ_S yra klasikinis pavyzdys koreliacijos tipo konkordacijos matų, kai priklausomybė vertinama transformavus atsitiktinius dydžius monotoniškai į vienodus pasiskirstymus. Tokie matai yra plačiai taikomi statistikoje ir finansų teorijoje dėl jų nparametrinio pobūdžio ir atsparumo kraštinėms reikšmėms.

Šie matų tipai bei jų savybės – tokios kaip asimptotinė dispersija ir statistinis efektyvumas – išsamiai analizuojami [5, 8]. Koike ir Hofert [8] lygina skirtingus transformuotų koreliacijų įverčius, identifikuodami, kurie jų pasižymi mažesniu dispersijos nuokrypiu tam tikromis sąlygomis.

1.6. Blomqvist β ir koreliacijos tipo konkordacijos matai

Blomqvist β matuoja centrinę priklausomybę, t.y. tendenciją atsitiktiniams dydžiams būti vienoje medianos pusėje.

Apibrėžimas 4. Tarkime X ir Y yra atsitiktiniai dydžiai su tolydžiomis pasiskirstymo funkcijomis F_X ir F_Y , ir tarkime, kad jų bendrą priklausomybės struktūrą nusako kopula C , t. y.

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = C(F_X(x), F_Y(y)).$$

Transformavus X ir Y į

$$U = F_X(X), \quad V = F_Y(Y),$$

gauname, kad (U, V) yra atsitiktinis vektorius su vienodu pasiskirstymu vienetiniame kvadrato $[0,1]^2$ ir priklausomybės struktūra aprašoma kopula C .

Tokiu atveju Blomqvist β koeficientas gali būti tiesiogiai išreikštas per kopulą:

$$\beta(C) = 4C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - 1.$$

Šis apibrėžimas rodo, kad β priklauso tik nuo kopulos reikšmės taške $(1/2, 1/2)$, t.y. nuo tikimybės, kad abu standartizuoti kintamieji U ir V vienu metu yra didesni už 0.5 arba mažesni už 0.5:

$$\beta = 4\mathbb{P}(U > 0.5, V > 0.5) - 1 = 4\mathbb{P}(U < 0.5, V < 0.5) - 1.$$

Kadangi β remiasi tik viena taško reikšme, jis yra skaičiavimo požiūriu labai paprastas. Ši savybė ypač naudinga, taikant dideliems duomenų rinkiniams ar modeliavimo uždaviniuose.

Hofert ir Koike [5] parodė, kad Blomqvist β gali būti interpretuojamas kaip Pearson koreliacija tarp dviejų transformuotų atsitiktinių dydžių, gautų priskiriant vertę 1, jei X ir Y viršija savo medianą, ir 0 – kitu atveju. Tokiu būdu β priklauso vadinamajai *transformuotų rangų koreliacijų klasei*.

Koike ir Hofert [8] parodė, kad Blomqvist β , kaip ir kiti koreliacijos tipo konkordacijos matavimai, gali būti palyginamas pagal jų įverčių asimptotinę dispersiją, ir kai kuriais atvejais pasižymi išskirtiniu stabilumu.

1.7. Kopulų parametrizavimas pagal Kendall τ

Praktikoje dažnai siekiama, kad kopulos parametras turėtų intuityvią interpretaciją, pavyzdžiui, būtų tiesiogiai susietas su žinomu priklausomybės matu, tokiu kaip Kendall τ . Daugumai populiarių vienparametrinių kopulų egzistuoja aiškos analitinės išraiškos, siejančios jų parametą su τ .

Toliau pateikiami keli dažniausiai taikomi atvejai:

- **Gauso (normalioji) kopula:** Gauso kopula modeliuoja priklausomybę tarp X ir Y per jų bendrai normalų pasiskirstymą. Ji apibrėžiama kaip:

$$C_\rho(u, v) = \Phi_\rho(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)),$$

kur Φ – vienmatė standartinio normalaus skirstinio pasiskirstymo funkcija, o Φ_ρ – dvimatė normali skirstinio funkcija su koreliacija $\rho \in (-1,1)$.

Kendall τ susijęs su ρ taip:

$$\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho).$$

- **Clayton kopula:** Tai asimetrinė Archimedo kopula, tinkama modeliuoti *apatinės uodegos priklausomybę* (žr. 1.15). Ji apibrėžiama:

$$C_\theta(u,v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}, \quad \theta > 0.$$

Kendall τ ryšys su parametru θ yra:

$$\tau = \frac{\theta}{\theta + 2}.$$

- **Gumbel kopula:** Tai kita Archimedo kopula, dažnai taikoma *viršutinės uodegos priklausomybei* modeliuoti. Apibrėžiama:

$$C_\theta(u,v) = \exp \left\{ - \left[(-\log u)^\theta + (-\log v)^\theta \right]^{1/\theta} \right\}, \quad \theta \geq 1.$$

Kendall τ išreiškiamas taip:

$$\tau = 1 - \frac{1}{\theta}.$$

Šie ryšiai leidžia tiesiogiai iš empirinių Kendall $\hat{\tau}$ įverčių apskaičiuoti atitinkamų kopulų parametrus. Tai itin naudinga kalibravimo (fitting) uždaviniuose, kai remiantis duomenimis, norima parinkti tinkamą priklausomybės modelį [6, 7, 8].

1.8. Priklausomybės stiprumas, stop-loss tvarka ir portfelio rizika

Vertinant bendrą portfelio riziką, svarbu ne tik žinoti pavienių rizikų pasiskirstymus (marginalias), bet ir kaip šios rizikos tarpusavyje sąveikauja – tai vadinama priklausomybės struktūra. Net jei visų pavienių komponentų skirstiniai išlieka nepakitę, bendras rizikos lygis portfelyje gali ženkliai skirtis priklausomai nuo jų priklausomybės pobūdžio.

Vienas svarbiausių priklausomybės vertinimo būdų rizikos teorijoje yra **stop - loss tvarka**. Tarkime S yra bendra nuostolių suma (pvz., viso portfelio nuostolis). Tada, *stop-loss premija* ties tašku $d > 0$ apibrėžiama kaip:

$$\pi(d) = \mathbb{E}[(S - d)^+],$$

kur $(x)^+ = \max\{x, 0\}$ – tai atspindi draudiko ar investuotojo laukiamą nuostolį, kai taikoma frančizė d .

Tchen [13] parodė, kad tarp dviejų bendrų skirstinių su tomis pačiomis marginalijomis, bet

skirtingomis priklausomybės struktūromis, galima nustatyti nelygybes, kurios riboja galimus rizikos funkcionalų (pvz., stop-loss premijų) intervalus.

Remdamiesi šia idėja, Dhaene ir Goovaerts [1] analizuoja, kaip **konkordacijos laipsnis** (t.y. priklausomybės „teigiamumas“) daro įtaką portfelio rizikai. Jų pagrindinis rezultatas teigia:

Esant toms pačioms marginalijoms, jei priklausomybė tarp rizikų yra labiau teigiama (t.y. didesnė konkordacija), tuomet bendra portfelio rizika (ir stop-loss premija) taip pat yra didesnė.

Šis faktas labai svarbus taikant kopulų metodus rizikos teorijoje. Jis parodo, kad vien tradicinės koreliacijos, tokios kaip Pearson koeficientas, nepakanka – dvi priklausomybės struktūros gali turėti tą pačią koreliaciją, bet reikšmingai skirtis pagal konkordacijos tvarką, o kartu ir pagal rizikos dydį.

Todėl, lyginant skirtingus priklausomybės scenarijus portfelyje, ypač kai siekiama valdyti kraštutinių nuostolių riziką, būtina naudoti konkordacijos matų ir kopulų pagrindu sukurtas priemonės.

Finansų kontekste **portfelio** vadinamas kelių aktyvų (pvz., akcijų, obligacijų, indeksų) rinkinys, kuriame kiekvienas aktyvas turi tam tikrą svorį. Tarkime, turime portfelį, sudarytą iš dviejų aktyvų, kurių logaritminės grąžos yra X_1 ir X_2 , o atitinkami portfelio svoriai – w_1 ir w_2 .

Bendro portfelio grąža tuomet yra:

$$R_p = w_1 X_1 + w_2 X_2, \quad \text{kur } w_1 + w_2 = 1.$$

Portfelio rizika dažniausiai matuojama per jo grąžos dispersiją:

$$\text{Var}(R_p) = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho,$$

kur σ_1 ir σ_2 – atitinkamų aktyvų standartiniai nuokrypiai, o ρ – Pearson koreliacijos koeficientas tarp X_1 ir X_2 .

Nors ši formulė plačiai naudojama klasikiniame portfelio teorijos modeliavime, ji remiasi prielaida apie tiesinę priklausomybę tarp aktyvų grąžų. Norint įvertinti bendresnes, netiesinės priklausomybės struktūras, pasitelkiama kopulų teorija.

Naudojant Gauso kopulą, ryšys tarp koreliacijos ρ ir Kendall konkordacijos koeficiento τ yra:

$$\rho = \sin\left(\frac{\pi}{2}\tau\right).$$

Tai leidžia perrašyti portfelio dispersijos formulę išreiškiant ją per Kendall τ :

$$\text{Var}(R_p; \tau) = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \sigma_1 \sigma_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\tau\right).$$

Funkcija $\sin\left(\frac{\pi}{2}\tau\right)$ yra griežtai didėjanti intervale $\tau \in [-1, 1]$, todėl augant τ – t.y. didėjant teigiamai priklausomybei tarp aktyvų – didėja ir sąlyginė kovariacijos įtaka bendrai portfelio dispersijai.

Mažesnis τ (ypač $\tau < 0$) reiškia labiau neigiamą priklausomybę tarp aktyvų, todėl jų rizikos labiau kompensuoja viena kitą. Priešingai, esant dideliame τ (t. y. kai aktyvų grąžos stipriai koreliuoja ir „juda kartu“), jų nuostoliai dažnai pasitaiko vienu metu, ir diversifikacijos nauda sumažėja. Taigi Kendall τ tiesiogiai valdo, kiek rizikos galima sumažinti diversifikuojant.

1.9. Konkordacijos matų įverčiai

Statistinėje analizėje dažnai domimasi ne tik teoriniais priklausomybės matų apibrėžimais, bet ir jų *empiriniais įverčiais*, apskaičiuojamais iš stebėtų duomenų. Šie įverčiai leidžia įvertinti realią priklausomybės struktūrą tarp kintamųjų, todėl jie yra itin svarbūs taikomojoje statistikoje ir duomenų analizėje.

Tarkime, turime n stebėjimų porų (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$. Tuomet:

Kendall τ įvertis apskaičiuojamas kaip:

$$\hat{\tau} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i < j} \text{sign}((x_i - x_j)(y_i - y_j)),$$

kur $\text{sign}(\cdot)$ funkcija grąžina 1, -1 arba 0 priklausomai nuo ženklo. Įverčio reikšmė priklauso nuo to, kiek porų yra suderintų ir kiek – nesuderintų.

Spearman ρ_S įvertis apskaičiuojamas kaip Pearson koreliacija tarp rangų. Tarkime R_i žymi x_i rangą tarp visų $x_1, \dots, x_n$, o S_i – atitinkamai y_i rangą tarp visų $y_1, \dots, y_n$. Tuomet Spearman ρ_S įverčio formulė yra:

$$\hat{\rho}_S = \frac{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})(S_i - \bar{S})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (S_i - \bar{S})^2}},$$

kur $\bar{R} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i$ ir $\bar{S} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i$ yra atitinkamai X ir Y rangų aritmetiniai vidurkiai.

Šis įvertis parodo, kiek panašios yra X ir Y vertės pagal jų vietą (rangą) tarp kitų stebėjimų – nepriklausomai nuo tikrųjų reikšmių dydžių.

Blomqvist β įvertis:

$$\hat{\beta} = 4 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{x_i > \text{median}(X), y_i > \text{median}(Y)\} - 1.$$

Šie empiriniai matai yra *invariantiški monotoninėms transformacijoms* ir priklauso tik nuo kopulos [8, 12, 13].

1.10. Empirinė kopula ir pseudo-stebėjimai

Norint dirbti su priklausomybės struktūra, nepriklausomai nuo marginaliųjų, kiekvienam stebėjimui apskaičiuojami vadinamieji *pseudo-stebėjimai*:

$$U_i = \frac{R_i}{n+1}, \quad V_i = \frac{S_i}{n+1}, \quad i = 1, \dots, n,$$

kur R_i ir S_i yra atitinkamai x_i ir y_i rangai tarp visų $x_1, \dots, x_n$ ir $y_1, \dots, y_n$. Kadangi rangai priklauso aibei $\{1, \dots, n\}$, pseudo-stebėjimai U_i, V_i priklauso atviram vienetiniam kvadratui:

$$(U_i, V_i) \in (0,1)^2.$$

Remiantis šiais pseudo-stebėjimais, apibrėžiama **empirinė kopula**:

$$\hat{C}_n(u, v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{U_i \leq u, V_i \leq v\}, \quad (u, v) \in [0,1]^2.$$

Tai yra neparametrinis priklausomybės struktūros įvertis, nepriklausantis nuo kintamųjų marginaliųjų pasiskirstymų. Empirinė kopula vėliau naudojama [3, 11]:

- Konkordacijos matų įverčiams;
- Kopulų parametrų kalibravimui pagal didžiausią tikėtinumo metodą (MLE) ar pseudo-MLE;
- Monte Carlo simuliacijoms, kai norima išsaugoti realią priklausomybės struktūrą.

1.11. Kopulų parametrų įvertinimas pagal Kendall τ

Vienparametrinėms kopuloms dažnai egzistuoja analitiniai ryšiai tarp kopulos parametro θ ir Kendall τ konkordacijos koeficiento:

$$\tau(\theta) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho), & \text{Gauso, čia } \rho = \theta, \\ \frac{\theta}{\theta+2}, & \text{Clayton,} \\ 1 - \frac{1}{\theta}, & \text{Gumbel,} \\ 1 - \frac{2}{\theta}, & \text{Frank (aproks.).} \end{cases}$$

Pastaba: Skirtingai nei Archimedo kopulose, Gauso kopula neturi atskiro kopulos parametro θ , jos priklausomybės struktūra aprašoma koreliacijos koeficientu ρ . Dėl šios priežasties Kendall τ Gauso kopulos atveju yra išreiškiamas kaip funkcija nuo ρ :

$$\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho).$$

Iš šių lygybių galima išreikšti ir parametro įverčius, kai žinomas empiriškai apskaičiuotas $\hat{\tau}$:

$$\begin{aligned}\hat{\theta} &= \frac{2\hat{\tau}}{1-\hat{\tau}} \quad (\text{Clayton}), & \hat{\theta} &= \frac{1}{1-\hat{\tau}} \quad (\text{Gumbel}), \\ \hat{\rho} &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\hat{\tau}\right) \quad (\text{Gauso}).\end{aligned}$$

Pavyzdys. Tarkime, kad iš duomenų gautas Kendall konkordacijos įvertis yra $\hat{\tau} = 0.5$.

- *Clayton kopulai* parametras apskaičiuojamas:

$$\hat{\theta}_{\text{Clayton}} = \frac{2 \cdot 0.5}{1 - 0.5} = \frac{1}{0.5} = 2.$$

- *Gumbel kopulai*:

$$\hat{\theta}_{\text{Gumbel}} = \frac{1}{1 - 0.5} = 2.$$

- *Gauso kopulai*:

$$\hat{\rho}_{\text{Gauss}} = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0.5\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 0.707.$$

Šie skaičiavimai rodo, kaip empiriniai konkordacijos matų įverčiai gali būti tiesiogiai naudojami kopulos parametrai įvertinti praktikoje. Tai leidžia kalibruoti priklausomybės modelius, remiantis duomenimis [7, 9].

1 lentelė. Populiarių vienparametrinių kopulų parametrizavimas pagal Kendall τ

Kopulos pavadinimas	Priklausomybės tipas	$\tau(\theta)$	$\theta(\tau)$
Gauso	Simetrinė	$\frac{2}{\pi} \arcsin(\rho)$	$\rho = \sin\left(\frac{\pi}{2}\tau\right)$
Clayton	Apatinė uodega	$\frac{\theta}{\theta + 2}$	$\frac{2\tau}{1 - \tau}$
Gumbel	Viršutinė uodega	$1 - \frac{1}{\theta}$	$\frac{1}{1 - \tau}$
Frank	Simetrinė	$1 - \frac{2}{\theta}$ (aproks.)	$\frac{2}{1 - \tau}$

1.12. Didžiausio tikėtino metodo (MLE)

Tarkime $f_C(u, v; \theta)$ – kopulos tankis. Tada log-tikėtino metodo funkcija yra:

$$\ell(\theta) = \sum_{i=1}^n \log f_C(U_i, V_i; \theta).$$

Parametras θ gaunamas maksimizuojant $\ell(\theta)$.

Metodas naudojamas [7, 8]:

- Išskirtims;

- Uodegų priklausomybei;
- Mažam imties dydžiui.

1.13. Pseudo-didžiausio tikėtinumo metodas

Naudojama empirinė kopula:

$$\ell_{\text{PL}}(\theta) = \sum_{i=1}^n \log C(U_i, V_i; \theta),$$

kur C — kopulos tankis, o $U_i = F_X(x_i)$, $V_i = F_Y(y_i)$ yra pseudo-stebėjimai.

Šis metodas vadinamas *pseudo-didžiausio tikėtinumo* metodu, nes apskaičiuojamas tik kopulos dalies logaritminis tikėtinumas, o marginaliosios pasiskirstymo funkcijos ignoruojamos. Metodas yra skaičiavimo požiūriu efektyvus ir **stabilus** – t. y. nedidelės variacijos pseudo-stebėjimuose nesukelia didelių įverčių svyravimų [3, 7].

1.14. Monte Carlo simuliacijos

Simuliacijos atliekamos norint – palyginti teorinę ir empirinę Kendall τ , įvertinti kopulų tinkamumą, modeliuoti portfelio riziką. **Algoritmas:**

1. Parenkama teorinė τ reikšmė.
2. Pagal ją apskaičiuojamas parametras θ .
3. Generuojama N porų (U_i, V_i) iš C_θ , simuliuojant dvimatį normalųjį vektorių su koreliacija, atitinkančia Kendall τ ir taikant ranginę transformaciją, kuri užtikrina tolygias priklausomybes ir marginaliasias pasiskirstymo funkcijas.
4. Apskaičiuojamas empirinės $\hat{\tau}$ vidurkis ir dispersija.
5. Kartojama 100 - 500 kartų.

Pagal [3], Gauso ir t - kopulos geriausiai atkuria teorines τ reikšmes.[3, 8, 12]

1.15. Uodegų priklausomybė

Tarkime X ir Y – du realūs atsitiktiniai dydžiai su tolydžiomis marginaliosiomis pasiskirstymo funkcijomis F_X ir F_Y . Apibrėžkime transformuotus kintamuosius:

$$U = F_X(X), \quad V = F_Y(Y).$$

Tuomet U ir V yra atsitiktiniai dydžiai, pasiskirstę vienodai tolygiai intervale $[0,1]$, t.y. $U, V \sim \mathcal{U}(0,1)$. Tačiau jie **nėra nepriklausomi** – jų tarpusavio priklausomybė visiškai apibūdinama **kopula** $C(u,v)$, kuri tenkina:

$$\mathbb{P}(U \leq u, V \leq v) = C(u,v), \quad (u,v) \in [0,1]^2.$$

Kopulų teorijoje itin svarbu įvertinti, ar tarp kintamųjų egzistuoja *stipri priklausomybė kraštutinėse reikšmėse*, t.y. uodegose. Tai aprašoma **uodegų priklausomybės koeficientais**, jei pastarieji egzistuoja, apibrėžtais taip:

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1^-} \mathbb{P}(V > u \mid U > u) \quad (1)$$

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} \mathbb{P}(V < u \mid U < u) \quad (2)$$

kur λ_U žymi *viršutinės* (1), o λ_L – *apatinės* (2) uodegos priklausomybę.

Dėl to, kad U ir V turi vienodus skirstinius, bet gali būti priklausomi, šie koeficientai vertina, kiek tikėtina, kad vienas kintamasis peržengs kraštinę ribą, kai tą patį padaro kitas.

Kai kurių žinomų kopulų uodegų priklausomybės koeficientai:

$$\lambda_U = \begin{cases} 0 & \text{Gauso,} \\ 2t_{\nu+1} \left(-\sqrt{\frac{(\nu+1)(1-\rho)}{1+\rho}} \right) & t\text{-kopula,} \\ 2 - 2^{1/\theta} & \text{Gumbel,} \\ 0 & \text{Clayton (bet } \lambda_L > 0). \end{cases}$$

Uodegų priklausomybė turi tiesioginę įtaką kraštutinių nuostolių vertinimui (pvz., VaR ir CVaR), nes būtent bendri kraštutiniai pokyčiai tarp aktyvų labiausiai veikia sisteminę riziką. Dėl šios priežasties, kopulų pasirinkimas — ypač jų uodegų elgsena — yra svarbus aspektas rizikos modeliavimo kontekste [7, 8].

1.16. VaR ir CVaR teorinis pagrindas

Portfelio R_p nuostolis: Tarkime, kad portfelio grąža yra žymima R_p – tai atsitiktinis dydis, nusakantis bendrą investicinio portfelio pelną arba nuostolį per tam tikrą laikotarpį.

Tuomet **portfelio nuostolis** apibrėžiamas kaip:

$$L = -R_p.$$

Šis žymėjimas ypač svarbus rizikos matavimui, nes didelės neigiamos grąžos ($R_p < 0$) reiškia teigiamus nuostolius ($L > 0$), o tai tiesiogiai susiję su tokių rizikos rodiklių kaip Value-at-Risk

(VaR) ar Conditional Value-at-Risk (CVaR) skaičiavimu.

Alfa reikšmingumo lygmens vertės pokyčio rizika lygyje α : Tarkime, kad L yra atsitiktinis portfelio nuostolio dydis (pvz., $L = -R_p$).

Tuomet **reikšmingumo lygmens α Value-at-Risk (VaR)** – tai mažiausia reikšmė ℓ , kurios nuostolis L neviršija su tikimybe α :

$$\text{VaR}_\alpha(L) = \inf \{ \ell \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(L \leq \ell) \geq \alpha \}.$$

Kitaip tariant, $\text{VaR}_\alpha(L)$ žymi α -ojo kvantilio reikšmę atsitiktiniam dydžiui L . Šis rodiklis dažnai taikomas finansų praktikoje, vertinant blogiausią galimą nuostolį tam tikru pasitikėjimo lygiu.

Sąlyginė vertės pokyčio rizika – tai vidutinė nuostolio vertė, esant blogiausiems α proporcijos atvejams, t.y. kai nuostolis viršija VaR_α . Ji apibrėžiama taip:

$$\text{CVaR}_\alpha(L) = \mathbb{E}[L \mid L > \text{VaR}_\alpha(L)],$$

kur L – atsitiktinis portfelio nuostolis. Šis rodiklis matuoja *tikėtiną* nuostolį blogiausio scenarijaus atveju ir dažnai laikomas konservatyvesniu rizikos matu nei VaR_α , nes atsižvelgia į nuostolių pasiskirstymą už kvantilio ribos.

Kadangi Stjudent'o t turi teigiamą viršutinės uodegos priklausomybės koeficientą $\lambda_U > 0$, ji leidžia modeliuoti didesnę tikimybę, kad abu aktyvai patirs ekstremalius nuostolius vienu metu.

Dėl to, lyginant su Gauso kopula, kuri neturi uodeginės priklausomybės ($\lambda_U = 0$), Stjudent'o t lemia didesnę sąlyginę nuostolį – t.y. **didesnę** $\text{CVaR}_\alpha(L)$ reikšmę:

$$\text{CVaR}_\alpha^{(\text{Stjudent'o } t)}(L) > \text{CVaR}_\alpha^{(\text{Gauss})}(L).$$

Tai reiškia, kad naudojant Stjudent'o t su stipresne uodegų priklausomybe, prognozuojami ekstremalūs bendri nuostoliai yra didesni. Ši įžvalga atitinka rizikos teorijoje nustatytas *konkordacijos tvarkos* ir *stop-loss* nelygybių rezultatus [1, 13].

1.17. Modelių tinkamumo vertinimas

Vertinama pagal grafinius palyginimus (sklaidos), teorinės vs empirinės τ skirtumą, AIC/BIC (MLE metodui), uodegų priklausomybės elgseną [3, 8].

2. Duomenų struktūra ir standartizavimas

Pradinis duomenų formatas – atskiri CSV failai kiekvienam aktyvui su bent šiais stulpeliais:

- Date – prekybos datos,
- Close (arba Adj .Close) – uždarymo kainos.

Kad skirtingų šaltinių failai būtų suderinami, atliekami tokie žingsniai:

1. Datas žymintis stulpelis konvertuojamas į vienodą datų formatą;
2. Nustatomas uždarymo kainų stulpelis (jei yra keli, pasirenkamas Adj .Close);
3. Eilutės išrikiuojamos pagal datą didėjimo tvarka;

Tokiu būdu gaunama standartizuota lentelė kiekvienam aktyvui:

Date, Close,

kuri vėliau jungiama su kitų aktyvų lentelėmis pagal bendras datas.

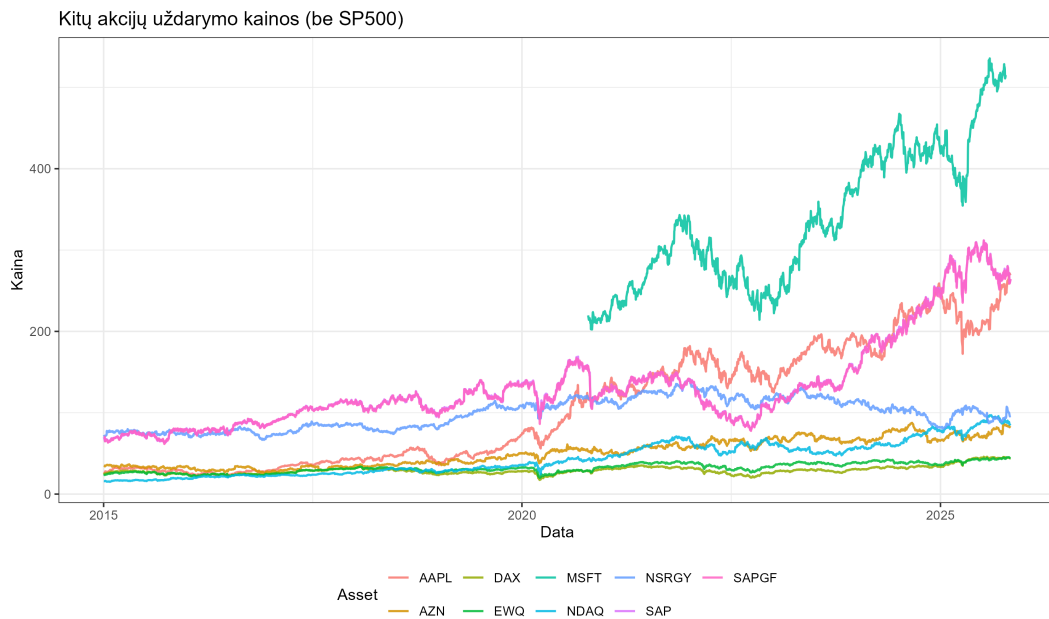
2.1. Aktyvų kainų dinamika ir preliminarį vizualizacija

Pirmasis žingsnis – vizualiai įvertinti kainų elgesį laikui bėgant. Kainų grafikai leidžia:

- Nustatyti bendras augimo ar kritimo tendencijas;
- Pastebėti struktūrinius lūžius;
- Palyginti indeksų ir pavienių akcijų dinamiką.



1 pav. SP500 akcijos kainos



2 pav. Visų likusių akcijų kainos

Indeksai (SP500, DAX) paprastai rodo lygesnes trajektorijas, o pavienių bendrovių akcijų kainos pasižymi didesniu tiesioginiu kainų kintamumu. Tai svarbu interpretuojant vėlesnius konkordacijos ir kopulų įverčius, nes skirtinga kintamumo struktūra gali lemti skirtingą elgesį ekstremalių pokyčių metu.

2.2. Logaritminių grąžų skaičiavimas

Kadangi kopulų struktūra dažniausiai taikoma grąžoms, o ne kainoms, kiekvienam aktyvui apskaičiuojamos dienos logaritminės grąžos:

$$r_t = \log \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right),$$

kur P_t – uždarymo kaina dieną t .

Logaritminės grąžos turi keletą privalumų:

- Jos yra adityvios - ilgalaikė grąža lygi trumpalaikių grąžų sumai;
- Dažnai artimesnės simetriškiems skirstiniams;
- Leidžia palyginti skirtingus aktyvus nepriklausomai nuo kainų lygio.

Šios grąžos sudaro pagrindą [6, 7]:

- Konkordacijos matų (Kendall τ , Spearman ρ_S , Blomqvist β) įverčiams;
- Pseudo-stebėjimų $u_i = F_X(x_i)$ ir $v_i = F_Y(y_i)$ konstravimui;
- Parametrinių kopulų, Gauso, Archimedo ir kt., kalibravimui.

2.3. Trūkstatų reikšmių ir datų suderinimas

Kadangi įvairios biržos veikia pagal skirtingus prekybos tvarkaraščius, tam tikromis dienomis gali būti prieinama tik dalies aktyvų kainų informacija. Norint užtikrinti teisingą konkordacijos matų apskaičiavimą, būtina tarpusavyje suderinti duomenų datas:

1. Atliekamas *inner join* pagal Date: paliekamos tik tos dienos, kai stebimos abiejų aktyvų kainos;
2. Pašalinamos visos eilutės, kuriose bent vieno aktyvo grąža yra trūkstama;
3. Jei tam tikros poros turi labai mažai bendrų stebėjimų, jos gali būti eliminuojamos iš tolesnės analizės.

Esant $n = 10$ aktyvų, sudaromos visos poros:

2 lentelė. Aktyvų poros iš $n = 10$ indeksų (viso $\binom{10}{2} = 45$ porų)

MSFT – AAPL	MSFT – SAP	MSFT – DAX
MSFT – NDAQ	MSFT – SP500	MSFT – EWQ
MSFT – AZN	MSFT – NSRGY	MSFT – SAPGF
AAPL – SAP	AAPL – DAX	AAPL – NDAQ
AAPL – SP500	AAPL – EWQ	AAPL – AZN
AAPL – NSRGY	AAPL – SAPGF	SAP – DAX
SAP – NDAQ	SAP – SP500	SAP – EWQ
SAP – AZN	SAP – NSRGY	SAP – SAPGF
DAX – NDAQ	DAX – SP500	DAX – EWQ
DAX – AZN	DAX – NSRGY	DAX – SAPGF
NDAQ – SP500	NDAQ – EWQ	NDAQ – AZN
NDAQ – NSRGY	NDAQ – SAPGF	SP500 – EWQ
SP500 – AZN	SP500 – NSRGY	SP500 – SAPGF
EWQ – AZN	EWQ – NSRGY	EWQ – SAPGF
AZN – NSRGY	AZN – SAPGF	NSRGY – SAPGF

Kiekvienai porai atskirai suderinamos laiko eilutės ir apskaičiuojami konkordacijos matų įverčiai. Fuchs ir Schmidt [3] pabrėžia, kad ranginių ir kopulinių įverčių kokybė yra labai jautri duomenų kokybei ir suderinimui: nekorektiškas trūkstatų reikšmių tvarkymas gali reikšmingai iškreipti įverčius.

2.4. Pseudo-stebėjimai ir kopulų kalibravimas

Kopulinėje analizėje iš empirinės grąžų sekos dažnai pereinama prie pseudo-stebėjimų

$$U_i = \hat{F}_X(x_i), \quad V_i = \hat{F}_Y(y_i),$$

kur $\hat{F}_X$ ir $\hat{F}_Y$ – empirinės pasiskirstymo funkcijos. Tokiu būdu gaunama seka (U_i, V_i) , kuri apytikriai pasiskirsčiusi $U([0,1]^2)$ su nežinoma kopula.

Tolesni žingsniai:

- Apskaičiuojami Kendall $\hat{\tau}$, Spearman $\hat{\rho}_S$, Blomqvist $\hat{\beta}$;
- Naudojant žinomus ryšius tarp τ ir parametrų, nustatomi kopulų parametrai (pvz., $\hat{\rho}$ Gauso atveju, $\hat{\theta}$ Clayton ar Gumbel atveju);
- Pagal pasirinktą kriterijų, įvertinamas modelio tinkamumas [6, 7].

Koreliacijos tipo konkordacijos matai ir jų įverčiai, įskaitant Blomqvist β ir Spearman ρ_S) detalai analizuojami [3, 5, 8], kur nagrinėjamas ir matų suderinamumas bei galimų konkordacijos matų matricių pasiekiamumas.

3. Rezultatų analizė

Šiame skyriuje pateikiama išsami gautų empirinių rezultatų analizė. Analizė suskaidyta į kelias dalis:

1. Konkordacijos matų elgsena;
2. Priklausomybės struktūros vizualizacija sklaidos (scatter) grafikais;
3. Kendall τ ir Spearman ρ šilumos žemėlapiai;
4. Gauso kopulų simuliacijos ir jų atitikimas realiems duomenims;
5. Monte Carlo metodo rezultatai;
6. Portfelio rizikos priklausomybė nuo Kendall τ ;

Analizė remiasi 5 metų dieninių uždarymo kainų log-grąžomis dešimčiai pasirinktų akcijų indeksų.

3.1. Konkordacijos matų įverčiai

3.1.1. Kendall τ

Kendall τ matuoja monotonišką ryšį, remiantis suderintų ir nesuderintų porų tikimybėmis. Kadangi šis matas nepriklauso nuo kopulos formos, jis priklauso tik nuo priklausomybės struktūros, o ne nuo marginaliųjų.

Empiriniuose duomenyse didžiausios Kendall τ reikšmės gautos poroms:

- SP500 - EWQ: $\hat{\tau} \approx 0.52$;
- SP500 - AAPL: $\hat{\tau} \approx 0.51$;
- SP500 - DAX: $\hat{\tau} \approx 0.48$.

Šios poros apima:

- JAV akcijų rinkos indeksą (SP500),
- didelės JAV technologijų įmonės akciją (AAPL),
- Europos rinkos indeksus (DAX, EWQ).

Kadangi,

$$P(\text{concordant}) = \frac{1 + \tau}{2},$$

kur P – tai tikimybė pagal bendrą dviejų atsitiktinių dydžių skirstinį, kuri vertina, kiek tikėtinas tam tikras rangų santykis tarp dviejų porų, o *concordant* – įvykis, kai dvi atsitiktinių dydžių poros

(X_1, Y_1) ir (X_2, Y_2) yra vienodai orientuotos: abu komponentai didėja arba mažėja vienu metu. Tai $\tau \approx 0.5$ reiškia, jog maždaug 75% atsitiktinai pasirinktų dienų porų SP500 ir AAPL (ar EWQ, DAX) gražos juda ta pačia kryptimi (abu didėja arba abu mažėja). Tai rodo stiprią sistemine priklausomybę, būdingą globaliai integruotoms akcijų rinkoms.

Vidutinio stiprumo priklausomybės (pvz., SP500 - SAP, SP500 - NDAQ su $\hat{\tau} \approx 0.43 - 0.45$) atspindi tai, kad šie aktyvai vis dar yra stipriai susiję su bendrais rinkos veiksniais, tačiau turi ir reikšmingą idiosinkratinės rizikos komponentą.

Silpnesnės priklausomybės gautos porose:

- SP500 - NSRGY: $\hat{\tau} \approx 0.23$;
- SP500 - SAPGF: $\hat{\tau} \approx 0.26$;
- SP500 - AZN: $\hat{\tau} \approx 0.24$.

Šie aktyvai priklauso kitoms pramonės šakoms (farmacija, vartojimo prekių sektorius) ir pasižymi kitokia rizikos profilio struktūra. Todėl jie turi didesnę diversifikacijos potencialą portfelyje, kuriame dominuoja JAV akcijų indeksas.

3.1.2. Spearman ρ

Spearman ρ matuoja monotonišką priklausomybę tarp atsitiktinių dydžių, įvertindamas tiesinį ryšį tarp jų rangų. Formuluoamas kaip Pearson koreliacijos koeficientas tarp rangų sekų R_X ir R_Y , jis yra jautresnis globaliai priklausomybės struktūrai visame pasiskirstyme, įskaitant ir nelyginius rangų skirtumus.

Skirtingai nei Kendall τ , kuris remiasi tik suderintų ir nesuderintų porų proporcijomis (t.y. ženklų palyginimu), Spearman ρ vertina rangų atitikimą visame pasiskirstyme, naudodamas jų *tiesinį* suderinamumą. Dėl šios priežasties, esant sklandžiam, bet netiesiniam ryšiui, Spearman ρ dažnai įgauna didesnes reikšmes nei Kendall τ .

Abu matai yra neparametriniai ir nepriklauso nuo marginaliųjų formos, tačiau jų skirtinga konstrukcija lemia skirtingą jautrumą priklausomybės pobūdžiui.

Didžiausios Spearman ρ reikšmės gautos poroms:

- SP500 - EWQ: $\hat{\rho}_S \approx 0.701$;
- SP500 - AAPL: $\hat{\rho}_S \approx 0.686$;
- SP500 - DAX: $\hat{\rho}_S \approx 0.655$.

Šios poros apima:

- JAV akcijų rinkos indeksą (SP500),
- didelės JAV technologijų bendrovės akciją (AAPL),

- Europos rinkos indeksą (DAX) ir ETF (EWQ).

Kadangi Spearman ρ įvertina rangų suderinamumą, reikšmė $\rho_S \approx 0.7$ rodo, kad didelėje duomenų dalyje porų rangai juda ta pačia kryptimi ir panašiu intensyvumu. Toks priklausomybės lygis atspindi aukštą globalios akcijų rinkos integracijos laipsnį, o rezultatai suderinami su Kendall τ tendencijomis.

Vidutinio stiprumo priklausomybės gautos poroms, kurių vertės svyruoja aplink 0.39 - 0.45, aukštesnė vidutinė priklausomybė - 0.614:

- SAP - AAPL: $\hat{\rho}_S \approx 0.455$;
- SAP - NDAQ: $\hat{\rho}_S \approx 0.392$;
- SP500 - SAP: $\hat{\rho}_S \approx 0.614$.

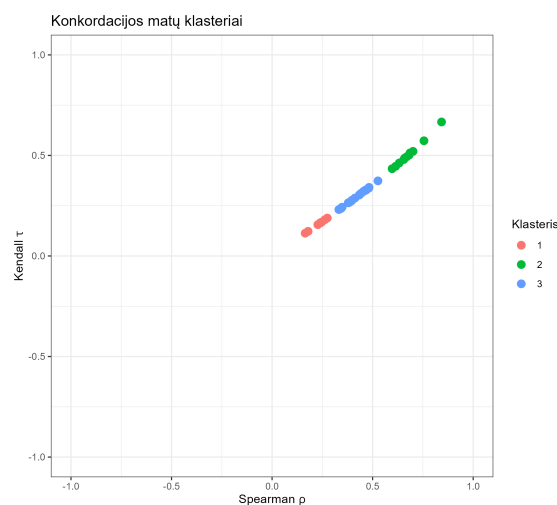
Šios reikšmės rodo, kad aktyvai vis dar veikiami bendrų rinkos veiksnių, tačiau turi ir savitų, tik jiems būdingų pokyčių, todėl jų rangų koreliacija mažesnė nei tarp globalių indeksų.

Silpnesnės priklausomybės gautos porose:

- SP500 - NSRGY: $\hat{\rho}_S \approx 0.332$;
- SP500 - SAPGF: $\hat{\rho}_S \approx 0.378$;
- SP500 - AZN: $\hat{\rho}_S \approx 0.348$.

Šie aktyvai priklauso kitoms pramonės šakoms, pavyzdžiui vartojimo prekių sektoriui ar farmacijos industrijai, todėl pasižymi žemesne sinchronizacija su JAV rinkos dinamika. Tai atskleidžia didesnę diversifikacijos potencialą.

Bendras rezultatas: Spearman ρ struktūra patvirtina, kad tarptautiniai akcijų indeksai ir JAV technologijų sektorius sudaro glaudžiai susijusį klasterį, o kiti sektoriai suteikia reikšmingų diversifikacijos galimybių.



3 pav. Kendall τ ir Spearman ρ klasteriai $[-1; 1]^2$ kvadrato

Šiame grafike identifikuoti trys klasteriai pagal ranginius priklausomybės matų ($\hat{\tau}$, $\hat{\rho}$) įverčius ir jų vidinę sklaidą:

- **Žalias klasteris** apima poras, kurioms būdinga **stipri monotoniška priklausomybė**, t. y. $\hat{\tau}, \hat{\rho} \geq 0.4$, ir **maža vidinė sklaida** (pvz., standartinis nuokrypis ≤ 0.05). Šios poros pasižymi nuoseklia, stabiliąja priklausomybe, matoma per arti įstrižainės išsidėsčiusius taškus.
- **Oranžinis klasteris** jungia poras su **vidutinio stiprumo priklausomybe**, kai $\hat{\tau}, \hat{\rho} \in [0.2; 0.4)$, ir **padidėjusia sklaida** (pvz., $sd \in [0.05; 0.1]$). Tai dažnai mišrių (ne visiškai monotoniškų) priklausomybių poros, kuriose bendras ranginis ryšys yra silpnesnis dėl struktūrinių ar sektoriaus skirtumų.
- **Mėlynas klasteris** lokalizuotas ties koordinatės pradžia ($\hat{\tau}, \hat{\rho} \leq 0.2$), apima poras, kurių **ranginė priklausomybė silpna arba artima nepriklausomybei**. Taškų išsidėstymas čia yra *heterogeniškas*, dažnai neturintis aiškios krypties – tai rodo didelį idiosinkratiškus veiksmų poveikį.

3 lentelė. Konkordacijos matų klasterių interpretacija pagal $\hat{\tau}$, $\hat{\rho}$ ir sklaidą

Klasteris	$\hat{\tau}$	$\hat{\rho}$	Sklaida (pvz., SD)	Interpretacija
Žalias	≥ 0.4	≥ 0.4	≤ 0.05	Stipri, stabili priklausomybė
Oranžinis	$[0.2; 0.4)$	$[0.2; 0.4)$	$0.05-0.1$	Vidutinė, mišri priklausomybė
Mėlynas	≤ 0.2	≤ 0.2	> 0.1	Silpna ar beveik nepriklausoma

3.1.3. Blomqvist β

Blomqvist β matuoja priklausomybę medianos kvadrantų prasme – tai yra tikimybę, kad abu atsitiktiniai dydžiai vienu metu yra didesni arba mažesni už savo medianas:

$$\beta = 4 \mathbb{P}(X > \tilde{x}, Y > \tilde{y}) - 1,$$

kur $\tilde{x}$ ir $\tilde{y}$ yra atitinkamai X ir Y medianos.

Šis matas iš esmės yra struktūriškai artimas Kendall τ : abu yra pagrįsti ženklų palyginimu, tačiau Blomqvist β fiksuoja vieną tašką – medianų porą $(\tilde{x}, \tilde{y})$ – ir vertina, ar stebėjimas yra tame pačiame kvadrante. Kitaip tariant, vietoje visų galimų stebėjimų porų lyginimo (kaip Kendall τ atveju), Blomqvist β matuoja „konkordantiškumą“ tik vieno fiksuoto taško atžvilgiu.

Empiriniai rezultatai rodo, kad Blomqvist β reikšmės dažnai būna mažesnės nei Kendall $\hat{\tau}$ ar Spearman $\hat{\rho}_S$:

- SP500 – AAPL: $\hat{\beta} \approx 0.19$;
- SP500 – EWQ: $\hat{\beta} \approx 0.19$;

- SP500 – SAP: $\hat{\beta} \approx 0.14$;
- SP500 – NSRGY, SP500 – AZN: $\hat{\beta} \approx 0.03\text{--}0.07$.

Tai rodo, kad centrinė, aplink medianą, priklausomybė tarp šių aktyvų yra santykinai silpnesnė nei bendroji priklausomybė visame pasiskirstyme. Kitaip tariant, aktyvai labiau linkę kartu patirti didesnius nei vidutinius svyravimus – t.y. jų priklausomybė yra stipresnė uodegose nei centre. Ši savybė itin svarbi atliekant stresinius testus ir kraštinių nuostolių analizę.

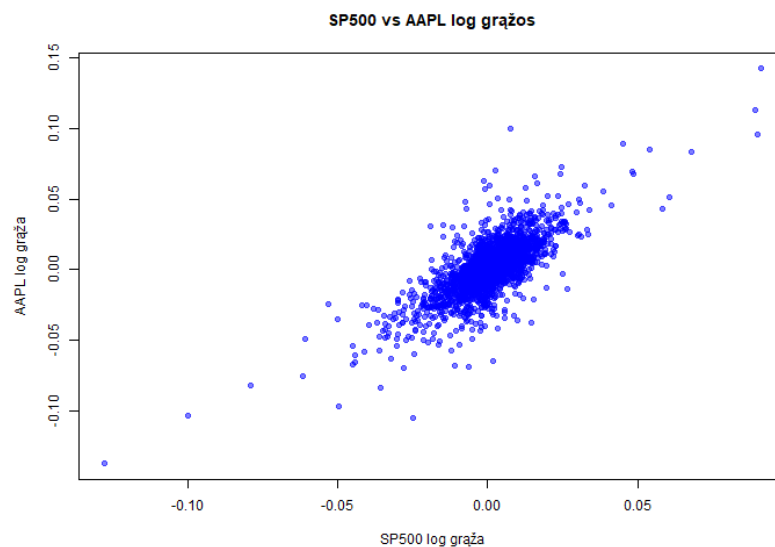
Visi trys nagrinėti konkordacijos matai – Kendall τ , Spearman ρ_S ir Blomqvist β – vertina *monotonišką priklausomybę* tarp atsitiktinių dydžių. Tai reiškia, kad jie jautrūs kryptingam (didėjančiam arba mažėjančiam) ryšiui tarp kintamųjų, tačiau nebūtinai tiesiniam. Šie matai yra **invariantiški monotoniškų transformacijų atžvilgiu**: jei abu kintamieji transformuojami bet kokiais didėjančiomis ar mažėjančiomis funkcijomis, konkordacijos įverčiai nesikeičia. Dėl šios savybės, jie itin tinkami netiesiniams, bet struktūriškai kryptingiems ryšiams modeliuoti, kaip dažnai pasitaiko finansiniuose duomenyse.

3.2. Priklausomybės struktūra sklaidos grafikais

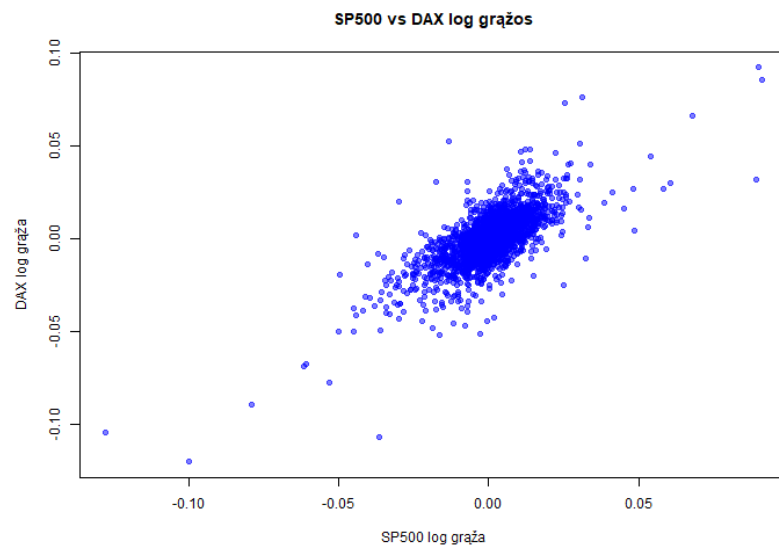
Log-grąžų sklaidos grafikai leidžia vizualiai įvertinti:

- Monotoniško ryšio kryptį;
- Koncentraciją aplink kilimo kryptį;
- Uodegų taškų elgesį.

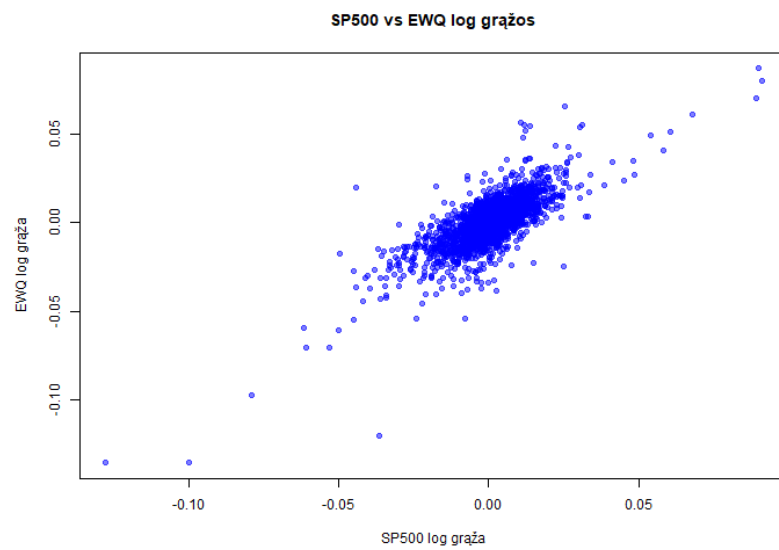
Porose su didelėmis $\hat{\tau}$ reikšmėmis - pvz.: SP500 - AAPL, SP500 - EWQ, SP500 - DAX, sklaidos grafikai rodo tankų debesį, gerokai nutolusį nuo nepriklausomų kintamųjų atvejo.



4 pav. SP500 ir AAPL akcijų indeksų sklaidos grafikas

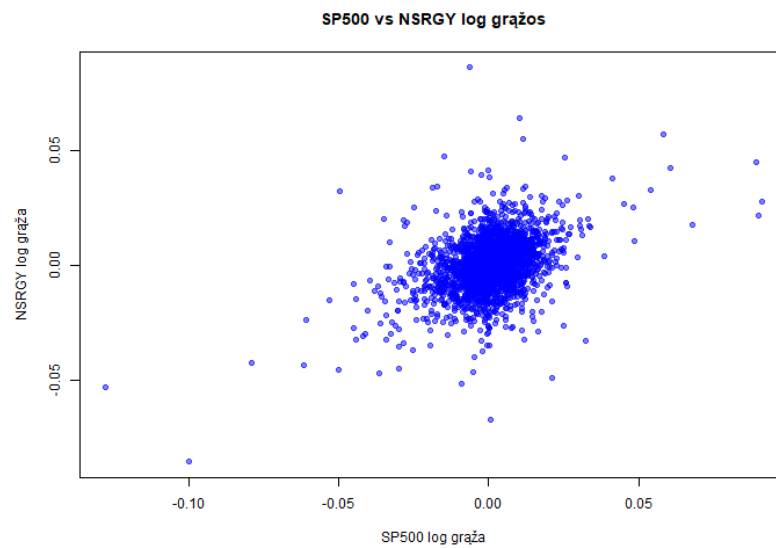


5 pav. SP500 ir DAX akcijų indeksų sklaidos grafikas

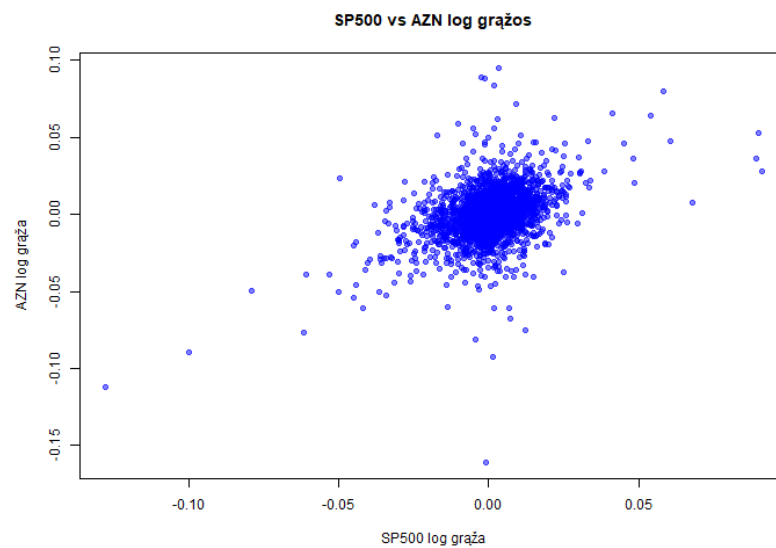


6 pav. SP500 ir EWQ akcijų indeksų sklaidos grafikas

Porose su mažesnėmis priklausomybėmis, SP500 - NSRGY, SP500 - AZN, debesis labiau išsklaidytas.



7 pav. SP500 ir NSRGY akcijų indeksų sklaidos grafikas



8 pav. SP500 ir AZN akcijų indeksų sklaidos grafikas

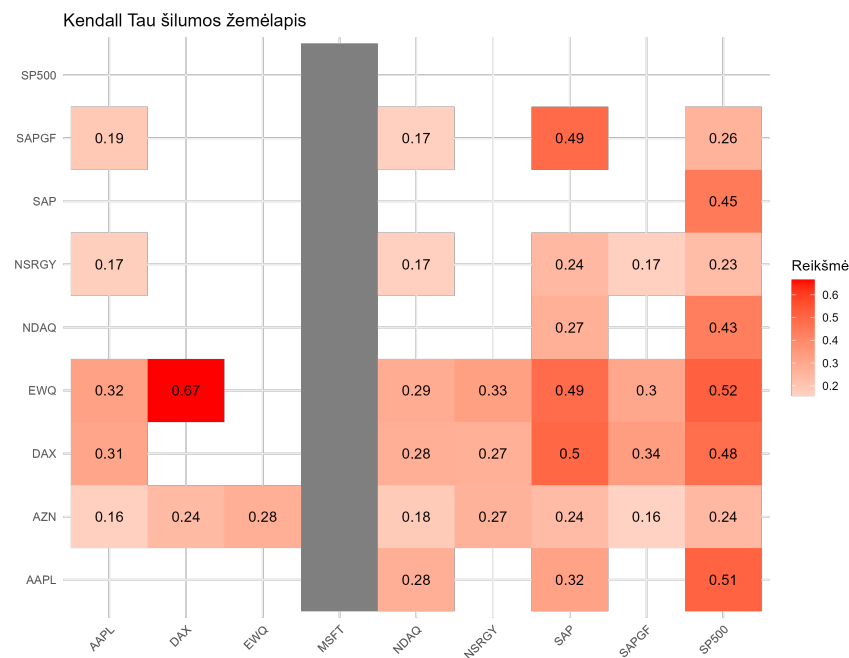
Sklaidos grafikai aiškiai patvirtina, kad tiesinė Pearson koreliacija nebūtų pakankama priklausomybei apibūdinti, kadangi:

- stebimas uodegų elgesys,
- variacijos intensyvumas didesnis ekstremaliose reikšmėse,
- priklausomybė nėra grynai elipsinė visame paramos ruože.

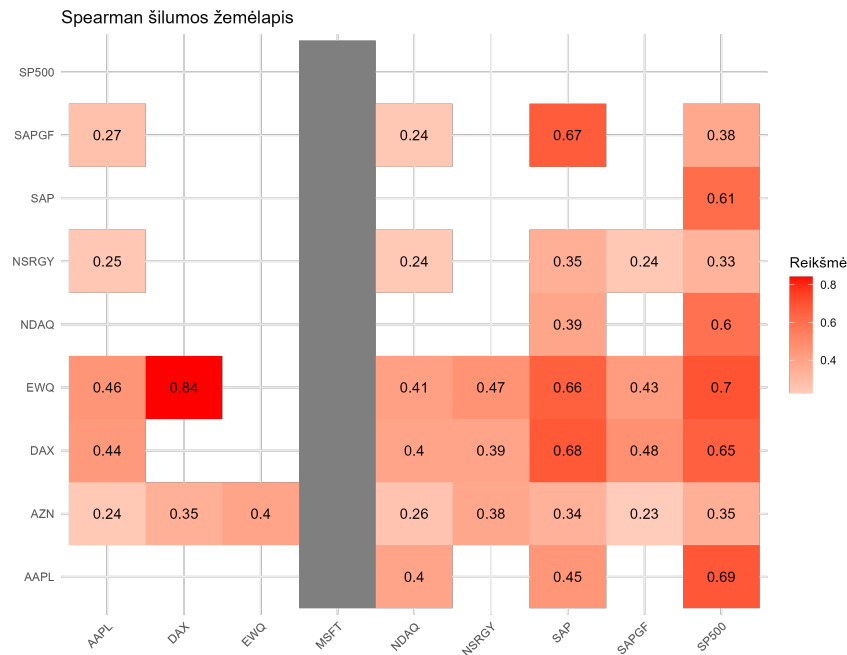
3.3. Kendall τ ir Spearman ρ šilumos žemėlapis

Šilumos žemėlapis su Kendall τ ir Spearman ρ vizualizuoja priklausomybės matricas tarp visų akcijų indeksų. Šiuose žemėlapiuose aiškiai matomos kelios grupės:

- **JAV rinkos grupė:** SP500, MSFT, AAPL, NDAQ - didelės tarpusavio konkordacijos (aukštos τ ir ρ reikšmės), rodančios bendrą reakciją į makroekonominius šokus ir rinkos ciklus.
- **Europos rinkos grupė:** DAX, EWQ, SAP - stipri tarpusavio priklausomybė, kuri tam tikru mastu persidengia su JAV indeksu SP500.
- **Defensyvių akcijų indeksų grupė:** NSRGY, AZN - santykinai mažesnės priklausomybės su indeksais ir technologijų akcijomis.



9 pav. Kendall τ šilumos žemėlapis



10 pav. Spearman ρ šilumos žemėlapis

Šios grupės svarbios portfelio formavimui. Jos rodo, kur priklausomybė yra tokia stipri, kad diversifikacijos efektas ribotas, ir kur galima tikėtis tikros rizikos sklaidos.

Pastaba: dėl pilkų elementų šilumos žemėlapiuose: Kendall τ ir Spearman ρ šilumos žemėlapiuose pilka spalva pažymėti tie porų elementai, kuriems konkordacijos matų įverčiai nebuvo apskaičiuoti. Tai įvyksta tais atvejais, kai po laiko eilučių sujungimo pagal datas ir logaritminių gražų skaičiavimo lieka nepakankamas bendrų stebėjimų skaičius arba atsiranda netinkamų stebėjimų.

Formaliai, Tarkimel $\{(X_t^{(i)}, X_t^{(j)})\}_{t=1}^n$ žymi dviejų aktyvų kainų log-gražų porą, gautą po duomenų suderinimo. Jeigu nėra įvykdyta sąlyga

$$\text{Var}(X^{(i)}) > 0 \quad \text{ir} \quad \text{Var}(X^{(j)}) > 0,$$

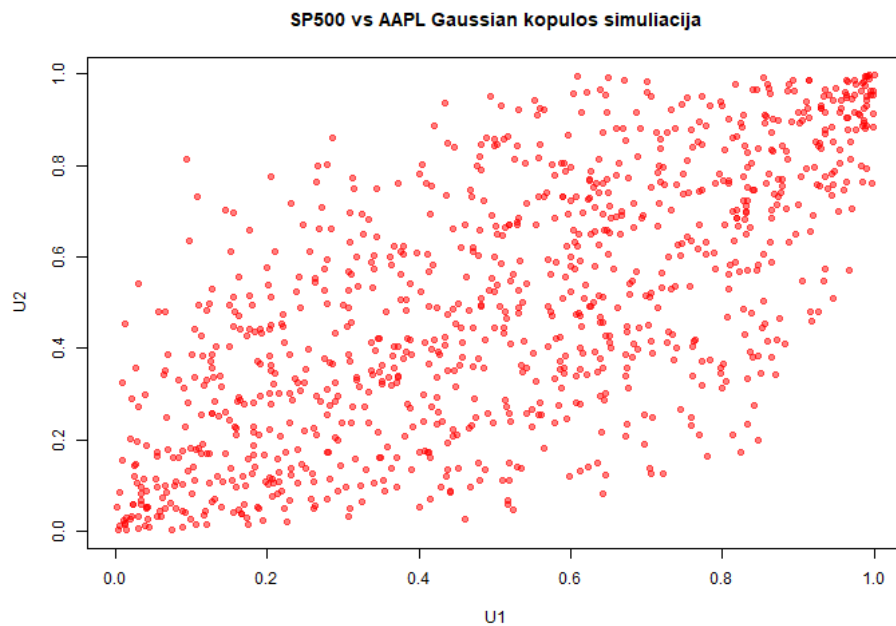
arba jeigu bendras galiojančių stebėjimų skaičius n yra per mažas, konkordacijos matų $\hat{\tau}$ ir $\hat{\rho}_S$ įverčiai nėra apibrėžti ir atitinkami šilumos žemėlapių elementai lieka neįvertinti.

Svarbu pabrėžti, kad pilka spalva šiuose grafikuose nereiškia silpnos ar nulinės priklausomybės tarp atitinkamų aktyvų. Ji tik žymi techninį duomenų suderinamumo apribojimą ir nurodo, jog empiriniai konkordacijos matų įverčiai šioms poroms negalėjo būti patikimai apskaičiuoti.

3.4. Gauso kopulos simuliacijos ir atitikimas

Gauso kopula, kalibruota pagal empirinį Kendall τ , leidžia sugeneruoti duomenų poras, kurių priklausomybė identiška realių log-gražų konkordacijai. Palyginus empirinės poros, pavyzdžiui SP500 - AAPL, sklaidos grafiką ir Gauso kopulos simuliacijos grafiką, pastebėta:

- Bendras debesies pasiskirstymas labai panašus;
- Taškų koncentracija viduryje atitinka empirinius duomenis;
- Kopula sėkmingai atkartoja vidutinės ir stiprios priklausomybės struktūrą.



11 pav. SP500 ir AAPL kopulos sklaidos grafikas

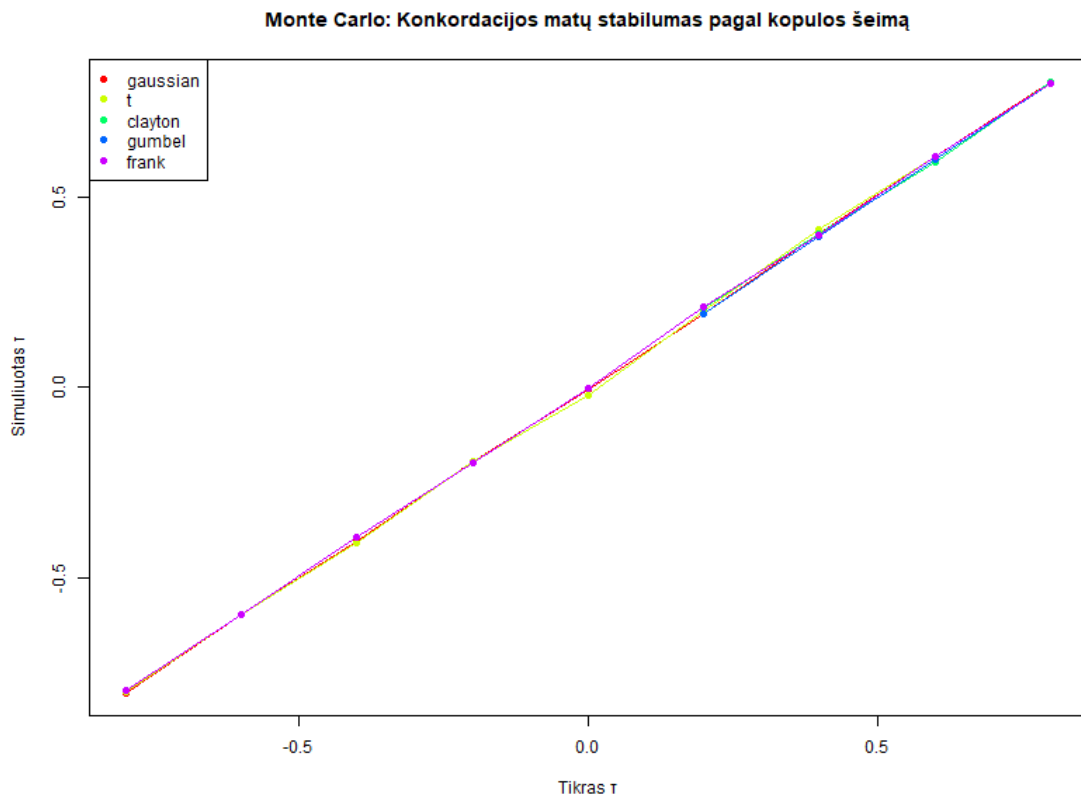
Akcijų poros buvo grupuojamos pagal Kendall τ ir Spearman ρ_S reikšmes, laikant kiekvieną porą taškų dvimatėje erdvėje $[-1,1]^2$. Klasterizavimui taikytas *k-means* algoritmas su fiksuotu klasterių skaičiumi $k = 3$, siekiant atskirti silpnos, vidutinės ir stiprios ranginės priklausomybės režimus. Gauti klasteriai rodo, kad empirinės poros nepatenka į vieną homogenišką priklausomybės grupę, bet pasižymi skirtingais konkordacijos lygiais, todėl vieno klasterio modelis nebūtų pakankamai informatyvus.

Vis dėlto Gauso kopulos prielaidų ribotumas atsiskleidžia uodegose – ji neturi uodegų priklausomybės, todėl ekstremalių bendrų nuostolių dažnis gali būti nuvertintas.

Tai vėliau ištaisoma naudojant t-kopulą.

3.5. Monte Carlo simuliacijų rezultatai

Monte Carlo eksperimentai buvo skirti ištirti, kaip gerai empiriškas Kendall τ atkuria teorinę priklausomybę skirtingų kopulų atveju. Buvo pasirinktos teorinės τ reikšmės intervale $[-0.8, 0.8]$ ir generuoti duomenys iš Gauso kopulos, t-kopulos, Clayton kopulos, Gumbel kopulos, Frank kopulos.



12 pav. Monte Carlo simuliacijos grafikas

Gauso ir t-kopulų atveju gauta, kad empiriškos $\hat{\tau}$ reikšmės beveik sutampa su teorinėmis (skirtumas mažesnis nei 0.01), o taškai grafike (teorinė τ vs empirinė $\hat{\tau}$) išsidėstę beveik ant tiesės $y = x$. Tai patvirtina Kendall τ stabilumą ir jo tinkamumą kopulų parametrizavimui.

Archimedinių kopulų (Clayton, Gumbel, Frank) atveju:

- $\hat{\tau}$ vidutiniškai atspindi teorinę reikšmę;
- Tačiau dispersija didesnė, ypač kraštinėse τ reikšmėse;
- Tai susiję su asimetrišku uodegų elgesiu (pvz., Clayton – stipri apatinė uodegų priklausomybė).

3.6. Portfelio rizikos priklausomybė nuo Kendall τ

Dviejų akcijų indeksų portfelyje, laikant $w_1 = w_2 = 0.5$ ir $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, portfelio dispersija yra:

$$\text{Var}(R_p; \rho) = \frac{\sigma^2}{2}(1 + \rho),$$

o Gauso kopulos atveju:

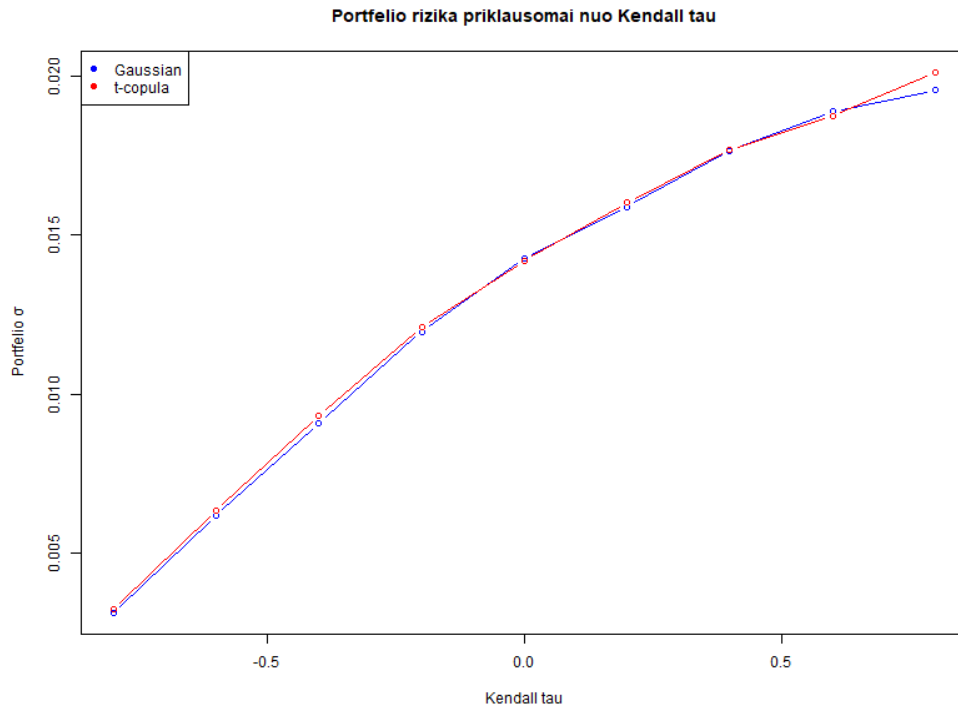
$$\rho = \sin\left(\frac{\pi}{2}\tau\right).$$

Todėl:

$$\text{Var}(R_p; \tau) = \frac{\sigma^2}{2} \left[1 + \sin \left(\frac{\pi}{2} \tau \right) \right],$$

o standartinis nuokrypis:

$$\sigma_p(\tau) = \sigma \sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + \sin \left(\frac{\pi}{2} \tau \right) \right]}.$$



13 pav. Portfelio rizikos priklausomybės nuo Kendall τ grafikas

Empiriniai rezultatai šiai teorinei funkcijai visiškai atitinka:

- Esant $\tau = -0.8$, gaunama mažiausia σ_p (maksimali diversifikacija);
- Esant $\tau = 0$, portfelio rizika atitinka nepriklausomų akcijų indeksų atvejį;
- Esant $\tau = 0.8$, portfelio rizika artėja prie vieno aktyvo rizikos – diversifikacijos efektas beveik dingsta.

Lyginant Gauso ir Stjudent'o ts, pastebėta, kad Stjudent'o t sukuria šiek tiek didesnę portfelio riziką esant teigiamam τ , ypač kraštinėse reikšmėse. Tai suderinama su tuo, kad Stjudent'o t turi nenulinę uodegų priklausomybę, todėl bendri ekstremalūs kritimai yra labiau tikėtini.

4. Išvados

1. Konkordacijos matai (Kendall τ , Spearman ρ , Blomqvist β) pateikia nuoseklų priklausomybės vaizdą, nepriklausomą nuo marginaliųjų.
2. Kendall τ pasirodė stabiliausias ir tinkamiausias kopulų parametrizavimui.
3. Gauso kopula atkuria centrinę priklausomybę, tačiau Stjudent'o t būtina modeliuojant uodegų riziką.
4. Empiriniai rezultatai parodė sisteminę priklausomybę tarp JAV ir Europos rinkų.
5. Aktyvai (NSRGY, AZN), kurių veikla yra mažai priklausoma nuo ekonominio ciklo, pasižymi maža konkordacija ir suteikia realų diversifikacijos efektą.
6. Monte Carlo simuliacija patvirtino Kendall τ stabilumą ir tinkamumą praktinei kalibracijai.
7. VaR ir CVaR analizė rodo, kad Gauso kopula nuvertina ekstremalių nuostolių riziką, o Stjudent'o t ją tiksliai atspindi.

Literatūra

- [1] Jan Dhaene and Marc J. Goovaerts. Dependency of risks and stop-loss order. *ASTIN Bulletin*, 26(2):201–212, 1996.
- [2] Ali Dolati and Manuel Úbeda-Flores. On measures of multivariate concordance. *Journal of Probability and Statistical Science*, 4(2):147–163, 2006.
- [3] Sebastian Fuchs and Klaus D. Schmidt. Estimators for a class of bivariate measures of concordance for copulas. *arXiv preprint arXiv:1701.04582*, 2017.
- [4] C. Genest et al. Copula modeling from Abe Sklar to the present day. *Journal of Multivariate Analysis*, 201:105278, 2024. DOI: 10.1016/j.jmva.2023.105278.
- [5] Marius Hofert and Takaaki Koike. Compatibility and attainability of matrices of correlation-based measures of concordance. *arXiv preprint arXiv:1810.07126*, 2019.
- [6] Piotr Jaworski, Fabrizio Durante, Wolfgang Härdle, and Tomasz Rychlik, eds. *Copula Modeling: An Introduction for Practitioners*. Springer, Berlin, 2010.
- [7] Harry Joe. *Multivariate Models and Dependence Concepts*. Chapman & Hall, London, 1997.
- [8] Takaaki Koike and Marius Hofert. Comparison of correlation-based measures of concordance in terms of asymptotic variance. *arXiv preprint arXiv:2006.13975*, 2023.
- [9] Martynas Manstavičius. A few generalizations of kendall’s tau. part ii: intrinsic meaning, properties, and computational aspects. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 2023.
- [10] Martynas Manstavičius. Diversity of bivariate concordance measures. *Mathematics*, 10(1103), 2022.
- [11] Abe Sklar. Random variables, distribution functions, and copulas: a personal look backward and forward. In *Distributions with Fixed Marginals and Related Topics*. Vol. 28, pp. 1–14. Institute of Mathematical Statistics, 1996.
- [12] M. D. Taylor. Multivariate measures of concordance. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 59(4):789–806, 2007. DOI: 10.1007/s10463-006-0076-2.
- [13] Ah Choi Tchen. Inequalities for distributions with given marginals. *The Annals of Probability*, 8(4):814–827, 1980.

Priedas Nr. 1

R kodas

```
# 1. Paketų įkėlimas
required_pkgs <- c("Hmisc", "PerformanceAnalytics", "copula", "readr", "dplyr",
                  "tidyr", "purrr", "lubridate", "combinat", "htmltools",
                  ↪ "ggplot2")
new_pkgs <- required_pkgs[!(required_pkgs %in% installed.packages()[,
  ↪ "Package"])]
if(length(new_pkgs)) install.packages(new_pkgs)
invisible(lapply(required_pkgs, library, character.only = TRUE))

# 2. Duomenų importas
file_list <- c(
  MSFT = "C:/Users/bilin/Desktop/HistoricalData_1760615991264.csv",
  SP500 = "C:/Users/bilin/Desktop/SP500.csv",
  SAP = "C:/Users/bilin/Desktop/historical_price_SAP.csv",
  NDAQ = "C:/Users/bilin/Desktop/historical_price_NDAQ.csv",
  AAPL = "C:/Users/bilin/Desktop/historical_price_AAPL.csv",
  SAPGF = "C:/Users/bilin/Desktop/historical_price_SAPGF.csv",
  NSRGY = "C:/Users/bilin/Desktop/historical_price_NSRGY.csv",
  DAX = "C:/Users/bilin/Desktop/historical_price_DAX.csv",
  EWQ = "C:/Users/bilin/Desktop/historical_price_EWQ.csv",
  AZN = "C:/Users/bilin/Desktop/historical_price_AZN.csv"
)
data_list <- lapply(file_list, read_csv)

# 3. Duomenų paruošimas
prepare_data <- function(df) {
  close_candidates <- c("Close", "close", "AdjClose", "adjClose", "Adj Close", "adj
  ↪ close",
                      "Adj.Close", "adj.close", "Close/Last")
  close_col <- intersect(close_candidates, colnames(df))
  if(length(close_col) == 0) stop("Nerastas uždarymo stulpelis!")

  date_candidates <- c("Date", "date", "time", "Time")
  date_col <- intersect(date_candidates, colnames(df))
  if(length(date_col) == 0) stop("Nerastas datos stulpelis!")

  df <- df %>%
```

```

    mutate(
      Close = as.numeric(df[[close_col[1]]]),
      Date = parse_date_time(df[[date_col[1]]], orders = c("ymd", "mdy"))
    ) %>%
    arrange(Date) %>%
    select(Date, Close)

  return(df)
}

data_list <- lapply(data_list, prepare_data)

# 3.1 Bendras kainų grafikas
output_folder <- "C:/Users/bilin/Desktop/copula_plots/"
dir.create(output_folder, showWarnings = FALSE)

all_prices <- purrr::map2_df(data_list, names(data_list), ~ mutate(.x, Asset =
  ↪ .y))
price_plot_file <- paste0(output_folder, "all_assets_prices.png")
png(price_plot_file, width=1000, height=600)
ggplot(all_prices, aes(x=Date, y=Close, color=Asset)) +
  geom_line(linewidth=0.8) +
  labs(title="Visų akcijų uždarymo kainos", x="Data", y="Kaina (Close)") +
  theme_minimal() + theme(legend.position="bottom", legend.title=element_blank())
dev.off()

sp500_plot <- ggplot(
  filter(all_prices, Asset == "SP500"),
  aes(x = Date, y = Close)
) +
  geom_line(color = "black", linewidth = 0.9) +
  labs(
    title = "SP500 indekso uždarymo kainos",
    x = "Data",
    y = "Kaina"
  ) +
  theme_bw()

ggsave(
  filename = file.path(output_folder, "sp500_prices.png"),
  plot = sp500_plot,
  width = 9, height = 5

```

```

)

other_assets_plot <- ggplot(
  filter(all_prices, Asset != "SP500"),
  aes(x = Date, y = Close, color = Asset)
) +
  geom_line(linewidth = 0.7, alpha = 0.85) +
  labs(
    title = "Kitų akcijų uždarymo kainos (be SP500)",
    x = "Data",
    y = "Kaina"
  ) +
  theme_bw() +
  theme(legend.position = "bottom")

ggsave(
  filename = file.path(output_folder, "other_assets_prices.png"),
  plot = other_assets_plot,
  width = 10, height = 6
)

# 4. Funkcija log grąžoms
compute_returns <- function(df1, df2, name1, name2) {
  merged_pair <- inner_join(df1, df2, by="Date", suffix=c(paste0("_",name1),
    ↪ paste0("_",name2)))
  if(nrow(merged_pair) < 2) return(NULL)

  returns_pair <- data.frame(
    diff(log(merged_pair[[paste0("Close_",name1)]])),
    diff(log(merged_pair[[paste0("Close_",name2)]]))
  )
  colnames(returns_pair) <- c(name1,name2)

  if(any(is.na(returns_pair[[1]])) | any(is.na(returns_pair[[2]]))) return(NULL)
  if(sd(returns_pair[[1]], na.rm=TRUE)==0 | sd(returns_pair[[2]], na.rm=TRUE)==0)
    ↪ return(NULL)

  return(returns_pair)
}

# 5. Pora po poros analizė

```

```

pairs <- combn(names(data_list), 2, simplify=FALSE)
kendall_list <- list()
spearman_list <- list()
blomqvist_list <- list()

for(p in pairs){
  name1 <- p[1]; name2 <- p[2]
  key <- paste(name1,name2,sep="vs")

  returns_pair <- compute_returns(data_list[[name1]], data_list[[name2]], name1,
    ↪ name2)
  if(!is.null(returns_pair)) {
    x <- returns_pair[[1]]; y <- returns_pair[[2]]

    kendall_list[[key]] <- cor(x, y, method="kendall")
    spearman_list[[key]] <- cor(x, y, method="spearman")
    blomqvist_list[[key]] <- hoeffd(x, y)$D[1,2]

    tau <- kendall_list[[key]]

    # Tik tuomet generuojame grafikus jei yra galiojančių duomenų
    if(length(x)>3 && length(y)>3 && all(is.finite(x)) && all(is.finite(y))) {
      # Scatter plot
      scatter_file <- paste0(output_folder, key, "_scatter.png")
      png(scatter_file, width=700, height=500)
      plot(x, y, pch=19, col=rgb(0,0,1,0.5),
        main=paste(name1,"vs",name2,"log grąžos"),
        xlab=paste0(name1," log grąža"), ylab=paste0(name2," log grąža"))
      dev.off()

      # Gaussian copula
      if(!is.na(tau) & is.finite(tau)) {
        cop_gauss <- normalCopula(param=iTau(normalCopula(dim=2), tau), dim=2)
        copula_data <- rCopula(1000, cop_gauss)
        copula_file <- paste0(output_folder, key, "_copula.png")
        png(copula_file, width=700, height=500)
        plot(copula_data[,1], copula_data[,2], pch=19, col=rgb(1,0,0,0.5),
          main=paste(name1,"vs",name2,"Gaussian kopulos simuliacija"),
          xlab="U1", ylab="U2")
        dev.off()
      }
    } else {

```

```

    message(" Pora ", key, " praleista: nepakanka galiojančių gražų.")
  }
}
}

# 5.1 Monte Carlo konkordacijos matų palyginimas
set.seed(123)
monte_carlo_results <- data.frame(family=character(), tau=numeric(),
  ↪ sim_tau=numeric(), stringsAsFactors=FALSE)
tau_values <- seq(-0.8,0.8,0.2)
families <- c("gaussian","t","clayton","gumbel","frank")

for(fam in families){
  for(tval in tau_values){
    if(fam %in% c("clayton","gumbel") && tval<=0) next
    cop <- tryCatch({
      switch(fam,
        "gaussian"=normalCopula(iTau(normalCopula(), tval)),
        "t"=tCopula(iTau(tCopula(dim=2), tval)),
        "clayton"=claytonCopula(iTau(claytonCopula(), tval)),
        "gumbel"=gumbelCopula(iTau(gumbelCopula(), tval)),
        "frank"=frankCopula(iTau(frankCopula(), tval)))
    }, error=function(e) NULL)
    if(is.null(cop)) next
    u <- rCopula(5000, cop)
    sim_tau <- cor(u[,1], u[,2], method="kendall")
    monte_carlo_results <- rbind(monte_carlo_results, data.frame(family=fam,
      ↪ tau=tval, sim_tau=sim_tau))
  }
}

png(paste0(output_folder,"monte_carlo_concordance.png"), width=800, height=600)
plot(NA, xlim=c(-0.8,0.8), ylim=c(-0.8,0.8), xlab="Tikras ", ylab="Simuliuotas
  ↪ ",
  main="Monte Carlo: Konkordacijos matų stabilumas pagal kopulos šeimą")
cols <- rainbow(length(unique(monte_carlo_results$family)))
for(i in seq_along(unique(monte_carlo_results$family))){
  fam <- unique(monte_carlo_results$family)[i]
  subset_data <- subset(monte_carlo_results, family==fam)
  points(subset_data$tau, subset_data$sim_tau, col=cols[i], pch=19)
  lines(subset_data$tau, subset_data$sim_tau, col=cols[i])
}

```

```

legend("topleft", legend=unique(monte_carlo_results$family), col=cols, pch=19)
dev.off()

# 5.2 Portfelio rizikos simuliacija
simulate_portfolio_risk <- function(tau, family="gaussian", n=5000){
  cop <- switch(family,
    "gaussian"=normalCopula(iTau(normalCopula(), tau)),
    "t"=tCopula(iTau(tCopula(), tau)))
  u <- rCopula(n, cop)
  x1 <- qnorm(u[,1], mean=0.001, sd=0.02)
  x2 <- qnorm(u[,2], mean=0.001, sd=0.02)
  w <- c(0.5,0.5)
  port <- w[1]*x1 + w[2]*x2
  sd(port)
}

taus <- seq(-0.8,0.8,0.2)
risk_results <- data.frame(
  tau = taus,
  sigma_gauss = sapply(taus, simulate_portfolio_risk, family="gaussian"),
  sigma_t = sapply(taus, simulate_portfolio_risk, family="t")
)

png(paste0(output_folder,"portfolio_risk_vs_tau.png"), width=800, height=600)
plot(risk_results$tau, risk_results$sigma_gauss, type="b", col="blue",
  main="Portfelio rizika priklausomai nuo Kendall tau",
  xlab="Kendall tau", ylab="Portfelio ", ylim=range(risk_results[, -1]))
lines(risk_results$tau, risk_results$sigma_t, type="b", col="red")
legend("topleft", legend=c("Gaussian","t-copula"), col=c("blue","red"), pch=19)
dev.off()

# 6. KENDALL IR SPEARMAN DUOMENYS

dependence_df <- data.frame(
  pair = names(kendall_list),
  kendall_tau = unlist(kendall_list),
  spearman_rho = unlist(spearman_list)
)

dependence_df <- na.omit(dependence_df)

```

7. SPEARMAN VS KENDALL $[-1,1]^2$

```
tau_rho_plot <- ggplot(
  dependence_df,
  aes(x = spearman_rho, y = kendall_tau)
) +
  geom_point(size = 3, color = "black", alpha = 0.85) +
  geom_hline(yintercept = 0, linetype = "dashed", color = "grey40") +
  geom_vline(xintercept = 0, linetype = "dashed", color = "grey40") +
  coord_fixed(xlim = c(-1, 1), ylim = c(-1, 1)) +
  labs(
    title = expression("Spearman " * rho * " ir Kendall " * tau * " reikšmių
      ↪ sklaida"),
    x = expression("Spearman " * rho),
    y = expression("Kendall " * tau)
  ) +
  theme_bw()

ggsave(
  filename = file.path(output_folder, "kendall_vs_spearman.png"),
  plot = tau_rho_plot,
  width = 7, height = 7
)
```

8. Klasteriai

```
set.seed(123)
dependence_df$cluster <- kmeans(
  dependence_df[, c("spearman_rho", "kendall_tau")],
  centers = 3
)$cluster

cluster_plot <- ggplot(
  dependence_df,
  aes(x = spearman_rho, y = kendall_tau, color = factor(cluster))
) +
  geom_point(size = 3) +
  coord_fixed(xlim = c(-1, 1), ylim = c(-1, 1)) +
  labs(
    title = "Konkordacijos matų klasteriai",
    x = expression("Spearman " * rho),
```

```

    y = expression("Kendall " * tau),
    color = "Klasteris"
  ) +
  theme_bw()

ggsave(
  filename = file.path(output_folder, "kendall_spearman_clusters.png"),
  plot = cluster_plot,
  width = 7, height = 7
)

# 9. Patikra

print(head(dependence_df))
message(" Visi grafikai sugeneruoti su baltu fonu (theme_bw()).")

# 10. HTML ataskaita
html_content <- list(
  tags$h2("Bendras akcijų kainų grafikas"),
  tags$img(src=basename(price_plot_file), width="90%")
)

for(p in pairs){
  name1 <- p[1]; name2 <- p[2]; key <- paste(name1,name2,sep="vs")
  returns_pair <- compute_returns(data_list[[name1]], data_list[[name2]], name1,
    ↪ name2)
  if(!is.null(returns_pair)){
    scatter_file <- paste0(output_folder, key, "_scatter.png")
    copula_file <- paste0(output_folder, key, "_copula.png")
    if(file.exists(scatter_file) & file.exists(copula_file)){
      html_content <- c(html_content,
        tags$div(
          style="display:flex; flex-direction:column;
            ↪ align-items:center; margin-bottom:30px;",
          tags$h3(paste(name1,"vs",name2,"- log gražos ir
            ↪ Gaussian kopula")),
          tags$div(
            style="display:flex; flex-direction:row;
              ↪ justify-content:center; gap:20px;",
            tags$img(src=basename(scatter_file), width="45%",

```

```

        style="border-radius:10px; box-shadow:2px
        ↪ 2px 6px rgba(0,0,0,0.2);"),
      tags$img(src=basename(copula_file), width="45%",
        style="border-radius:10px; box-shadow:2px
        ↪ 2px 6px rgba(0,0,0,0.2);")
    )
  ),
  tags$hr(style="border:1px solid #ccc; margin:20px 0;")
)
}
}
}

html_content <- c(html_content,
  tags$h2("Monte Carlo konkordacijos matų palyginimas"),
  tags$img(src="monte_carlo_concordance.png", width="80%"),
  tags$h2("Portfelio rizika priklausomai nuo Kendall tau"),
  tags$img(src="portfolio_risk_vs_tau.png", width="80%"))

html_page <- tags$html(
  tags$head(
    tags$title("Akcijų analizė su kopulomis"),
    tags$style("body { font-family: Arial; margin: 20px; background-color:
    ↪ #f8f9fa; }
        h1, h2, h3 { text-align:center; color:#333; }
        img:hover { transform:scale(1.02); transition:all 0.2s
        ↪ ease-in-out; }")
  ),
  tags$body(
    tags$h1("Akcijų porų analizė, kopulos ir rizikos vertinimas"),
    html_content
  )
)

html_file <- paste0(output_folder,"stock_pairs_analysis_full.html")
save_html(html_page, file=html_file)
message(" HTML puslapis sukurtas: ", html_file)

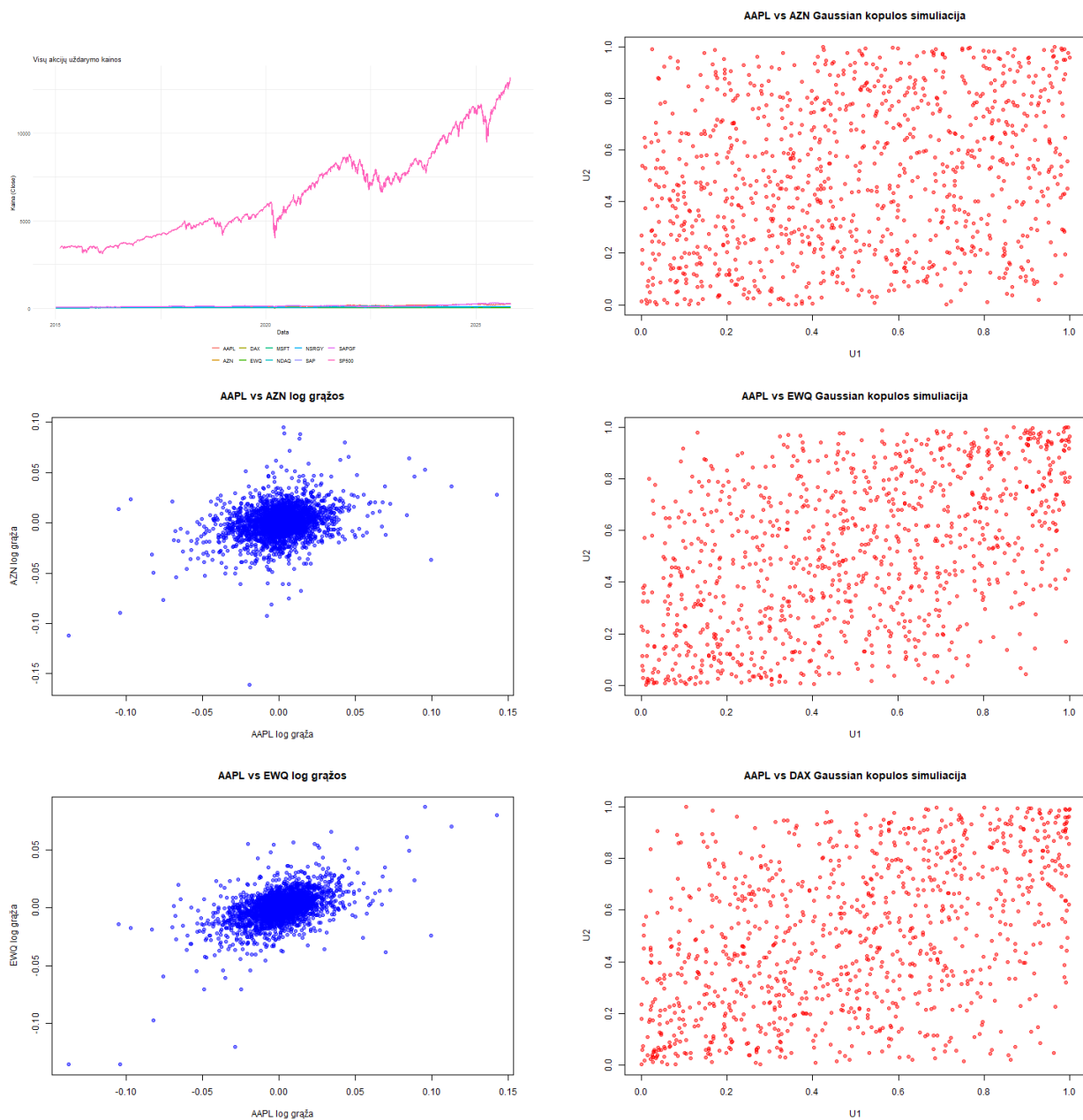
# 11. Rezultatų peržiūra
print(head(kendall_list,10))
print(head(spearman_list,10))
print(taus)

```

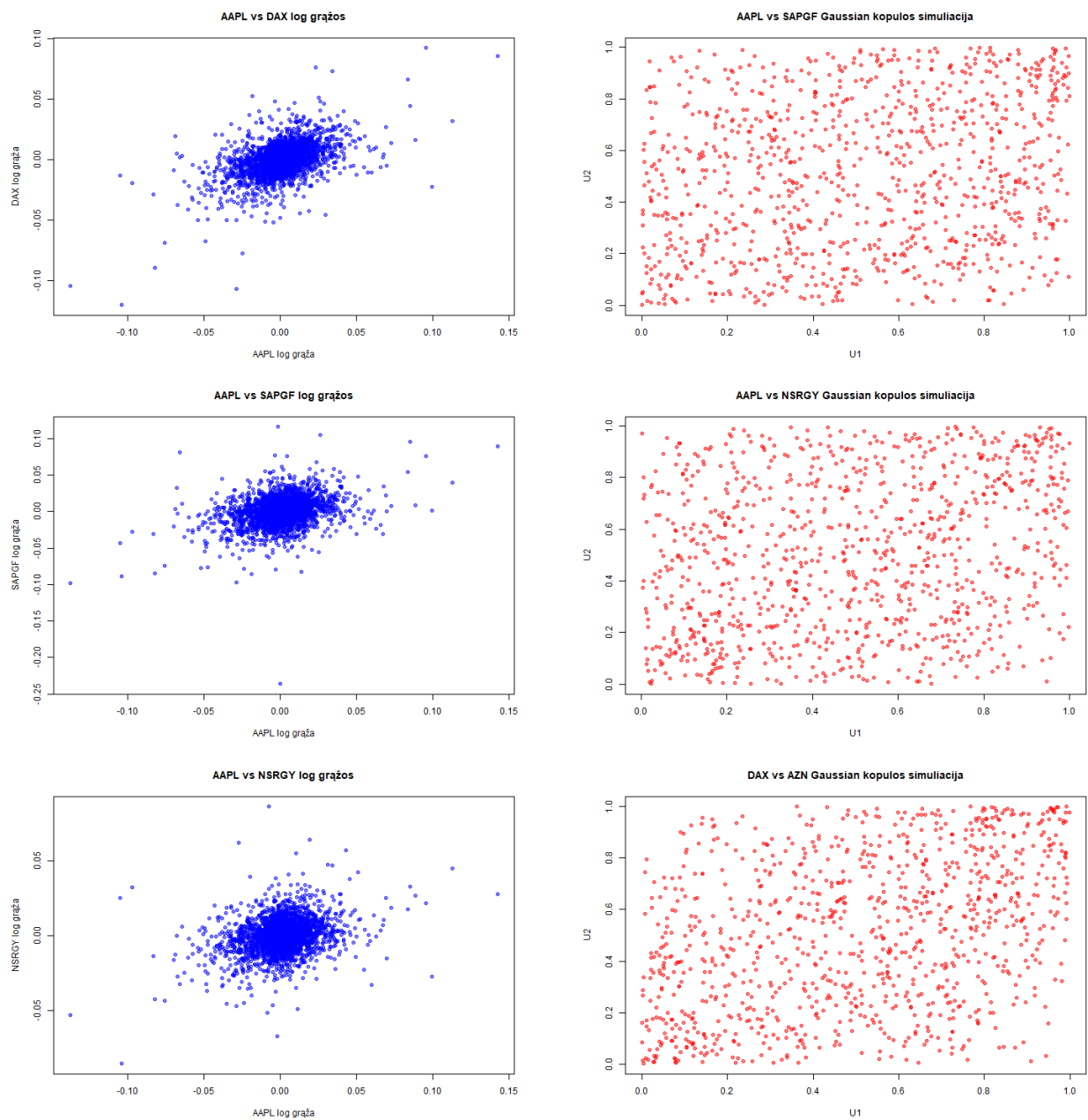
```
print(head(blomqvist_list,10))  
print(head(monte_carlo_results,10))  
print(risk_results)
```

Priedas Nr. 2

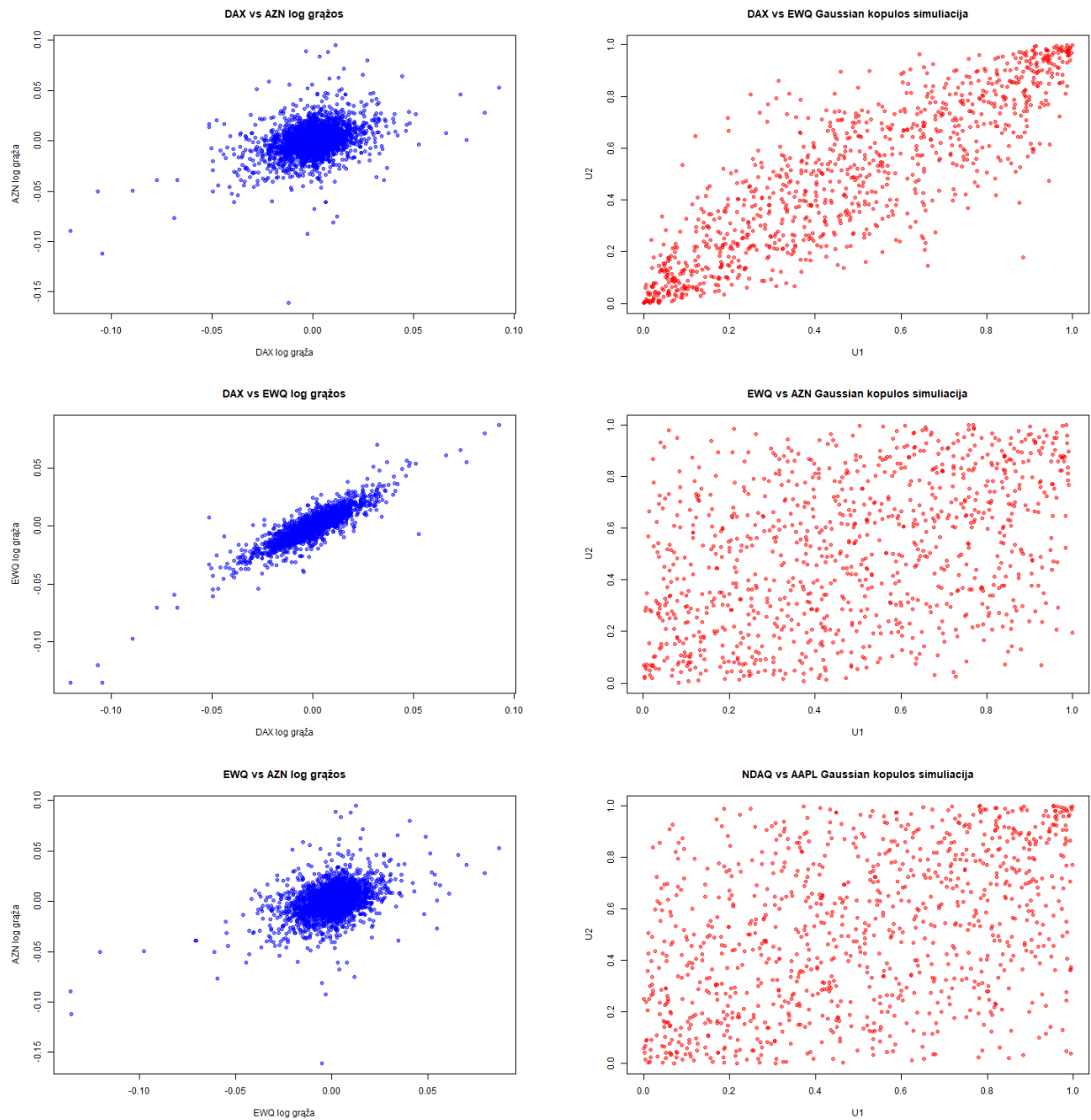
Grafikai



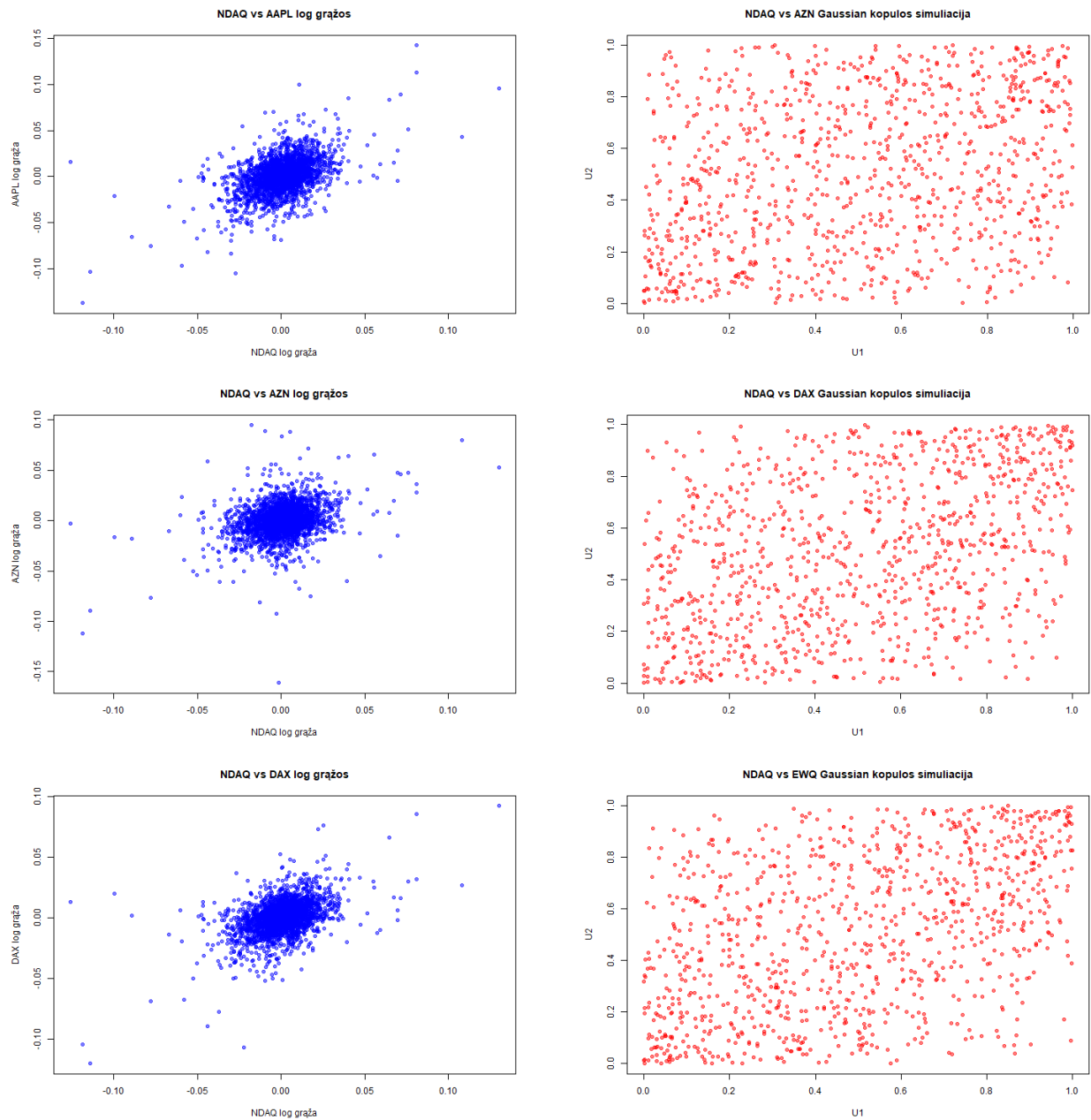
14 pav. Bendras visų akcijų kainų grafikas; AAPL–AZN kopulos ir sklaidos grafikai; AAPL–EWQ kopulos ir sklaidos grafikai; AAPL–DAX kopulos grafikas



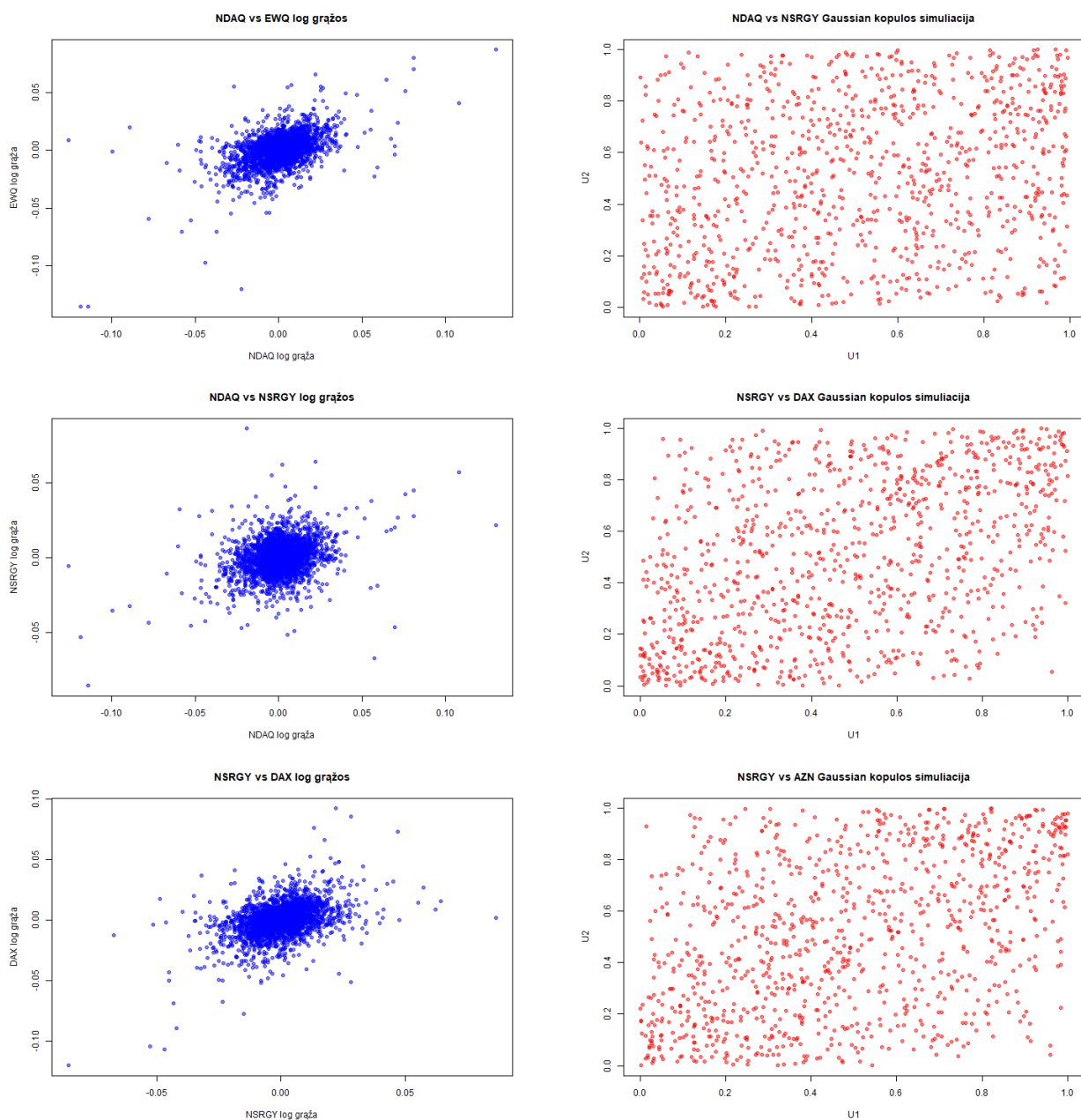
15 pav. AAPL–DAX sklaidos grafikas; AAPL–SAPGF kopulos ir sklaidos grafikai; AAPL–NSRGY kopulos ir sklaidos grafikai; DAX–AZN kopulos grafikas



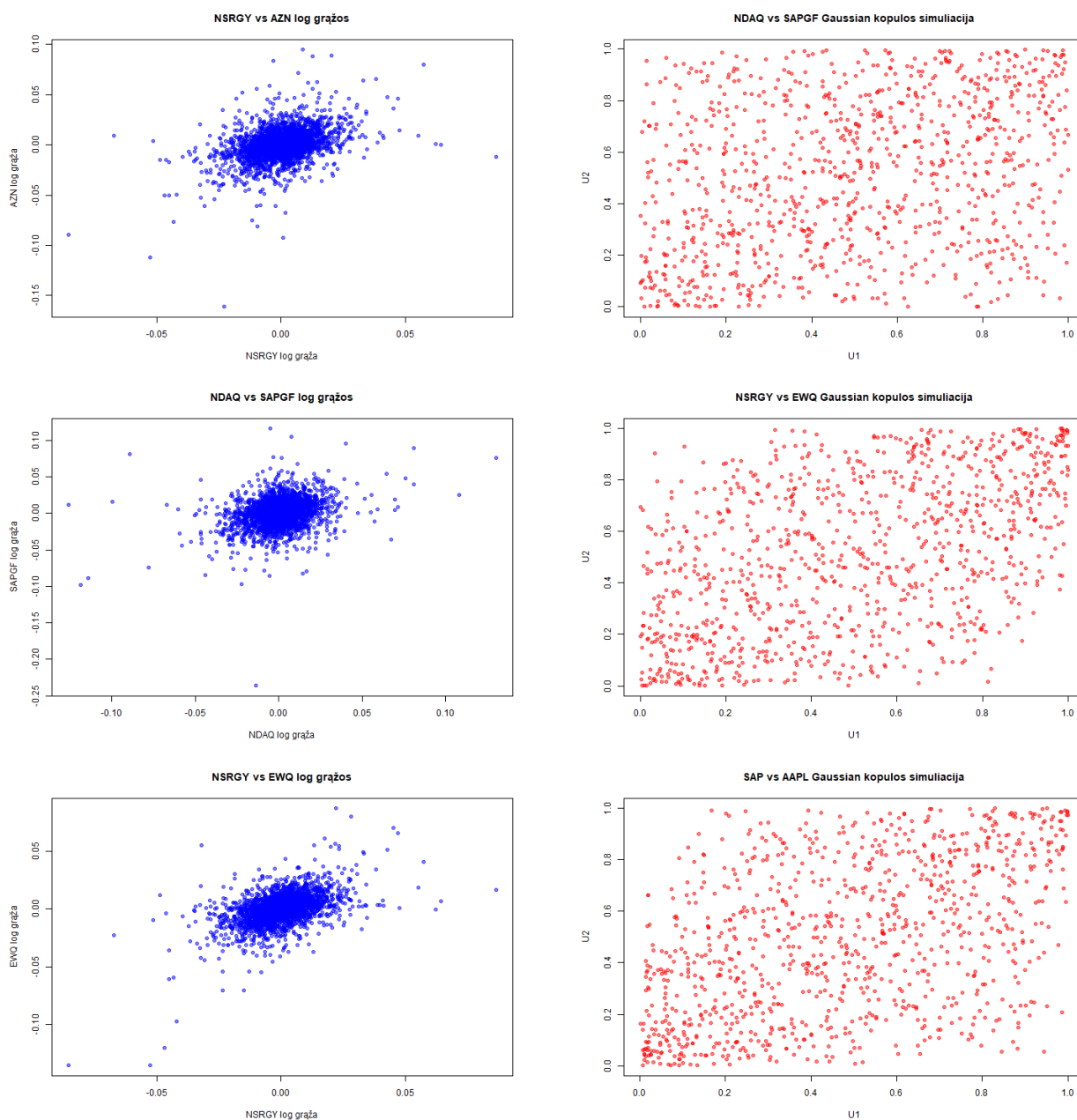
16 pav. DAX–AZN sklaidos grafikas; DAX–EWQ kopulos ir sklaidos grafikai; EWQ–AZN kopulos ir sklaidos grafikai; NDAQ–AAPL kopulos grafikas



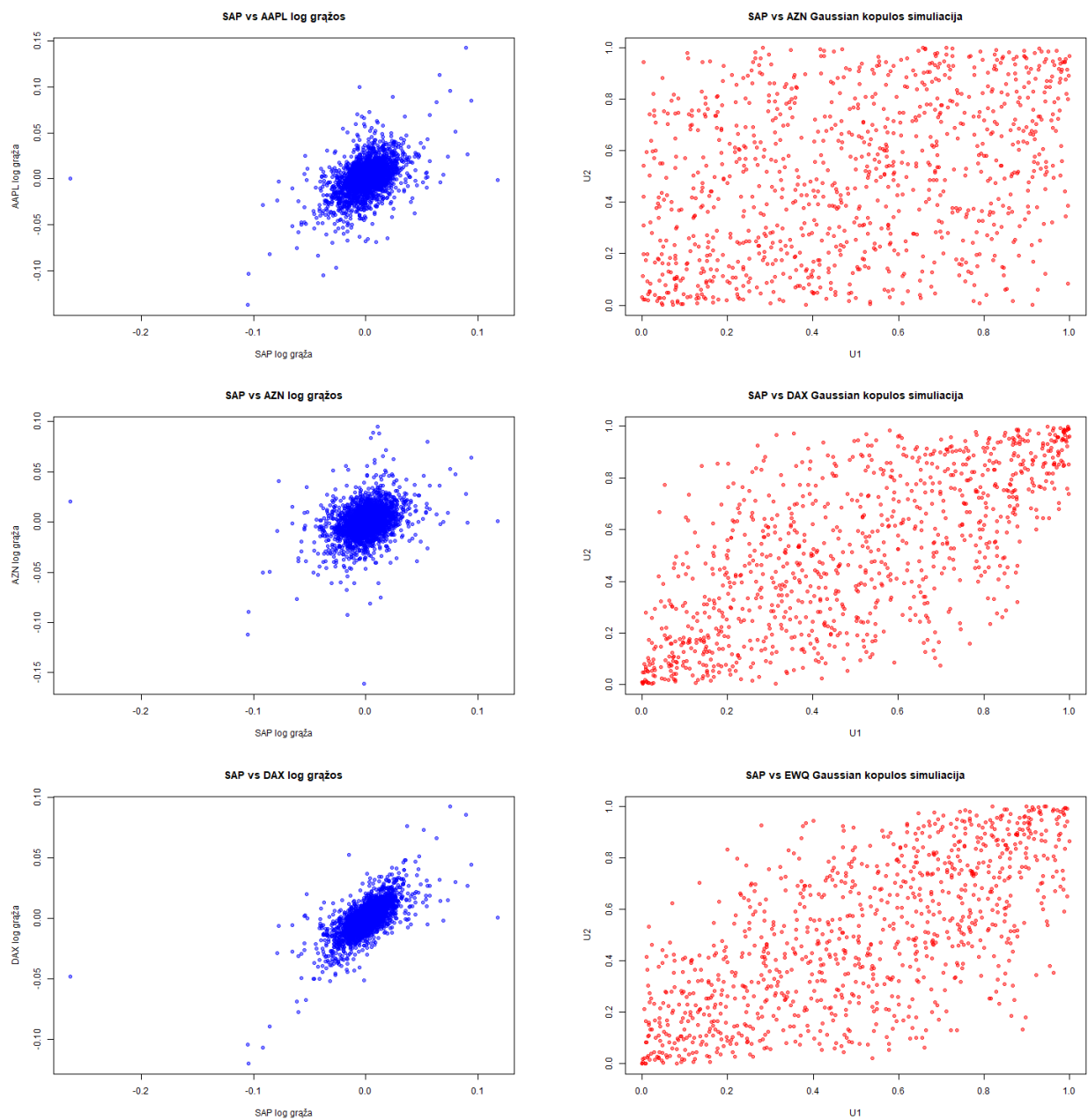
17 pav. NDAQ–AAPL sklaidos grafikas; NDAQ–AZN kopulos ir sklaidos grafikai; NDAQ–DAX kopulos ir sklaidos grafikai; NDAQ–EWQ kopulos grafikas



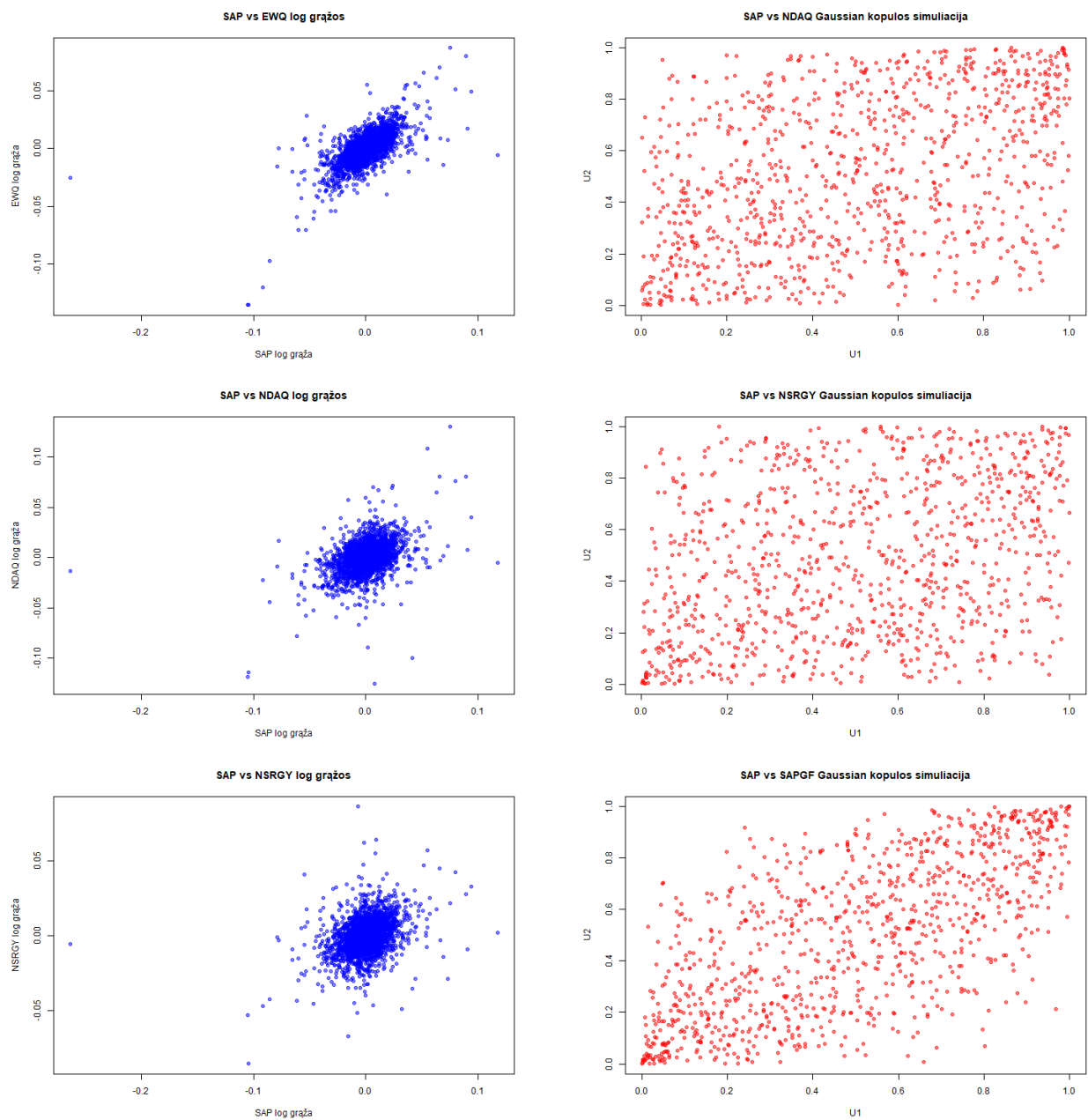
18 pav. NDAQ–EWQ sklaidos grafikas; NDAQ–NSRGY kopulos ir sklaidos grafikai; NSRGY–DAX kopulos ir sklaidos grafikai; NSRGY–AZN kopulos grafikas



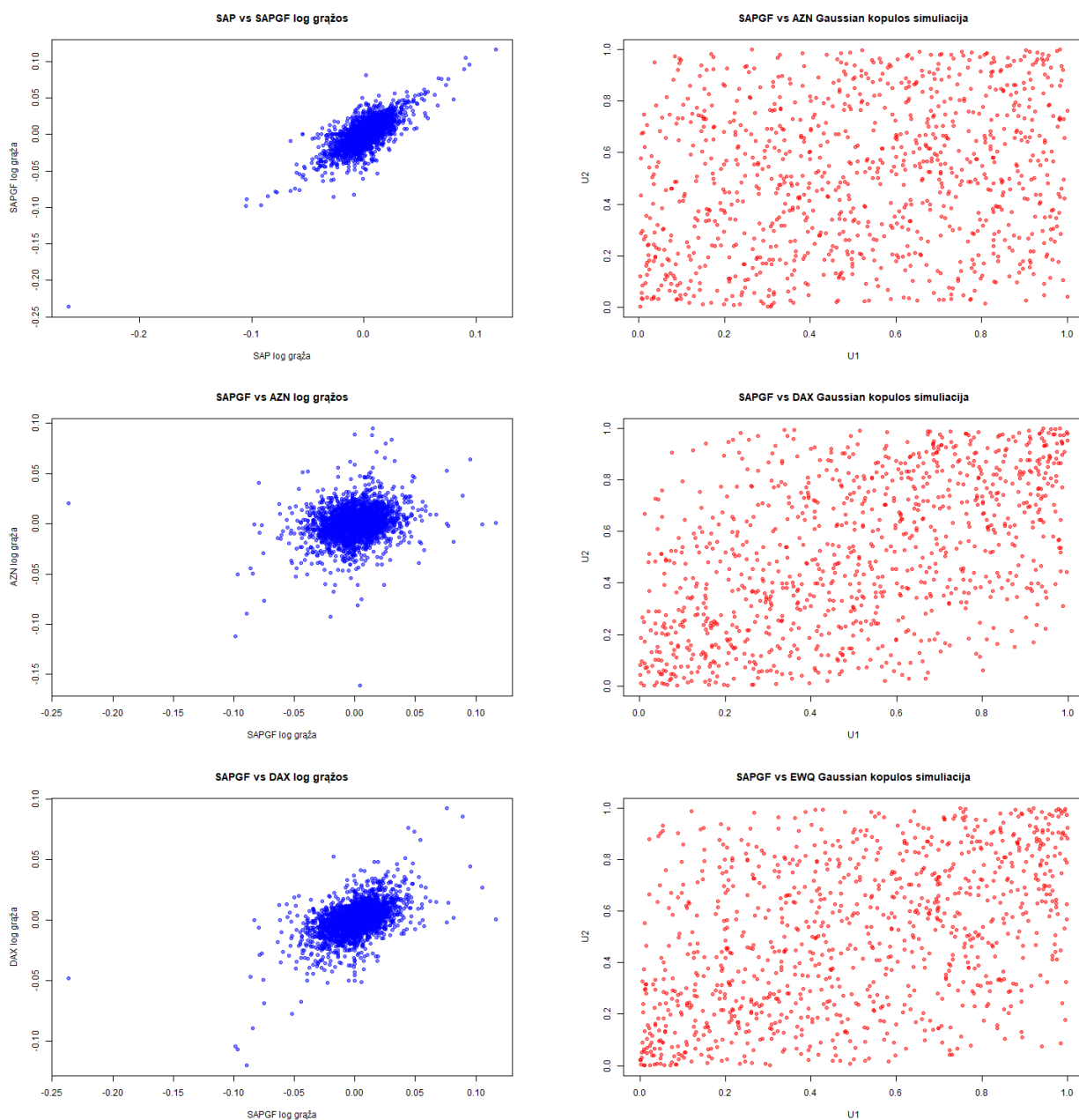
19 pav. NSRGY–AZN sklaidos grafikas; NSRGY–SAPGF kopulos ir sklaidos grafikai; NSRGY–EWQ kopulos ir sklaidos grafikai; SAP–AAPL kopulos grafikas



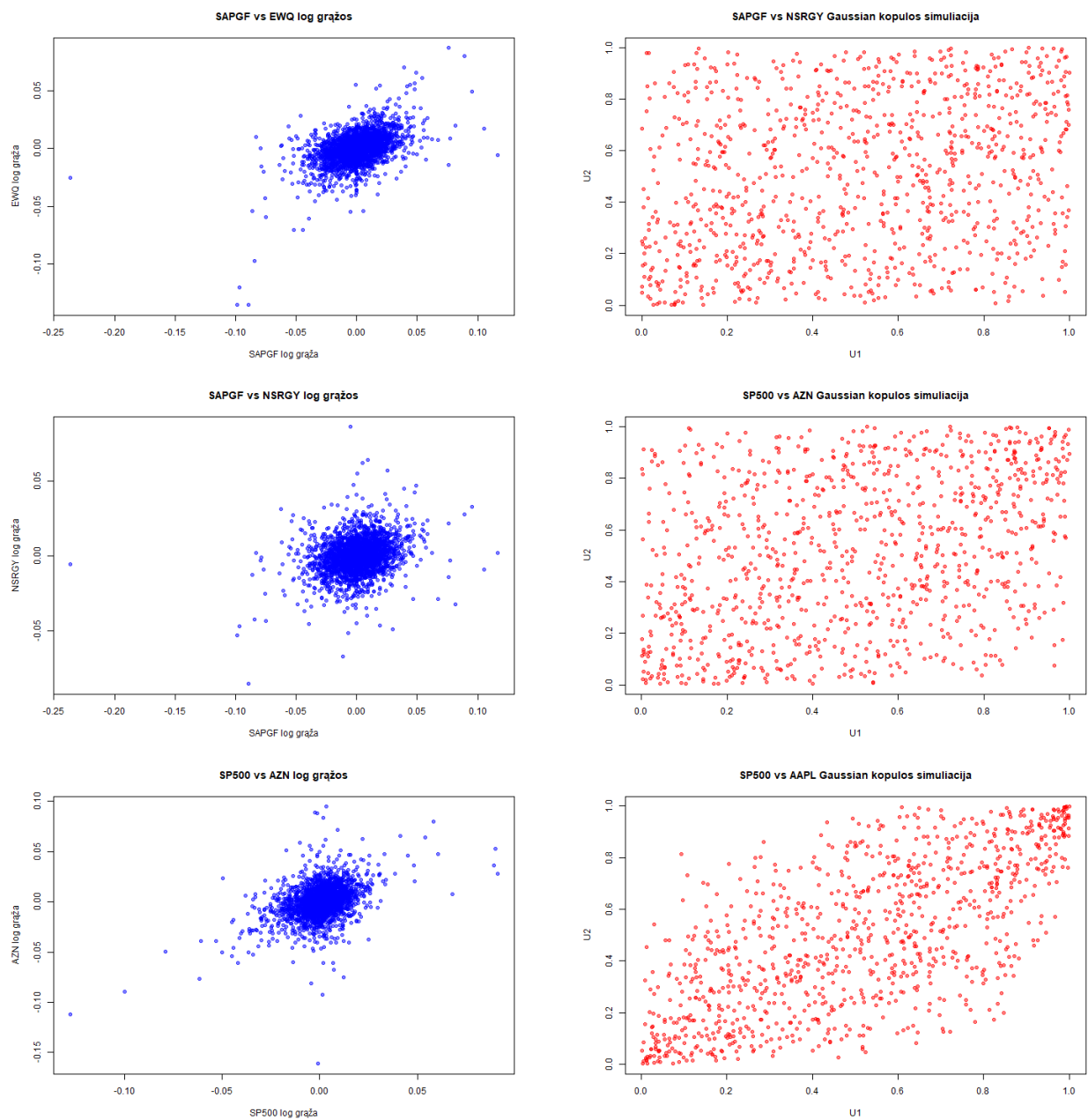
20 pav. SAP–AAPL sklaidos grafikas; SAP–AZN kopulos ir sklaidos grafikai; SAP–DAX kopulos ir sklaidos grafikai; SAP–EWQ kopulos grafikas



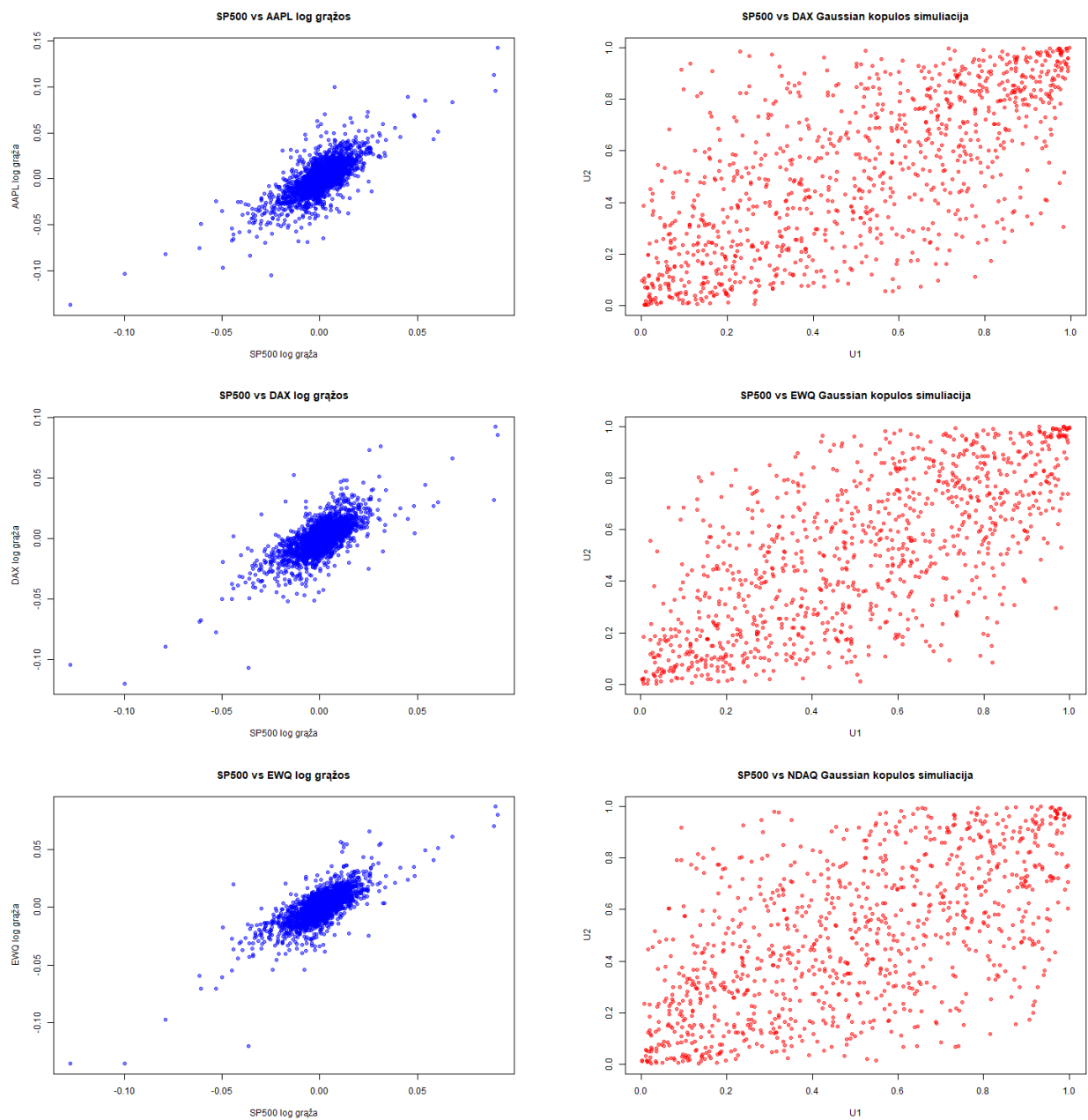
21 pav. SAP–EWQ sklaidos grafikas; SAP–NDAQ kopulos ir sklaidos grafikai; SAP–NSRGY kopulos ir sklaidos grafikai; SAP–SAPGF kopulos grafikas



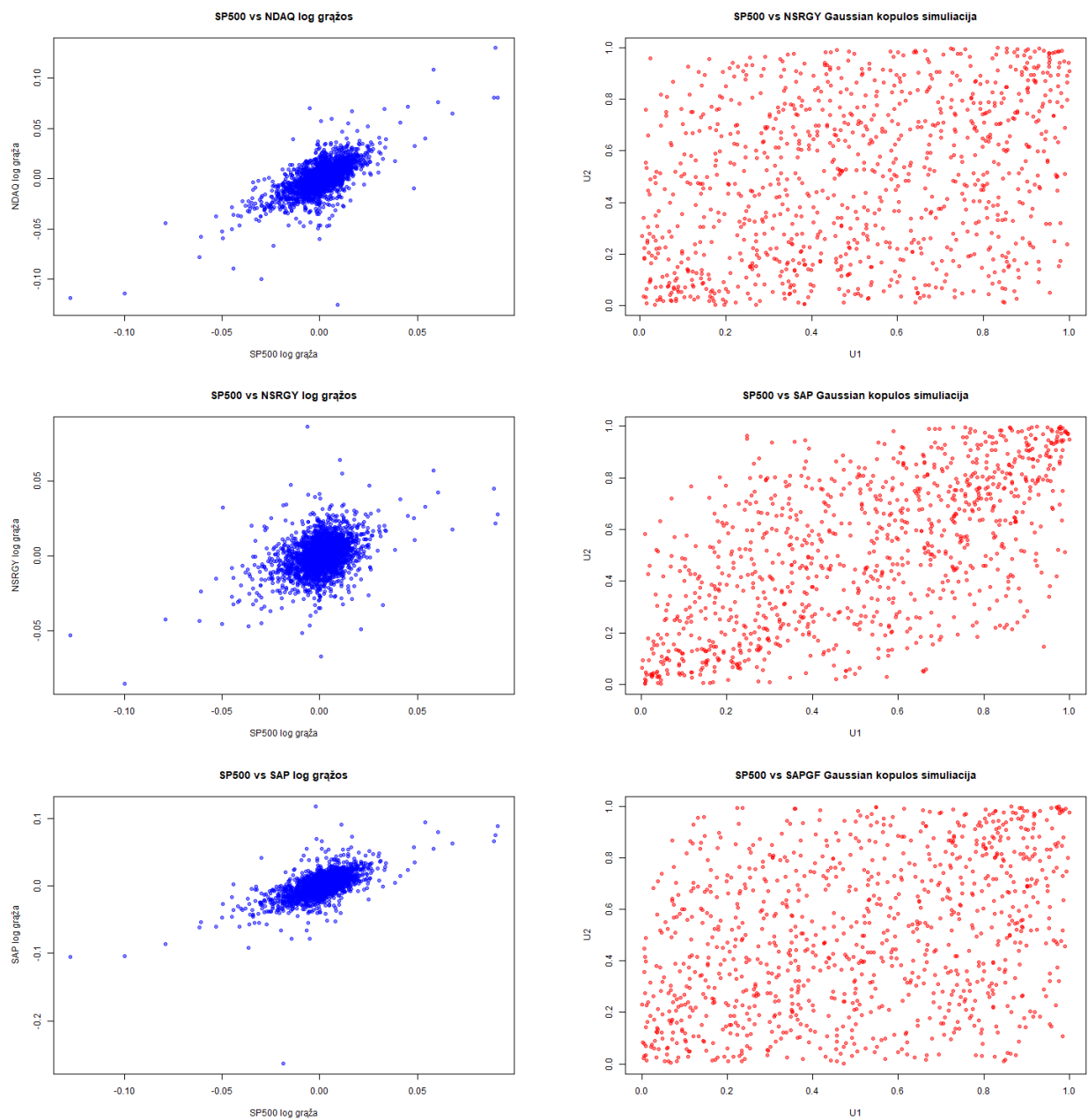
22 pav. SAP–SAPGF sklaidos grafikas; SAPGF–AZN kopulos ir sklaidos grafikai; SAPGF–DAX kopulos ir sklaidos grafikai; SAPGF–EWQ kopulos grafikas



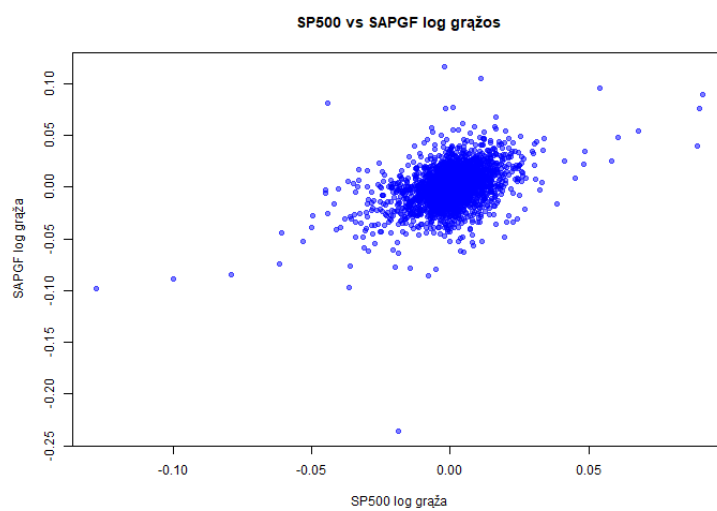
23 pav. SAPGF–EWQ sklaidos grafikas; SAPGF–NSRGY kopulos ir sklaidos grafikai; SP500–AZN kopulos grafikas; SP500–AZN sklaidos grafikas; SP500–AAPL kopulos grafikas



24 pav. SP500–AAPL sklaidos grafikas; SP500–DAX kopulos ir sklaidos grafikai; SP500–EWQ kopulos ir sklaidos grafikai; SP500–NDAQ kopulos grafikas



25 pav. SP500–NDAQ sklaidos grafikas; SP500–NSRGY kopulos ir sklaidos grafikai; SP500–SAP kopulos ir sklaidos grafikai; SP500–SAPGF kopulos grafikas



26 pav. SP500–SAPGF sklaidos grafikas