



**Matematikos ir
informatikos
fakultetas**

VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
FINANSŲ IR DRAUDIMO MATEMATIKOS
MAGISTRO STUDIJŲ PROGRAMA

Magistro baigiamasis darbas

**Gyvybės draudimo vienkartinių grynujų premijų
apskaičiavimo formulės**

Expressions of Single Net Premiums in Life Insurance

Autorius: Gustas Karpičius

VU el. paštas: gustas.karpicius@mif.stud.vu.lt

Darbo vadovas: doc. dr. Andrius Grigutis

Vilnius
2026

Gyvybės draudimo vienkartinių grynųjų premijų apskaičiavimo formulės

Santrauka

Šiame magistro darbe analizuojamos gyvybės draudimo vienkartinių grynųjų premijų apskaičiavimo formulės taikant ekvivalentumo principą. Darbe išnagrinėjamos trys pagrindinės mirtingumo prielaidos trupmeniniams amžiams – tolygiai pasiskirsčiusio mirtingumo, Balducci ir pastovios mirtingumo galios – ir įrodomos grynųjų premijų išraiškos įvairiems draudimo produktams bei pateikiamas teorinis vidurkių palyginimas. Taip pat darbe pateikiamas metodas, kaip iš turimų vienkartinių premijų apskaičiuoti periodines premijas, o visa teorinė medžiaga iliustruojama ir patvirtinama taikomaisiais pavyzdžiais.

Raktiniai žodžiai: vienkartinė grynoji premija, periodinė grynoji premija, ekvivalentumo principas, tolygiai pasiskirstęs mirtingumas, pastovi mirtingumo galia, Balducci prielaida.

Expressions of Single Net Premiums in Life Insurance

Abstract

This Master's thesis analyzes the expressions for calculating single net premiums in life insurance based on the equivalence principle. The work thoroughly examines three main mortality assumptions for fractional ages — uniform distribution of deaths, Balducci, and constant force of mortality — and derives premium expressions for various insurance products as well as provides theoretical comparison of expectations. Furthermore, the thesis presents a method for calculating periodic premiums from the available single premiums, and all theoretical material is illustrated and confirmed with practical examples.

Keywords: single net premium, periodic net premium, equivalence principle, uniform distribution of deaths, constant force of mortality, Balducci assumption.

Turinys

1 Įvadas	4
1.1 Išgyvenamumo teorijos elementai	4
1.2 Trupmeniniai amžiai	5
1.3 Grynosios premijos	7
2 Pagrindinės formulės	8
3 Praktinis taikymas bei periodinės premijos	20
4 Išvados	26
Šaltiniai	27

1. Įvadas

1.1 Išgyvenamumo teorijos elementai

Sakykime atsitiktinis dydis (a.d.) X žymi žmogaus gyvenimo trukmę arba sulauktą amžių metais. Iš šio apibrėžimo natūralu laikyti, kad $X \geq 0$. Tikimybę, jog žmogus išgyvens x metų, žymėsime

$$s(x) = \mathbb{P}(X > x), \quad x \geq 0. \quad (1)$$

Funkcija $s(x)$ vadinama *išgyvenamumo funkcija*, kuri išgyvenamumo teorijoje yra svarbiausia ir kuri išsamiai aprašo populiacijos mirtingumą. Įprastai laikoma, kad a.d. X yra (absoliučiai) tolydus.

Toliau aprašysime dar kelias funkcijas, nusakančias a.d. X elgesį. Funkcija, apibrėžta lygybe

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

vadinama a.d. X *pasiskirstymo funkcija*, kurią taip pat galime išreikšti kaip

$$F(x) = 1 - s(x) \quad \text{visiems } x \geq 0.$$

Kadangi X – tolydus a.d., galime nagrinėti jo *tankį* $f(x)$, kuris apibrėžiamas kaip neneigiamą integruojama funkcija, kuriai, su visais $x \geq 0$, teisinga

$$F(x) = \int_0^x f(y)dy \quad \text{ir} \quad s(x) = \int_x^\infty f(y)dy,$$

o įprasta sąlyga tankiui

$$\int_0^\infty f(y)dy = 1.$$

Be išgyvenamumo funkcijos $s(x)$ ne mažiau svarbus yra dydis

$$\mu_x = \frac{f(x)}{s(x)} = \frac{-\frac{d}{dx}s(x)}{s(x)} = -\frac{d}{dx} \ln s(x), \quad (2)$$

su sąlyga, jog asmuo sulaukė amžiaus x . Šis dydis vadinamas *mirtingumo galia amžiuje* x ir yra apibrėžtas tokiems $x \in [0; \infty)$, kuriems $s(x) > 0$. Lygybė (2) parodo, jog turimą mirtingumo galią μ_x galime išsireikšti per $s(x)$, t.y.

$$s(x) = \exp \left\{ - \int_0^x \mu_u du \right\}, \quad (3)$$

tokiems x , kad $s(x) > 0$. Mirtingumo galia μ_x dar vadinama mirties „intensyvumu“.

Dar vienas svarbus dydis yra a.d. X pirmasis momentas, kuris žymimas

$$\mathring{e}_0 = \mathbb{E}[X] = \int_0^\infty x f(x)dx = \int_0^\infty s(x)dx \quad (4)$$

ir yra vadinamas *pilnąja lauktinąja naujagimio gyvenimo trukme*.

Šiame darbe didesnis dėmesys bus skiriamas žmogaus likutinei gyvenimo trukmei. Sakysime, kad sąlyginis a.d. T_x žymi žmogaus, sulaukusio amžiaus $x \in \mathbb{N}_0$, likutinę gyvenimo trukmę, t.y. $T_x = X - x$, su sąlyga, jog $X \geq x$, kur X žymi žmogaus sulauktą amžių. Tuomet šio a.d. T_x uodegos pasiskirstymo funkcija yra

$${}_u p_x := \mathbb{P}(T_x \geq u) = \mathbb{P}(X \geq x + u | X \geq x) = \frac{s(x+u)}{s(x)}, \quad x \in \mathbb{N}_0, u \geq 0,$$

o tankio išraiška yra

$$f_x(u) := -({}_u p_x)'_u, \quad u \geq 0, \text{ jei išvestinė egzistuoja.}$$

Be to, (4) charakteristiką galime apibendrinti nusakydami x amžiaus asmens lauktiną gyvenimo trukmę per artimiausius n metų, su sąlyga, jog sulaukė x metų:

$${}^{\circ}e_{x:\overline{n}} = \mathbb{E}[\min(T_x, n)] = \frac{1}{s(x)} \int_x^{x+n} s(y) dy = \int_0^n {}_t p_x dt.$$

1.2 Trupmeniniai amžiai

Praktikoje mirtingumo statistiniai duomenys dažniausiai pateikiami tik sveikosioms x reikšmėms, t.y. $s(x)$ yra žinoma tik taškams $x = \{0, 1, 2, \dots\} =: \mathbb{N}_0$. Todėl, jei fiksuojame amžių $x \in \mathbb{N}_0$, išgyvenimo funkcijos $s(x)$ reikšmių trupmeniniams amžiams $s(x+t)$, $0 < t < 1$, radimui yra reikalinga interpoliacija siekiant sujungti taškus $s(x), s(x+1), \dots$.

Aktuarinėje matematikoje žinomiausios yra šios mirtingumo pasiskirstymo prielaidos:

PIRMOJI PRIELAIDA. Tolygiai pasiskirstęs mirtingumas (UDD).

Tardami, kad išgyvenamumo funkcija $s(x+k+t)$, $k \in \mathbb{N}_0$, yra tiesinė intervale $[x, x+1]$, kai $x = 0, 1, \dots$, turime, jog

$$s(x+k+t) = (1-t)s(x+k) + ts(x+k+1), \quad t \in [0, 1]. \quad (5)$$

Tuomet mirtingumo galia ir tankio funkcija pagal [6, 44-46 psl.]

$$\mu_{x+k+t} = \frac{q_{x+k}}{1-t \cdot q_{x+k}},$$

$$f_x(k+t) = -({}_{k+t}p_x)'_t = {}_k p_x - {}_{k+1}p_x = \frac{d_{x+k}}{l_x} =: {}_{k|1}q_x, \quad (6)$$

čia l_x žymi tikėtiną asmenų, išgyvenusių iki x amžiaus, skaičių iš pradinės kohortos l_0 , t.y. $l_x = l_0 \cdot s(x)$, ir $d_x = l_x - l_{x+1}$ žymi mirčių skaičių tarp amžių x ir $x+1$.

Šis interpoliavimo metodas yra dažnai naudojamas ir iš visų yra pats paprasčiausias, kadangi tankio funkcija (6) nepriklauso nuo t , todėl skaitinių charakteristikų skaičiavimas yra nesudėtingas.

ANTROJI PRIELAIDA. **Balducci prielaida (B).**

Kita vertus, laikykime, kad funkcija $1/s(u)$, $u \geq 0$ (tik jeigu $s(u) > 0$) yra tiesinė intervale $[0, 1)$, $[1, 2)$, $\dots$, t.y.

$$\frac{1}{s(x+k+t)} = \frac{1-t}{s(x+k)} + \frac{t}{s(x+k+1)}, \quad x, k \in \mathbb{N}_0, t \in [0, 1]. \quad (7)$$

Tada mirtingumo galia yra

$$\mu_{x+k+t} = \frac{q_{x+k}}{1 - (1-t) \cdot q_{x+k}}, \quad x, k \in \mathbb{N}_0, 0 < t < 1, \quad (8)$$

o tankio funkcijos išraiška yra

$$f_x(k+t) = -(k+t p_x)'_t = - \left(\frac{k+1 p_x}{p_{x+k} + t \cdot q_{x+k}} \right)'_t = \frac{k+1 p_x \cdot q_{x+k}}{(1 - (1-t) \cdot q_{x+k})^2}, \quad (9)$$

kur $x, k \in \mathbb{N}_0, t \in [0, 1]$.

Ši prielaida pavadinta italų aktuario *Gaetano Balducci* (1887 – 1974) vardu, apie kurį ypatingai daug nėra žinoma ir kuris, iš tikrųjų, ne pats pirmas tokį $s(x)$ interpoliavimo metodą pasiūlė, bet pabrėžė jo vaidmenį mirtingumo lentelių konstravime [1, 68 psl.].

Įdomu tai, kad priešingai nuo pirmosios prielaidos mirtingumo galia (8) vienu metų intervale yra mažėjanti, kas gali kelti abejonių dėl realios interpretacijos žmonių populiacijai. Tačiau, anot šaltinių [1, 105 p.] ir [4, 5 p.], tokia savybė gali būti aktuali naujagimiams ar paaugliams, tik įgijusiems teisę vairuoti ar vartoti alkoholį, arba bendrai individams, kurie periodiškai susiduria su padidintos rizikos situacijomis.

TREČIOJI PRIELAIDA. **Pastovi mirtingumo galia (C).**

Galiausiai, tarkime, kad mirtingumo galia μ_x , $x \geq 0$, yra pastovi, t.y.

$$\mu_x = -\frac{s'(x)}{s(x)} = \lambda > 0.$$

Iš to išplaukia, kad kažkokiam $t \geq 0$

$${}_t p_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = e^{-\lambda t} = (p_x)^t.$$

Vadinasi, tikimybė $x \geq 0$ amžiaus asmeniui išgyventi bent $t \geq 0$ metų nepriklauso nuo amžiaus x – tokia savybė vadinama *atminties neturėjimu*. Iš tiesų, tokia prielaida lemia laiptuotą mirtingumo galios funkciją, nors ir tikima, kad mirtingumas laikui bėgant turėtų didėti tolygiai. Tačiau, jei tikrasis mirtingumas didėja nežymiai per vienerius metus, pastovios mirtingumo galios prielaida yra pagrįsta [6, 48 p.].

Galime pastebėti, jog pagal šią prielaidą išgyvenamumo funkcijos pavidalas yra

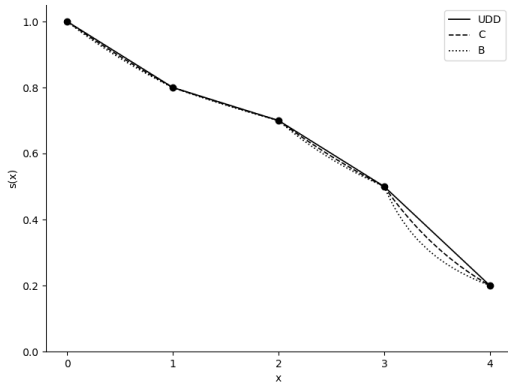
$$s(x+k+t) = s^{1-t}(x+k) s^t(x+k+1) = s(x+k) (p_{x+k})^t, \quad x, k \in \mathbb{N}_0, t \in [0, 1], \quad (10)$$

tuo tarpu tankio funkcija yra

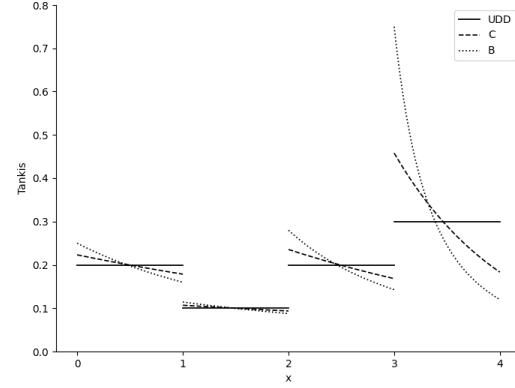
$$f_x(k+t) = -(k+t p_x)'_t = e^{-\lambda k} e^{-\lambda t} \lambda = {}_k p_x \cdot (p_{x+k})^t \cdot \ln \frac{1}{p_{x+k}}, \quad 0 < p_{x+k} < 1. \quad (11)$$

Darant pastovios mirtingumo galios prielaidą laikoma, kad mirtingumo galia μ_{x+k+t} išlieka pastovi kiekviename vienerių metų amžiaus intervale $[x+k, x+k+1)$, t. y. $\mu_{x+k+t} = \mu_{x+k}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $t \in [0, 1)$, tačiau šios konstantos reikšmė priklauso nuo sveiko amžiaus $x+k$, todėl visoje laiko skalėje ši funkcija įgyja laiptuotą pavidalą.

1 ir 2 pav. atitinkamai pavaizduotas išgyvenamumo funkcijos taškų interpoliavimas ir sąlyginiai tankiai $f_x(k+t)$ pagal visas tris paminėtas prielaidas, kai $s(0) = 1$, $s(1) = 0.8$, $s(2) = 0.7$, $s(3) = 0.5$, $s(4) = 0.2$.



1 pav.: $s(x)$ reikšmių interpoliavimas pagal (UDD), (C) ir (B) prielaidas.



2 pav.: Sąlyginiai tankiai $f_x(k+t)$ pagal (UDD), (C) ir (B) prielaidas.

1.3 Grynosios premijos

Grynoji vienkartinė premija aktuarinėje matematikoje – tai pagrindinė draudimo įmokos sąvoka, apibūdinanti sumą, kurią draudėjas turi sumokėti draudikui (visą iš karto arba dalimis periodiškai laikui bėgant), kad šis galėtų padengti būsimos draudimo išmokos vertę, remiantis tikimybinėmis gyvybės trukmės prielaidomis ir palūkanų norma.

Ji vadinama *grynąja*, nes šioje sumoje neįtraukiamos administracinės, komisinės ar rizikos valdymo išlaidos ir atspindi tik matematinį, teoriškai teisingą įmokos dydį pagal **ekvivalencijos principą** [2, 75 psl.], kai tikimasi, jog draudiko būsimos išmokos dabartinė vertė lygi draudėjo įmokos dabartinei vertei.

Grynoji premija remiasi likutine gyvenimo trukme T_x (atsitiktinis) bei diskonto daugikliu $\nu = \frac{1}{1+i}$ (deterministinis), kur $i > -1$ yra metinė palūkanų norma, ir yra apibrėžiama kaip tikėtino diskontuoto išmokos dydžio vidurkis:

$$\bar{A}_x = \mathbb{E} \nu^{T_x} = \int_0^\infty \nu^t f_x(t) dt = \int_0^1 \nu^t f_x(t) dt + \int_1^2 \nu^t f_x(t) dt + \dots$$

Dydis $\bar{A}_x$ parodo, kokia turi būti vienkartinė įmoka dabar, kad padengtų vieneto dydžio išmoką ateityje. Taip pat jis leidžia matematiškai subalansuoti draudimo sutartį – užtikrinti, kad esant tam tikram mirtingumo ir palūkanų lygiui draudiko įsipareigojimai būtų padengiami gautomis įmokomis.

Be to, grynosios vienkartinės premijos yra glaudžiai susijusios su anuitetais ir periodinėmis premijomis, nes jos sudaro pagrindą jų išraiškoms. Aktuarinėje praktikoje jos padeda vertinti draudimo portfelius, sudaryti rezervus, prognozuoti įsipareigojimus ir užtikrinti finansinį draudimo bendrovės stabilumą. Todėl grynosios vienkartinės premijos – tai ne tik teorinis matematinis rodiklis, bet ir esminis draudimo tarifų bei rezervų skaičiavimo instrumentas, grindžiamas tikimybių teorija ir finansų matematika.

2. Pagrindinės formulės

Šiame skyriuje įrodysime formules pagrindinėms grynosioms premijoms apskaičiuoti priklausančiai nuo pasirinkto interpoliacijos metodo. Tiksliau, išsivesime atsitiktinių dydžių ν^{T_x} , T_x , $T_x \cdot \nu^{T_x}$, $[T_x + 1] \cdot \nu^{T_x}$ bei $[n - (T_x - l)] \cdot \nu^{T_x}$ m -ųjų momentų išraiškas (čia $[\cdot]$ žymi sveikąją skaičiaus dalį) vieno metų ilgio intervaluose $l \leq T_x < l + 1$, $l + 1 \leq T_x < l + 2$, ..., $l + n - 1 \leq T_x < l + n$, kur $n \in \mathbb{N}$ žymi gyvybės draudimo galiojimo trukmę metais, o $l \in \mathbb{N}_0$ – atidėjimo laikotarpį. Galime paminėti, jog a.d. $T_x \cdot \nu^{T_x}$ ir $[T_x + 1] \cdot \nu^{T_x}$ aprašo atitinkamai tolygiai didėjančių ir kas metus didėjančių draudimą iki gyvos galvos, kai išmoka mokama iš karto po draudėjo mirties, o $[n - (T_x - l)] \cdot \nu^{T_x}$ yra n -metų mažėjantis su l metų atidėjimo laikotarpiu draudimas. Be to, dar apžvelgsime situacijas, kur metai padalinami į $j \in \mathbb{N}$ lygių dalių, ir rasime momentų išraiškas atsitiktiniams dydžiams $\nu^{([T_x \cdot j] + 1)/j}$ ir $[T_x \cdot j + 1] \cdot \nu^{T_x}$, kurie atitinkamai apibūdina draudimą iki gyvos galvos, kai įmokos mokamos j kartų per metus iki laikotarpio pabaigos, ir j kartų per metus didėjančių draudimą iki gyvos galvos.

Kadangi Balducci prielaida jau yra išnagrinėta didžiajai daliai draudimo produktų (žiūrėti [5]), apsiribosime tik a.d. $[n - (T_x - l)] \cdot \nu^{T_x}$ grynosios premijos formulės išvedimu interpoliacijai pagal (7).

Teiginys 1. Tarkime, kad išgyvenamumo funkcija $s(x)$, $x \in \mathbb{N}_0$, tenkina pastovios mirtingumo galios prielaidą (10), ir tegu T_x žymi asmens, kurio amžius $x \in \mathbb{N}_0$, likusio gyvenimo trukmę. Jeigu $p_{x+k} > 0$ visiems $l \leq k \leq l + n - 1$, kur $l \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, tada su $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} {}^m_{l|} \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 &:= \mathbb{E} \nu^{mT_x} \mathbb{1}_{\{l \leq T_x < l+n\}} \\ &= \sum_{k=l}^{n+l-1} \frac{\nu^{mk} \cdot {}_k p_x \cdot (1 - \nu^m \cdot p_{x+k}) \cdot \log p_{x+k}}{\log(\nu^m \cdot p_{x+k})}. \end{aligned}$$

Įrodymas. Turime, kad

$$\mathbb{E} \nu^{mT_x} \mathbb{1}_{\{l \leq T_x < l+n\}} = \int_l^{l+n} \nu^{mt} f_x(t) dt = \sum_{k=l}^{n+l-1} \frac{{}_k p_x}{(p_{x+k})^k} \cdot \log \frac{1}{p_{x+k}} \int_k^{k+1} \nu^{mt} \cdot (p_{x+k})^t dt.$$

Galime pastebėti, kad integralas

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} \nu^{mt} \cdot (p_{x+k})^t dt &= \int_k^{k+1} (\nu^m \cdot p_{x+k})^t dt = \frac{(\nu^m \cdot p_{x+k})^t}{\log(\nu^m \cdot p_{x+k})} \Big|_k^{k+1} = \\ &= \frac{(\nu^m \cdot p_{x+k})^{k+1} - (\nu^m \cdot p_{x+k})^k}{\log(\nu^m \cdot p_{x+k})} \\ &= \frac{\nu^{mk} \cdot (p_{x+k})^k \cdot (\nu^m \cdot p_{x+k} - 1)}{\log(\nu^m \cdot p_{x+k})}. \end{aligned}$$

Galiausiai, gauname, kad

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \nu^{mT_x} \mathbb{1}_{\{l \leq T_x < l+n\}} &= \sum_{k=l}^{n+l-1} \frac{k p_x}{(p_{x+k})^k} \cdot \log \frac{1}{p_{x+k}} \cdot \frac{\nu^{mk} \cdot (p_{x+k})^k \cdot (\nu^m \cdot p_{x+k} - 1)}{\log(\nu^m \cdot p_{x+k})} \\ &= \sum_{k=l}^{n+l-1} \frac{\nu^{mk} \cdot k p_x \cdot \log p_{x+k} \cdot (1 - \nu^m \cdot p_{x+k})}{\log(\nu^m \cdot p_{x+k})}. \end{aligned}$$

□

Teiginys 2. Tarkime, kad išgyvenamumo funkcija $s(x)$, $x \in \mathbb{N}_0$, tenkina tolygiai pasiskirsčiusio mirtingumo prielaidą (5), ir tegu T_x žymi asmens, kurio amžius $x \in \mathbb{N}_0$, likusio gyvenimo trukmę. Jeigu $p_{x+k} > 0$ visiems $l \leq k \leq l+n-1$, kur $l \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, tada su $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} {}^m_{l|} \bar{A}_{x:\bar{n}}^1 &:= \mathbb{E} \nu^{mT_x} \mathbb{1}_{\{l \leq T_x < l+n\}} \\ &= \sum_{k=l}^{n+l-1} \frac{\nu^{mk} \cdot (\nu^m - 1) \cdot (k p_x - {}_{k+1}p_x)}{\log \nu^m}. \end{aligned}$$

Irodymas. Remiantis ankstesniu teiginiu 1 nesunku pastebėti, kad

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \nu^{mT_x} \mathbb{1}_{\{l \leq T_x < l+n\}} &= \sum_{k=l}^{n+l-1} \int_k^{k+1} \nu^{mt} \cdot (k p_x - {}_{k+1}p_x) dt \\ &= \sum_{k=l}^{n+l-1} (k p_x - {}_{k+1}p_x) \cdot \left(\frac{(\nu^m)^t}{\log \nu^m} \Big|_k^{k+1} \right) \\ &= \sum_{k=l}^{n+l-1} (k p_x - {}_{k+1}p_x) \cdot \frac{(\nu^m)^{k+1} - (\nu^m)^k}{\log \nu^m} \\ &= \sum_{k=l}^{n+l-1} \frac{\nu^{mk} \cdot (\nu^m - 1) \cdot (k p_x - {}_{k+1}p_x)}{\log \nu^m}. \end{aligned}$$

□

Apibrėžkime viršutinę nepilnąją Gama funkciją

$$\Gamma(a, x) = \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt, \quad x \geq 0, \quad a > 0, \quad (12)$$

kuri bus reikalinga sekantiems teiginiams.

Teiginys 3. Tarkime, kad išgyvenamumo funkcija $s(x)$, $x \in \mathbb{N}_0$, tenkina pastovios mirtinumo galios prielaidą (10), ir tegu T_x žymi asmens, kurio amžius $x \in \mathbb{N}_0$, likusio gyvenimo trukmę. Jeigu $p_{x+k} > 0$ visiems $l \leq k \leq l+n-1$, kur $l \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, tada su $m \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E} (T_x)^m \mathbb{1}_{\{l \leq T_x < l+n\}} = \sum_{k=l}^{n+l-1} \frac{k p_x \cdot \Gamma_{m,k}}{(p_{x+k})^k \left(\log \frac{1}{p_{x+k}} \right)^m},$$

kur $\Gamma_{m,k} = \Gamma(m+1, k \log 1/p_{x+k}) - \Gamma(m+1, (k+1) \log 1/p_{x+k})$, o $\Gamma(a, x)$ - viršutinė nepilnoji Gama funkcija, apibrėžta (12).

Irodymas. Turime, jog

$$\mathbb{E} (T_x)^m \mathbb{1}_{\{l \leq T_x < l+n\}} = \int_l^{l+n} t^m f_x(t) dt = \sum_{k=l}^{n+l-1} \frac{k p_x}{(p_{x+k})^k} \cdot \log \frac{1}{p_{x+k}} \int_k^{k+1} t^m \cdot (p_{x+k})^t dt.$$

Skaičiuodami integralą gauname, kad

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} t^m \cdot (p_{x+k})^t dt &= \int_k^\infty t^m \cdot (p_{x+k})^t dt - \int_{k+1}^\infty t^m \cdot (p_{x+k})^t dt \\ &= \int_k^\infty t^m \cdot e^{-t \log \frac{1}{p_{x+k}}} dt - \int_{k+1}^\infty t^m \cdot e^{-t \log \frac{1}{p_{x+k}}} dt. \end{aligned} \quad (13)$$

Atlikę kintamojo keitimą $u = t \log 1/p_{x+k}$, $du = \log 1/p_{x+k} dt$, galime perrašyti (13) kaip

$$\int_{k \log \frac{1}{p_{x+k}}}^\infty \left(\frac{u}{\log \frac{1}{p_{x+k}}} \right)^m e^{-u} \frac{1}{\log \frac{1}{p_{x+k}}} du - \int_{(k+1) \log \frac{1}{p_{x+k}}}^\infty \left(\frac{u}{\log \frac{1}{p_{x+k}}} \right)^m e^{-u} \frac{1}{\log \frac{1}{p_{x+k}}} du.$$

Tada pertvarkę gauname, jog

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} t^m \cdot (p_{x+k})^t dt &= \left(\frac{1}{\log \frac{1}{p_{x+k}}} \right)^{m+1} \left(\int_{k \log \frac{1}{p_{x+k}}}^\infty u^m e^{-u} du - \int_{(k+1) \log \frac{1}{p_{x+k}}}^\infty u^m e^{-u} du \right) \\ &= \frac{\Gamma\left(1+m, k \log \frac{1}{p_{x+k}}\right) - \Gamma\left(1+m, (k+1) \log \frac{1}{p_{x+k}}\right)}{\left(\log \frac{1}{p_{x+k}} \right)^{1+m}} \\ &= \frac{\Gamma_{m,k}}{\left(\log \frac{1}{p_{x+k}} \right)^{1+m}}. \end{aligned}$$

Tuomet turime, kad

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (T_x)^m \mathbb{1}_{\{l \leq T_x < l+n\}} &= \sum_{k=l}^{n+l-1} \frac{k p_x}{(p_{x+k})^k} \cdot \log \frac{1}{p_{x+k}} \cdot \frac{\Gamma_{m,k}}{\left(\log \frac{1}{p_{x+k}} \right)^{1+m}} \\ &= \sum_{k=l}^{n+l-1} \frac{k p_x \cdot \Gamma_{m,k}}{(p_{x+k})^k \left(\log \frac{1}{p_{x+k}} \right)^m}. \end{aligned}$$

□

Teiginys 4. Tarkime, kad išgyvenamumo funkcija $s(x)$, $x \in \mathbb{N}_0$, tenkina tolygiai pasiskirsčiusio mirtingumo prielaidą (5), ir tegu T_x žymi asmens, kurio amžius $x \in \mathbb{N}_0$, likusio gyvenimo trukmę. Jeigu $p_{x+k} > 0$ visiems $l \leq k \leq l+n-1$, kur $l \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, tada su $m \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E} (T_x)^m \mathbb{1}_{\{l \leq T_x < n+l\}} = \sum_{k=l}^{n+l-1} \frac{({}_k p_x - {}_{k+1} p_x) \cdot ((k+1)^{m+1} - k^{m+1})}{m+1}.$$

Irodymas. Galime pamatyti, kad

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (T_x)^m \mathbb{1}_{\{l \leq T_x < n+l\}} &= \sum_{k=l}^{n+l-1} ({}_k p_x - {}_{k+1} p_x) \int_k^{k+1} t^m dt \\ &= \sum_{k=l}^{n+l-1} ({}_k p_x - {}_{k+1} p_x) \cdot \left(\frac{t^{m+1}}{m+1} \Big|_k^{k+1} \right) \\ &= \sum_{k=l}^{n+l-1} \frac{({}_k p_x - {}_{k+1} p_x) \cdot ((k+1)^{m+1} - k^{m+1})}{m+1}. \end{aligned}$$

□

Teiginys 5. Tarkime, kad išgyvenamumo funkcija $s(x)$, $x \in \mathbb{N}_0$, tenkina pastovios mirtinumo galios prielaidą (10), ir tegu T_x žymi asmens, kurio amžius $x \in \mathbb{N}_0$, likusio gyvenimo trukmę. Jeigu $p_{x+k} > 0$ visiems $l \leq k \leq l+n-1$, kur $l \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, tada su $m \in \mathbb{N}$

$${}_l^m (\bar{I}\bar{A})_{x:\overline{n}}^1 := \mathbb{E} (T_x \nu^{T_x})^m \mathbb{1}_{\{l \leq T_x < n+l\}} = \sum_{k=l}^{n+l-1} \frac{{}_k p_x \cdot \log \frac{1}{p_{x+k}} \cdot \tilde{\Gamma}_{m,k}}{(p_{x+k})^k \cdot \left(\log \frac{1}{\nu^m \cdot p_{x+k}} \right)^{m+1}},$$

kur $\tilde{\Gamma}_{m,k} = \Gamma \left(m+1, k \log \frac{1}{\nu^m \cdot p_{x+k}} \right) - \Gamma \left(m+1, (k+1) \log \frac{1}{\nu^m \cdot p_{x+k}} \right)$, o $\Gamma(a, x)$ - viršutinė nepilnoji Gama funkcija, apibrėžta (12).

Irodymas. Galime pastebėti, jog

$$\mathbb{E} (T_x \nu^{T_x})^m \mathbb{1}_{\{l \leq T_x < n+l\}} = \int_l^{l+n} t^m \nu^{mt} f_x(t) dt = \sum_{k=l}^{n+l-1} \frac{{}_k p_x}{(p_{x+k})^k} \cdot \log \frac{1}{p_{x+k}} \int_k^{k+1} t^m \cdot \nu^{mt} \cdot (p_{x+k})^t dt.$$

Kaip ir anksčiau, nagrinėkime integralą

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} t^m \nu^{mt} \cdot (p_{x+k})^t dt &= \int_k^{k+1} t^m \cdot (\nu^m \cdot p_{x+k})^t dt \\ &= \int_k^{\infty} t^m \cdot (\nu^m \cdot p_{x+k})^t dt - \int_{k+1}^{\infty} t^m \cdot (\nu^m \cdot p_{x+k})^t dt \\ &= \int_k^{\infty} t^m \cdot e^{-t \log \frac{1}{\nu^m \cdot p_{x+k}}} dt - \int_{k+1}^{\infty} t^m \cdot e^{-t \log \frac{1}{\nu^m \cdot p_{x+k}}} dt. \end{aligned} \quad (14)$$

Vėl atlikę kintamojo keitimą $u = t \log 1/(\nu^m \cdot p_{x+k})$, $du = \log 1/(\nu^m \cdot p_{x+k}) dt$ randame, kad (14) yra

$$\left(\log \frac{1}{\nu^m \cdot p_{x+k}} \right)^{1+m} \left(\int_{k \log \frac{1}{\nu^m \cdot p_{x+k}}}^{\infty} u^m \cdot e^{-u} dt - \int_{(k+1) \log \frac{1}{\nu^m \cdot p_{x+k}}}^{\infty} u^m \cdot e^{-u} dt \right).$$

Po pertvarkymų gauname, kad

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} t^m \nu^{mt} \cdot (p_{x+k})^t dt &= \frac{\Gamma\left(1+m, k \log \frac{1}{\nu^m \cdot p_{x+k}}\right) - \Gamma\left(1+m, (k+1) \log \frac{1}{\nu^m \cdot p_{x+k}}\right)}{\left(\log \frac{1}{\nu^m \cdot p_{x+k}}\right)^{1+m}} \\ &= \frac{\tilde{\Gamma}_{m,k}}{\left(\log \frac{1}{\nu^m \cdot p_{x+k}}\right)^{1+m}}. \end{aligned}$$

Galiausiai, galutinė išraiška yra

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (T_x \nu^{T_x})^m \mathbb{1}_{\{l \leq T_x < n+l\}} &= \sum_{k=l}^{n+l-1} \frac{k p_x}{(p_{x+k})^k} \cdot \log \frac{1}{p_{x+k}} \cdot \frac{\tilde{\Gamma}_{m,k}}{\left(\log \frac{1}{\nu^m \cdot p_{x+k}}\right)^{1+m}} \\ &= \sum_{k=l}^{n+l-1} \frac{k p_x \cdot \log \frac{1}{p_{x+k}} \cdot \tilde{\Gamma}_{m,k}}{(p_{x+k})^k \cdot \left(\log \frac{1}{\nu^m \cdot p_{x+k}}\right)^{m+1}}. \end{aligned}$$

□

Teiginys 6. Tarkime, kad išgyvenamumo funkcija $s(x)$, $x \in \mathbb{N}_0$, tenkina tolygiai pasiskirsčiusio mirtingumo prielaidą (5), ir tegu T_x žymi asmens, kurio amžius $x \in \mathbb{N}_0$, likusio gyvenimo trukmę. Jeigu $p_{x+k} > 0$ visiems $l \leq k \leq l+n-1$, kur $l \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, tada su $m \in \mathbb{N}$

$$m_{|} (\bar{I}\bar{A})_{x:\overline{n}}^1 = \mathbb{E} (T_x \nu^{T_x})^m \mathbb{1}_{\{l \leq T_x < n+l\}} = \sum_{k=l}^{n+l-1} \frac{(k p_x -_{k+1} p_x) \cdot \bar{\Gamma}_{m,k}}{\left(\log \frac{1}{\nu^m}\right)^{m+1}},$$

kur $\bar{\Gamma}_{m,k} = \Gamma\left(m+1, k \log \frac{1}{\nu^m}\right) - \Gamma\left(m+1, (k+1) \log \frac{1}{\nu^m}\right)$, o $\Gamma(a, x)$ - viršutinė nepilnoji Gama funkcija, apibrėžta (12).

Irodymas. Turime, kad

$$\mathbb{E} (T_x \nu^{T_x})^m \mathbb{1}_{\{l \leq T_x < n+l\}} = \sum_{k=l}^{n+l-1} (k p_x -_{k+1} p_x) \int_k^{k+1} t^m \nu^{mt} dt.$$

Analogiškai 5 teiginio įrodymui, atlikdami kintamojo keitimą $u = t \log \frac{1}{\nu^m}$, $du = \log \frac{1}{\nu^m} dt$, integralą galime pertvarkyti taip:

$$\begin{aligned}
\int_k^{k+1} t^m \cdot \nu^{mt} dt &= \int_k^\infty t^m \cdot \nu^{mt} dt - \int_{k+1}^\infty t^m \cdot \nu^{mt} dt \\
&= \int_k^\infty t^m \cdot e^{-t \log \frac{1}{\nu^m}} dt - \int_{k+1}^\infty t^m \cdot e^{-t \log \frac{1}{\nu^m}} dt \\
&= \left(\frac{1}{\log \frac{1}{\nu^m}} \right)^{1+m} \left(\int_{k \log \frac{1}{\nu^m}}^\infty u^m \cdot e^{-u} dt - \int_{(k+1) \log \frac{1}{\nu^m}}^\infty u^m \cdot e^{-u} dt \right) \\
&= \left(\frac{1}{\log \frac{1}{\nu^m}} \right)^{1+m} \left(\Gamma \left(1 + m, k \log \frac{1}{\nu^m} \right) - \Gamma \left(1 + m, (k+1) \log \frac{1}{\nu^m} \right) \right) \\
&= \left(\frac{1}{\log \frac{1}{\nu^m}} \right)^{1+m} \cdot \bar{\Gamma}_{m,k}.
\end{aligned}$$

Taigi, gauname, jog

$$\mathbb{E} (T_x \nu^{T_x})^m \mathbb{1}_{\{l \leq T_x < n+l\}} = \sum_{k=l}^{n+l-1} \frac{(k p_x - (k+1) p_x) \cdot \bar{\Gamma}_{m,k}}{(\log \frac{1}{\nu^m})^{m+1}}.$$

□

Teiginys 7. Tarkime, kad išgyvenamumo funkcija $s(x)$, $x \in \mathbb{N}_0$, tenkina pastovios mirtinumo galios prielaidą (10), ir tegu T_x žymi asmens, kurio amžius $x \in \mathbb{N}_0$, likusio gyvenimo trukmę. Jeigu $p_{x+k} > 0$ visiems $l \leq k \leq l+n-1$, kur $l \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, tada su $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{m}{l} (I\bar{A})_{x:\overline{n}}^1 \right| &:= \mathbb{E} ([T_x + 1] \nu^{T_x})^m \mathbb{1}_{\{l \leq T_x < n+l\}} \\
&= \sum_{k=l}^{l+n-1} \nu^{mk} \cdot (k+1)^m \cdot {}_k p_x \cdot \log \frac{1}{p_{x+k}} \cdot \frac{p_{x+k} \cdot \nu^m - 1}{\log(\nu^m \cdot p_{x+k})}.
\end{aligned}$$

Įrodymas. Turime, jog

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} ([T_x + 1] \nu^{T_x})^m \mathbb{1}_{\{l \leq T_x < n+l\}} &= \int_l^{l+n} [t+1]^m \nu^{mt} f_x(t) dt \\
&= \sum_{k=l}^{n+l-1} \frac{{}_k p_x}{(p_{x+k})^k} \cdot \log \frac{1}{p_{x+k}} \cdot (k+1)^m \int_k^{k+1} \nu^{mt} \cdot (p_{x+k})^t dt.
\end{aligned}$$

Integralo $\int_k^{k+1} \nu^{mt} \cdot (p_{x+k})^t dt$ išraiška jau yra žinoma iš 1 teiginio įrodymo, todėl

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} ([T_x + 1] \nu^{T_x})^m \mathbb{1}_{\{l \leq T_x < n+l\}} &= \sum_{k=l}^{n+l-1} \frac{{}_k p_x \cdot (k+1)^m}{(p_{x+k})^k} \cdot \log \frac{1}{p_{x+k}} \cdot \frac{\nu^{mk} \cdot (p_{x+k})^k \cdot (\nu^m \cdot p_{x+k} - 1)}{\log(\nu^m \cdot p_{x+k})} \\
&= \sum_{k=l}^{l+n-1} \nu^{mk} \cdot (k+1)^m \cdot {}_k p_x \cdot \log \frac{1}{p_{x+k}} \cdot \frac{\nu^m \cdot p_{x+k} - 1}{\log(\nu^m \cdot p_{x+k})}.
\end{aligned}$$

□

Teiginys 8. Tarkime, kad išgyvenamumo funkcija $s(x)$, $x \in \mathbb{N}_0$, tenkina tolygiai pasiskirsčiusio mirtingumo prielaidą (5), ir tegu T_x žymi asmens, kurio amžius $x \in \mathbb{N}_0$, likusio gyvenimo trukmę. Jeigu $p_{x+k} > 0$ visiems $l \leq k \leq l+n-1$, kur $l \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, tada su $m \in \mathbb{N}$

$${}_l^m (I\bar{A})_{x:\overline{n}}^1 = \sum_{k=l}^{n+l-1} \frac{\nu^{mk} \cdot (k+1)^m \cdot (\nu^m - 1) \cdot ({}_k p_x - {}_{k+1} p_x)}{\log \nu^m}.$$

Įrodymas. Galime pastebėti, kad

$$\mathbb{E} \nu^{mT_x} \mathbb{1}_{\{l \leq T_x < l+n\}} = \sum_{k=l}^{n+l-1} ({}_k p_x - {}_{k+1} p_x) \cdot (k+1)^m \int_k^{k+1} \nu^{mt} dt.$$

Kadangi integralas jau žinomas iš 2 įrodymo, gauname, jog

$$\mathbb{E} \nu^{mT_x} \mathbb{1}_{\{l \leq T_x < l+n\}} = \sum_{k=l}^{n+l-1} ({}_k p_x - {}_{k+1} p_x) \cdot (k+1)^m \cdot \frac{\nu^{mk} \cdot (\nu^m - 1)}{\log \nu^m}.$$

□

Teiginys 9. Tarkime, kad išgyvenamumo funkcija $s(x)$, $x \in \mathbb{N}_0$, tenkina pastovios mirtinumo galios prielaidą (10), ir tegu T_x žymi asmens, kurio amžius $x \in \mathbb{N}_0$, likusio gyvenimo trukmę. Jeigu $p_{x+k} > 0$ visiems $l \leq k \leq l+n-1$, kur $l \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, tada su $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} {}_l^m (D\bar{A})_{x:\overline{n}}^1 &:= \mathbb{E} ([n - (T_x - l)] \nu^{T_x})^m \mathbb{1}_{\{l \leq T_x < n+l\}} \\ &= \sum_{k=l}^{l+n-1} \nu^{mk} \cdot (n+l-k)^m \cdot {}_k p_x \cdot \log \frac{1}{p_{x+k}} \cdot \frac{p_{x+k} \cdot \nu^m - 1}{\log(\nu^m \cdot p_{x+k})}. \end{aligned}$$

Įrodymas. Randame, jog

$$\begin{aligned} \mathbb{E} ([n - (T_x - l)] \nu^{T_x})^m \mathbb{1}_{\{l \leq T_x < n+l\}} &= \int_l^{l+n} [n - (t - l)]^m \nu^{mt} f_x(t) dt \\ &= \sum_{k=l}^{n+l-1} \frac{{}_k p_x}{(p_{x+k})^k} \cdot \log \frac{1}{p_{x+k}} \cdot (n+l-k)^m \int_k^{k+1} \nu^{mt} \cdot (p_{x+k})^t dt \\ &= \sum_{k=l}^{n+l-1} {}_k p_x \cdot \log \frac{1}{p_{x+k}} \cdot (n+l-k)^m \cdot \frac{\nu^{mk} (\nu^m \cdot p_{x+k} - 1)}{\log(\nu^m \cdot p_{x+k})}. \end{aligned}$$

□

Teiginys 10. Tarkime, kad išgyvenamumo funkcija $s(x)$, $x \in \mathbb{N}_0$, tenkina tolygiai pasiskirsčiusio mirtingumo prielaidą (5), ir tegu T_x žymi asmens, kurio amžius $x \in \mathbb{N}_0$, likusio gyvenimo trukmę. Jeigu $p_{x+k} > 0$ visiems $l \leq k \leq l+n-1$, kur $l \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, tada su $m \in \mathbb{N}$

$${}_l^m (D\bar{A})_{x:\overline{n}}^1 = \sum_{k=l}^{l+n-1} \frac{\nu^{mk} \cdot (n+l-k)^m \cdot ({}_k p_x - {}_{k+1} p_x) \cdot (\nu^m - 1)}{\log \nu^m}.$$

Irodymas. Galime pastebėti, jog

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}([n - (T_x - l)]\nu^{T_x})^m \mathbb{1}_{\{l \leq T_x < n+l\}} &= \int_l^{l+n} [n - (t - l)]^m \nu^{mt} f_x(t) dt \\
&= \sum_{k=l}^{n+l-1} ({}_k p_x - {}_{k+1} p_x) \cdot (n + l - k)^m \int_k^{k+1} \nu^{mt} dt \\
&= \sum_{k=l}^{n+l-1} ({}_k p_x - {}_{k+1} p_x) \cdot (n + l - k)^m \cdot \frac{\nu^{mk} (\nu^m - 1)}{\log \nu^m}.
\end{aligned}$$

□

Teiginys 11. Tarkime, kad išgyvenamumo funkcija $s(x)$, $x \in \mathbb{N}_0$, tenkina Balducci prielaidą (7), ir tegu T_x žymi asmens, kurio amžius $x \in \mathbb{N}_0$, likusio gyvenimo trukmę. Jeigu $p_{x+k} > 0$ visiems $l \leq k \leq l + n - 1$, kur $l \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, tada su $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
{}_l^m (D\bar{A})_{x:\overline{n}}^1 &= \mathbb{E}([n - (T_x - l)]\nu^{T_x})^m \mathbb{1}_{\{l \leq T_x < n+l\}} \\
&= \sum_{k=l}^{l+n-1} {}_k p_x \cdot (n + l - k)^m \cdot \nu^{mk} \cdot (1 - p_{x+k} \cdot \nu^m) \\
&\quad + \delta m \sum_{k=l}^{l+n-1} {}_{k+1} p_x \cdot (n + l - k)^m \cdot \frac{\nu^{m(1+k-1/q_{x+k})}}{q_{x+k}} \cdot \text{Ei}_k(m\delta),
\end{aligned}$$

kur $\delta = \log(1 + i)$, $i > -1$, ir

$$\text{Ei}_k(\delta) = \text{Ei}\left(-\frac{\delta \cdot p_{x+k}}{q_{x+k}}\right) - \text{Ei}\left(-\frac{\delta}{q_{x+k}}\right).$$

Čia $\text{Ei}(\cdot)$ yra eksponentinis integralas, apibrėžtas kaip

$$\text{Ei}(y) := - \int_{-y}^{\infty} \frac{e^{-z}}{z} dz = \int_{-\infty}^y \frac{e^z}{z} dz, \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Irodymas. Turime, jog

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}([n - (T_x - l)]\nu^{T_x})^m \mathbb{1}_{\{l \leq T_x < n+l\}} \\
&= \sum_{k=l}^{l+n-1} {}_{k+1} p_x \cdot q_{x+k} \cdot (n + l - k)^m \int_k^{k+1} \frac{\nu^{tm} dt}{(1 - (k + 1 - t) \cdot q_{x+k})^2}.
\end{aligned}$$

Pagal [5, 20 psl.] žinome, kad

$$q_{x+k} \cdot \int_k^{k+1} \frac{\nu^{tm} dt}{(1 - (k + 1 - t) \cdot q_{x+k})^2} = \frac{\nu^{mk}}{p_{x+k}} - \nu^{m(k+1)} + \delta m \cdot \frac{\nu^{m(1+k-1/q_{x+k})}}{q_{x+k}} \cdot \text{Ei}(m\delta).$$

Išstatę turimą išraišką gauname teigtą formulę.

□

Toliau formuluosime teiginius grynosioms premijoms, kai metai padalinami į $j \in \mathbb{N}$ lygių dalių. Tiksliau, rasime a.d. $\nu^{([T_x \cdot j] + 1)/j}$ ir $[T_x \cdot j + 1] \cdot \nu^{T_x}$ m -uosius momentus, kai T_x yra pasiskirstęs intervaluose, tokiuose kaip (15). Šiuo atveju draudimo atidėjimo laikotarpį gali apibūdinti dydis „ $l * n_1$ “, kur $l \in \mathbb{N}_0$ žymi metus, o $n_1 \in \{0, 1, \dots, j - 1\} - 1/j$ ilgio intervalų skaičių. Jeigu, tarkim, $j = 12$, $l = 1$ ir $n_1 = 2$, tai toks atvejis atitiktų 1 metų ir 2 mėnesių atidėjimą.

$$\begin{cases} \text{1-ieji metai: } \left[0, \frac{1}{j}\right), \left[\frac{1}{j}, \frac{2}{j}\right), \dots, \left[1 - \frac{1}{j}, 1\right), \\ \text{2-ieji metai: } \left[1, 1 + \frac{1}{j}\right), \left[1 + \frac{1}{j}, 1 + \frac{2}{j}\right), \dots, \left[2 - \frac{1}{j}, 2\right), \\ \vdots \\ \text{n-ieji metai: } \left[n - 1, n - 1 + \frac{1}{j}\right), \left[n - 1 + \frac{1}{j}, n - 1 + \frac{2}{j}\right), \dots, \left[n - \frac{1}{j}, n\right). \end{cases} \quad (15)$$

Čia (15) laiko intervalas $[0, n)$ suskaidomas į n metų, o kiekvienį metai $[k - 1, k)$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, toliau padalijami į j lygių atkarpų, kurių ilgis $1/j$. Šie intervalai sudaro tinklėlį, kuriame yra pasiskirsčiusi būsimo gyvenimo trukmė T_x ir kuriame matuojami atidėjimo laikotarpiai $l + n_1/j$.

Visų pirma, suformuluosime pagalbinę lema:

Lema 1. Tarkime, kad $x, k \in \mathbb{N}_0$, $j \in \mathbb{N}$, ir $d = 0, 1, \dots, j - 1$. Tada pagal pastovios mirtingumo galios prielaidą (10) teisinga lygybė

$$_{k+\frac{d}{j}}p_x - _{k+\frac{d+1}{j}}p_x = _kp_x \cdot (p_{x+k})^{\frac{d}{j}} \cdot \left(1 - (p_{x+k})^{\frac{1}{j}}\right), \quad (16)$$

o pagal tolygiai pasiskirsčiusio mirtingumo prielaidą (5) yra teisinga

$$_{k+\frac{d}{j}}p_x - _{k+\frac{d+1}{j}}p_x = \frac{1}{j} \cdot (_kp_x - _{k+1}p_x). \quad (17)$$

Irodymas. Kadangi $x + k \in \mathbb{N}_0$, $d/j \in [0, 1)$, ir $(d + 1)/j \in (0, 1]$, pasinaudoję (10) interpoliaciją turime, jog

$$s\left(x + k + \frac{d}{j}\right) - s\left(x + k + \frac{d+1}{j}\right) = s(x + k) \cdot (p_{x+k})^{\frac{d}{j}} - s(x + k) \cdot (p_{x+k})^{\frac{d+1}{j}}.$$

Padalinę turimą išraišką iš $s(x) > 0$ gauname, kad

$$_{k+\frac{d}{j}}p_x - _{k+\frac{d+1}{j}}p_x = _kp_x \cdot (p_{x+k})^{\frac{d}{j}} \left(1 - (p_{x+k})^{\frac{1}{j}}\right).$$

Kita vertus, pasinaudoję (5) interpoliacija, gauname, kad

$$\begin{aligned} s\left(x + k + \frac{d}{j}\right) - s\left(x + k + \frac{d+1}{j}\right) &= \left(\left(1 - \frac{d}{j}\right) \cdot s(x + k) + \frac{d}{j} \cdot s(x + k + 1)\right) \\ &\quad - \left(\left(1 - \frac{d+1}{j}\right) \cdot s(x + k) + \frac{d+1}{j} \cdot s(x + k + 1)\right) \\ &= \frac{1}{j} \cdot (s(x + k) - s(x + k + 1)). \end{aligned}$$

Analogiškai, galutinė formulė išplaukia padalinus gautą išraišką iš $s(x) > 0$. □

Teiginys 12. Tarkime, kad išgyvenamumo funkcija $s(x)$, $x \in \mathbb{N}_0$, tenkina pastovios mirtinumo galios prielaidą (10), ir tegu T_x žymi asmens, kurio amžius $x \in \mathbb{N}_0$, likusio gyvenimo trukmę. Jeigu $j, n \in \mathbb{N}$, $m, l \in \mathbb{N}_0$, ir $n_1 \in \{0, 1, \dots, j-1\}$, tada

$$\begin{aligned} m_{l*n_1|} (A^{(j)})_{x:\bar{n}}^1 &:= \mathbb{E} \left(\nu^{\frac{[T_x j] + 1}{j}} \right)^m \mathbb{1}_{\{l*n_1 \leq T_x < n+l*n_1\}} \\ &= \sum_{k=l}^{n+l-1} \nu^{mk} \cdot {}_k p_x \cdot \left(1 - (p_{x+k})^{\frac{1}{j}} \right) \sum_{d=n_1}^{j-1} \nu^{\frac{(d+1)m}{j}} (p_{x+k})^{\frac{d}{j}} \\ &\quad + \nu^{(n+l)m} \cdot {}_{n+l} p_x \left(1 - (p_{x+n+l})^{\frac{1}{j}} \right) \sum_{d=0}^{n_1-1} \nu^{\frac{(d+1)m}{j}} (p_{x+n+l})^{\frac{d}{j}}. \end{aligned}$$

Irodymas. Pastebėjime, kad

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([T_x j] = d) &= \mathbb{P} \left(\frac{d}{j} \leq T_x < \frac{d+1}{j} \right) \\ &= \mathbb{P} \left(T_x < \frac{d+1}{j} \right) - \mathbb{P} \left(T_x < \frac{d}{j} \right) \\ &= \mathbb{P} \left(T_x \geq \frac{d}{j} \right) - \mathbb{P} \left(T_x \geq \frac{d+1}{j} \right) \\ &= \frac{d}{j} p_x - \frac{d+1}{j} p_x. \end{aligned}$$

Tuomet, turime, jog

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\nu^{\frac{[T_x j] + 1}{j}} \right)^m \mathbb{1}_{\{l*n_1 \leq T_x < n+l*n_1\}} &= \sum_{k=l}^{n+l-1} \sum_{d=n_1}^{j-1} \nu^{m(k + \frac{d+1}{j})} \mathbb{P}([T_x - k]j = d) \\ &\quad + \sum_{d=0}^{n_1-1} \nu^{m(n+l + \frac{d+1}{j})} \mathbb{P}([T_x - (n+l)]j = d) \\ &= \sum_{k=l}^{n+l-1} \sum_{d=n_1}^{j-1} \nu^{m(k + \frac{d+1}{j})} \left({}_{k+\frac{d}{j}} p_x - {}_{k+\frac{d+1}{j}} p_x \right) \\ &\quad + \sum_{d=0}^{n_1-1} \nu^{m(n+l + \frac{d+1}{j})} \left({}_{n+l+\frac{d}{j}} p_x - {}_{n+l+\frac{d+1}{j}} p_x \right). \end{aligned}$$

Taigi, remiantis (16) iš 1 lemos gauname galutinę išraišką

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\nu^{\frac{[T_x j] + 1}{j}} \right)^m \mathbb{1}_{\{l*n_1 \leq T_x < n+l*n_1\}} &= \sum_{k=l}^{n+l-1} \nu^{mk} \cdot {}_k p_x \cdot \left(1 - (p_{x+k})^{\frac{1}{j}} \right) \sum_{d=n_1}^{j-1} \nu^{\frac{(d+1)m}{j}} (p_{x+k})^{\frac{d}{j}} \\ &\quad + \nu^{(n+l)m} \cdot {}_{n+l} p_x \left(1 - (p_{x+n+l})^{\frac{1}{j}} \right) \sum_{d=0}^{n_1-1} \nu^{\frac{(d+1)m}{j}} (p_{x+n+l})^{\frac{d}{j}}. \end{aligned}$$

□

Teiginys 13. Tarkime, kad išgyvenamumo funkcija $s(x)$, $x \in \mathbb{N}_0$, tenkina tolygiai pasiskirsčiusio mirtingumo prielaidą (10), ir tegu T_x žymi asmens, kurio amžius $x \in \mathbb{N}_0$, likusio gyvenimo trukmę. Jeigu $j, n \in \mathbb{N}$, $m, l \in \mathbb{N}_0$, ir $n_1 \in \{0, 1, \dots, j-1\}$, tada

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\nu^{\frac{[T_x j] + 1}{j}} \right)^m \mathbb{1}_{\{l * n_1 \leq T_x < n + l * n_1\}} &= \sum_{k=l}^{n+l-1} \nu^{mk} \cdot ({}_k p_x - {}_{k+1} p_x) \cdot \frac{1}{j} \sum_{d=n_1}^{j-1} \nu^{\frac{(d+1)m}{j}} \\ &+ \nu^{(n+l)m} \cdot ({}_{n+l} p_x - {}_{n+l+1} p_x) \cdot \frac{1}{j} \sum_{d=0}^{n_1-1} \nu^{\frac{(d+1)m}{j}}. \end{aligned}$$

Įrodymas. Įrodymas yra visiškai analogiškas 12 teiginiui, o galutinė išraiška išplaukia pritaikius (17) lygybę iš 1 lemos. $\square$

Teiginys 14. Tarkime, kad išgyvenamumo funkcija $s(x)$, $x \in \mathbb{N}_0$, tenkina pastovios mirtingumo galios prielaidą (10), ir tegu T_x žymi asmens, kurio amžius $x \in \mathbb{N}_0$, likusio gyvenimo trukmę. Jeigu $j, n \in \mathbb{N}$, $m, l \in \mathbb{N}_0$, $n_1 \in \{0, 1, \dots, j-1\}$, $p_{x+k} > 0$, ir $q_{x+k} > 0$ visiems $l \leq k \leq n+l-1$, tada

$$\begin{aligned} \frac{m}{l * n_1} (I^{(j)} \bar{A})_{x: \bar{n}}^1 &:= \mathbb{E} ([j \cdot T_x + 1] \cdot \nu^{T_x})^m \mathbb{1}_{\{l * n_1 \leq T_x < n + l * n_1\}} = \\ &\sum_{k=l}^{n+l-1} \frac{{}_k p_x \cdot \log p_{x+k} \cdot \nu^{mk}}{\log(\nu^m \cdot p_{x+k})} \left(1 - \nu^{\frac{m}{j}} (p_{x+k})^{\frac{1}{j}} \right) \sum_{d=n_1}^{j-1} (d + j \cdot k + 1)^m \nu^{\frac{dm}{j}} (p_{x+k})^{\frac{d}{j}} \\ &+ \frac{\nu^{(n+l)m} \cdot {}_{n+l} p_x \cdot \log p_{x+n+l} \cdot \left(1 - (p_{x+n+l})^{\frac{1}{j}} \cdot \nu^{\frac{m}{j}} \right)}{\log(\nu^m \cdot p_{x+n+l})} \times \\ &\times \sum_{d=0}^{n_1-1} (d + j \cdot (n+l) + 1)^m \nu^{\frac{dm}{j}} (p_{x+k})^{\frac{d}{j}}. \end{aligned}$$

Įrodymas. Turime, jog

$$\begin{aligned} \mathbb{E} ([j \cdot T_x + 1] \cdot \nu^{T_x})^m \mathbb{1}_{\{l * n_1 \leq T_x < n + l * n_1\}} &= \sum_{k=l}^{n+l-1} \sum_{d=n_1}^{j-1} (d + j \cdot k + 1)^m \int_{k + \frac{d}{j}}^{k + \frac{d+1}{j}} \nu^{mt} f_x(t) dt \\ &+ \sum_{d=0}^{n_1-1} (d + j \cdot (n+l) + 1)^m \int_{n+l + \frac{d}{j}}^{n+l + \frac{d+1}{j}} \nu^{mt} f_x(t) dt. \end{aligned}$$

Skaičiuodami integralus analogiškai pagal 1 teiginio įrodymą gauname, kad

$$\begin{aligned} \int_{k + \frac{d}{j}}^{k + \frac{d+1}{j}} \nu^{mt} f_x(t) dt &= \frac{{}_k p_x}{(p_{x+k})^k} \cdot \log \frac{1}{p_{x+k}} \int_{k + \frac{d}{j}}^{k + \frac{d+1}{j}} \nu^{mt} \cdot (p_{x+k})^t dt \\ &= {}_k p_x \cdot \log \frac{1}{p_{x+k}} \cdot \frac{(p_{x+k})^{\frac{d}{j}} \cdot \nu^{m(k + \frac{d}{j})} \cdot \left(\nu^{\frac{m}{j}} \cdot (p_{x+k})^{\frac{1}{j}} - 1 \right)}{\log(\nu^m \cdot p_{x+k})} \end{aligned}$$

ir

$$\int_{n+l+\frac{d}{j}}^{n+l+\frac{d+1}{j}} \nu^{mt} f_x(t) dt = {}_{n+l}p_x \cdot \log \frac{1}{p_{x+n+l}} \cdot \frac{(p_{x+n+l})^{\frac{d}{j}} \cdot \nu^{m(n+l+\frac{d}{j})} \cdot \left(\nu^{\frac{m}{j}} \cdot (p_{x+n+l})^{\frac{1}{j}} - 1 \right)}{\log(\nu^m \cdot p_{x+n+l})}.$$

Galiausiai, įsistatę gautas integralų išraiškas turime, kad

$$\begin{aligned} {}_{l \star n_1}^m (I^{(j)} \bar{A})_{x:\bar{n}}^1 &= \sum_{k=l}^{n+l-1} \frac{k p_x \cdot \log p_{x+k} \cdot \nu^{mk}}{\log(\nu^m \cdot p_{x+k})} \left(1 - \nu^{\frac{m}{j}} (p_{x+k})^{\frac{1}{j}} \right) \sum_{d=n_1}^{j-1} (d+j \cdot k+1)^m \nu^{\frac{dm}{j}} (p_{x+k})^{\frac{d}{j}} \\ &\quad + \frac{\nu^{(n+l)m} \cdot {}_{n+l}p_x \cdot \log p_{x+n+l} \cdot \left(1 - (p_{x+n+l})^{\frac{1}{j}} \cdot \nu^{\frac{m}{j}} \right)}{\log(\nu^m \cdot p_{x+n+l})} \times \\ &\quad \times \sum_{d=0}^{n_1-1} (d+j \cdot (n+l)+1)^m \nu^{\frac{dm}{j}} (p_{x+k})^{\frac{d}{j}}. \end{aligned}$$

□

Teiginys 15. Tarkime, kad išgyvenamumo funkcija $s(x)$, $x \in \mathbb{N}_0$, tenkina tolygiai pasiskirsčiusio mirtingumo prielaidą (10), ir tegu T_x žymi asmens, kurio amžius $x \in \mathbb{N}_0$, likusio gyvenimo trukmę. Jeigu $j, n \in \mathbb{N}$, $m, l \in \mathbb{N}_0$, $n_1 \in \{0, 1, \dots, j-1\}$, $p_{x+k} > 0$, ir $q_{x+k} > 0$ visiems $l \leq k \leq n+l-1$, tada

$$\begin{aligned} {}_{l \star n_1}^m (I^{(j)} \bar{A})_{x:\bar{n}}^1 &= \mathbb{E} \left([j \cdot T_x + 1] \cdot \nu^{T_x} \right)^m \mathbb{1}_{\{l \star n_1 \leq T_x < n+l \star n_1\}} \\ &= \sum_{k=l}^{n+l-1} \frac{\nu^{mk} \cdot (k p_x - {}_{k+1}p_x)}{\log \nu^m} \cdot \left(\nu^{\frac{m}{j}} - 1 \right) \sum_{d=n_1}^{j-1} (d+j \cdot k+1)^m \nu^{\frac{dm}{j}} \\ &\quad + \frac{\nu^{(n+l)m} \cdot ({}_{n+l}p_x - {}_{n+l+1}p_x)}{\log \nu^m} \cdot \left(\nu^{\frac{m}{j}} - 1 \right) \sum_{d=0}^{n_1-1} (d+j \cdot (n+l)+1)^m \nu^{\frac{dm}{j}}. \end{aligned}$$

Irodymas. Turime, kad

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left([j \cdot T_x + 1] \cdot \nu^{T_x} \right)^m \mathbb{1}_{\{l \star n_1 \leq T_x < n+l \star n_1\}} &= \sum_{k=l}^{n+l-1} \sum_{d=n_1}^{j-1} (d+j \cdot k+1)^m \int_{k+\frac{d}{j}}^{k+\frac{d+1}{j}} \nu^{mt} f_x(t) dt \\ &\quad + \sum_{d=0}^{n_1-1} (d+j \cdot (n+l)+1)^m \int_{n+l+\frac{d}{j}}^{n+l+\frac{d+1}{j}} \nu^{mt} f_x(t) dt, \end{aligned} \tag{18}$$

kur nurodytiems integralams yra teisinga (iš 2 teiginio įrodymo)

$$\begin{aligned} \int_{k+\frac{d}{j}}^{k+\frac{d+1}{j}} \nu^{mt} f_x(t) dt &= ({}_k p_x - {}_{k+1} p_x) \int_{k+\frac{d}{j}}^{k+\frac{d+1}{j}} \nu^{mt} dt \\ &= ({}_k p_x - {}_{k+1} p_x) \cdot \frac{\nu^{m(k+\frac{d}{j})} \cdot \left(\nu^{\frac{m}{j}} - 1 \right)}{\log \nu^m} \end{aligned}$$

ir

$$\int_{n+l+\frac{d}{j}}^{n+l+\frac{d+1}{j}} \nu^{mt} f_x(t) dt = ({}_{n+l}p_x - {}_{n+l+1}p_x) \cdot \frac{\nu^{m(n+l+\frac{d}{j})} \cdot \left(\nu^{\frac{m}{j}} - 1\right)}{\log \nu^m}.$$

Įsistatę gautas integralų išraiškas į (18) gauname teigtą lygybę. □

3. Praktinis taikymas bei periodinės premijos

Apžvelgsime kelis pavyzdžius ir patikrinsime išvestų formulių veikimą palygindami rezultatus pagal tolygiai pasiskirsčiusio mirtingumo (UDD), pastovios mirtingumo galios (C) bei Balducci (B) prielaidas. Visi rezultatai gauti su **Python**, o patį kodą galima rasti [čia](#).

Pavyzdys 1. *Tarkime, kad 30 metų amžiaus asmuo perka gyvybės draudimą 10 metų laikotarpiui su 2 metų atidėjimu. Laikykite, kad palūkanų norma $i = 5\%$. Paskaičiuosime grynąsias vienkartinės premijas, kai $m = 1$ ir $m = 2$.*

Šiuo atveju $n = 8$, $l = 2$ ir $\nu = 1/1.05$, o mirtingumo duomenys apibrėžti 1 lentelėje.

x	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
l_x	98726	98659	98540	98417	98276	98151	98027	97870	97734	97561	97380

1 lentelė: 2024 metų Lietuvos mirtingumo lentelė [\[7\]](#); vyrai ir moterys; $l_0 = 100\,000$.

Pagal pasirinktus duomenis gautos grynosios premijos pateiktos 2 ir 3 lentelėse.

Premija	UDD (5)	C (10)	B (7)
$\frac{1}{2 } \bar{A}_{30:\overline{8}}^1$	0.00870887	0.00870892	0.00870897
$\frac{2}{2 } \bar{A}_{30:\overline{8}}^1$	0.00654031	0.00654038	0.00654046
$\mathbb{E}T_{30} \mathbb{1}_{\{2 \leq T_{30} < 10\}}$	0.07369892	0.07369744	0.07369596
$\mathbb{E}T_{30}^2 \mathbb{1}_{\{2 \leq T_{30} < 10\}}$	0.52663601	0.52661656	0.52659711
$\frac{1}{2 } (\bar{I}\bar{A})_{30:\overline{8}}^1$	0.05228536	0.05228461	0.05228386
$\frac{2}{2 } (\bar{I}\bar{A})_{30:\overline{8}}^1$	0.25093026	0.25092389	0.25091752
$\frac{1}{2 } (I\bar{A})_{30:\overline{8}}^1$	0.0566752	0.05667556	0.05667592
$\frac{2}{2 } (I\bar{A})_{30:\overline{8}}^1$	0.29019286	0.29019663	0.2902004
$\frac{1}{2 } (D\bar{A})_{30:\overline{8}}^1$	0.03912232	0.03912254	0.03912276
$\frac{2}{2 } (D\bar{A})_{30:\overline{8}}^1$	0.18326393	0.18326594	0.18326794

2 lentelė: Grynosios vienkartinės premijos.

Jeigu papildomai tarsime, kad $j = 12$ ir $n_1 = 2$, tuomet

Premija	UDD (5)	C (10)	B (7)
${}_{2*2 }^1 (A^{(12)})_{30:\overline{8}}^1$	0.00743863	0.00743797	0.00743732
${}_{2*2 }^2 (A^{(12)})_{30:\overline{8}}^1$	0.00552116	0.00552068	0.00552019
${}_{2*2 }^1 (I^{(12)}\bar{A})_{30:\overline{8}}^1$	0.55913286	0.55908434	0.5590358
${}_{2*2 }^2 (I^{(12)}\bar{A})_{30:\overline{8}}^1$	33.03554846	33.03279405	33.03003881

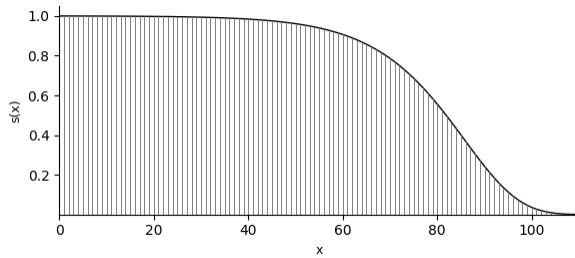
3 lentelė: Gryniosios vienkartinės premijos.

Pavyzdys 2. Tegul $x = 64$, $n = 15$, $l = 1$, $i = 3\%$ bei

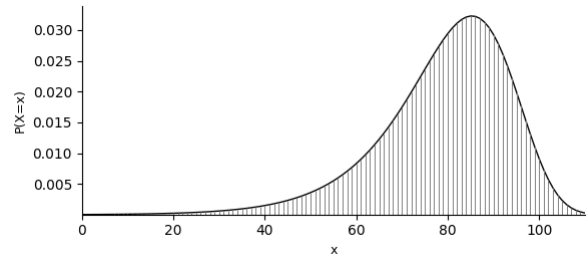
$$s(x) = \left(1 + \frac{c}{\lambda}x - \frac{a}{b\lambda}(1 - e^{bx})\right)^{-\lambda}, \quad (19)$$

kur $a = 0.00004$, $b = 0.09$, $c = 0.0000004$ ir $\lambda = 19.64$. Paskaičiuosime grynąsias vienkartinės premijas, kai $m = 1$ ir $m = 2$.

Čia (19) žinoma kaip Gama-Makeham išgyvenamumo modelis su 4 parametrais (žiūrėti [8, 8 psl.]). Gauti rezultatai pateikti 4 ir 5 lentelėse.



3 pav.: Išgyvenamumo funkcija $s(x)$, $x \in \mathbb{N}_0$, apibrėžta (19).



4 pav.: Tikimybės masės funkcija $\mathbb{P}(X = x) = s(x) - s(x + 1)$, $x \in \mathbb{N}_0$.

Premija	UDD (5)	C (10)	B (7)
$\frac{1}{1 } \bar{A}_{64:\overline{15}}^1$	0.26312	0.26314	0.26316
$\frac{2}{1 } \bar{A}_{64:\overline{15}}^1$	0.20291	0.20293	0.20296
$\mathbb{E}T_{64} \mathbb{1}_{\{1 \leq T_{64} < 16\}}$	3.32591	3.325	3.32409
$\mathbb{E}T_{64}^2 \mathbb{1}_{\{1 \leq T_{64} < 16\}}$	38.03745	38.01733	37.99722
$\frac{1}{1 } (\bar{I}\bar{A})_{64:\overline{15}}^1$	2.38458	2.38413	2.38367
$\frac{2}{1 } (\bar{I}\bar{A})_{64:\overline{15}}^1$	18.46464	18.45821	18.45178
$\frac{1}{1 } (I\bar{A})_{64:\overline{15}}^1$	2.51679	2.51701	2.51723
$\frac{2}{1 } (I\bar{A})_{64:\overline{15}}^1$	20.24542	20.24914	20.25287
$\frac{1}{1 } (D\bar{A})_{64:\overline{15}}^1$	1.95632	1.95643	1.95655
$\frac{2}{1 } (D\bar{A})_{64:\overline{15}}^1$	16.61865	16.62031	16.62198

4 lentelė: Gryniosios vienkartinės premijos.

Jeigu, papildomai, $j = 4$ ir $n_1 = 1$, tada

Premija	UDD (5)	C (10)	B (7)
$\frac{1}{1*1 } (A^{(4)})_{64:\overline{15}}^1$	0.20112	0.2005	0.19986
$\frac{2}{1*1 } (A^{(4)})_{64:\overline{15}}^1$	0.15317	0.15271	0.15224
$\frac{1}{1*1 } (I^{(4)}\bar{A})_{64:\overline{15}}^1$	7.66646	7.64054	7.61436
$\frac{2}{1*1 } (I^{(4)}\bar{A})_{64:\overline{15}}^1$	244.16864	243.33081	242.48441

5 lentelė: Gryniosios vienkartinės premijos.

2–5 lentelėse pateikti rezultatai rodo, kad prielaidų įtaka premijų dydžiui yra nežymi, tačiau skirtumai tampa akivaizdesni didėjant amžiui ir atitinkamai augant mirtingumo tikimybei q .

Taip pat, šiuose rezultatuose yra matomas ryškus premijų verčių išsidėstymas (žiūrint iš kairės į dešinę reikšmės didėja arba mažėja), kur pastovios mirtingumo galios prielaida atspindi teorinį „vidurinį“ tašką tarp tolygiai pasiskirsčiusio mirtingumo ir Balducci prielaidų. Remiantis šiuo pastebėjimu galime suformuluoti tokią lemą:

Lema 2. Tarkime, kad $g(t) \in \mathbb{R}$ yra diferencijuojama nedidėjanti funkcija intervaluose $t \in [0, 1) \cup [1, 2), \dots$, ir $\mathbb{E}[g(T_x)] < \infty$. Tada

$$\mathbb{E}_{(\text{UDD})}[g(T_x)] \leq \mathbb{E}_{(\text{C})}[g(T_x)] \leq \mathbb{E}_{(\text{B})}[g(T_x)]. \quad (20)$$

Priešingai, jeigu $g(t)$ yra nemažėjanti intervaluose $t \in [0, 1) \cup [1, 2), \dots$, tada

$$\mathbb{E}_{(\text{UDD})}[g(T_x)] \geq \mathbb{E}_{(\text{C})}[g(T_x)] \geq \mathbb{E}_{(\text{B})}[g(T_x)]. \quad (21)$$

Irodymas. Fiksuokime $y \in \mathbb{N}_0$ ir $t \in [0, 1]$, bei pažymėkime $q = q_y \in (0, 1)$, $p = 1 - q$. Pagal mirtingumo pasiskirstymo prielaidas (UDD), (C) ir (B) tikimybė y amžiaus asmeniui išgyventi vienerius metus yra

$$S_{UDD}(t) = 1 - tq, \quad S_C(t) = p^t, \quad S_B(t) = \frac{p}{1 - (1 - t)q}.$$

Apibrėžkime

$$\phi(t) = \ln(1 - tq) - t \cdot \ln(1 - q), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Tada $\phi(0) = \phi(1) = 0$ ir

$$\phi''(t) = -\frac{q^2}{(1 - tq)^2} \leq 0,$$

tai ϕ yra iškila aukštyn ir todėl $\phi(t) \geq 0$ intervale $[0, 1]$. Tad $\ln(1 - tq) \geq t \cdot \ln(1 - q)$, iš ko išplaukia, jog

$$S_{UDD}(t) = 1 - tq \geq (1 - q)^t = S_C(t), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (22)$$

Toliau, norime įrodyti, kad $S_C(t) \geq S_B(t)$, t.y.

$$(1 - q)^t \geq \frac{1 - q}{1 - (1 - t)q}.$$

Padalinę iš $1 - q$ ir pažymėję $u = 1 - t$ turime, kad

$$(1 - q)^{t-1} \geq \frac{1}{1 - uq} \iff (1 - q)^u \leq 1 - uq.$$

Ši nelygybė tokia pati kaip (22) tik vietoje t yra u , todėl gauname

$$S_{UDD}(t) \geq S_C(t) \geq S_B(t), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (23)$$

Kažkokiam $t = k + s$, $k \in \mathbb{N}_0$ ir $s \in [0, 1)$, turime

$${}_t p_x = {}_k p_x \cdot {}_s p_{x+k},$$

ir ${}_k p_x$ yra vienodas pagal (UDD), (C) and (B) prielaidas (skiriasi tik pasiskirstymas vienerių metų intervale). Vadinasi, pagal (23),

$${}_t p_x^{(UDD)} = {}_k p_x \cdot S_{UDD}(s) \geq {}_k p_x \cdot S_C(s) = {}_t p_x^{(C)} \geq {}_k p_x \cdot S_B(s) = {}_t p_x^{(B)}$$

visiems $t \geq 0$. Pažymėję atitinkamas išgyvenamumo funkcijas $S_x^{(UDD)}$, $S_x^{(C)}$, $S_x^{(B)}$, turime

$$S_x^{(UDD)}(t) \geq S_x^{(C)}(t) \geq S_x^{(B)}(t), \quad t \geq 0. \quad (24)$$

Tarkime T yra neneigiamas a.d. su išgyvenamumo funkcija $S(t) = \mathbb{P}(T > t)$ ir tankiu $f(t) = -S'(t)$. Integruodami dalimis pastebime, kad

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(T)] &= \int_0^\infty g(t)f(t) dt = \int_0^\infty g(t)(-S'(t)) dt \\ &= [-g(t) \cdot S(t)]_0^\infty + \int_0^\infty g'(t)S(t) dt \\ &= g(0) + \int_0^\infty g'(t)S(t) dt,\end{aligned}$$

kadangi $[-g(t) \cdot S(t)]_0^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} (-g(t) \cdot S(t)) - (-g(0) \cdot S(0)) = 0 - (-g(0) \cdot 1) = g(0)$.

Pritaikę tai a.d. T_x pagal kiekvieną prielaidą $A \in \{UDD, C, B\}$ gauname, kad

$$\mathbb{E}_{(A)}[g(T_x)] = g(0) + \int_0^\infty g'(t)S_x^{(A)}(t) dt.$$

Pradžiai tarkime, kad g yra nedidėjanti. Tada $g'(t) \leq 0$ ir, naudojant (24), randame

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{(UDD)}[g(T_x)] - \mathbb{E}_{(C)}[g(T_x)] &= \int_0^\infty g'(t)(S_x^{(UDD)}(t) - S_x^{(C)}(t)) dt \leq 0, \\ \mathbb{E}_{(C)}[g(T_x)] - \mathbb{E}_{(B)}[g(T_x)] &= \int_0^\infty g'(t)(S_x^{(C)}(t) - S_x^{(B)}(t)) dt \leq 0,\end{aligned}$$

nes pointegralinių funkcijų sandauga nėra teigiama. Tai įrodo (20) nelygybę.

Jeigu g yra nemažėjanti, tada $g'(t) \geq 0$ ir analogiškai argumentuojant gaunami teigiami skirtumai, o tai įrodo (21) nelygybę.

□

PASTABA: Jeigu a.d. T_x charakteristikos skaičiuojamos remiantis 1 lema (kaip 3 ir 5 lentelėse), toks palyginimas 2 lemoje bendru atveju jau negalioja. Iš tikrųjų, jeigu $n = 1$, $l = 0$, $j = 12$, $n_1 = 1$, $m = 1$ ir $p_x = 0.5$, tada

$$\begin{aligned}\frac{1}{0*1|} (A^{(12)})_{x:\overline{1}}^1 (UDD) &\approx 0.3208613 < \frac{1}{0*1|} (A^{(12)})_{x:\overline{1}}^1 (B) \approx 0.323719, \text{ jei } \nu = 0.5, \\ \frac{1}{0*1|} (A^{(12)})_{x:\overline{1}}^1 (UDD) &\approx 0.3552977 > \frac{1}{0*1|} (A^{(12)})_{x:\overline{1}}^1 (B) \approx 0.354017, \text{ jei } \nu = 0.6.\end{aligned}$$

Kita vertus, draudėjas dažnai neturi visos reikiamos sumos sumokėti už draudimo paslaugą iš karto. Tokiu atveju atsiranda poreikis turėti galimybę sumokėti draudimo įmoką mažomis dalimis periodiškai tik, jei mokėjimo metu draudėjas yra gyvas. Šiam tikslui, kaip ir vienkartinę grynajai premijai, galime pasinaudoti tuo pačiu **ekvivalentumo principu** prilyginę vidutinę išmokos dabartinę vertę vidutinei būsimųjų įmokų dabartine vertei. Tokiu būdu gautos premijos vadinamos **grynosiomis periodinėmis premijomis**.

Sekančiame pavyzdyje išsivesime išraišką periodinės premijos apskaičiavimui duotu atveju remiantis turimomis grynosiomis vienkartinėmis premijomis. Paprastumo dėlei apsiribosime pirmais momentais ($m = 1$) ir laikysime, kad $n_1 = 0$, t.y. atidėjimą nusakys tik pilnų metų skaičius $l \in \mathbb{N}_0$.

Pavyzdys 3. Tarkime, kad x amžiaus asmuo moka įmokas už n metų gyvybės draudimą, kur 1 dydžio išmoka mokama iš karto po mirties, su l metų atidėjimu, j kartų per metus periodo pradžioje. Laikykime, kad draudikas gautas lėšas investuoja su i palūkanų norma, ir metinė draudimo įmoka yra $P^{(j)}$. Tuomet

$$P^{(j)}({}_l\bar{A}_{x:\overline{n}}^1) := \frac{{}_l\bar{A}_{x:\overline{n}}^1}{{}_l\ddot{a}_{x:\overline{n}}^{(j)}}.$$

Čia ${}_l\ddot{a}_{x:\overline{n}}^{(j)}$ – vidutinė būsimų įmokų dabartinė vertė arba diskretus išankstinis n metų anuitetas, mokamas dažnumu j , su l metų atidėjimu, o ${}_l\bar{A}_{x:\overline{n}}^1$ – vienkartinė gryoji premija, apibrėžta 1 ir 2 teiginuose.

Minėtą anuitetą galime išsireikšti pasinaudodami žinomu sąryšiu [2, 68 psl.]:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}}^{(j)} = \frac{1}{d^{(j)}} \left(1 - {}_nE_x - \mathbb{E}\nu^{\frac{[Txj]+1}{j}} \mathbb{1}_{\{T_x < n\}} \right), \quad (25)$$

kur ${}_nE_x = \nu^n {}_np_x$ ir $d^{(j)} = j(1 - \nu^{1/j})$. Ši išraiška yra be atidėjimo, todėl turime pritaikyti dar vieną svarbų sąryšį:

$${}_l\ddot{a}_{x:\overline{n}}^{(j)} = {}_lE_x \cdot \ddot{a}_{x+l:\overline{n}}^{(j)}, \quad (26)$$

t.y. atidėto anuiteto vertė x amžiaus asmeniui yra lygi anuiteto vertei $x+l$ amžiaus asmeniui, diskontavus l metų ir padauginus iš tikimybės išgyventi tuos l metų. Pasinaudoję (25) ir (26) gauname, kad

$$\begin{aligned} {}_l\ddot{a}_{x:\overline{n}}^{(j)} &= \frac{1}{d^{(j)}} \left({}_lE_x - {}_{n+l}E_x - \mathbb{E}\nu^{\frac{[Txj]+1}{j}} \mathbb{1}_{\{l \leq T_x < n+l\}} \right) \\ &= \frac{1}{d^{(j)}} \left({}_lE_x - {}_{n+l}E_x - {}_l(A^{(j)})^1_{x:\overline{n}} \right). \end{aligned}$$

Čia ${}_l(A^{(j)})^1_{x:\overline{n}} = \mathbb{E}\nu^{\frac{[Txj]+1}{j}} \mathbb{1}_{\{l \leq T_x < n+l\}}$ atitinka vienkartinę grynąją premiją, apibrėžtą 12 ir 13 teiginuose, tik su $n_1 = 0$.

Taigi, turime, jog metinė įmoka, mokama dažnumu j , yra lygi

$$P^{(j)}({}_l\bar{A}_{x:\overline{n}}^1) = \frac{{}_l\bar{A}_{x:\overline{n}}^1}{{}_l\ddot{a}_{x:\overline{n}}^{(j)}} = \frac{d^{(j)} \cdot {}_l\bar{A}_{x:\overline{n}}^1}{{}_lE_x - {}_{n+l}E_x - {}_l(A^{(j)})^1_{x:\overline{n}}}. \quad (27)$$

Turėdami (27) išraišką galime paskaičiuoti periodines premijas kiekvienos interpoliacijos prielaidos atveju. Nagrinėkime tokią pačią situaciją kaip 2 pavyzdyje, tik laikykime, jog draudimo išmoka yra ne 1, o 10 000 Eur. Gauti rezultatai pateikti 6 lentelėje.

Premija	UDD (5)	C (10)	B (7)
$10000 \cdot {}_1 \bar{A}_{64:\overline{15}}^1$	2631.24	2631.44	2631.63
$10000 \cdot P^{(1)}({}_1 \bar{A}_{64:\overline{15}}^1)$	255.52	255.53	255.55
$10000 \cdot P^{(4)}({}_1 \bar{A}_{64:\overline{15}}^1)$	260.88	260.91	260.95
$10000 \cdot P^{(12)}({}_1 \bar{A}_{64:\overline{15}}^1)$	262.09	262.13	262.16

6 lentelė: Gryniosios periodinės premijos.

PASTABA: Dydis $P^{(j)}$ yra lygus sumai, sumokamai per metus, tad norint rasti įmoką už j -ąjį laikotarpį, reikia turimą metinę sumą padalinti iš j . Be to, vietoje ${}_1|\bar{A}_{x:\overline{n}}^1$ gali būti naudojamas ir kitas draudimo produktas, o vietoje diskretaus anuiteto galima nagrinėti ir vėluojantį, ir tolygųjį anuitetą.

4. Išvados

Šiame magistro darbe nuosekliai išnagrinėtos gyvybės draudimo vienkartinų grynujų premijų apskaičiavimo formulės, kurios yra fundamentalios aktuarinės matematikos sąvokos. Remiantis ekvivalentumo principu, darbas sistemingai apžvelgė ir palygino tris pagrindines mirtingumo pasiskirstymo prielaidas trupmeniniams amžiams: tolygiai pasiskirsčiusio mirtingumo, Balducci ir pastovios mirtingumo galios prielaidas. Šios premijos atspindi teoriškai teisingą įmokos dydį, reikalingą draudiko būsimoms išmokoms padengti, be jokių administracinių ar kitų papildomų išlaidų.

Pagrindinis darbo indėlis yra esamos aktuarinės literatūros papildymas patogiomis, išreikštinio pavidalo formulėmis. Skirtingai nei Balducci prielaida, kuri buvo plačiai išnagrinėta anksčiau [5] (neįskaitant mažėjančio draudimo), šiame darbe įrodomos formulės įvairių gyvybės draudimo produktų m -iems momentams, taikant pastovios mirtingumo galios ir tolygiai pasiskirsčiusio mirtingumo prielaidas, bei įrodoma lema apie vidurkių palyginimą. Be to, buvo nagrinėtos situacijos, kai metai padalinami į j lygių dalių, išplečiant grynujų premijų skaičiavimo galimybes praktikoje.

Taip pat darbe papildytas metodas, kuriuo nustatoma, kaip apskaičiuoti grynąsias periodines premijas pasinaudojant jau turimomis vienkartinų grynujų premijų išraiškomis. Formulė (27) leidžia periodines premijas gauti per atitinkamų vienkartinų premijų ir anuitetų santykį, kas yra esminis žingsnis nuo teorijos prie realios finansinės analizės. Šios išvestos formulės ir metodika turi praktinę vertę aktuarinei veiklai, nes jos užtikrina draudimo portfelių vertinimo tikslumą, padeda formuoti adekvačius draudimo rezervus ir stiprina draudimo bendrovės finansinį stabilumą.

Šaltiniai

- [1] Bowers(Jr.), N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A., Nesbitt, C.J. Actuarial Mathematics, First Edition. Society of Actuaries, Itasca. 1986. [Nuoroda](#)
- [2] Grigutis, A., Šiaulys, J. Aktuarinė matematika. Paskaitų konspektas. 2025. [Nuoroda](#)
- [4] Batten, R.W. Mortality Table Construction. Risk, Insurance and Security Series. Prentice-Hall, New Jersey. 1978. [Nuoroda](#)
- [5] Grigutis, A., Matulevičiūtė, E., Venckevičius, M. Several facts about Theodor Wittstein, Gaetano Balducci, and some expressions of the net single premiums under their mortality assumption. Pasirodys žurnale European Actuarial Journal. 2025. [Nuoroda](#)
- [6] Dickson, D.C.M., Hardy, M.R., Waters, H.R. Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks. International Series on Actuarial Science, Second Edition. Cambridge: Cambridge University Press. 2013. [Nuoroda](#)
- [7] Max Planck Institute for Demographic Research (Germany); University of California, Berkeley (USA); French Institute for Demographic Studies (France). HMD. Human Mortality Database. [Nuoroda](#) (duomenys gauti 2025-11-05)
- [8] Karpičius, G. Specialūs skirstiniai mirtingumui aprašyti, Bakalauro baigiamasis darbas. Vilniaus universitetas. 2024. [Nuoroda](#)