

VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
FINANSŲ IR DRAUDIMO MATEMATIKOS STUDIJŲ PROGRAMA

Magistro baigiamasis darbas

**Begalinio laiko išgyvenimo tikimybės įverčiai E. Sparre
Andersen modeliui**

**Ultimate Survival Probability Estimates in E. Sparre Andersen's
Model**

Modesta Mišeikytė

Darbo vadovas: Doc. Dr. Andrius Grigutis

Vilnius
2026

Santrauka

Šiame baigiamajame magistro darbe apibrėžiamas diskretaus laiko rizikos modelis, generuojamas atsitiktinių dydžių X ir θ . Pateikiami pagrindiniai modelio apibrėžimai ir sąlyga, kad išgyvenimo tikimybė būtų nenulinė. Apibrėžiamos papildomos funkcijos ir išvedamos nelygybės, kurių pagrindu suformuluojama tam tikra nelygybių sistema. Keliamą hipotezę, jog šios sistemos sprendiniai yra realūs ir iš jų galima apskaičiuoti begalinio laiko išgyvenimo tikimybės įverčius. Hipotezę patikrinama praktiniais pavyzdžiais, kurių apskaičiavimui buvo naudojama programinė įranga Wolfram Mathematica.

Raktiniai žodžiai: begalinio laiko išgyvenimo tikimybė, diskretaus laiko rizikos modelis, grynojo pelno sąlyga, tikimybes generuojanti funkcija.

Summary

This master's thesis defines a discrete time risk model, generated by random variables X and θ . The main definitions of the model and the necessary condition for the survival probability to be non-zero are presented. Additional functions are defined and inequalities are derived, and from them a certain system of inequalities is formulated. A hypothesis is proposed that the solutions of this system are real-valued and that they can be used to calculate estimates of the ultimate survival probability. Then the hypothesis is verified by practical examples using Wolfram Mathematica software.

Keywords: discrete time risk model, ultimate time survival probability, net profit condition, probability generating function.

Turinys

Santrauka	2
Summary	3
Įvadas	5
1. Diskretaus laiko E. Sparre Andersen modelis	6
2. Begalinio laiko išgyvenimo tikimybė E. Sparre Andersen modeliui	7
Rezultatai ir išvados	22
Priedai	24

Ivadas

Finansų ir draudimo srityje išgyvenimo tikimybės įvertinimas atlieka svarbų vaidmenį. Tikslus šios tikimybės įvertinimas leidžia draudikams ir rizikos analitikams tinkamai nustatyti kainodarą ir efektyviai valdyti riziką. Siekiant apskaičiuoti šią tikimybę, kuriami ir taikomi įvairūs rizikos modeliai. Vienas iš tokių modelių – E. Sparre Andersen modelis, kuris laikomas klasikinio rizikos modelio apibendrinimu. Skirtingai nei klasikiniam rizikos modelyje, E. Sparre Andersen modelyje laikoma, jog žalų skaičius yra rizikos atstatymo procesas, nebūtinai Puasono, o žalų tarplankiai yra tarpusavyje nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, nebūtinai pasiskirstę eksponentiškai. Nors šis modelis suteikia didesnę lankstumą, begalinio laiko išgyvenimo tikimybės apskaičiavimas tampa žymiai sudėtingesnis, ypač tada, kai atsitiktinis dydis, aprašantis laiko tarpus tarp žalų, turi begalinę atramą. Priešingai, kai žalų tarplankiai turi baigtinę atramą, išgyvenimo tikimybė gali būti apskaičiuota naudojant rekursines formules.

Šiame magistro darbe nagrinėjamas diskretaus laiko E. Sparre Andersen modelis, generuojamas neneigiamų diskrečių atsitiktinių dydžių X ir θ , kuriame žalų tarplankių pasiskirstymas turi begalinę atramą. Pagrindinis šio darbo tikslas – įvertinti begalinio laiko išgyvenimo tikimybę šiame modelyje.

1. Diskretaus laiko E. Sparre Andersen modelis

Šiame skyriuje pristatomas E. Sparre Andersen modelis bei pateikiami kiti reikalingi apibrėžimai remiantis [3].

1.1 Apibrėžimas. Sakome, jog draudiko turtas $U(t)$ kinta pagal diskretaus laiko rizikos modelį, jei bet kuriam $t \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$U(t) := u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \quad U(0) := u.$$

Čia $u \in \mathbb{N}_0$ žymi pradinį draudiko turtą, $c \in \mathbb{N}$ – premijų surinkimo greitį per laiko vienetą, o žalos X_1, X_2, \dots yra neneigiamos nepriklausomos atsitiktinio dydžio X kopijos ir

$$N(t) = \max\{n \in \mathbb{N} : \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n \leq t\}$$

yra atstatymo procesas, generuojamas neneigiamų atsitiktinių dydžių $\theta_1, \theta_2, \dots$, kurie yra nepriklausomos θ kopijos. Laikome, kad sekos X_1, X_2, \dots ir $\theta_1, \theta_2, \dots$ yra tarpusavyje nepriklausomos.

1.2 Apibrėžimas. Tikimybę, jog su pradiniu turtu $u \in \mathbb{N}_0$ draudikas nebankrutuos vadiname begalinio laiko išgyvenimo tikimybe ir ją apibrėžiame kaip

$$\begin{aligned} \varphi(u) &:= \mathbb{P} \left(u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i > 0, \forall t > 0 \right) \\ &= \mathbb{P} \left(u + c \sum_{i=1}^n \theta_i - \sum_{i=1}^{N(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)} X_i > 0, \forall n \geq 1 \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\sup_{n \geq 1} \sum_{i=1}^n (X_i - c\theta_i) < u \right), \quad u \geq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

1.3 Apibrėžimas. Sąlygą

$$c\mathbb{E}\theta - \mathbb{E}X > 0 \tag{2}$$

vadinsime grynojo pelno sąlyga. Ji reiškia, jog įvykstančios žalos vidutiniškai yra mažesnės nei gaunamos premijos.

Jeigu grynojo pelno sąlyga negalioja, tuomet $\varphi(u) = 0$ visiems $u \geq 0$, išskyrus kelis atvejus, kai $c\mathbb{E}\theta - \mathbb{E}X = 0$ ir $\mathbb{P}(X - c\theta = 0) = 1$, žr. [4].

2. Begalinio laiko išgyvenimo tikimybė E. Sparre Andersen modeliui

[3] straipsnyje pateiktas metodas, leidžiantis tiksliai apskaičiuoti begalinio laiko išgyvenimo tikimybę E. Sparre Andersen modelyje, kai žalų tarplaikis θ turi baigtinę atramą, t. y. $\mathbb{P}(\theta \leq m) = 1$ kokiam nors $m \in \mathbb{N}$. Straipsnyje taip pat pateikta, kaip elgtis, kai θ turi begalinę atramą: galime apibrėžti naują atsitiktinį dydį θ_m , kurio pasiskirstymas yra

$$\begin{cases} \mathbb{P}(\theta_m = k) = \mathbb{P}(\theta = k), & k \in \{0, 1, \dots, m-1\} \\ \mathbb{P}(\theta_m = m) = \mathbb{P}(\theta \geq m). \end{cases}$$

Tuomet taikomas tas pats skaičiavimo metodas, tačiau gaunama išgyvenimo tikimybė yra apytikslė ir jos tikslumas priklauso nuo pasirinkto m . Svarbu paminėti, kad didėjant m reikšmei, išgyvenimo tikimybė artėja prie tikrosios, bet kartu didėja ir skaičiavimo sudėtingumas, nes formulėse ([3], 2.5 Teorema) pasirodo sumos, kuriose reikia sumuoti tam tikras sandaugas per visus galimus indeksų rinkinius $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq m-1$. Tai reiškia, jog skaičiuojant tenka pereiti per visus tam tikro dydžio poaibius iš $1, \dots, m-1$, kurių skaičius sparčiai auga didėjant m . Dėl šios priežasties šį metodą verta naudoti, kai galima pasirinkti m pakankamai mažą; kitu atveju metodas praranda savo efektyvumą ir tampa nepatogus skaičiavimams.

Šiame darbe siekiama rasti alternatyvų būdą skaičiuoti begalinio laiko išgyvenimo tikimybę E. Sparre Andersen modelyje, kai $\mathbb{P}(\theta = k) > 0, k \rightarrow \infty$.

Apibrėžkime atsitiktinio dydžio $Y := X - c\theta$ tikimybių masės funkciją $f(k) := \mathbb{P}(Y = k)$ ir pasiskirstymo funkciją $F(k) := \mathbb{P}(Y \leq k), k \in \mathbb{Z}$.

Taip pat pažymėkime

$$\begin{aligned} G_0(s) &:= \sum_{j=0}^{\infty} f(j)s^j, \quad \Xi(s) := \sum_{u=0}^{\infty} \varphi(u)s^u, \quad T(s) := \frac{1}{1-s} \sum_{j=m+1}^{\infty} e^{-r^*j} f(-j), \\ L(s) &:= \Xi(s) \left(1 - G_0(s) - \sum_{j=1}^m f(-j)s^{-j} \right) + \varphi(0) \left(G_0(s) + \sum_{j=1}^m f(-j)s^{-j} \right) \\ &\quad - \sum_{k=1}^{m-1} \varphi(k) \left(\sum_{j=0}^{k-1} f(j-k)s^j - s^k \sum_{j=1}^m f(-j)s^{-j} \right), \quad |s| < 1. \end{aligned}$$

2.1 Teiginys. *Jei $s \in \mathbb{R}$ ir $|s| < 1$, tuomet galioja*

$$F(-m-1) - (1-s)T(s) \leq (1-s)L(s) \leq F(-m-1). \quad (3)$$

Irodymas. Bet kokiam $u \in \mathbb{N}_0$, (1) galime perrašyti kaip

$$\begin{aligned}
\varphi(u) &= \mathbb{P} \left(\sup_{n \geq 1} \sum_{i=1}^n (X_i - c\theta_i) < u \right) = \mathbb{P} \left(X_1 - c\theta_1 < u, \sup_{n \geq 2} \sum_{i=1}^n (X_i - c\theta_i) < u \right) \\
&= \mathbb{P} \left(X_1 - c\theta_1 < u, \sup_{n \geq 2} \sum_{i=2}^n (X_i - c\theta_i) < u - (X_1 - c\theta_1) \right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{u-1} \mathbb{P}(X_1 - c\theta_1 = k) \varphi(u - k) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(k) f(u - k) \\
&= \sum_{k=1}^{u+m} \varphi(k) f(u - k) + \sum_{k=u+m+1}^{\infty} \varphi(k) f(u - k), \quad m \in \mathbb{N}. \tag{4}
\end{aligned}$$

Tuomet, pasinaudoję Lundberg nelygybe ([2], 5.2 Teorema) ir trivialiu įverčiu $\varphi(u) \leq 1$, galime užrašyti

$$1 - e^{-r^*u} \leq \varphi(u) \leq 1 \tag{5}$$

visiems $u \in \mathbb{N}_0$, kai $r^* > 0$ tenkina lygybę

$$\mathbb{E} e^{r^*(X-c\theta)} = M_X(r^*)M_{c\theta}(-r^*) = 1,$$

čia $M_Z(t) = \mathbb{E} e^{tZ}$ žymi atsitiktinio dydžio Z momentus generuojančią funkciją.

Pasinaudoję (5), iš (4) galime gauti

$$F(-m-1) - \sum_{k=u+m+1}^{\infty} e^{-r^*k} f(u-k) \leq \varphi(u) - \sum_{k=1}^{u+m} \varphi(k) f(u-k) \leq F(-m-1). \tag{6}$$

Daugindami (6) iš s^u , $s \in \mathbb{R}$, $|s| < 1$, ir sumuodami pagal u nuo 0 iki ∞ gauname

$$\sum_{u=0}^{\infty} F(-m-1) s^u = \frac{F(-m-1)}{1-s}.$$

Be to,

$$\sum_{u=0}^{\infty} \left(\sum_{k=u+m+1}^{\infty} e^{-r^*k} f(u-k) \right) s^u = \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{j=m+1}^{\infty} e^{-r^*(u+j)} f(-j) s^u = \sum_{u=0}^{\infty} (s e^{-r^*})^u \sum_{j=m+1}^{\infty} e^{-r^*j} f(-j).$$

Kadangi $r^* > 0$ ir $|s| < 1$, tai $|s e^{-r^*}| < 1$ ir

$$\sum_{u=0}^{\infty} (s e^{-r^*})^u = \frac{1}{1 - s e^{-r^*}}.$$

Taigi,

$$\sum_{u=0}^{\infty} \left(\sum_{k=u+m+1}^{\infty} e^{-r^*k} f(u-k) \right) s^u = \frac{1}{1-s e^{-r^*}} \sum_{j=m+1}^{\infty} e^{-r^*j} f(-j) = T(s).$$

Taip pat

$$\begin{aligned} \sum_{u=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{u+m} \varphi(k) f(u-k) \right) s^u &= \sum_{u=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^u \varphi(k) f(u-k) - \varphi(0) f(u) + \sum_{k=u+1}^{u+m} \varphi(k) f(u-k) \right) s^u \\ &= \Xi(s) G_0(s) - \varphi(0) G_0(s) + \sum_{k=1}^{m-1} \varphi(k) \sum_{u=0}^{k-1} f(u-k) s^u \\ &\quad + \sum_{k=m}^{\infty} \varphi(k) \sum_{u=k-m}^{k-1} f(u-k) s^u. \end{aligned}$$

Kadangi

$$\sum_{u=k-m}^{k-1} f(u-k) s^u = s^k \sum_{j=1}^m f(-j) s^{-j},$$

tai

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{\infty} \varphi(k) \sum_{u=k-m}^{k-1} f(u-k) s^u &= \left(\sum_{k=m}^{\infty} \varphi(k) s^k \right) \left(\sum_{j=1}^m f(-j) s^{-j} \right) \\ &= \left(\Xi(s) - \sum_{k=0}^{m-1} \varphi(k) s^k \right) \left(\sum_{j=1}^m f(-j) s^{-j} \right). \end{aligned}$$

Vadinasi

$$\begin{aligned} \sum_{u=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{u+m} \varphi(k) f(u-k) \right) s^u &= \Xi(s) \left(G_0(s) + \sum_{j=1}^m f(-j) s^{-j} \right) - \varphi(0) \left(G_0(s) + \sum_{j=1}^m f(-j) s^{-j} \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{m-1} \varphi(k) \left(\sum_{j=0}^{k-1} f(j-k) s^j - s^k \sum_{j=1}^m f(-j) s^{-j} \right). \end{aligned}$$

Taigi,

$$\begin{aligned} \sum_{u=0}^{\infty} \left(\varphi(u) - \sum_{k=1}^{u+m} \varphi(k) f(u-k) \right) s^u &= \Xi(s) \left(1 - G_0(s) - \sum_{j=1}^m f(-j) s^{-j} \right) \\ &\quad + \varphi(0) \left(G_0(s) + \sum_{j=1}^m f(-j) s^{-j} \right) \\ &\quad - \sum_{k=1}^{m-1} \varphi(k) \left(\sum_{j=0}^{k-1} f(j-k) s^j - s^k \sum_{j=1}^m f(-j) s^{-j} \right) = L(s). \end{aligned}$$

Viską apjungę, gauname

$$\frac{F(-m-1)}{1-s} - T(s) \leq L(s) \leq \frac{F(-m-1)}{1-s}, \quad |s| < 1. \quad (7)$$

Padauginę (7) iš $1-s$, gauname (3). □

Apibrėžkime atsitiktinio dydžio \mathcal{M} tikimybės generuojančią funkciją

$$G_{\mathcal{M}}(s) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\mathcal{M} = k) s^k,$$

kur $\pi_0 := \varphi(0)$, $\pi_k := \mathbb{P}(\mathcal{M} = k) = \varphi(k) - \varphi(k-1)$, $k \in \mathbb{N}$ ir $s \in \mathbb{C}$, $|s| < 1$. Tuomet

$$\Xi(s) = \sum_{u=0}^{\infty} \varphi(u) s^u = \sum_{u=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^u \pi_k \right) s^u = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \sum_{u=k}^{\infty} s^u = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \left(\frac{s^k}{1-s} \right) = \frac{G_{\mathcal{M}}}{1-s}.$$

Pažymėkime

$$H(s) := 1 - G_0(s) - \sum_{j=1}^m f(-j) s^{-j},$$

$$B(s) := \varphi(0) \left(G_0(s) + \sum_{j=1}^m f(-j) s^{-j} \right) - \sum_{k=1}^{m-1} \varphi(k) \left(\sum_{j=0}^{k-1} f(j-k) s^j - s^k \sum_{j=1}^m f(-j) s^{-j} \right).$$

Jei α_i yra lygties

$$G_0(s) + \sum_{j=1}^m f(-j) s^{-j} = 1 \quad (8)$$

šaknis srityje $|s| < 1$, tuomet $H(\alpha_i) = 0$ ir

$$\begin{aligned} L(\alpha_i) &= \varphi(0) - \sum_{k=1}^{m-1} \varphi(k) \left(\sum_{j=0}^{k-1} f(j-k) \alpha_i^j - \alpha_i^k \sum_{j=1}^m f(-j) \alpha_i^{-j} \right) \\ &= \pi_0 \left(1 - \sum_{k=1}^{m-1} P(k, \alpha_i) \right) - \sum_{k=1}^{m-1} \left(\sum_{i=1}^k \pi_i \right) P(k, \alpha_i), \end{aligned}$$

čia

$$P(k, s) := \sum_{j=0}^{k-1} f(j-k) s^j - s^k \sum_{j=1}^m f(-j) s^{-j}, \quad |s| < 1.$$

Taigi, su kiekviena lygties (8) šaknimi α_i galime sudaryti lygtį

$$\sum_{j=0}^{m-1} c_{i,j} \pi_j = L(\alpha_i), \quad (9)$$

kur

$$c_{i,0} = 1 - \sum_{k=1}^{m-1} P(k, \alpha_i) \quad (10)$$

ir

$$c_{i,j} = - \sum_{k=j}^{m-1} P(k, \alpha_i), \quad j = 1, \dots, m-1. \quad (11)$$

Kadangi π_0, \dots, π_{m-1} yra m nežinomųjų, norint juos nustatyti, reikia turėti m nepriklausomų lygčių. Lygtis (8) turėtų turėti bent $m-1$ šaknų, skaičiuojant su kartotinumais, srityje $|s| < 1$, todėl iš jų galime gauti $m-1$ (9) lygčių. Siekiant uždaryti sistemą, natūralu svarstyti papildomą lygtį, gaunamą nagrinėjant funkcijos $L(s)$ elgseną taške $s = 1$. Šiuo tikslu buvo svarstytos šios ribos:

- $\lim_{s \rightarrow 1} L'(s)$,
- $\lim_{s \rightarrow 1} ((1-s)L(s))'$,
- $\lim_{s \rightarrow 1} (1-s)L(s)$.

Vis dėl to, nei viena iš šių ribų negali būti naudojama kaip papildoma lygtis koeficientams π_0, \dots, π_{m-1} nustatyti. Visų pirma, skaičiuodami $L(s)$ išvestinę pagal s gauname

$$L'(s) = \Xi(s)H'(s) + H(s)\Xi'(s) + B'(s), \quad (12)$$

bet

$$\Xi'(s) = \frac{G_{\mathcal{M}}(s)}{(1-s)^2} + \frac{G'_{\mathcal{M}}(s)}{1-s} \rightarrow \infty, \quad \text{kai } s \rightarrow 1,$$

todėl $\lim_{s \rightarrow 1} L'(s)$ netinkamas.

Norėdami panaikinti neapibrėžtumą lygybėje (12), kai $s \rightarrow 1$, nusprendėme $L(s)$ visų pirma padauginti iš $1-s$ ir tik tada skaičiuoti išvestinę bei ribą, bet

$$l(s) := (1-s)L(s) = G_{\mathcal{M}}(s)H(s) + (1-s)B(s), \quad \text{ir}$$

$$l'(s) = G'_{\mathcal{M}}(s)H(s) + G_{\mathcal{M}}(s)H'(s) - B(s) + (1-s)B'(s).$$

Kadangi kai $s \rightarrow 1$, $(1-s) \rightarrow 0$ ir, galiojant grynojo pelno sąlygai (2), $G'_{\mathcal{M}}(s) \rightarrow \mathbb{E}\mathcal{M}$ ir $G_{\mathcal{M}}(s) \rightarrow 1$, turime, jog

$$l'(s) \rightarrow \mathbb{E}\mathcal{M}H(1) + H'(1) - B(1), \quad \text{kai } s \rightarrow 1.$$

Tačiau $H(1) > 0$, o $\mathbb{E}\mathcal{M}$ yra nežinomas ir priklauso nuo π_k , $k \in \mathbb{N}_0$, todėl ir $\lim_{s \rightarrow 1} l'(s)$ priklauso nuo visų π_k , $k \in \mathbb{N}_0$, o ne tik nuo pirmųjų π_0, \dots, π_{m-1} .

Tam, kad išvengtume nario $G'_{\mathcal{M}}$, svarstėme $l(s)$ ribą, kai $s \rightarrow 1$, neskaičiuojant išvestinės. Gauname, jog

$$l(s) = G_{\mathcal{M}}(s)H(s) + (1-s)B(s) \rightarrow H(1), \quad \text{kai } s \rightarrow 1,$$

tačiau

$$H(1) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} f(k) - \sum_{k=1}^m f(-k)$$

nepriklauso nuo $\pi_k, k \in \mathbb{N}_0$. Taigi, šį variantą taip pat teko atmesti.

Apibendrinant, nepavyko rasti tokios $L(s)$ išraiškos, kuri būtų baigtinė ir priklausytų tik nuo π_0, \dots, π_{m-1} , tačiau atliekant praktinius skaičiavimus pastebėta, jog lygtis (8) turi m šaknų srityje $|s| < 1$, iš kurių viena artėja prie vieneto didėjant m . Tai leidžia sukonstruoti sistemą

$$\begin{pmatrix} l(\alpha_1) \\ l(\alpha_2) \\ \vdots \\ l(\alpha_{m-1}) \\ l(\alpha_m) \end{pmatrix} = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{m-2}, \pi_{m-1}) M_{m \times m},$$

čia

$$M := \begin{pmatrix} (1 - \alpha_1)c_{1,0} & (1 - \alpha_2)c_{2,0} & \dots & (1 - \alpha_{m-1})c_{m-1,0} & (1 - \alpha_m)c_{m,0} \\ (1 - \alpha_1)c_{1,1} & (1 - \alpha_2)c_{2,1} & \dots & (1 - \alpha_{m-1})c_{m-1,1} & (1 - \alpha_m)c_{m,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (1 - \alpha_1)c_{1,m-2} & (1 - \alpha_2)c_{2,m-2} & \dots & (1 - \alpha_{m-1})c_{m-1,m-2} & (1 - \alpha_m)c_{m,m-2} \\ (1 - \alpha_1)c_{1,m-1} & (1 - \alpha_2)c_{2,m-1} & \dots & (1 - \alpha_{m-1})c_{m-1,m-1} & (1 - \alpha_m)c_{m,m-1} \end{pmatrix} \quad (13)$$

yra kompleksinių skaičių matrica ir $c_{i,j}, i = 1, \dots, m, j = 0, \dots, m - 1$ yra apibrėžti lygybėmis (10) ir (11).

2.2 Lema. Tegul $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}, \alpha_i \neq 0$, yra lygties (8) šaknys srityje $|s| < 1$. Tuomet matricos M (13) determinantas yra

$$|M| = (-1)^{m+1} (f(-m))^{m-1} \prod_{i=1}^m \frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i^{m-1}} \prod_{1 \leq i < j \leq m} (\alpha_j - \alpha_i). \quad (14)$$

Irodymas. Matricą M (13) galime užrašyti kaip

$$M = \begin{pmatrix} 1 - \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 - \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 - \alpha_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1,0} & c_{2,0} & \dots & c_{m,0} \\ c_{1,1} & c_{2,1} & \dots & c_{m,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1,m-1} & c_{2,m-1} & \dots & c_{m,m-1} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Pažymėkime sistemą (15) kaip $M = DC$, tuomet

$$|M| = |D||C|. \quad (16)$$

Kadangi D yra diagonalinė matrica, jos determinantas yra lygus jos pagrindinės įstrižainės elementų

sandaugai, t. y.

$$|D| = \prod_{i=1}^m 1 - \alpha_i. \quad (17)$$

Įsistatę koeficientų $c_{i,j}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 0, \dots, m - 1$, reikšmes iš lygčių (10) ir (11) į C ir skaičiuodami determinantą, gauname

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 - \sum_{k=1}^{m-1} P(k, \alpha_1) & 1 - \sum_{k=1}^{m-1} P(k, \alpha_2) & \dots & 1 - \sum_{k=1}^{m-1} P(k, \alpha_m) \\ -\sum_{k=1}^{m-1} P(k, \alpha_1) & -\sum_{k=1}^{m-1} P(k, \alpha_2) & \dots & -\sum_{k=1}^{m-1} P(k, \alpha_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -P(m-1, \alpha_1) & -P(m-1, \alpha_2) & \dots & -P(m-1, \alpha_m) \end{vmatrix}.$$

Atliekame eilutines operacijas: iš antrosios eilutės atimame trečiąją, iš trečiosios – ketvirtąją ir t. t. iki tol, kol iš $m - 1$ -osios eilutės atimame m -ąją ir gauname

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 - \sum_{k=1}^{m-1} P(k, \alpha_1) & 1 - \sum_{k=1}^{m-1} P(k, \alpha_2) & \dots & 1 - \sum_{k=1}^{m-1} P(k, \alpha_m) \\ -P(1, \alpha_1) & -P(1, \alpha_2) & \dots & -P(1, \alpha_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -P(m-2, \alpha_1) & -P(m-2, \alpha_2) & \dots & -P(m-2, \alpha_m) \\ -P(m-1, \alpha_1) & -P(m-1, \alpha_2) & \dots & -P(m-1, \alpha_m) \end{vmatrix}.$$

Toliau iš pirmosios eilutės atimame visas likusias eilutes ir i -ąjį stulpelį padauginame iš $\alpha_i^{m-1} \neq 0$, $i = 1, \dots, m$. Kadangi tai padidina C determinantą $\prod_{i=1}^m \alpha_i^{m-1}$, tai

$$|C| = \left(\prod_{i=1}^m \alpha_i^{m-1} \right)^{-1} \times \begin{vmatrix} \alpha_1^{m-1} & \alpha_2^{m-1} & \dots & \alpha_m^{m-1} \\ -\alpha_1^{m-1} P(1, \alpha_1) & -\alpha_2^{m-1} P(1, \alpha_2) & \dots & -\alpha_m^{m-1} P(1, \alpha_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_1^{m-1} P(m-2, \alpha_1) & -\alpha_2^{m-1} P(m-2, \alpha_2) & \dots & -\alpha_m^{m-1} P(m-2, \alpha_m) \\ -\alpha_1^{m-1} P(m-1, \alpha_1) & -\alpha_2^{m-1} P(m-1, \alpha_2) & \dots & -\alpha_m^{m-1} P(m-1, \alpha_m) \end{vmatrix}. \quad (18)$$

Pastebėkime, jog

$$\begin{aligned}
s^{m-1}P(k, s) &= \sum_{j=0}^{k-1} f(j-k)s^{j+m-1} - \sum_{j=1}^m f(-j)s^{m+k-j-1} \\
&= \sum_{t=m}^{m+k-1} f(t-m-k)s^{t-1} - \sum_{t=k}^{m+k-1} f(t-m-k)s^{t-1} \\
&= -\sum_{t=k}^{m-1} f(t-m-k)s^{t-1} = -\sum_{l=0}^{m-k-1} f(l-m)s^{l+k-1}, \quad |s| < 1.
\end{aligned}$$

Įsistatę gautą $s^{m-1}P(k, s)$ išraišką į (18), kai $s = \alpha_i, i = 1, \dots, m$, gauname

$$\begin{aligned}
|C| &= \left(\prod_{i=1}^m \alpha_i^{m-1} \right)^{-1} \\
&\times \begin{vmatrix} \alpha_1^{m-1} & \alpha_2^{m-1} & \dots & \alpha_m^{m-1} \\ \sum_{l=0}^{m-2} f(l-m)\alpha_1^l & \sum_{l=0}^{m-2} f(l-m)\alpha_2^l & \dots & \sum_{l=0}^{m-2} f(l-m)\alpha_m^l \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{l=0}^1 f(l-m)\alpha_1^{l+m-3} & \sum_{l=0}^1 f(l-m)\alpha_2^{l+m-3} & \dots & \sum_{l=0}^1 f(l-m)\alpha_m^{l+m-3} \\ f(-m)\alpha_1^{m-2} & f(-m)\alpha_2^{m-2} & \dots & f(-m)\alpha_m^{m-2} \end{vmatrix}. \quad (19)
\end{aligned}$$

Paskutinį determinantą (19) pažymėkime $|A|$ ir galime jį užrašyti kaip

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ f(-m) & f(-(m-1)) & \dots & f(-2) & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(-(m-1)) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & f(-m) & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{m-1} & \alpha_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1^{m-2} & \alpha_2^{m-2} & \dots & \alpha_{m-1}^{m-2} & \alpha_m^{m-2} \\ \alpha_1^{m-1} & \alpha_2^{m-1} & \dots & \alpha_{m-1}^{m-1} & \alpha_m^{m-1} \end{vmatrix}. \quad (20)$$

Pažymėkime sistemą (20) kaip $|A| = |K||V|$. Pastebėkime, kad $|V|$ yra Vandermondo determinantas, lygus

$$|V| = \prod_{1 \leq i < j \leq m} (\alpha_j - \alpha_i), \quad (21)$$

žr., pvz., [5]. Be to, išskleisdami K determinantą pagal pirmąją eilutę gauname

$$|K| = (-1)^{m+1} \begin{vmatrix} f(-m) & f(-(m-1)) & \dots & f(-2) \\ 0 & f(-m) & \dots & f(-3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f(-m) \end{vmatrix} = (-1)^{m+1} (f(-m))^{m-1}. \quad (22)$$

Galiausiai, sujungę (16), (17), (19), (20), (21) ir (22), gauname (14). □

2.3 Išvada. Matrica M (13) yra Vandermondo tipo ir iš 2.2 lemos seka, kad $|M| \neq 0$, jei $\alpha_1, \dots, \alpha_m \neq 0$ yra lygties (8) šaknys srityje $|s| < 1$ su kartotinumu 1 ir $f(-m) > 0$. Vadinasi, galiojant šioms sąlygoms, matrica M yra neišsigimusi.

2.4 Hipotezė. Jeigu $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ yra nekartotinės lygties (8) šaknys srityje $|s| < 1$, tuomet įsistatant $s = \alpha_i$ į funkciją $l(s)$ ir taikant realaus argumento s atveju gautas nelygbes (3), galima gauti tiesinių nelygybių sistemą koeficientams $(\pi_0, \dots, \pi_{m-1})$

$$F(-m-1)M^{-1}\mathbf{1}^T - M^{-1}z^T \leq \boldsymbol{\pi}^T \leq F(-m-1)M^{-1}\mathbf{1}^T, \quad (23)$$

kai vektorių nelygybės suprantamos kaip jų atitinkamų komponentių nelygybės, čia $z := ((1 - \alpha_1 T(\alpha_1), \dots, (1 - \alpha_m) T(\alpha_m))$. Keliama hipotezė, jog ši sistema turi realius sprendinius $(\pi_0, \dots, \pi_{m-1})$, iš kurių naudojantis anksčiau apibrėžtu sąryšiu $\pi_0 = 0, \pi_k = \varphi(k) - \varphi(k-1), k \in \mathbb{N}$, galima apskaičiuoti išgyvenimo tikimybių $\varphi(u), u = 0, \dots, m-1$, įverčius.

Šios hipotezės pagrįstumas toliau vertinamas atliekant praktinius skaičiavimus.

2.5 Pavyzdys. Tegul

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{8}, \quad k = 0, \dots, 7,$$

ir

$$\mathbb{P}(c\theta = k) = \frac{5^k e^{-5}}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

t. y. $c\theta$ yra pasiskirstęs pagal Puasono skirstinį su parametru $\lambda = 5$. Visų pirma patikriname grynojo pelno sąlygą (2)

$$\mathbb{E}c\theta - \mathbb{E}X = 5 - 3.5 = 1.5 > 0.$$

Atsitiktinių dydžių X ir $c\theta$ momentus generuojančios funkcijos yra

$$M_X(t) = \sum_{j=0}^7 e^{tj} P(X = j) = \frac{1}{8} \sum_{j=0}^7 e^{tj}, \quad t \in \mathbb{R},$$

ir

$$M_{c\theta}(t) = e^{5(e^t - 1)}, \quad t \in \mathbb{R},$$

tad, išsprendę lygtį

$$\frac{e^{5(e^{-r^*} - 1)}}{8} \sum_{j=0}^7 e^{r^* j} = 1,$$

randame Lundberg koeficientą $r^* \approx 0.315611$. Pasirinkime $m = 10$. Šiuo atveju, lygtis

$$\sum_{j=0}^7 f(j)s^j + \sum_{j=1}^{10} f(-j)s^{-j} = 1$$

turi 10 nekartotinių šaknų srityje $|s| < 1$. Tuomet, apskaičiuavę matricos M (13) elementus ir pasinaudoję nelygybėmis (23), gauname $\varphi(u)$, $u = 0, \dots, 9$, įverčius:

$$\begin{aligned} 0.447592 &\leq \varphi(0) \leq 0.447719, \\ 0.545445 &\leq \varphi(1) \leq 0.545558, \\ 0.639233 &\leq \varphi(2) \leq 0.639334, \\ 0.723951 &\leq \varphi(3) \leq 0.724043, \\ 0.795350 &\leq \varphi(4) \leq 0.795431, \\ 0.851278 &\leq \varphi(5) \leq 0.851349, \\ 0.892435 &\leq \varphi(6) \leq 0.892495, \\ 0.921773 &\leq \varphi(7) \leq 0.921823, \\ 0.942818 &\leq \varphi(8) \leq 0.942859, \\ 0.958220 &\leq \varphi(9) \leq 0.958253. \end{aligned}$$

2.6 Pavyzdys. Tegul X ir $c\theta$ yra geometriškai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su parametrais $p_X = 0.4$ ir $p_{c\theta} = 0.3$, tuomet $\mathbb{E}c\theta - \mathbb{E}X = 5/6 > 0$. Remiantis [1] lygybėmis (8) ir (9), dviejų nepriklausomų geometrinių atsitiktinių dydžių skirtumo pasiskirstymas yra

$$P(X - c\theta = k) = \frac{p_X p_{c\theta} (1 - p_X)^k}{p_X + p_{c\theta} - p_X p_{c\theta}}, \text{ kai } k \geq 0$$

ir

$$P(X - c\theta = k) = \frac{p_X p_{c\theta} (1 - p_{c\theta})^{-k}}{p_X + p_{c\theta} - p_X p_{c\theta}}, \text{ kai } k < 0.$$

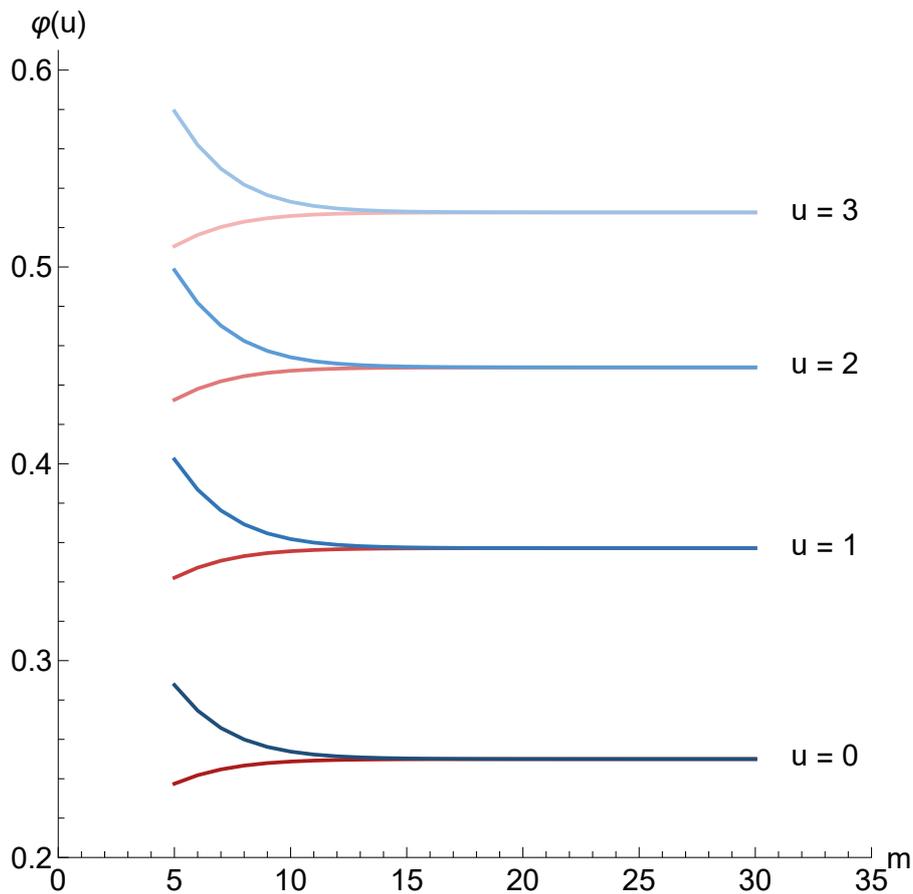
Iš lygties

$$\mathbb{E} e^{r^*(X - c\theta)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(X - c\theta = k) e^{r^* k} = 1$$

randame Lundberg koeficientą $r^* \approx 0.154151$, o išsprendę lygtį

$$\frac{6}{29} \left(\sum_{j=0}^{\infty} 0.6^j s^j + \sum_{j=1}^m 0.7^j s^{-j} \right) = 1$$

gauname m nekartotinių šaknų srityje $|s| < 1$, $m = 5, \dots, 30$. Kiekvienam m gautas šaknis įsistatę į (13) bei pasinaudoję nelygybėmis (23), gauname tikimybių $\varphi(u)$, $u = 0, 1, \dots, m - 1$, įverčius. Grafike 1 pavaizduota, kaip kinta viršutinis ir apatinis išgyvenimo tikimybės $\varphi(u)$ su pradiniu kapitalu $u = 0, 1, 2, 3$ įvertis, kai m keičiasi nuo 5 iki 30.



1 pav. Viršutiniai (mėlyni) ir apatiniai (raudoni) išgyvenimo tikimybės $\varphi(u)$ įverčiai, kai m kinta nuo 5 iki 30.

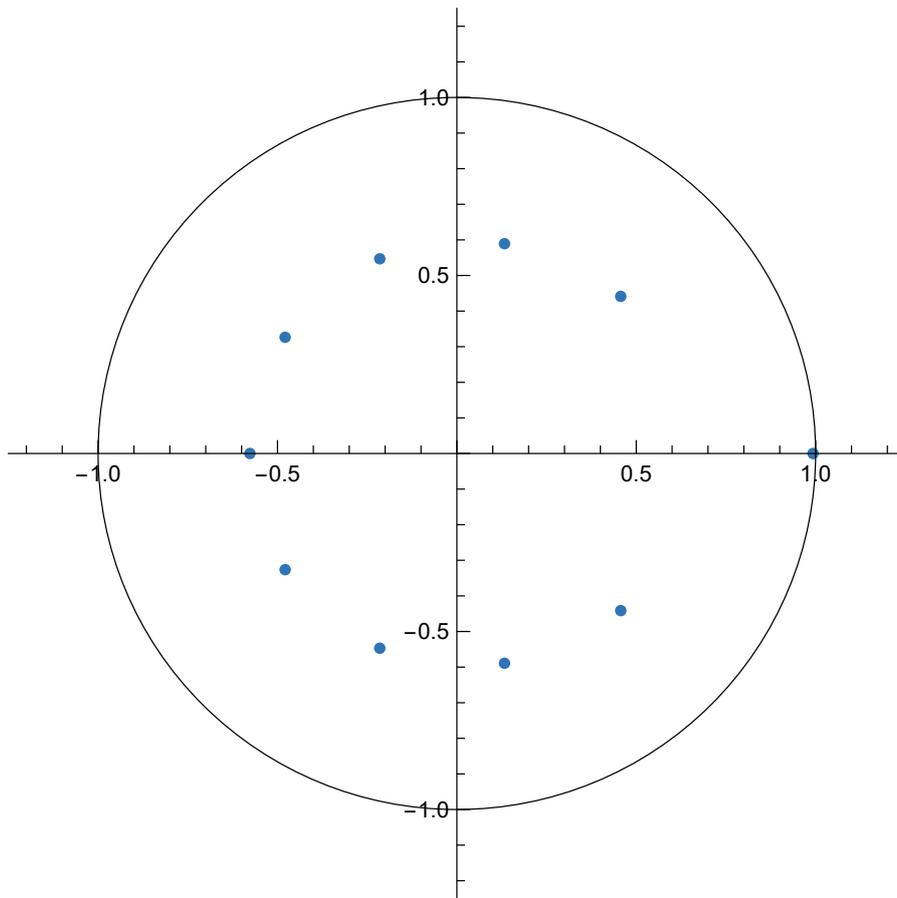
2.7 Pavyzdys. Tegul X pasiskirstymas yra toks pats, kaip 2.5 pavyzdyje, o $c\theta$ pasiskirstęs pagal neigiamą binominį skirstinį. Jo parametrus pasirenkame taip, kad $\mathbb{E}c\theta = r(1 - p)/p = 5$. Fiksuokime $r = 10$, tuomet $(1 - p)/p = 0.5 \Rightarrow p = 2/3$. Taigi, $c\theta \sim NB(10, 2/3)$ ir

$$M_{c\theta}(t) = \left(\frac{2/3}{1 - 1/3 e^t} \right)^{10}, \quad t < \ln 3.$$

Sudarę lygtį $M_X(r^*)M_{c\theta}(-r^*) = 1$ ir ją išsprendę, randame Lundberg koeficientą $r^* \approx 0.26186$. Pasirenkame $m = 10$. Išsprendę lygtį

$$\sum_{j=0}^7 f(j)s^j + \sum_{j=1}^{10} f(-j)s^{-j} = 1 \tag{24}$$

gauname 10 skirtingų šaknų vienutinio skritulio viduje, jos pavaizduotos 2 grafike.



2 pav. Lygties (24) šaknys vienetinio skritulio viduje

Toliau kaip ir anksčiau apskaičiuojame $\varphi(u)$, $u = 0, \dots, 9$, įverčius:

$$0.412719 \leq \varphi(0) \leq 0.413552,$$

$$0.501048 \leq \varphi(1) \leq 0.501827,$$

$$0.587316 \leq \varphi(2) \leq 0.588048,$$

$$0.667914 \leq \varphi(3) \leq 0.668602,$$

$$0.739439 \leq \varphi(4) \leq 0.740080,$$

$$0.799381 \leq \varphi(5) \leq 0.799967,$$

$$0.846820 \leq \varphi(6) \leq 0.847345,$$

$$0.882763 \leq \varphi(7) \leq 0.883222,$$

$$0.909675 \leq \varphi(8) \leq 0.910071,$$

$$0.930261 \leq \varphi(9) \leq 0.930597.$$

Pastebėkime, kad nors $\mathbb{E}c\theta$ sutampa su $c\theta$ vidurkiu 2.5 pavyzdyje, gauti išgyvenimo tikimybių įverčiai yra šiek tiek mažesni. Tai yra natūralu, nes neigiamo binominio skirstinio uodega yra sunkesnė už Puasono, o didesnė didelių žaŲų tikimybė didina bankroto riziką ilgoju laikotarpiu.

Toliau pasirinktam m viršutinį išgyvenimo tikimybės įvertį žymėsime $\overline{\varphi}_m(u)$, o apatinį – $\underline{\varphi}_m(u)$.

2.8 Pavyzdys. Tegul

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{3}{k} 0.6^k 0.4^{3-k}, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

ir

$$\mathbb{P}(c\theta = k) = -\frac{0.7^k}{k \ln 0.3}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

t. y. X yra pasiskirstęs pagal binominį skirstinį su parametrais $n = 3$ ir $p_X = 0.6$, o $c\theta$ pasiskirstęs pagal logaritinį skirstinį su parametru $p_{c\theta} = 0.7$. Patikriname grynojo pelno sąlygą (2)

$$\mathbb{E}c\theta - \mathbb{E}X = \frac{-0.7}{0.3 \ln 0.3} - 1.8 \approx 0.138028 > 0$$

ir randame Lundberg koeficientą $r^* \approx 0.0898689$ iš lygties

$$M_X(r^*)M_{c\theta}(-r^*) = \frac{(0.4 + 0.6 e^{r^*})^3 \ln(1 - 0.7 e^{-r^*})}{\ln 0.3} = 1.$$

Apskaičiuosime išgyvenimo tikimybės apatinį ir viršutinį įverčius, kai $m = 15, 20, 25, 30$ ir $u = 0, \dots, 10$. Visais nagrinėjamais atvejais lygtis (8) turi m nekartotinių šaknų srityje $|s| < 1$. Toliemesnius skaičiavimus atliekame kaip ir ankstesniuose pavyzdžiuose, o gauti rezultatai pateikiami 1 ir 2 lentelėse.

1 lentelė. Viršutinių išgyvenimo tikimybių įverčių reikšmės ir jų skirtumai

u	$\bar{\varphi}_{15}(u)$	$\bar{\varphi}_{20}(u)$	$\bar{\varphi}_{25}(u)$	$\bar{\varphi}_{30}(u)$	$\bar{\varphi}_{15} - \bar{\varphi}_{20}$	$\bar{\varphi}_{20} - \bar{\varphi}_{25}$	$\bar{\varphi}_{25} - \bar{\varphi}_{30}$
0	0.058126	0.057868	0.057846	0.057844	0.000257	2.197×10^{-5}	1.945×10^{-6}
1	0.108476	0.108037	0.108000	0.107997	0.000439	3.749×10^{-5}	3.319×10^{-6}
2	0.179762	0.179072	0.179013	0.179008	0.000690	5.891×10^{-5}	5.217×10^{-6}
3	0.252031	0.251108	0.251030	0.251023	0.000923	7.884×10^{-5}	6.982×10^{-6}
4	0.316230	0.315127	0.315033	0.315025	0.001103	9.428×10^{-5}	8.349×10^{-6}
5	0.375357	0.374109	0.374003	0.373993	0.001248	1.066×10^{-4}	9.444×10^{-6}
6	0.429258	0.427900	0.427784	0.427773	0.001359	1.161×10^{-4}	1.029×10^{-5}
7	0.478538	0.477096	0.476973	0.476962	0.001441	1.232×10^{-4}	1.091×10^{-5}
8	0.523554	0.522055	0.521927	0.521915	0.001499	1.282×10^{-4}	1.136×10^{-5}
9	0.564687	0.563150	0.563018	0.563007	0.001537	1.315×10^{-4}	1.164×10^{-5}
10	0.602268	0.600711	0.600578	0.600566	0.001557	1.332×10^{-4}	1.180×10^{-5}

2 lentelė. Apatinių išgyvenimo tikimybių įverčių reikšmės ir jų skirtumai

u	$\varphi_{15}(u)$	$\varphi_{20}(u)$	$\varphi_{25}(u)$	$\varphi_{30}(u)$	$\varphi_{20} - \varphi_{15}$	$\varphi_{25} - \varphi_{20}$	$\varphi_{30} - \varphi_{25}$
0	0.057839	0.057844	0.057844	0.057844	4.940×10^{-6}	4.217×10^{-7}	3.731×10^{-8}
1	0.107987	0.107996	0.107996	0.107996	8.427×10^{-6}	7.196×10^{-7}	6.367×10^{-8}
2	0.178993	0.179006	0.179008	0.179008	1.324×10^{-5}	1.131×10^{-6}	1.001×10^{-7}
3	0.251002	0.251020	0.251022	0.251022	1.772×10^{-5}	1.513×10^{-6}	1.339×10^{-7}
4	0.315000	0.315022	0.315023	0.315024	2.118×10^{-5}	1.810×10^{-6}	1.601×10^{-7}
5	0.373966	0.373990	0.373992	0.373992	2.395×10^{-5}	2.047×10^{-6}	1.811×10^{-7}
6	0.427744	0.427770	0.427772	0.427772	2.608×10^{-5}	2.229×10^{-6}	1.972×10^{-7}
7	0.476931	0.476959	0.476961	0.476961	2.766×10^{-5}	2.365×10^{-6}	2.092×10^{-7}
8	0.521883	0.521911	0.521914	0.521914	2.878×10^{-5}	2.462×10^{-6}	2.177×10^{-7}
9	0.562973	0.563003	0.563005	0.563006	2.950×10^{-5}	2.524×10^{-6}	2.232×10^{-7}
10	0.600532	0.600562	0.600564	0.600565	2.989×10^{-5}	2.557×10^{-6}	2.262×10^{-7}

Iš pateiktų lentelių bei 1 grafiko 2.6 pavyzdyje galime pastebėti, jog skirtumai tarp išgyvenimo tikimybių reikšmių mažėja, kai m didėja. Tai reiškia, kad nuo tam tikros m reikšmės jos didinimas išgyvenimo tikimybės įverčio atžvilgiu būtų nereikšmingas.

Palyginkime šiuo metodu gautą išgyvenimo tikimybės viršutinį įvertį $\bar{\varphi}_{30}(u)$ su išgyvenimo tikimybe, apskaičiuota pagal [3] straipsnyje aprašomą metodą, kai $u = 0, \dots, 10$ ir $m = 30$. Šią tikimybę žymėsime $\varphi_{30}(u)$. 3 lentelėje pateikiami gauti rezultatai.

3 lentelė. Išgyvenimo tikimybės $\bar{\varphi}_{30}(u)$ ir $\varphi_{30}(u)$

u	$\bar{\varphi}_{30}(u)$	$\varphi_{30}(u)$	$\bar{\varphi}_{30}(u) - \varphi_{30}(u)$
0	0.05784433158	0.05784400686	3.24722×10^{-7}
1	0.10799663442	0.10799608027	5.54149×10^{-7}
2	0.17900818553	0.17900731464	8.70888×10^{-7}
3	0.25102256559	0.25102140004	1.16555×10^{-6}
4	0.31502450316	0.31502310940	1.39376×10^{-6}
5	0.37399311234	0.37399153581	1.57653×10^{-6}
6	0.42777346721	0.42777175022	1.71699×10^{-6}
7	0.47696220703	0.47696038529	1.82174×10^{-6}
8	0.52191531765	0.52191342163	1.89602×10^{-6}
9	0.56300676529	0.56300482213	1.94315×10^{-6}
10	0.60056591325	0.60056394229	1.97096×10^{-6}

Iš [3] žinome, jog $\varphi_m(u) \leq \varphi(u)$ ir iš (23) $\varphi(u) \leq \bar{\varphi}_m(u)$. Tai patvirtina pateiktos išgyvenimo

tikimybių reikšmės 3 lentelėje, iš kurių matosi, jog $\varphi_m(u) \leq \bar{\varphi}_m(u)$. Ši nelygybė taip pat galiojo atlikus analogiškus skaičiavimus su 2.5 ir 2.7 pavyzdžiuose aprašytais skirstiniais, kai $m = 10$.

Apibendrinant, visi nagrinėti praktiniai pavyzdžiai rodo, kad didėjant parametro m reikšmei, išgyvenimo tikimybės įverčiai tampa tikslesni, o tai leidžia šį metodą laikyti stabilium praktiniu įrankiu, tinkamu taikyti įvairiems atsitiktinių dydžių skirstiniams skaičiuojant begalinio laiko išgyvenimo tikimybių įverčius. Nors visuose nagrinėtuose pavyzdžiuose gauti $(\pi_0, \dots, \pi_{m-1})$ sprendiniai buvo kompleksiniai, tačiau jų menamosios dalys buvo itin mažos (didžiausia siekė 2.99337×10^{-12}), todėl sprendiniai skaitiniu požiūriu gali būti laikomi realiais. Taigi, nagrinėtų skaitinių atvejų pagrindu hipotezė buvo patikrinta ir neprieštarauja gautiems rezultatams.

Rezultatai ir išvados

Šiame magistro baigiamajame darbe buvo nagrinėtas diskretaus laiko E. Sparre Andersen rizikos modelis. Apibrėžtos papildomos funkcijos ir suformuluotos nelygybės, kurių pagrindu buvo sukurta tam tikra nelygybių sistema. Iškelta hipotezė, jog šios sistemos sprendiniai yra realieji ir iš jų galima apskaičiuoti begalinio laiko išgyvenimo tikimybės apatinį ir viršutinį įverčius. Hipotezė buvo patikrinta skaitiniais pavyzdžiais, naudojant skirtingus atsitiktinių dydžių skirstinius, ir visais nagrinėtais atvejais pasitvirtino. Gauti rezultatai parodė, jog didėjant parametrui m , apatinis išgyvenimo tikimybės įvertis didėja, o viršutinis – mažėja. Taip pat abiem atvejais pastebėta, jog skirtumas tarp išgyvenimo tikimybės reikšmių didėjant m mažėja. Gauti įverčiai taip pat buvo palyginti su [3] straipsnyje aprašytu metodu apskaičiuotomis išgyvenimo tikimybėmis ir parodyta, kad skirtumas tarp jų nežymus. Skaičiavimams buvo naudojama Wolfram Mathematica programinė įranga.

Ateityje būtų galima tobulinti šiame darbe pasiūlytą begalinio laiko išgyvenimo tikimybės įvertinimo metodą ar siekti formalaus iškeltos hipotezės įrodymo. Taip pat būtų galima nagrinėti skirtumą tarp viršutinio ir apatinio išgyvenimo tikimybės įverčių ir rasti tokią m reikšmę, su kuria šis skirtumas būtų minimalus.

Literatūra

- [1] B. C. Arnold, A. SenGupta. „Wrapping Generalized Laplace and Generalized Discrete Laplace Distributions“. Iš: *Axioms* 14.7 (2025), puslapis 529. <https://doi.org/10.3390/axioms14070529>.
- [2] S. Asmussen, H. Albrecher. *Ruin Probabilities*. 2-as leidimas. Singapore: World Scientific, 2010.
- [3] A. Grigutis. „Determining exact survival probability by setting discrete random variables in E. Sparre Andersen’s model“. Iš: *Probability, Uncertainty and Quantitative Risk* 8.4 (2023), puslapiai 445–462. <https://doi.org/10.3934/puqr.2023020>.
- [4] A. Grigutis, A. Karbonskis, J. Šiaulyš. „Ruin probability for renewal risk models with neutral net profit condition“. Iš: *Nonlinear Analysis: Modelling and Control* 28.6 (2023), puslapiai 1182–1195.
- [5] R. A. Horn, C. R. Johnson. *Matrix Analysis*. 2-as leidimas. § 0.9.11. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
- [6] Wolfram Research, Inc. *Mathematica*. Versija 14.3. 2025. URL: <https://www.wolfram.com/mathematica/>.

Priedai

Skaiciavimai atlikti naudojant Wolfram Mathematica [6] programinę įrangą. Praktinių pavyzdžių kodai pateikiami žemiau.

2.5 pavyzdžio kodas:

```
m = 10;
fX[k_] := Piecewise[{{1/8, k == 0}, {1/8, k == 1}, {1/8, k == 2},
  {1/8, k == 3}, {1/8, k == 4}, {1/8, k == 5}, {1/8, k == 6},
  {1/8, k == 7}}, 0];
fT[k_Integer] := PDF[PoissonDistribution[5], k];
f[k_Integer] := Sum[fX[k + j] fT[j], {j, 0, Infinity}];
FZ[u_] := Sum[f[k], {k, -Infinity, u}];
Fm = FZ[-m - 1] // N

(* randamas Lundberg koeficientas *)
MX[t_] := 1/8 Sum[Exp[t k ], {k, 0, 7}];
MT[t_] := Exp[5 (Exp[t] - 1)];
eqLundberg = MX[r]*MT[-r] == 1;
rStar = r /. FindRoot[eqLundberg, {r, 0.4}]

(* apibreziamos reikalingos funkcijos *)
GO[s_] := Sum[f[j] s^j, {j, 0, 7}];
H[s_] := 1 - GO[s] - Sum[f[-j] s^(-j), {j, 1, m}];
P[k_, s_] := Sum[f[j - k] s^j, {j, 0, k - 1}] - s^k Sum[f[-j] s^(-j), {j, 1, m}];
phi[k_] := Sum[pi[i], {i, 0, k}];
T[s_] := Sum[Exp[-rStar j] f[-j], {j, m + 1, Infinity}]/(1 - s Exp[-rStar]);
t[s_] := (1 - s) T[s];
L[s_] := phi[0] - Sum[phi[k] P[k, s], {k, 1, m - 1}];
l[s_] := (1 - s) L[s];

(* randamos reikalingos saknys *)
alphaList = Select[s /. NSolve[H[s] == 0, s], Abs[#] < 1 &];
Length[alphaList]

(* sprendžiama nelygybiu sistema ir randami tikimybiu iverciai *)
vSs = l@alphaList;
pis = Array[pi, m, 0];
M = Table[Coefficient[vSs[[row]], pis[[col]]], {row, 1, m}, {col, 1, m}];
Cvec = Join[Table[t[alphaList[[j]]], {j, 1, m}]];
unitVec = ConstantArray[1, m];
Minv = Inverse[M];
```

```

piLower = Fm*(Minv.unitVec) - (Minv.Cvec);
piUpper = Fm*Minv.unitVec;
phiLower = SetPrecision[Accumulate[Re[piLower]], 6]
phiUpper = SetPrecision[Accumulate[Re[piUpper]], 6]
epsIm = Max[Max[Abs[Im[piLower]]], Max[Abs[Im[piUpper]]]]

(* skaiciuojamos tikimybes pagal [2] straipsni *)
phi[x_, f_, m_, D_, vid_, phi_] := If[x == 0, (-1)^(m + 1)
  *Product[1/(D[[j]] - 1), {j, 1, m - 1}]*vid,
  If[x == 1, ((1/f[[1]])*Product[D[[j]]/(D[[j]] - 1), {j, 1, m - 1}))*vid,
  If[x == 2, -phi[[2]]*(f[[1]] + f[[2]])/f[[1]] + (Product[1/(D[[i]] - 1),
  {i, 1, m - 1})*(Product[D[[i]], {i, 1, m - 1}] - Sum[Product[Subsets[D,
  {m - 2}][[i]][[j]], {j, 1, m - 2}], {i, 1, m - 1}]))/f[[1]]*vid,
  If[x >= 2, -(Sum[phi[[i]]*Sum[f[[j]], {j, 1, x - i + 2}], {i, 2, x}))/
  f[[1]] + (Product[1/(D[[i]] - 1), {i, 1, m - 1})*(Product[D[[i]],
  {i, 1, m - 1}] + (Sum[(-1)^(k + 1)* Sum[Product[Subsets[D, {m - k}
  ][[i]][[j]], {j, 1, m - k}], {i, 1, Binomial[m - 1, m - k}], {k, 2,
  Min[x, m - 1]}] + If[x > m - 1, Sum[(-1)^(k + 1), {k, m, x}], 0)))/
  /f[[1]]*vid, 0]]];
A1 = Flatten[{Table[SetPrecision[N[PDF[PoissonDistribution[5], i]], 22],
  {i, 0, m - 1}], SetPrecision[N[SurvivalFunction[PoissonDistribution[5],
  m - 1]], 22]}];
f1 = Table[Sum[A1[[m + i - j + 1]]*fX[i], {i, 0, j}], {j, 0, m}];
vid = N[Sum[(i - 1)*A1[[i]], {i, 1, m + 1}], 15] - 3.5;
GX[s_] := Expand[Sum[s^i*1/8, {i, 0, 7}]];
G[s_] := Expand[Sum[s^(i - 1)*A1[[i]], {i, 1, m + 1}]];
GXY[s_] := GX[s]*G[1/s];
S[s_] := NSolve[GXY[s] == 1, s];
D10 = Select[s /. SetPrecision[S[s], 22], Abs[#] < 0.99 &]
phi10 = Range[10];
Do[phi10[[i + 1]] =
  SetPrecision[N[Re[phi[i, f1, 10, D10, vid, phi10]]], 22], {i, 0, 9}];
phi10

AllTrue[Thread[phi10 <= phiUpper], TrueQ]

```

2.6 pavyzdžio kodas:

```

pX = 0.4;
pTheta = 0.3;
D1 = pX + pTheta - pX*pTheta;
f[k_] := Piecewise[{{pX pTheta/D1 (1 - pX)^k, k >= 0},
  {pX pTheta/D1 (1 - pTheta)^(-k), k <= -1}}];
FZ[u_] := Sum[f[k], {k, -Infinity, u}];

```

```

(*randamas Lundberg koeficientas*)
eqLundberg = Sum[f[k] Exp[r k], {k, -Infinity, Infinity}] == 1;
rStar = r /. FindRoot[eqLundberg, {r, 0.1}]

(* apibreziamos reikalingos funkcijos *)
GO[s_] := Sum[f[j] s^j, {j, 0, Infinity}];
H[s_] := 1 - GO[s] - Sum[f[-j] s^(-j), {j, 1, m}];
P[k_, s_] := Sum[f[j - k] s^j, {j, 0, k - 1}] - s^k Sum[f[-j] s^(-j), {j, 1, m}];
phi[k_] := Sum[pi[i], {i, 0, k}];
T[s_] := Sum[Exp[-rStar j] f[-j], {j, m + 1, Infinity}]/(1 - s Exp[-rStar]);
t[s_] := (1 - s) T[s];
L[s_] := phi[0] - Sum[phi[k] P[k, s], {k, 1, m - 1}];
l[s_] := (1 - s) L[s];

(* skaiciuojami tikimybiu iverciai, kai m kinta nuo 5 iki 30 *)
computePhi[m_] := Module[{Fm, alphaList, vSs, pis, M, Cvec, unitVec, Minv,
  piLower, piUpper, epsIm, phiLower, phiUpper},
  Fm = FZ[-m - 1];
  alphaList = Select[s /. NSolve[H[s] == 0, s], Abs[#] < 1 &];
  vSs = l@alphaList;
  pis = Array[pi, m, 0];
  M = Table[Coefficient[vSs[[row]], pis[[col]]], {row, 1, m}, {col, 1, m}];
  Cvec = Table[t[alphaList[[j]]], {j, 1, m}];
  unitVec = ConstantArray[1, m];
  Minv = Inverse[M];
  piLower = Fm*(Minv.unitVec) - (Minv.Cvec);
  piUpper = Fm*(Minv.unitVec);
  epsIm = Max[Max[Abs[Im[piLower]]], Max[Abs[Im[piUpper]]]];
  phiLower = Accumulate[Re[piLower]];
  phiUpper = Accumulate[Re[piUpper]];
  <|"phiUpper" -> phiUpper[[1 ;; 4]], "phiLower" -> phiLower[[1 ;; 4]],
  "epsIm" -> epsIm|>]

allResults = Table[computePhi[m], {m, 5, 30}];

Max[allResults[[All, "epsIm"]]]

phi0upper = allResults[[All, "phiUpper", 1]]
phi1upper = allResults[[All, "phiUpper", 2]]
phi2upper = allResults[[All, "phiUpper", 3]]
phi3upper = allResults[[All, "phiUpper", 4]]

```

```

phi0lower = allResults[[All, "phiLower", 1]]
phi1lower = allResults[[All, "phiLower", 2]]
phi2lower = allResults[[All, "phiLower", 3]]
phi3lower = allResults[[All, "phiLower", 4]]

(* grafikas *)
g = ListLinePlot[{Transpose[{Range[5, 5 + Length[phi0lower] - 1], phi0lower}],
  Transpose[{Range[5, 5 + Length[phi0upper] - 1], phi0upper}],
  Transpose[{Range[5, 5 + Length[phi1lower] - 1], phi1lower}],
  Transpose[{Range[5, 5 + Length[phi1upper] - 1], phi1upper}],
  Transpose[{Range[5, 5 + Length[phi2lower] - 1], phi2lower}],
  Transpose[{Range[5, 5 + Length[phi2upper] - 1], phi2upper}],
  Transpose[{Range[5, 5 + Length[phi3lower] - 1], phi3lower}],
  Transpose[{Range[5, 5 + Length[phi3upper] - 1], phi3upper}]}],
  PlotRange -> {{0, 35}, {0.2, 0.61}}, PlotStyle ->
  {Directive[RGBColor[172/255, 28/255, 28/255], AbsoluteThickness[2]],
  Directive[RGBColor[31/255, 78/255, 120/255], AbsoluteThickness[2]],
  Directive[RGBColor[200/255, 60/255, 60/255], AbsoluteThickness[2]],
  Directive[RGBColor[47/255, 117/255, 181/255], AbsoluteThickness[2]],
  Directive[RGBColor[225/255, 120/255, 120/255], AbsoluteThickness[2]],
  Directive[RGBColor[91/255, 155/255, 213/255], AbsoluteThickness[2]],
  Directive[RGBColor[245/255, 180/255, 180/255], AbsoluteThickness[2]],
  Directive[RGBColor[155/255, 194/255, 230/255], AbsoluteThickness[2]]},
  AspectRatio -> 1, AxesLabel -> {"m", " $\varphi(u)$ "}, TicksStyle ->
  Directive[Black, 20], LabelStyle -> Directive[Black, 16], ImageSize -> 480,
  Epilog -> {Text[Style["u = 0", 16, Black], {33, 0.252}],
  Text[Style["u = 1", 16, Black], {33, 0.359}],
  Text[Style["u = 2", 16, Black], {33, 0.451}],
  Text[Style["u = 3", 16, Black], {33, 0.529}]}]

```

2.7 pavyzdžio kodas:

```

m = 10;
fX[k_] := Piecewise[{{1/8, k == 0}, {1/8, k == 1}, {1/8, k == 2}, {1/8, k == 3},
  {1/8, k == 4}, {1/8, k == 5}, {1/8, k == 6}, {1/8, k == 7}}, 0];
fT[k_Integer] := PDF[NegativeBinomialDistribution[10, 2/3], k];
f[k_Integer] := Sum[fX[k + j] fT[j], {j, 0, Infinity}];
FZ[u_] := Sum[f[k], {k, -Infinity, u}];
Fm = FZ[-m - 1] // N

(* randamas Lundberg koeficientas *)
MX[t_] := 1/8 Sum[Exp[t k], {k, 0, 7}];
MT[t_] := (2/3/(1 - (1 - 2/3) Exp[t]))^10;
eqLundberg = MX[r]*MT[-r] == 1;

```

```

rStar = r /. FindRoot[eqLundberg, {r, 0.4}]

(* apibreziamos reikalingos funkcijos *)
G0[s_] := Sum[f[j] s^j, {j, 0, 7}];
H[s_] := 1 - G0[s] - Sum[f[-j] s^(-j), {j, 1, m}];
P[k_, s_] := Sum[f[j - k] s^j, {j, 0, k - 1}] - s^k Sum[f[-j] s^(-j), {j, 1, m}];
phi[k_] := Sum[pi[i], {i, 0, k}];
T[s_] := Sum[Exp[-rStar j] f[-j], {j, m + 1, Infinity}]/(1 - s Exp[-rStar]);
t[s_] := (1 - s) T[s];
L[s_] := phi[0] - Sum[phi[k] P[k, s], {k, 1, m - 1}];
l[s_] := (1 - s) L[s];

(* randamos reikalingos saknys *)
alphaList = Select[s /. NSolve[H[s] == 0, s], Abs[#] < 1 &];
Length[alphaList]
saknys = Transpose[{Re /@ alphaList, Im /@ alphaList}];
g = Show[ListPlot[saknys, PlotStyle -> {RGBColor[47/255, 117/255, 181/255]},
  PlotRange -> {{-1.25, 1.25}, {-1.25, 1.25}}, Axes -> True, AspectRatio -> 1],
  Graphics[{Circle[{0, 0}, 1]}]]

(* sprendžiama nelygybiu sistema ir randami tikimybiu iverciai *)
vSs = l@alphaList;
pis = Array[pi, m, 0];
M = Table[Coefficient[vSs[[row]], pis[[col]]], {row, 1, m}, {col, 1, m}];
Cvec = Join[Table[t[alphaList[[j]]], {j, 1, m}]];
unitVec = ConstantArray[1, m];
Minv = Inverse[M];
piLower = Fm *(Minv.unitVec) - (Minv.Cvec);
piUpper = Fm*Minv.unitVec;
phiLower = SetPrecision[Accumulate[Re[piLower]], 6]
phiUpper = SetPrecision[Accumulate[Re[piUpper]], 6]
epsIm = Max[Max[Abs[Im[piLower]]], Max[Abs[Im[piUpper]]]]

(* skaiciuojamos tikimybes pagal [2] straipsni *)
phi[x_, f_, m_, D_, vid_, phi_] := If[x == 0, (-1)^(m + 1)
  *Product[1/(D[[j]] - 1), {j, 1, m - 1}]*vid,
  If[x == 1, ((1/f[[1]])*Product[D[[j]]/(D[[j]] - 1), {j, 1, m - 1}))*vid,
  If[x == 2, -phi[[2]]*(f[[1]] + f[[2]])/f[[1]] + (Product[1/(D[[i]] - 1),
  {i, 1, m - 1})*(Product[D[[i]], {i, 1, m - 1}] - Sum[Product[Subsets[D,
  {m - 2}][[i]][[j]], {j, 1, m - 2}], {i, 1, m - 1}]))/f[[1]]*vid,
  If[x >= 2, -(Sum[phi[[i]]*Sum[f[[j]], {j, 1, x - i + 2}], {i, 2, x}]/
  f[[1]] + (Product[1/(D[[i]] - 1), {i, 1, m - 1})*(Product[D[[i]],
  {i, 1, m - 1}] + (Sum[(-1)^(k + 1)* Sum[Product[Subsets[D, {m - k}]]]])))]

```

```

[[[i]][[j]], {j, 1, m - k}], {i, 1, Binomial[m - 1, m - k]}], {k, 2,
Min[x, m - 1]}] + If[x > m - 1, Sum[(-1)^(k + 1), {k, m, x}], 0]))
/f[[1]]*vid, 0]]];
A1 = Flatten[{Table[SetPrecision[N[PDF[NegativeBinomialDistribution[10, 2/3],
i]], 22], {i, 0, m - 1}], SetPrecision[N[SurvivalFunction
[NegativeBinomialDistribution[10, 2/3], m - 1]], 22]}];
f1 = Table[Sum[A1[[m + i - j + 1]]*fX[i], {i, 0, j}], {j, 0, m}];
vid = N[Sum[(i - 1)*A1[[i]], {i, 1, m + 1}], 15] - 3.5;
GX[s_] := Expand[Sum[s^i*1/8, {i, 0, 7}]];
G[s_] := Expand[Sum[s^(i - 1)*A1[[i]], {i, 1, m + 1}]];
GXY[s_] := GX[s]*G[1/s];
S[s_] := NSolve[GXY[s] == 1, s];
D10 = Select[s /. SetPrecision[S[s], 22], Abs[#] < 0.99 &]
phi10 = Range[10];
Do[phi10[[i + 1]] =
SetPrecision[N[Re[phi[i, f1, 10, D10, vid, phi10]]], 22], {i, 0, 9}];
phi10

AllTrue[Thread[phi10 <= phiUpper], TrueQ]

```

2.8 pavyzdžio kodas:

```

n = 3; pX = 0.6; pT = 0.7;
fX[k_] := PDF[BinomialDistribution[n, pX], k];
fT[k_] := PDF[LogSeriesDistribution[pT], k];
f[k_Integer] := Sum[fX[k + j] fT[j], {j, Max[0, -k], n - k}];
FZ[u_] := Sum[f[k], {k, -Infinity, u}]

(* randamas Lundberg koeficientas *)
MX[t_] := (1 - pX + pX Exp[t])^n;
MT[t_] := Log[1 - pT Exp[t]]/Log[1 - pT];
eqLundberg = MX[r]*MT[-r] == 1;
rStar = r /. FindRoot[eqLundberg, {r, 0.3}]

(* apibreziamos reikalingos funkcijos *)
G0[s_] := Sum[f[j] s^j, {j, 0, 3}];
H[s_] := 1 - G0[s] - Sum[f[-j] s^(-j), {j, 1, m}];
P[k_, s_] := Sum[f[j - k] s^j, {j, 0, k - 1}] - s^k Sum[f[-j] s^(-j), {j, 1, m}];
phi[k_] := Sum[pi[i], {i, 0, k}];
T[s_] := Sum[Exp[-rStar j] f[-j], {j, m + 1, Infinity}]/(1 - s Exp[-rStar]);
t[s_] := (1 - s) T[s];
L[s_] := phi[0] - Sum[phi[k] P[k, s], {k, 1, m - 1}];
l[s_] := (1 - s) L[s];

```

```

(*skaiciuojami tikimybiu iverciai,kai m = 15, 20, 25, 30*)
m = 15;
Fm = FZ[-m - 1] // N;
alphaList15 = Select[s /. NSolve[H[s] == 0, s], Abs[#] < 1 &];
vSs = 1@alphaList15;
pis = Array[pi, m, 0];
M = Table[Coefficient[vSs[[row]], pis[[col]]], {row, 1, m}, {col, 1, m}];
Cvec = Join[Table[t[alphaList15[[j]]], {j, 1, m}]];
unitVec = ConstantArray[1, m];
Minv = Inverse[M];
piLower = Fm *(Minv.unitVec) - (Minv.Cvec);
piUpper = Fm*Minv.unitVec;
epsIm15 = Max[Max[Abs[Im[piLower]]], Max[Abs[Im[piUpper]]]]
phiLower15 = SetPrecision[Accumulate[Re[piLower]], 15]
phiUpper15 = SetPrecision[Accumulate[Re[piUpper]], 15]

m = 20;
Fm = FZ[-m - 1] // N;
alphaList20 = Select[s /. NSolve[H[s] == 0, s], Abs[#] < 1 &];
vSs = 1@alphaList20;
pis = Array[pi, m, 0];
M = Table[Coefficient[vSs[[row]], pis[[col]]], {row, 1, m}, {col, 1, m}];
Cvec = Join[Table[t[alphaList20[[j]]], {j, 1, m}]];
unitVec = ConstantArray[1, m];
Minv = Inverse[M];
piLower = Fm *(Minv.unitVec) - (Minv.Cvec);
piUpper = Fm*Minv.unitVec;
epsIm20 = Max[Max[Abs[Im[piLower]]], Max[Abs[Im[piUpper]]]]
phiLower20 = SetPrecision[Accumulate[Re[piLower]], 15]
phiUpper20 = SetPrecision[Accumulate[Re[piUpper]], 15]

m = 25;
Fm = FZ[-m - 1] // N;
alphaList25 = Select[s /. NSolve[H[s] == 0, s], Abs[#] < 1 &];
vSs = 1@alphaList25;
pis = Array[pi, m, 0];
M = Table[Coefficient[vSs[[row]], pis[[col]]], {row, 1, m}, {col, 1, m}];
Cvec = Join[Table[t[alphaList25[[j]]], {j, 1, m}]];
unitVec = ConstantArray[1, m];
Minv = Inverse[M];
piLower = Fm *(Minv.unitVec) - (Minv.Cvec);
piUpper = Fm*Minv.unitVec;
epsIm25 = Max[Max[Abs[Im[piLower]]], Max[Abs[Im[piUpper]]]]

```

```

phiLower25 = SetPrecision[Accumulate[Re[piLower]], 15]
phiUpper25 = SetPrecision[Accumulate[Re[piUpper]], 15]

m = 30;
Fm = FZ[-m - 1] // N;
alphaList30 = Select[s /. NSolve[H[s] == 0, s], Abs[#] < 1 &];
vSs = 1@alphaList30;
pis = Array[pi, m, 0];
M = Table[Coefficient[vSs[[row]], pis[[col]]], {row, 1, m}, {col, 1, m}];
Cvec = Join[Table[t[alphaList30[[j]]], {j, 1, m}]];
unitVec = ConstantArray[1, m];
Minv = Inverse[M];
piLower = Fm *(Minv.unitVec) - (Minv.Cvec);
piUpper = Fm*Minv.unitVec;
epsIm30 = Max[Max[Abs[Im[piLower]]], Max[Abs[Im[piUpper]]]]
phiLower30 = SetPrecision[Accumulate[Re[piLower]], 15]
phiUpper30 = SetPrecision[Accumulate[Re[piUpper]], 15]

(* sukuriamos lenteles *)
sci[x_] := NumberForm[SetPrecision[N[x], 8], {Infinity, 3},
  ExponentFunction -> (If[-3 <= # <= 3, Null, #] &)]

LenteleV = Grid[Prepend[Table[Join[{i, NumberForm[phiUpper15[[i + 1]], 6],
  NumberForm[phiUpper20[[i + 1]], 6], NumberForm[phiUpper25[[i + 1]], 6],
  NumberForm[phiUpper30[[i + 1]], 6]}, {SetPrecision[phiUpper15[[i + 1]]
- phiUpper20[[i + 1]], 4], sci[phiUpper20[[i + 1]] - phiUpper25[[i + 1]]],
sci[phiUpper25[[i + 1]] - phiUpper30[[i + 1]]}], {i, 0, 10}], {"u",
"!\\(\*SubscriptBox[\\(\var\\), \\(15\\)]\\)(u)",
"!\\(\*SubscriptBox[\\(\var\\), \\(20\\)]\\)(u)",
"!\\(\*SubscriptBox[\\(\var\\), \\(25\\)]\\)(u)",
"!\\(\*SubscriptBox[\\(\var\\), \\(30\\)]\\)(u)",
"!\\(\*SubscriptBox[\\(\var\\), \\(15\\)]\\)(u)-
!\\(\*SubscriptBox[\\(\var\\), \\(20\\)]\\)(u)",
"!\\(\*SubscriptBox[\\(\var\\), \\(20\\)]\\)(u)-
!\\(\*SubscriptBox[\\(\var\\), \\(25\\)]\\)(u)",
"!\\(\*SubscriptBox[\\(\var\\), \\(25\\)]\\)(u)-
!\\(\*SubscriptBox[\\(\var\\), \\(30\\)]\\)(u)"}], Frame -> All]

LenteleA = Grid[Prepend[Table[Join[{i, NumberForm[phiLower15[[i + 1]], 6],
  NumberForm[phiLower20[[i + 1]], 6], NumberForm[phiLower25[[i + 1]], 6],
  NumberForm[phiLower30[[i + 1]], 6]}, {sci[phiLower20[[i + 1]]
- phiLower15[[i + 1]], sci[phiLower25[[i + 1]] - phiLower20[[i + 1]]],
sci[phiLower30[[i + 1]] - phiLower25[[i + 1]]}], {i, 0, 10}],

```

```

{"u", "\!\(\*SubscriptBox[\(\var\), \(\15\)]\)\(u)",
 "\!\(\*SubscriptBox[\(\var\), \(\20\)]\)\(u)",
 "\!\(\*SubscriptBox[\(\var\), \(\25\)]\)\(u)",
 "\!\(\*SubscriptBox[\(\var\), \(\30\)]\)\(u)",
 "\!\(\*SubscriptBox[\(\var\), \(\20\)]\)\(u)-
 \!\(\*SubscriptBox[\(\var\), \(\15\)]\)\(u)",
 "\!\(\*SubscriptBox[\(\var\), \(\25\)]\)\(u)-
 \!\(\*SubscriptBox[\(\var\), \(\20\)]\)\(u)",
 "\!\(\*SubscriptBox[\(\var\), \(\30\)]\)\(u)-
 \!\(\*SubscriptBox[\(\var\), \(\25\)]\)\(u)"}], Frame -> All]

```

(*skaiciuojamos tikimybes pagal[2] straipsni*)

```

A1 = Flatten[{Table[SetPrecision[N[PDF[LogSeriesDistribution[pT], i]], 22],
 {i, 0, m - 1}], SetPrecision[N[SurvivalFunction[LogSeriesDistribution[pT],
 m - 1]], 22]}}];
f1 = Table[Sum[A1[[m + i - j + 1]]*PDF[BinomialDistribution[n, pX], i],
 {i, 0, j}], {j, 0, m}];
vid = N[Sum[(i - 1)*A1[[i]], {i, 1, m + 1}], 15]
- Mean[BinomialDistribution[n, pX]];
GX[s_] := (1 - pX + pX*s)^n;
G[s_] := Expand[Sum[s^(i - 1)*A1[[i]], {i, 1, m + 1}]];
GXY[s_] := GX[s]*G[1/s];
S[s_] := NSolve[GXY[s] == 1, s];

```

```

D30 = Select[s /. SetPrecision[S[s], 22], Abs[#] < 1 &];
Length[D30]

```

```

S0 = Subsets[D30, {m - 2}];
S1 = Subsets[D30, {m - 3}];
S2 = Subsets[D30, {m - 4}];
S3 = Subsets[D30, {m - 5}];
S4 = Subsets[D30, {m - 6}];
S5 = Subsets[D30, {m - 7}];
S6 = Subsets[D30, {m - 8}];
S7 = Subsets[D30, {m - 9}];
S8 = Subsets[D30, {m - 10}];

```

```

φ[0] = (-1)^(m + 1) Product[1/(D30[[j]] - 1), {j, 1, m - 1}*(N[Sum[(i - 1)
 *A1[[i]], {i, 1, m + 1}], 10] - Mean[BinomialDistribution[n, pX]])
φ[1] = Product[D30[[j]]/(D30[[j]] - 1), {j, 1, m - 1}]/f1[[1]]*(N[Sum[(i - 1)
 *A1[[i]], {i, 1, m + 1}], 10] - Mean[BinomialDistribution[n, pX]])
φ[2] = -φ[1]*(f1[[1]] + f1[[2]])/f1[[1]] + (Product[1/(D30[[i]] - 1),
 {i, 1, m - 1})*(Product[D30[[i]], {i, 1, m - 1}] - Sum[Product[S0[[i]][[j]],

```

$$\begin{aligned}
& \{j, 1, m - 2\}, \{i, 1, m - 1\}\})/f1[[1]]*(N[Sum[(i - 1)*A1[[i]], \{i, 1, m + 1\}], \\
& 10] - Mean[BinomialDistribution[n, pX]]) \\
\varphi[3] = & (-\varphi[1]*(f1[[1]] + f1[[2]] + f1[[3])) - \varphi[2] \\
& *(f1[[1]] + f1[[2]]))/f1[[1]] + (Product[1/(D30[[i]] - 1), \{i, 1, m - 1\}] * \\
& (Product[D30[[i]], \{i, 1, m - 1\}] - Sum[Product[S0[[i]][[j]], \{j, 1, m - 2\}], \\
& \{i, 1, m - 1\}] + Sum[Product[S1[[i]][[j]], \{j, 1, m - 3\}], \\
& \{i, 1, Binomial[m - 1, m - 3\}]))/f1[[1]]*(N[Sum[(i - 1)*A1[[i]], \\
& \{i, 1, m + 1\}], 10] - Mean[BinomialDistribution[n, pX]]) \\
\varphi[4] = & (-\varphi[1]*(f1[[1]] + f1[[2]] + f1[[3]] + f1[[4])) - \varphi[2]*(f1[[1]] + f1[[2]] \\
& + f1[[3])) - \varphi[3]*(f1[[1]] + f1[[2]]))/f1[[1]] + (Product[1/(D30[[i]] - 1), \\
& \{i, 1, m - 1\}] * (Product[D30[[i]], \{i, 1, m - 1\}] - Sum[Product[S0[[i]][[j]], \\
& \{j, 1, m - 2\}], \{i, 1, m - 1\}] + Sum[Product[S1[[i]][[j]], \{j, 1, m - 3\}], \\
& \{i, 1, Binomial[m - 1, m - 3\}]] - Sum[Product[S2[[i]][[j]], \{j, 1, m - 4\}], \\
& \{i, 1, Binomial[m - 1, m - 4\}]]))/f1[[1]]*(N[Sum[(i - 1)*A1[[i]], \\
& \{i, 1, m + 1\}], 10] - Mean[BinomialDistribution[n, pX]]) \\
\varphi[5] = & (-\varphi[1]*(f1[[1]] + f1[[2]] + f1[[3]] + f1[[4]] + f1[[5])) - \varphi[2]*(f1[[1]] \\
& + f1[[2]] + f1[[3]] + f1[[4])) - \varphi[3]*(f1[[1]] + f1[[2]] + f1[[3])) \\
& - \varphi[4]*(f1[[1]] + f1[[2]]))/f1[[1]] + (Product[1/(D30[[i]] - 1), \\
& \{i, 1, m - 1\}] * (Product[D30[[i]], \{i, 1, m - 1\}] - Sum[Product[S0[[i]][[j]], \\
& \{j, 1, m - 2\}], \{i, 1, m - 1\}] + Sum[Product[S1[[i]][[j]], \{j, 1, m - 3\}], \\
& \{i, 1, Binomial[m - 1, m - 3\}]] - Sum[Product[S2[[i]][[j]], \{j, 1, m - 4\}], \\
& \{i, 1, Binomial[m - 1, m - 4\}]] + Sum[Product[S3[[i]][[j]], \{j, 1, m - 5\}], \\
& \{i, 1, Binomial[m - 1, m - 5\}]]))/f1[[1]]*(N[Sum[(i - 1)*A1[[i]], \\
& \{i, 1, m + 1\}], 10] - Mean[BinomialDistribution[n, pX]]) \\
\varphi[6] = & (-\varphi[1]*(f1[[1]] + f1[[2]] + f1[[3]] + f1[[4]] + f1[[5]] + f1[[6])) \\
& - \varphi[2]*(f1[[1]] + f1[[2]] + f1[[3]] + f1[[4]] + f1[[5])) - \varphi[3]*(f1[[1]] \\
& + f1[[2]] + f1[[3]] + f1[[4])) - \varphi[4]*(f1[[1]] + f1[[2]] + f1[[3])) \\
& - \varphi[5]*(f1[[1]] + f1[[2]]))/f1[[1]] + (Product[1/(D30[[i]] - 1), \\
& \{i, 1, m - 1\}] * (Product[D30[[i]], \{i, 1, m - 1\}] - Sum[Product[S0[[i]][[j]], \\
& \{j, 1, m - 2\}], \{i, 1, m - 1\}] + Sum[Product[S1[[i]][[j]], \{j, 1, m - 3\}], \\
& \{i, 1, Binomial[m - 1, m - 3\}]] - Sum[Product[S2[[i]][[j]], \{j, 1, m - 4\}], \\
& \{i, 1, Binomial[m - 1, m - 4\}]] + Sum[Product[S3[[i]][[j]], \{j, 1, m - 5\}], \\
& \{i, 1, Binomial[m - 1, m - 5\}]] - Sum[Product[S4[[i]][[j]], \{j, 1, m - 6\}], \\
& \{i, 1, Binomial[m - 1, m - 6\}]]))/f1[[1]]*(N[Sum[(i - 1)*A1[[i]], \\
& \{i, 1, m + 1\}], 10] - Mean[BinomialDistribution[n, pX]]) \\
\varphi[7] = & (-\varphi[1]*(f1[[1]] + f1[[2]] + f1[[3]] + f1[[4]] + f1[[5]] + f1[[6]] \\
& + f1[[7])) - \varphi[2]*(f1[[1]] + f1[[2]] + f1[[3]] + f1[[4]] + f1[[5]] + f1[[6])) \\
& - \varphi[3]*(f1[[1]] + f1[[2]] + f1[[3]] + f1[[4]] + f1[[5])) - \varphi[4] \\
& *(f1[[1]] + f1[[2]] + f1[[3]] + f1[[4])) - \varphi[5]*(f1[[1]] + f1[[2]] + f1[[3])) \\
& - \varphi[6]*(f1[[1]] + f1[[2]]))/f1[[1]] + (Product[1/(D30[[i]] - 1), \\
& \{i, 1, m - 1\}] * (Product[D30[[i]], \{i, 1, m - 1\}] - Sum[Product[S0[[i]][[j]], \\
& \{j, 1, m - 2\}], \{i, 1, m - 1\}] + Sum[Product[S1[[i]][[j]], \{j, 1, m - 3\}], \\
& \{i, 1, Binomial[m - 1, m - 3\}]] - Sum[Product[S2[[i]][[j]], \{j, 1, m - 4\}],
\end{aligned}$$

```

{i, 1, Binomial[m - 1, m - 4]}] + Sum[Product[S3[[i]][[j]], {j, 1, m - 5}],
{i, 1, Binomial[m - 1, m - 5]}] - Sum[Product[S4[[i]][[j]], {j, 1, m - 6}],
{i, 1, Binomial[m - 1, m - 6]}] + Sum[Product[S5[[i]][[j]], {j, 1, m - 7}],
{i, 1, Binomial[m - 1, m - 7]}]))/f1[[1]]*(N[Sum[(i - 1)*A1[[i]],
{i, 1, m + 1}], 10] - Mean[BinomialDistribution[n, pX]])
φ[8] = (-φ[1]*(f1[[1]] + f1[[2]] + f1[[3]] + f1[[4]] + f1[[5]] + f1[[6]] + f1[[7]]
+ f1[[8]]) - φ[2]*(f1[[1]] + f1[[2]] + f1[[3]] + f1[[4]] + f1[[5]] + f1[[6]]
+ f1[[7]]) - φ[3]*(f1[[1]] + f1[[2]] + f1[[3]] + f1[[4]] + f1[[5]] + f1[[6]])
- φ[4]*(f1[[1]] + f1[[2]] + f1[[3]] + f1[[4]] + f1[[5]]) - φ[5]*(f1[[1]]
+ f1[[2]] + f1[[3]] + f1[[4]]) - φ[6]*(f1[[1]] + f1[[2]] + f1[[3]])
- φ[7]*(f1[[1]] + f1[[2]])/f1[[1]] + (Product[1/(D30[[i]] - 1),
{i, 1, m - 1}]*Product[D30[[i]], {i, 1, m - 1}] - Sum[Product[S0[[i]][[j]],
{j, 1, m - 2}], {i, 1, m - 1}] + Sum[Product[S1[[i]][[j]], {j, 1, m - 3}],
{i, 1, Binomial[m - 1, m - 3]}] - Sum[Product[S2[[i]][[j]], {j, 1, m - 4}],
{i, 1, Binomial[m - 1, m - 4]}] + Sum[Product[S3[[i]][[j]], {j, 1, m - 5}],
{i, 1, Binomial[m - 1, m - 5]}] - Sum[Product[S4[[i]][[j]], {j, 1, m - 6}],
{i, 1, Binomial[m - 1, m - 6]}] + Sum[Product[S5[[i]][[j]], {j, 1, m - 7}],
{i, 1, Binomial[m - 1, m - 7]}] - Sum[Product[S6[[i]][[j]], {j, 1, m - 8}],
{i, 1, Binomial[m - 1, m - 8]}]))/f1[[1]]*(N[Sum[(i - 1)*A1[[i]],
{i, 1, m + 1}], 10] - Mean[BinomialDistribution[n, pX]])
φ[9] = (-φ[1]*(f1[[1]] + f1[[2]] + f1[[3]] + f1[[4]] + f1[[5]] + f1[[6]] + f1[[7]]
+ f1[[8]] + f1[[9]]) - φ[2]*(f1[[1]] + f1[[2]] + f1[[3]] + f1[[4]] + f1[[5]]
+ f1[[6]] + f1[[7]] + f1[[8]]) - φ[3]*(f1[[1]] + f1[[2]] + f1[[3]] + f1[[4]]
+ f1[[5]] + f1[[6]] + f1[[7]]) - φ[4]*(f1[[1]] + f1[[2]] + f1[[3]] + f1[[4]]
+ f1[[5]] + f1[[6]]) - φ[5]*(f1[[1]] + f1[[2]] + f1[[3]] + f1[[4]] + f1[[5]])
- φ[6]*(f1[[1]] + f1[[2]] + f1[[3]] + f1[[4]]) - φ[7]*(f1[[1]] + f1[[2]]
+ f1[[3]]) - φ[8]*(f1[[1]] + f1[[2]])/f1[[1]] + (Product[1/(D30[[i]] - 1),
{i, 1, m - 1}]*Product[D30[[i]], {i, 1, m - 1}] - Sum[Product[S0[[i]][[j]],
{j, 1, m - 2}], {i, 1, m - 1}] + Sum[Product[S1[[i]][[j]], {j, 1, m - 3}],
{i, 1, Binomial[m - 1, m - 3]}] - Sum[Product[S2[[i]][[j]], {j, 1, m - 4}],
{i, 1, Binomial[m - 1, m - 4]}] + Sum[Product[S3[[i]][[j]], {j, 1, m - 5}],
{i, 1, Binomial[m - 1, m - 5]}] - Sum[Product[S4[[i]][[j]], {j, 1, m - 6}],
{i, 1, Binomial[m - 1, m - 6]}] + Sum[Product[S5[[i]][[j]], {j, 1, m - 7}],
{i, 1, Binomial[m - 1, m - 7]}] - Sum[Product[S6[[i]][[j]], {j, 1, m - 8}],
{i, 1, Binomial[m - 1, m - 8]}] + Sum[Product[S7[[i]][[j]], {j, 1, m - 9}],
{i, 1, Binomial[m - 1, m - 9]}]))/f1[[1]]*(N[Sum[(i - 1)*A1[[i]],
{i, 1, m + 1}], 10] - Mean[BinomialDistribution[n, pX]])
φ[10] = (-φ[1]*(f1[[1]] + f1[[2]] + f1[[3]] + f1[[4]] + f1[[5]] + f1[[6]] + f1[[7]]
+ f1[[8]] + f1[[9]] + f1[[10]]) - φ[2]*(f1[[1]] + f1[[2]] + f1[[3]] + f1[[4]]
+ f1[[5]] + f1[[6]] + f1[[7]] + f1[[8]] + f1[[9]]) - φ[3]*(f1[[1]] + f1[[2]]
+ f1[[3]] + f1[[4]] + f1[[5]] + f1[[6]] + f1[[7]] + f1[[8]]) - φ[4]*(f1[[1]]
+ f1[[2]] + f1[[3]] + f1[[4]] + f1[[5]] + f1[[6]] + f1[[7]]) - φ[5]*(f1[[1]]
+ f1[[2]] + f1[[3]] + f1[[4]] + f1[[5]] + f1[[6]]) - φ[6]*(f1[[1]] + f1[[2]]

```

```

+ f1[[3]] + f1[[4]] + f1[[5]]) -  $\varphi$ [7]*(f1[[1]] + f1[[2]] + f1[[3]] + f1[[4]])
-  $\varphi$ [8]*(f1[[1]] + f1[[2]] + f1[[3]]) -  $\varphi$ [9]*(f1[[1]] + f1[[2]])/f1[[1]]
+ (Product[1/(D30[[i]] - 1), {i, 1, m - 1}]*Product[D30[[i]], {i, 1, m - 1}]
- Sum[Product[S0[[i]][[j]], {j, 1, m - 2}], {i, 1, m - 1}]
+ Sum[Product[S1[[i]][[j]], {j, 1, m - 3}], {i, 1, Binomial[m - 1, m - 3]}]
- Sum[Product[S2[[i]][[j]], {j, 1, m - 4}], {i, 1, Binomial[m - 1, m - 4]}]
+ Sum[Product[S3[[i]][[j]], {j, 1, m - 5}], {i, 1, Binomial[m - 1, m - 5]}]
- Sum[Product[S4[[i]][[j]], {j, 1, m - 6}], {i, 1, Binomial[m - 1, m - 6]}]
+ Sum[Product[S5[[i]][[j]], {j, 1, m - 7}], {i, 1, Binomial[m - 1, m - 7]}]
- Sum[Product[S6[[i]][[j]], {j, 1, m - 8}], {i, 1, Binomial[m - 1, m - 8]}]
+ Sum[Product[S7[[i]][[j]], {j, 1, m - 9}], {i, 1, Binomial[m - 1, m - 9]}]
- Sum[Product[S8[[i]][[j]], {j, 1, m - 10}], {i, 1, Binomial[m - 1, m - 10]}])
/f1[[1]]*(N[Sum[(i - 1)*A1[[i]], {i, 1, m + 1}], 10]
- Mean[BinomialDistribution[n, pX]])
phi30 = Table[SetPrecision[N[Re[ $\varphi$ [i]]], 15], {i, 0, 10}]

```

(* palyginimas *)

```

Lentele = Grid[Prepend[Table[Join[{i, NumberForm[phiUpper30[[i + 1]], 11],
NumberForm[phi30[[i + 1]], 11]}, {sci[phiUpper30[[i + 1]] - phi30[[i + 1]]}],
{i, 0, 10}], {"u", "\!\(\*\SubscriptBox[\(\*\OverscriptBox[\(\varphi\), \(_\)]\)\],
\((30\))\)(u)", "\!\(\*\SubscriptBox[\(\varphi\), \((30\))\)]\)(u)",
"\!\(\*\SubscriptBox[\(\*\OverscriptBox[\(\varphi\), \(_\)]\)\], \((30\))\)]\)(u)
-\!\(\*\SubscriptBox[\(\varphi\), \((30\))\)]\)(u)"}], Frame -> All]

```