



**Matematikos ir
informatikos
fakultetas**

VILNIAUS UNIVERSITETAS

**MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MAGISTRANTŪROS STUDIJŲ PROGRAMA
FINANSŲ IR DRAUDIMO MATEMATIKA**

**Grynujų vienkartinių premijų apskaičiavimas
taikant tolygaus mirtingumo pasiskirstymo
prielaidą**

**Calculation of Net Single Premiums under the
Uniform Distribution of Deaths Assumption**

Baigiamasis magistro darbas

Atliko: Asta Palionytė
VU el. p.: asta.palionyte@mif.stud.vu.lt
Vadovas: doc. dr. Andrius Grigutis

Vilnius
2025

Turinys

1	Įvadas	5
2	Išgyvenamumo modeliai	5
2.1	Gyvenimo trukmė	6
2.2	Išgyvenimo funkcija	6
2.3	Mirtingumo kreivė	7
2.4	Mirtingumo galia	8
2.5	Likusiojo gyvenimo trukmė	8
2.5.1	Pagrindiniai dydžiai, susiję su likusiojo gyvenimo trukme	10
2.6	Sveikasis metų skaičius	11
2.7	Mirtingumo lentelės	11
2.8	Mirtingumo modeliavimas amžiaus intervaluose	12
2.9	Tolygus mirtingumo pasiskirstymas metų intervaluose (UDD)	12
2.10	Klasikinių dalinio amžiaus prielaidų apribojimai	15
3	Gyvybės draudimo įmokų skaičiavimas	15
3.1	Diskontavimo teorija ir palūkanų normos	16
3.2	Draudimas su išmoka iš karto po mirties	16
3.2.1	Viso gyvenimo gyvybės draudimas	16
3.2.2	Terminuotas n -metų gyvybės draudimas	17
3.3	Draudimas su išmoka mirties metų gale	18
3.3.1	Viso gyvenimo gyvybės draudimas	18
3.3.2	Terminuotas n -metų gyvybės draudimas	19
3.4	Ryšys tarp draudimo įmokų, mokamų mirties momentu, ir draudimo įmokų, mokamų mirties metų gale	19
4	Praktinė dalis	21
4.1	Pradinės prielaidos ir duomenys	21
4.2	Lietuvos mirties tikimybių apžvalga	21
4.3	Vienkartinės premijos skaičiavimas naudojant UDD prielaidą	23
4.4	Lietuvos vienkartinės grynosios premijos tendencijos	24
4.5	Vienkartinių grynujų premijų palyginimas tarp šalių	26
4.6	Palūkanų normos jautrumo analizė	27
4.7	Vienkartinių grynujų premijų apskaičiavimas n -metų terminuotam gyvy- bės draudimui	28
4.8	Rezultatų interpretacija	31
5	Išvados	32
	Literatūra	33
A	Mirties tikimybių q_x tiesinis grafikas	34

B	Viso gyvenimo draudimo vienkartinių premijų priklausomybė nuo amžiaus	34
C	Lietuvos vienkartinių grynujų premijų $\bar{A}_x$ kitimas 2010–2024 m.	35
D	Terminuoto ir viso gyvenimo draudimo premijų palyginimas	36
E	R kodas	39

Grynųjų vienkartinių premijų apskaičiavimas taikant tolygaus mirtingumo pasiskirstymo prielaidą

Santrauka

Aktuarinėje praktikoje dažnas uždavinys yra tinkamai apskaičiuoti gyvybės draudimo premijas, kai turimi mirtingumo duomenys pateikiami diskrečiose lentelėse, o draudimo išmokos modeliuojamos tolydžiu laiku. Spendžiant šį uždavinį, šiame magistro darbe nagrinėjamas vienkartinių grynųjų premijų skaičiavimas taikant tolygaus mirtingumo pasiskirstymo (UDD) prielaidą. Teorinėje darbo dalyje aptariami gyvybės draudimo matematiniai pagrindai, išgyvenimo ir mirties tikimybių modeliavimas bei dalinių amžių prielaidos.

Praktinėje dalyje UDD prielaida taikoma viso gyvenimo ir n -metų terminuotam gyvybės draudimui, naudojant periodines mirtingumo lenteles. Analizuojamas vienkartinių grynųjų premijų kitimas laike Lietuvos atveju, atliekamas tarptautinis palyginimas bei palūkanų normos jautrumo analizė viso gyvenimo draudimui. Terminuoto draudimo atveju pateikiamas palyginimas su viso gyvenimo draudimu, leidžiantis įvertinti skirtingų produktų premijų struktūrinius skirtumus. Darbas parodo, kaip UDD prielaida realiai keičia vienkartinių premijų dydžius naudojant periodines mirtingumo lenteles ir leidžia empiriškai įvertinti jos tinkamumą praktiniuose skaičiavimuose.

Gauti rezultatai patvirtina, kad UDD prielaida yra tinkama praktiniams gyvybės draudimo skaičiavimams, kai diskrečios mirtingumo lentelės taikomos tolydžiuose modeliuose.

Raktiniai žodžiai: viso gyvenimo draudimas, terminuotas n -metų draudimas, vienkartinė grynoji premija, tolygus mirtingumo pasiskirstymas metų intervaluose, mirtingumo lentelės, tikėtinoji dabartinė vertė

Calculation of Net Single Premiums under the Uniform Distribution of Deaths Assumption

Abstract

In actuarial practice, a common challenge is the accurate calculation of life insurance premiums when mortality data are available in discrete life tables, while insurance benefits are modelled in continuous time. In addressing this problem, this master's thesis examines the calculation of net single premiums for life insurance under the Uniform Distribution of Deaths (UDD) assumption. The theoretical part reviews the mathematical foundations of life insurance, survival and death probability modelling, and fractional age assumptions, with particular emphasis on the role of the UDD assumption.

In the practical part, the UDD assumption is applied to whole life and n -year term life insurance using period life tables. The analysis investigates the dynamics of net single premiums over time for Lithuania, performs an international comparison, and conducts an interest rate sensitivity analysis for whole life insurance. For term life insurance, a comparison with whole life insurance is provided in order to assess structural differences in net single premiums across different insurance products. The thesis demonstrates how the UDD assumption materially affects the level of single premiums when period life tables are used and enables an empirical evaluation of its suitability for practical calculations.

The results confirm that the UDD assumption is appropriate for practical life insurance calculations when discrete mortality data are applied within continuous-time models.

Key words: whole life insurance, term life insurance, single net premium, Uniform Distribution of Deaths, life tables, expected present value

1 Įvadas

Gyvybės draudimas yra viena svarbiausių finansinės apsaugos priemonių, leidžiančių sumažinti neigiamas finansines pasekmes apdraustajam mirus. Nors esama įvairių gyvybės draudimo rūšių, kurios skiriasi savo struktūra ir sąlygomis, visų jų pagrindas – mirties rizikos įvertinimas. Tik teisingai įvertinus mirties riziką, draudimo įmonė gali nustatyti tinkamas draudimo įmokas, užtikrinančias draudimo įmonės finansinį stabilumą.

Skaičiuojant gyvybės draudimo įmokas, aktuarai remiasi mirtingumo lentelėmis, kuriose išgyvenimo ir mirties tikimybės yra pateikiamos pagal amžių ir kitą populiacijos informaciją. Šiose lentelėse rodikliai yra apibrėžti tik sveikosioms žmogaus amžiaus reikšmėms, tačiau praktikoje draudiminiai įvykiai gali įvykti bet kuriuo laiko momentu, ne tik per tikslus metus. Dėl to, pereinant nuo diskrečių mirtingumo duomenų prie tolydžių gyvybės draudimo modelių, būtina taikyti papildomas prielaidas, apibrėžiančias mirtingumo elgseną metų intervalų viduje. Viena dažniausiai praktikoje naudojamų tokių prielaidų yra tolygaus mirtingumo pasiskirstymo prielaida, leidžianti paprastai ir nuosekliai interpoliuoti mirties tikimybes tarp gretimų amžių.

Šiame darbe nagrinėjama, kaip tolygaus mirtingumo pasiskirstymo prielaida veikia vienkartinių grynųjų gyvybės draudimo premijų dydžius, kai skaičiavimai atliekami remiantis periodinėmis mirtingumo lentelėmis. Teorinėje darbo dalyje aptariami pagrindiniai gyvybės draudimo matematikos elementai, reikalingi mirtingumo procesams modeliuoti bei ryšiui tarp diskrečių ir tolydžių draudimo modelių pagrįsti. Praktinėje darbo dalyje UDD prielaida taikoma viso gyvenimo ir n -metų terminuoto gyvybės draudimo atvejams, analizuojamas vienkartinių grynųjų premijų kitimas laike Lietuvos atveju, atliekamas palyginimas su kitomis šalimis bei nagrinėjamas premijų jautrumas palūkanų normos pokyčiams.

2 Išgyvenamumo modeliai

Pagrindinis gyvybės draudimo matematikos uždavinys yra kiekybiškai įvertinti su žmogaus gyvenimo trukme susijusią riziką. Šiam tikslui taikomi išgyvenamumo modeliai, kurie leidžia formaliai aprašyti mirties ir išgyvenimo tikimybes priklausomai nuo individo amžiaus ir laiko. Tokie modeliai sudaro teorinę pagrindą draudimo įmokų, rezervų ir išmokų skaičiavimui, kadangi visi šie dydžiai tiesiogiai priklauso nuo mirties momento pasiskirstymo.

Praktiniuose aktuariniuose skaičiavimuose gyvenimo trukmė gali būti modeliuojama tiek kaip tolydus, tiek kaip diskretus atsitiktinis dydis, tačiau pereinant nuo statistinių mirtingumo lentelių prie tolygaus laiko modelių būtina taikyti papildomas prielaidas apie mirtingumo elgseną amžiaus intervalų viduje. Skirtingos prielaidos lemia skirtingą mirties momento pasiskirstymą ir, atitinkamai, skirtingas draudimo įmokų reikšmes.

Šiame skyriuje nuosekliai pristatomi pagrindiniai išgyvenamumo modeliavimo elementai: gyvenimo ir likusiojo gyvenimo trukmės atsitiktiniai dydžiai, išgyvenimo ir pasiskirstymo funkcijos, mirtingumo galia, taip pat dažniausiai taikomos dalinio amžiaus prielaidos. Šių dydžių analizė sudaro pagrindą vėlesniam skirtingų mirtingumo prielaidų poveikio vienkartinių grynųjų draudimo premijų dydžiui vertinimui.

2.1 Gyvenimo trukmė

Pagrindinis gyvybės draudimo rizikos šaltinis yra mirties momento neapibrėžtumas. Nėra įmanoma preciziškai nustatyti tikslaus momento, kada konkretus individas mirs, tačiau, stebint pakankamai didelę žmonių grupę, galima išvelgti mirtingumo dėsningumus ir juos statistiškai aprašyti. Dėl šios priežasties aktuarinėje matematikoje žmogaus gyvenimo trukmė modeliuojama kaip atsitiktinis dydis.

Tegul T žymi individo absoliučią gyvenimo trukmę, matuojamą nuo gimimo momento. Kadangi mirties momentas negali būti neigiamas, daroma prielaida, kad atsitiktinis dydis T tenkina

$$T \geq 0.$$

Dažniausiai laikoma, kad gyvenimo trukmė yra absoliučiai tolydus atsitiktinis dydis. Tai reiškia, kad mirtis gali įvykti bet kuriuo laiko momentu, o tikimybė mirti konkrečiu momentu yra lygi nuliui. Ši prielaida palengvina matematinę analizę ir neprasilenkia su realybe: nors praktinėje statistikoje amžius dažnai fiksuojamas metų tikslumu, tačiau mirties momentas savo prigimtimi yra tolydus reiškinys.

Nagrinėjant gyvenimo trukmę kaip absoliučiai tolydų atsitiktinį dydį, svarbu apibrėžti jos pasiskirstymo ir išgyvenimo funkcijas. Šios funkcijos yra pagrindiniai įrankiai, naudojami modeliuojant išgyvenamumą ir skaičiuojant vienkartines grynąsias draudimo premijas.

2.2 Išgyvenimo funkcija

Modeliuojant gyvenimo trukmę aktuarinėje matematikoje naudojamos pasiskirstymo ir išgyvenimo funkcijos, kurios leidžia išreikšti mirties ir išgyvenimo tikimybes bei sudaro pagrindą vėlesniems gyvybės draudimo įmokų skaičiavimams.

Apibrėžimas 1. Atsitiktinio dydžio T pasiskirstymo funkcija vadinama funkcija

$$F(x) = \mathbb{P}(T < x), \quad x \geq 0,$$

kuri nusako tikimybę, kad individo gyvenimo trukmė yra mažesnė nei x metų.

Apibrėžimas 2. Atsitiktinio dydžio T išgyvenimo funkcija apibrėžiama kaip

$$s(x) = 1 - F(x) = \mathbb{P}(T \geq x), \quad x \geq 0.$$

Ši funkcija nusako tikimybę, kad individas išgyvens ne trumpiau nei x metų.

Šios funkcijos leidžia aprašyti mirties momento pasiskirstymą ir yra pagrindiniai įrankiai, naudojami skaičiuojant vienkartines grynąsias gyvybės draudimo premijas.

Išgyvenimo funkcija tenkina tokias savybes [2]:

1. $s(x)$ – nedidėjanti funkcija, kai $x \geq 0$;
2. $s(0) = 1$;
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} s(x) = 0$;
4. $s(x)$ yra tolydi apibrėžimo srityje.

Neneigiamas atsitiktinis dydis T , nusakantis individo gyvenimo trukmę, vadinamas absoliučiai tolydžiu, jeigu egzistuoja neneigiama integruojama funkcija $f(x)$, vadinama tankio funkcija, tokia, kad

$$F(x) = \mathbb{P}(T < x) = \int_0^x f(u)du, \quad x \geq 0.$$

Jei $F(x)$ diferencijuojama funkcija, tai

$$f(x) = F'(x), \quad x \geq 0.$$

Kadangi išgyvenimo funkcija apibrėžiama kaip $s(x) = 1 - F(x)$, gauname

$$f(x) = F'(x) = -(1 - F(x))' = -s'(x), \quad x \geq 0.$$

Toliau šios funkcijos bus naudojamos apibrėžiant mirtingumo galią ir nagrinėjant dalinio amžiaus prielaidas, reikalingas pereinant prie diskrečių ir tolydžių gyvybės draudimo modelių.

2.3 Mirtingumo kreivė

Stebint tam tikrą individų grupę, galima apibūdinti tos grupės mirties atvejų pasiskirstymą pagal amžiaus kategorijas. Tarkime, kad tiriamo individų grupę l_0 . Jų gyvenimo trukmės $T_1, T_2, \dots, T_{l_0}$ laikomos tarpusavyje nepriklausomais ir vienodai pasiskirsčiusiais atsitiktiniais dydžiais. Individų, kurie išgyveno iki amžiaus x , skaičių žymėsime $L(x)$. Tada vidutinis individų, išgyvenusių iki amžiaus x , skaičius, kurį žymėsime l_x , yra lygus [2]:

$$l_x = \mathbb{E}L(x) = \sum_{i=1}^{l_0} \mathbb{P}(T_i \geq x) = l_0 \mathbb{P}(T \geq x) = l_0 s(x).$$

Iš čia nesunkiai galime išsireikšti išgyvenimo funkciją

$$s(x) = \frac{l_x}{l_0}.$$

Tegul $D(x)$ žymi individų skaičių, kurie mirė amžiaus intervale $[x, x+1)$. Tuomet vidutinis mirusių skaičius, kurį žymėsime d_x , yra lygus

$$d_x = \mathbb{E}D(x) = \mathbb{E}(L(x) - L(x+1)) = \mathbb{E}L(x) - \mathbb{E}L(x+1) = l_x - l_{x+1}.$$

Kadangi išgyvenimo funkcija yra laikoma tolydžia ir diferencijuojama, todėl galime gauti aproksimaciją

$$l_x - l_{x+1} = l_0(s(x) - s(x+1)) \approx -l_0 s'(x) = l_0 f(x).$$

Ši aproksimacija yra standartinė aktuarinėje literatūroje ir naudojama siejant diskrečius mirtingumo lentelių dydžius su tolydžiu gyvenimo trukmės modeliu [2].

Iš čia matyti, kad

$$d(x) \approx l_0 f(x). \tag{1}$$

Pastebime, kad sandauga $l_0 f(x)$ parodo, kaip mirtingumas kinta pagal amžių, todėl ją vadinsime mirtingumo kreive. Žinant mirtingumo kreivę $l_0 f(x)$ galima surasti ir išgyvenimo funkciją

$$s(x) = \int_x^\infty f(u) du, \quad x \geq 0.$$

Iš aproksimacijos (1) matome, kad tankio funkcija $f(x)$ apytiksliai nusako, kokia pradinės populiacijos dalis miršta ties tam tikru amžiumi. Tankio funkcijos grafikas yra vadinamas mirtingumo kreive ir leidžia vizualiai įvertinti mirties momento pasiskirstymą per gyvenimo eigą.

2.4 Mirtingumo galia

Apibrėžimas 3. Bet kuriam neneigiamam realiajam x dydis μ_x , apibrėžiamas kaip

$$\mu_x = \frac{f(x)}{s(x)} = -\frac{s'(x)}{s(x)}, \quad x \geq 0, \quad (2)$$

yra vadinamas mirtingumo galia. Kitaip šis dydis dar vadinamas mirties intensyvumu.

Mirtingumo galia apibūdina išgyvenimo funkcijos $s(x)$ mažėjimo greitį didėjant amžiui x . Iš apibrėžimo matyti, kad mirties intensyvumą $\mu(x)$ galima surasti žinant funkciją $s(x)$.

Pritaikius žinomą logaritminės funkcijos išvestinės taisyklę, matome, kad

$$\mu_x = -(\ln s(x))'.$$

Integruojant abi puses gauname

$$\int_0^x \ln s(u) du = - \int_0^x \mu_u du.$$

Kadangi $\ln s(0) = \ln \mathbb{P}(X \geq 0) = \ln 1 = 0$, tai

$$\ln s(x) = - \int_0^x \mu_u du.$$

Galiausiai gauname standartinę išraišką, kuri leidžia rasti funkciją $s(x)$, žinant funkciją μ_x :

$$s(x) = \exp \left(- \int_0^x \mu_u du \right).$$

Gauta išraiška yra standartinė aktuarinėje literatūroje ir pateikiama pagal [2].

2.5 Likusiojo gyvenimo trukmė

Gyvybės draudimo matematikos uždaviniuose dažniausiai analizuojama ne absoliuti gyvenimo trukmė nuo gimimo, bet likęs nugyventi laikas asmeniui, jau sulaukusiam tam tikro amžiaus. Dėl to svarbu apsibrėžti likusiojo gyvenimo trukmės atsitiktinį dydį, kuris leidžia aprašyti sąlygines išgyvenimo ir mirties tikimybes.

Apibrėžimas 4. Tegul T yra individo gyvenimo trukmė. Tuomet asmens, sulaukusio amžiaus x , likusiojo gyvenimo trukmė apibrėžiama kaip atsitiktinis dydis

$$T_x = T - x, \quad T \geq x.$$

Tai atsitiktinis dydis, nusakantis, kiek metų žmogus dar gyvens, kai jau yra sulaukęs amžiaus x .

Apibrėžimas 5. Atsitiktinio dydžio T_x pasiskirstymo funkcija apibrėžiama kaip

$$F_x(t) = \mathbb{P}(T_x < t), \quad t \geq 0.$$

Naudojant sąlyginės tikimybės apibrėžimą, gaunamas ryšys tarp absoliučios ir sąlyginės pasiskirstymo funkcijų [2]:

$$\begin{aligned} F_x(t) &= \mathbb{P}(T_x < t) = \mathbb{P}(T < x + t | T \geq x) = \frac{\mathbb{P}(x \leq T < x + t)}{\mathbb{P}(T \geq x)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(T < x + t) - \mathbb{P}(T < x)}{\mathbb{P}(T \geq x)} = \frac{F(x + t) - F(x)}{1 - F(x)} = \frac{1 - s(x + t) - 1 + s(x)}{s(x)} \\ &= \frac{s(x) - s(x + t)}{s(x)} = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x}. \end{aligned} \quad (3)$$

Kalbant gyvybės draudimo tematika, dažniau yra naudojamos sąlyginės išgyvenimo, o ne mirties tikimybės. Sąlyginės išgyvenimo tikimybės aprašo tikimybę, kad individas, sulaukęs amžiaus x , išgyvens dar ne trumpiau kaip t metų.

Apibrėžimas 6. Atsitiktinio dydžio T_x išgyvenimo funkcija apibrėžiama kaip

$$s_x(t) = 1 - F_x(t) = \mathbb{P}(T_x \geq t), \quad t \geq 0.$$

Naudojant sąlyginės tikimybės apibrėžimą, gaunamas ryšys

$$\begin{aligned} s_x(t) &= \mathbb{P}(T_x \geq t) = \mathbb{P}(T \geq x + t | T \geq x) = \frac{\mathbb{P}(T \geq x + t)}{\mathbb{P}(T \geq x)} = \frac{1 - F(x + t)}{1 - F(x)} \\ &= \frac{s(x + t)}{s(x)} = \frac{l_{x+t}}{l_x}. \end{aligned}$$

Kadangi gyvenimo trukmė T turi tankio funkciją $f(x)$, egzistuoja ir likusiojo gyvenimo trukmės sąlyginė tankio funkcija

$$f_x(t) = -s'_x(t) = -\frac{s'(x + t)}{s(x)} = \frac{f(x + t)}{s(x)}.$$

Atitinkamai galime apibrėžti ir sąlyginę mirtingumo galią

$$\mu_x(t) = \frac{f_x(t)}{s_x(t)} = -\frac{s'_x(t)}{s_x(t)} = \frac{\frac{f(x+t)}{s(x)}}{\frac{s(x+t)}{s(x)}} = \frac{f(x+t)}{s(x+t)} = \mu(x+t).$$

Gautas rezultatas parodo, kad žmogaus, sulaukusio amžiaus x , mirtingumo galia, praėjus t metų, yra lygi naujagimio mirtingumo galiai momentu $x + t$. Iš paskutinės lygybės išplaukia svarbi tankio $f_x(t)$ formulė, kuri bus dažnai naudojama tolesniuose skyriuose

$$f_x(t) = \mu_{x+t} \mathbb{P}(T_x \geq t) = \mu_{x+t} s_x(t).$$

2.5.1 Pagrindiniai dydžiai, susiję su likusiojo gyvenimo trukme

- ${}_tq_x$ – tikimybė žmogui, sulaukusiam x metų, mirti per artimiausius t metų, t. y. $\mathbb{P}(T_x < t)$. Remiantis aukščiau pateikta lygybe (3), gauname

$${}_tq_x = \mathbb{P}(T_x < t) = \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x}. \quad (4)$$

- ${}_tp_x$ yra priešinga tikimybei ${}_tq_x$ – tai tikimybė, kad žmogus, sulaukęs amžiaus x , išgyvens dar mažiausiai t metų, t. y. $\mathbb{P}(T_x \geq t)$. Ji apskaičiuojama

$${}_tp_x = 1 - {}_tq_x = 1 - \mathbb{P}(T_x < t) = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{l_{x+t}}{l_x}. \quad (5)$$

Praktikoje gana dažnai stebimas atvejis, kai $t = 1$. Todėl šiuo atveju funkcijas ${}_tq_x$, ${}_tp_x$ buvo sumanyta žymėti be indekso "1" kairėje pusėje.

- $q_x = {}_1q_x$ – tikimybė žmogui, sulaukusiam x metų, mirti per artimiausius vienerius metus, t. y. $\mathbb{P}(T_x < 1)$. Ji apskaičiuojama

$$q_x = \frac{s(x) - s(x+1)}{s(x)} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}. \quad (6)$$

- $p_x = {}_1p_x$ – tikimybė žmogui, sulaukusiam x metų, išgyventi dar mažiausiai vienerius metus, t. y. $\mathbb{P}(T_x \geq 1)$. Ji apskaičiuojama

$$p_x = \frac{s(x+1)}{s(x)} = \frac{l_{x+1}}{l_x}. \quad (7)$$

Remiantis tikimybėmis p_x , galime apskaičiuoti bet kokią tikimybę ${}_tp_x$

$${}_tp_x = p_x p_{x+1} \dots p_{x+t-1}, \quad t \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

- ${}_t|_uq_x$ – tikimybė, kad x metų turintis žmogus išgyvens dar bent t metų, bet mirs per ateinančius u metų, t. y. $\mathbb{P}(t \leq T_x < t+u)$. Kadangi

$$\mathbb{P}(T_x \in (t, t+u)) = F_x(t+u) - F_x(t),$$

tai

$$\begin{aligned} {}_t|_uq_x &= {}_{t+u}q_x - {}_tq_x = \frac{s(x) - s(x+t+u)}{s(x)} - \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} \\ &= \frac{s(x+t) - s(x+t+u)}{s(x)} = \frac{l_{x+t} - l_{x+t+u}}{l_x}. \end{aligned} \quad (9)$$

- ${}_t|q_x$ – tikimybė, kad žmogus, sulaukęs amžiaus x , išgyvens dar t metų, bet numirs per ateinančius vienerius metus, t. y. $\mathbb{P}(t \leq T_x < t+1)$. Ji apskaičiuojama

$${}_t|q_x = {}_t|_1q_x = \frac{s(x+t) - s(x+t+1)}{s(x)} = \frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_x}. \quad (10)$$

2.6 Sveikasis metų skaičius

Praktikoje gyvenimo trukmė dažniausiai vertinama ne tiksliais laiko momentais, o pilnais metais. Tiek žmonės savo amžių įprastai skaičiuoja metais, tiek gyvybės draudimo sutartys dažniausiai sudaromos vieneriems ar keleriems metams, t. y. laikotarpiais, išreikštiems sveikaisiais skaičiais. Taigi, greta tolydaus likusiojo gyvenimo trukmės atsitiktinio dydžio T_x , tikslinga nagrinėti ir jo sveikąją dalį.

Apibrėžiame atsitiktinį dydį

$$K_x = [T_x],$$

kuris vadinamas likusiojo gyvenimo trukmės sveikąja dalimi. Galime laikyti, kad sveikoji likusiojo gyvenimo trukmė nusako, kiek pilnų metų ateityje dar nugyvens individas.

Kadangi K_x yra atsitiktinio dydžio T_x dalis, tai ir dydis K_x yra atsitiktinis dydis. Kadangi atsitiktinis dydis K_x įgyja tik neneigiamas sveikąsias reikšmes, tai jis aprašomas ne pasiskirstymo funkcija, o tiesiog pasiskirstymu, t. y. tikimybių rinkiniu

$$\mathbb{P}(K_x = k), \text{ kai } k = 0, 1, \dots$$

Nesunku pastebėti, kad įvykis $K_x = k$ yra ekvivalentus įvykiui $k \leq T_x < k + 1$. Atitinkamai tikimybė $\mathbb{P}(K_x = k)$ gali būti išreikšta per mirtingumo lentelių dydžius [2]:

$$\mathbb{P}(K_x = k) = \frac{s(x+k) - s(x+k+1)}{s(x)} = \frac{l_{x+k} - l_{x+k+1}}{l_x} = \frac{d_{x+k}}{l_x}.$$

Šis dydis toliau naudojamas nagrinėjant diskrečius gyvybės draudimo modelius, kuriuose draudimo išmokos mokamos mirties metų pabaigoje.

2.7 Mirtingumo lentelės

Statistiniai duomenys apie žmonių gyvenimo trukmę apibendrinami ir pateikiami specialiose lentelėse, vadinamose mirtingumo lentelėmis. Jose sistemingai aprašomos tam tikros populiacijos gyvenimo trukmės charakteristikos, atsižvelgiant į asmenų amžių.

Praktikoje mirtingumo lentelės sudaromos ne atskiriems individams, o visai populiacijai ar jos daliai, pavyzdžiui, tam tikros šalies gyventojams, atskirai vyrams ir moterims ar konkrečioms socialinėms grupėms. Tokios apibendrintos lentelės leidžia įvertinti tipinį išgyvenamumą ir mirtingumo elgesį bei yra žymiai patikimesnės nei individualūs stebėjimai.

Mirtingumo lentelės yra vienas pagrindinių aktuarių naudojamų įrankių vertinant gyvybės draudimo rizikas. Jose pateikiamos išgyvenimo ir mirties tikimybės, mirtingumo intensyvumai bei gyventojų pasiskirstymas pagal amžiaus grupes. Šie duomenys sudaro pagrindą gyvybės draudimo įmokų, rezervų ir kitų aktuariškai reikšmingų dydžių skaičiavimui.

Tipinėje mirtingumo lentelėje pateikiami išgyvenusiųjų skaičiai tam tikru amžiumi l_x , per metus mirusiųjų skaičiai d_x , mirties ir išgyvenimo tikimybės q_x ir p_x , o kartais ir mirtingumo intensyvumai μ_x . Visi šie dydžiai aprašo tą patį gyvenimo trukmės procesą, tik skirtingomis formomis ir skirtingu detalumo lygiu.

Svarbu pabrėžti, kad mirtingumo lentelės paprastai sudaromos metų tikslumu. Tai reiškia, jog jose pateikiama informacija apie mirtis amžiaus intervaluose, tačiau nenurodomas tikslus mirties momentas metų viduje. Todėl mirtingumo lentelės negali būti laikomos tolydžiuoju gyvenimo trukmės modeliu – jos atspindi diskrečią šio proceso aproksimaciją.

Atsižvelgiant į tai, praktiniuose aktuarių skaičiavimuose dažnai taikomos papildomos prielaidos, leidžiančios aprašyti mirtingumo elgseną metų intervalų viduje. Šios prielaidos sudaro pagrindą pereiti nuo diskrečiųjų mirtingumo lentelių prie tolydaus gyvenimo trukmės modelio ir yra ypač svarbios skaičiuojant draudimo įmokas bei išmokas.

2.8 Mirtingumo modeliavimas amžiaus intervaluose

Mirtingumo lentelėse pateikiami statistiniai dydžiai l_x, q_x, d_x apibrėžti tik sveikiems amžiams $x \in \mathbb{N}_0$. Tačiau praktiniuose gyvybės draudimo skaičiavimuose dažnai reikia nustatyti išgyvenimo ar mirties tikimybes ne tik metų pradžioje, bet ir bet kuriuo laiko momentu metų intervale. Tokiais atvejais būtina papildomai apibrėžti mirtingumo elgseną tarp sveikųjų amžiaus reikšmių.

Šiam tikslui aktuarinėje matematikoje taikomi interpoliavimo metodai, kurie grindžiami tam tikromis prielaidomis apie išgyvenamumo funkcijos $s(x)$ arba mirtingumo galios μ_x elgesį metų intervale $[x, x + 1)$. Literatūroje dažniausiai nagrinėjamos kelios dalinių amžių prielaidos, iš kurių dažniausiai minimos tolygaus mirtingumo pasiskirstymo, pastovios mirtingumo galios ir Balducci prielaidos. Jos tarpusavyje skiriasi daromomis prielaidomis apie mirties momento pasiskirstymą metų intervale ir lemia skirtingas išgyvenimo bei mirties tikimybių reikšmes.

Pastovios mirtingumo galios prielaida teigia, kad sąlyginė mirties tikimybė per trumpą laikotarpį nepriklauso nuo to, kiek laiko asmuo jau yra išgyvenęs sulaukęs amžiaus x . Ši savybė yra vadinama atminties neturėjimu (angl. *memorylessness*) [2]. Praktiniuose skaičiavimuose ši prielaida yra sunkiai suderinama su standartinėmis metinėmis mirtingumo lentelėmis, todėl dažniausiai reikalauja papildomų aproksimacijų ir šiame darbe toliau netaikoma.

Balducci prielaida numato hiperbolinę išgyvenimo funkcijos formą, dėl kurios mirties momentai pasiskirsto netolygiai. Ši prielaida leidžia detaliau modeliuoti mirties momento pasiskirstymą metų intervale, tačiau praktiniuose skaičiavimuose ji naudojama retai, todėl šiame darbe toliau taip pat nenagrinėjama.

Šiame darbe tolesnėje analizėje naudojama tolygaus mirtingumo pasiskirstymo prielaida, kuri dėl savo paprastumo ir suderinamumo su diskrečiais mirtingumo duomenimis yra tinkama taikyti periodinėms mirtingumo lentelėms. Ši prielaida leidžia nuosekliai skaičiuoti vienkartinės grynąsias premijas tiek viso gyvenimo, tiek terminuoto gyvybės draudimo atveju. Kitos dalinių amžių prielaidos šiame darbe detaliau nenagrinėjamos.

2.9 Tolygus mirtingumo pasiskirstymas metų intervaluose (UDD)

Tolygaus mirtingumo pasiskirstymo prielaida (angl. *Uniform Distribution of Deaths*, UDD) teigia, kad mirties atvejai vienerių metų intervale $[x, x + 1)$ pasiskirsto tolygiai. Kitaip tariant, sąlyginė tikimybė mirti per bet kurią vienodo ilgio metų dalį yra tokia pati nepriklausomai nuo to, kuriuo metų laikotarpiu yra vertinama. Ši prielaida nėra grindžiama biologiniais ar demografiniais argumentais, tačiau ji suteikia paprastą ir nuoseklų būdą interpoliuoti mirtingumo rodiklius tarp sveikųjų amžių. Tai yra viena plačiausiai paplitusi ir dažniausiai naudojama dalinio amžiaus prielaida.

Tolygaus mirtingumo pasiskirstymo prielaida dažniausiai formuluojama remiantis išgyvenimo funkcijos elgsena. Daroma prielaida, kad išgyvenimo funkcija $s(x)$ intervale $[x, x + 1)$ kinta tiesiškai, t. y.

$$s(x + t) = (1 - t)s(x) + ts(x + 1), t \in [0, 1). \quad (11)$$

Toliau šiame skyriuje pateikiami pagrindiniai tolygaus mirtingumo pasiskirstymo (UDD) prielaidos teiginiai, kuriais remiamasi tolesniuose gyvybės draudimo įmokų skaičiavimuose.

Teiginys 1. Jei mirtingumas pasiskirstęs tolygiai metų intervaluose, tai

$${}_tq_x = tq_x, \quad (12)$$

visiems $x \in \mathbb{N}_0$, $t \in [0, 1]$.

Toliau pateikiami įrodymai yra standartiniai ir pateikiami dėl išsamumo, remiantis [2].

Įrodymas. Lygybę galima įrodyti pasinaudojus tikimybės ${}_tq_x$ (4) apibrėžimu bei UDD prielaida (11)

$$\begin{aligned} {}_tq_x &= \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} = \frac{s(x) - (1-t)s(x) - ts(x+1)}{s(x)} \\ &= \frac{s(x) - s(x) + ts(x) - ts(x+1)}{s(x)} = \frac{ts(x) - ts(x+1)}{s(x)} = t \frac{s(x) - s(x+1)}{s(x)} = tq_x. \end{aligned}$$

□

Teiginys 2. Jei mirtingumas pasiskirstęs tolygiai metų intervaluose, tai

$${}_tp_x = 1 - tq_x,$$

visiems $x \in \mathbb{N}_0$, $t \in [0, 1]$.

Įrodymas. Lygybę galima gauti iš (11). Abi lygybės (11) puses padalinus iš $s(x) \neq 0$ ir pasinaudojus faktu, kad ${}_tq_x + {}_tp_x = 1$, gaunama

$${}_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = (1-t) + t \cdot \frac{s(x+1)}{s(x)} = 1 - t + tq_x = 1 - tq_x.$$

□

Teiginys 3. Jei mirtingumas pasiskirstęs tolygiai metų intervaluose, tai

$${}_yq_{x+t} = \frac{{}_yq_x}{1 - tq_x},$$

visiems $x \in \mathbb{N}_0$, $t \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$, $y + t \leq 1$.

Įrodymas. Remiantis ${}_tq_x$ apibrėžimu (4),

$${}_yq_{x+t} = \frac{s(x+t) - s(x+y+t)}{s(x+t)}.$$

Pasinaudojus UDD prielaida, $s(x+y+t)$ galime užrašyti kaip

$$s(x+y+t) = (1-y-t)s(x) + (y+t)s(x+1).$$

Gautą išraišką įsistatome į ${}_y q_{x+t}$

$$\begin{aligned} {}_y q_{x+t} &= \frac{(1-t)s(x) + ts(x+1) - (1-y-t)s(x) - (y+t)s(x+1)}{s(x+t)} = \frac{ys(x) - ys(x+1)}{s(x+t)} \\ &= \frac{y(s(x) - s(x+1))}{s(x+t)}. \end{aligned}$$

Toliau skaitiklį ir vardiklį padalinus iš $s(x) \neq 0$, gauname

$${}_y q_{x+t} = \frac{y(s(x) - s(x+1))/s(x)}{s(x+t)/s(x)} = \frac{y q_x}{{}_t p_x} = \frac{y q_x}{1 - t q_x}.$$

□

Teiginys 4. Jei mirtingumas pasiskirstęs tolygiai metų intervaluose, tai

$$\mu_{x+t} = \frac{q_x}{1 - t q_x}, \quad (13)$$

visiems $x \in \mathbb{N}_0$, $t \in [0, 1]$.

Irodymas. Pasinaudoję q_x apibrėžimu (6), pertvarkome reiškini

$$q_x = 1 - \frac{s(x+1)}{s(x)} \Rightarrow \frac{s(x+1)}{s(x)} = 1 - q_x \Rightarrow s(x+1) = s(x)(1 - q_x).$$

Gautą $s(x+1)$ išraišką įstatome į UDD prielaidą (11)

$$\begin{aligned} s(x+t) &= (1-t)s(x) + ts(x+1) = (1-t)s(x) + ts(x)(1 - q_x) \\ &= s(x)(1 - t + t - tq_x) = s(x)(1 - tq_x). \end{aligned}$$

Iš mirtingumo galios apibrėžimo (3) žinome, kad

$$\mu_{x+t} = -\frac{s'(x+t)_t}{s(x+t)}.$$

Randame išvestinę $s'(x+t)$ pagal t naudodami naujai gautą $s(x+t)$ išraišką

$$s'(x+t) = (s(x)(1 - tq_x))' = s(x)(1 - tq_x)' = -q_x s(x).$$

Gautas išraiškas įstatome atgal į mirtingumo galios formulę

$$\mu_{x+t} = -\frac{s'(x+t)_t}{s(x+t)} = \frac{q_x s(x)}{s(x)(1 - tq_x)} = \frac{q_x}{1 - tq_x}.$$

□

Teiginys 5. Jei mirtingumas pasiskirstęs tolygiai metų intervaluose, tai

$$f_x(t) = {}_t p_x \mu_{x+t} = q_x,$$

visiems $x \in \mathbb{N}_0$, $t \in [0, 1]$.

Irodymas. Visų pirma prisiminkime atsitiktinio dydžio T_x tankio funkciją $f_x(t)$

$$f_x(t) = -s'_x(t) = -\frac{s'(x+t)}{s(x)} = \frac{s(x+t)}{s(x)} \left(-\frac{s'(x+t)}{s(x+t)} \right) = {}_t p_x \mu_{x+t}. \quad (14)$$

Toliau, naudodamiesi teiginiais (12) ir (13), gauname

$$\begin{aligned} f_x(t) &= {}_t p_x \mu_{x+t} = (1 - {}_t q_x) \left(-\frac{q_x}{1 - {}_t q_x} \right) = (1 - {}_t q_x) \left(-\frac{q_x}{1 - {}_t q_x} \right) \\ &= -\frac{q_x}{1 - {}_t q_x} + \frac{{}_t q_x^2}{1 - {}_t q_x} = \frac{q_x(1 - {}_t q_x)}{1 - {}_t q_x} = q_x. \end{aligned}$$

□

Nepaisant lengvo panaudojimo ir plataus pritaikymo, UDD prielaida grindžiama tiesine išgyvenimo funkcijos interpoliacija, kuri ne visuomet atitinka realią mirtingumo elgseną metų intervalo viduje.

2.10 Klasikinių dalinio amžiaus prielaidų apribojimai

Tolygaus mirtingumo pasiskirstymo, pastovios mirtingumo galios ir Balducci prielaidas yra patogų naudoti skaičiavimuose bei lengva interpretuoti. Tačiau Jones ir Mereu (2000 ir 2002 m.) savo darbuose [4] ir [5] parodė, kad šios klasikinės prielaidos turi tam tikrų teorinių apribojimų. Pagrindinis šių prielaidų apribojimas yra tas, kad išgyvenimo funkcijos elgsena tarp sveikųjų amžių nustatoma remiantis pasirinkta modeliavimo prielaida, dėl kurios mirtingumo galia μ_x gali kisti netolygiai pereinant iš vieno metų intervalo į kitą [4]. Dėl to mirtingumo galia gali pasižymėti staigiais pokyčiais ties $x \in \mathbb{N}_0$, nors realūs mirtingumo procesai paprastai pasižymi tolydžiu elgesiu.

Taikant tokius modeliavimo principus, mirtingumo galios reikšmės daliniame amžiaus intervale gali atrodyti neintuityvios ir prasilenkti su realybe. Pavyzdžiui, pritaikius Balducci prielaidą, gali atsirasti atvejų, kuomet mirtingumo galia metų eigoje tarp dviejų sveikųjų amžių mažėja, nors bendra mirties tikimybė su amžiumi didėja. Toks rezultatas yra intuityviai sunkiai pagrindžiamas ir rodo klasikinių dalinio amžiaus prielaidų trūkumus.

Siekdami spręsti šias problemas, Jones ir Mereu siūlo taikyti dalinio amžiaus prielaidų šeimas [4], kurios leidžia lanksčiau aprašyti išgyvenimo funkcijos ir mirtingumo galios elgesį tarp sveikųjų amžių. Jone ir Mereu teigia, jog, pritaikant šį metodą, galima sumažinti arba visiškai pašalinti mirtingumo galios netolydumus ir tuo pačiu gauti labiau teoriškai pagrįstą mirtingumo galios elgesį visame amžiaus intervale. Tačiau tokių metodų taikymas dažnai reikalauja sudėtingesnių skaičiavimų.

Nors literatūroje siūlomos pažangesnės dalinio amžiaus prielaidų šeimos leidžia gauti lygesnį ir teoriškai labiau pagrįstą mirtingumo galios elgesį, šiame darbe dalinio amžiaus prielaidų šeimos, aptartos teorinėje literatūroje, detaliau nenagrinėjamos ir pateikiamos tik kaip teorinis kontekstas.

3 Gyvybės draudimo įmokų skaičiavimas

Ankstesniuose skyriuose buvo nagrinėjamas žmogaus gyvenimo trukmės modeliavimas ir mirtingumo aprašymas, kurie leidžia įvertinti mirties ir išgyvenimo tikimybes

skirtingais amžiaus intervalais. Šios teorinės prielaidos sudaro pagrindą gyvybės draudimo įmokų skaičiavimui, kuriame atsižvelgiama į mirtingumo riziką ir pinigų laiko vertę.

Siekiant palyginti draudėjo ir draudiko įsipareigojimus, būtina visus būsimus pinigų srautus perkelti į tą patį laiko momentą. Gyvybės draudimo teorijoje įsipareigojimų palyginimas paprastai atliekamas draudimo sutarties sudarymo momentu, todėl tiek draudėjo mokamos premijos, tiek draudiko būsimos išmokos vertinamos jų dabartine verte.

Gyvybės draudimo premijų skaičiavimas aktuarinėje teorijoje grindžiamas ekvivalentumo principu. Pagal šį principą draudimo sutarties sudarymo momentu tikėtina draudiko būsimų išmokų dabartinė vertė turi būti lygi tikėtina draudėjo būsimų premijų dabartinei vertei. Kitaip tariant, ekvivalentumo principas reikalauja, kad vidutinė draudiko išmokų dabartinė vertė būtų lygi draudėjo premijos dabartinei vertei.

Būsimų draudimo išmokų dabartinės vertės matematinė viltis vadinama aktuarine dabartine verte. Grynoji draudimo įmoka apibrėžiama kaip draudiko būsimų įsipareigojimų dabartinės vertės matematinė viltis, apskaičiuota sutarties sudarymo metu. Taip apibrėžta grynoji premija apima tik draudimo rizikos kainą ir neįtraukia kitų įmokos sudedamųjų dalių, tokių kaip administracinės išlaidos.

Toliau šiame skyriuje nagrinėjami skirtingi gyvybės draudimo modeliai ir atitinkamų grynųjų draudimo įmokų skaičiavimas, priklausomai nuo išmokų mokėjimo momento.

3.1 Diskontavimo teorija ir palūkanų normos

Palūkanų norma yra esminis veiksnys, lemiantis dabartinių ir būsimų pinigų srautų ryšį. Norint apskaičiuoti būsimos sumos dabartinę vertę, taikomas diskontavimo daugiklis, kuris yra žymimas ν ir apibrėžiamas kaip

$$\nu = \frac{1}{1+i}.$$

Diskonto normos pasirinkimas tiesiogiai veikia grynąją premiją: kuo palūkanų norma yra didesnė, tuo dabartinė būsimų išmokų vertė mažesnė, ir atitinkamai mažesnė yra premija.

Aktuarinėje matematikoje, ypač nagrinėjant tolydžiuosius modelius, dažnai naudojama ir palūkanų galia δ , apibrėžiama ryšiu $\nu^t = e^{-\delta t}$. Ši forma yra patogiai analitiniuose išvedimuose ir leidžia nuosekliai derinti tolydžius mirtingumo ir palūkanų normų modelius.

3.2 Draudimas su išmoka iš karto po mirties

Šiame skyriuje nagrinėjamos gyvybės draudimo sutartys, kurių atveju draudimo suma išmokama iš karto po apdraustojo mirties momento. Tokie draudimo modeliai aktuarinėje literatūroje dažnai vadinami tolydžiaisiais, nes išmoka siejama su nenutrūkstamu laiko momentu, o ne su diskrečiu laikotarpiu, pavyzdžiui, metų pabaiga.

3.2.1 Viso gyvenimo gyvybės draudimas

Tarkime, kad draudėjas sutarties sudarymo momentu yra x metų amžiaus. Kaip buvo apibrėžta ankstesniuose skyriuose, jo likęs gyvenimo laikas žymimas atsitiktiniu dydžiu T_x . Šis dydis priklauso tam tikram uždaram laiko intervalui, kurio pradžia yra draudėjo amžius sutarties sudarymo metu, o pabaiga – apsidraudusiojo mirties momentas.

Pagal sutarties sąlygas draudikas įsipareigoja išmokėti vienetinę draudimo sumą mirties momentu nepriklausomai nuo to, kada apdraustasis mirs. Kadangi išmoka mokama ateityje, jos vertė sutarties sudarymo momentu priklauso nuo mirties momento. Kadangi draudimo išmoka mokama ateityje, jos vertė sutarties sudarymo momentu turi būti diskontuojama, atsižvelgiant į pinigų laiko vertę. Esant metinei palūkanų normai i , būsimos išmokos dabartinė vertė yra lygi

$$Z_x = \nu^{T_x} = \left(\frac{1}{1+i} \right)^{T_x}.$$

Dydis Z_x yra atsitiktinis, nes priklauso nuo atsitiktinės likusiojo gyvenimo trukmės T_x . Todėl draudimo įmokos dydis nustatomas remiantis šio atsitiktinio dydžio matematinės vilties reikšme. Taigi viso gyvenimo tolydaus gyvybės draudimo grynoji vienkartinė premija apibrėžiama kaip

$$\bar{A}_x = \mathbb{E}Z_x = \mathbb{E}\nu^{T_x}.$$

Naudojantis likusiojo gyvenimo trukmės tankio funkcija $f_x(t)$, ši matematinė viltis gali būti užrašyta integraline forma

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty \nu^t f_x(t) dt = \int_0^\infty \nu^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt,$$

nes, kaip buvo pademonstruota ankstesniuose skyriuose, sąlyginio likusiojo gyvenimo laiko tankis gali būti išreiškiamas per mirtingumo galią

$$f_x(t) = {}_t p_x \mu_{x+t}.$$

Ši formulė parodo ryšį tarp mirtingumo modeliavimo ir draudimo įmokų skaičiavimo. Pasirinkta mirtingumo prielaida lemia išgyvenimo tikimybės ${}_t p_x$ ir mirtingumo galios μ_{x+t} pavidalą, o taip pat ir apskaičiuotos vienkartinės gryniosios premijos dydį.

3.2.2 Terminuotas n -metų gyvybės draudimas

Pagrindinis terminuoto gyvybės draudimo skirtumas nuo viso gyvenimo gyvybės draudimo yra tas, kad draudimo apsauga galioja tik ribotą, iš anksto nustatytą laikotarpį. Tarkime, kad asmuo, kuriam sutarties sudarymo momentu yra x metų, sudaro draudimo sutartį, galiojančią n metų. Vienkartinė draudimo suma išmokama tik tuo atveju, jei apdraustasis miršta nepasibaigus sutarties galiojimo terminui, t. y. draudimo sutarties galiojimo laikotarpiui. Jei asmuo išgyvena ilgiau nei n metų, draudikas jokių išmokų nemoka.

Draudimo kompanijos būsimų įsipareigojimų dabartinė vertė terminuoto n -metų draudimo sutarties pasirašymo metu apskaičiuojama pagal formulę

$$Z_x = \begin{cases} \nu^{T_x}, & \text{jei } T_x \leq n, \\ 0, & \text{jei } T_x > n. \end{cases}$$

Taigi draudimo išmoka diskontuojama pagal faktinį mirties momentą, tačiau tik tuo atveju, jei mirtis įvyksta draudimo laikotarpiu.

Kadangi premija lygi atsitiktinio dydžio Z_x vidurkiui, tai grynoji vienkartinė premija yra skaičiuojama remiantis formule

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = \mathbb{E}Z_x = \int_0^n \nu^t f_x(t) dt = \int_0^n \nu^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt.$$

Gauta formulė rodo, kad terminuoto gyvybės draudimo premija priklauso nuo draudimo trukmės, apdraustojo amžiaus, mirtingumo priklausomybės nuo amžiaus ir palūkanų normos. Kadangi mirties tikimybė ribotame laikotarpyje dažnai yra santykinai nedidelė, terminuoto draudimo premijos paprastai yra mažesnės nei analogiškų viso gyvenimo draudimo sutarčių.

3.3 Draudimas su išmoka mirties metų gale

Ankstesniuose skyriuose buvo nagrinėtos gyvybės draudimo sutartys, kuriose draudimo suma išmokama iš karto po apdraustojo mirties. Tokie modeliai yra patogūs teoriniu požiūriu, nes leidžia gyvenimo trukmę modeliuoti kaip tolydų atsitiktinį dydį. Tačiau praktikoje draudimo išmokos dažnai nėra mokamos iš karto įvykus draudimui įvykiui. Dėl administracinių procedūrų, dokumentų tvarkymo ir kitų praktinių priežasčių išmoka dažnai modeliuojama kaip išmokama mirties metų pabaigoje.

Tokiu atveju pereinama prie diskretaus laiko modelio, kuriame draudimo išmokos siejamos ne su tikslu mirties momentu, o su metais, kuriais mirtis įvyko. Atitinkamai keičiasi ir gyvenimo trukmės aprašymas. Vietoje tikslaus mirties momento nagrinėjamas pilnų metų skaičius, kurį apdraustasis dar išgyvena po sutarties sudarymo.

Diskrečiame modelyje pagrindinis atsitiktinis dydis yra likusiojo gyvenimo trukmės sveikoji dalis, kuri buvo apibrėžta ankstesniame skyriuje. Šis dydis leidžia nuosekliai aprašyti draudimo išmokų mokėjimą mirties metų pabaigoje ir sudaro pagrindą diskrečiųjų gyvybės draudimo premijų skaičiavimui.

Toliau šiame skyriuje nagrinėjami diskretūs anksčiau aptartų tolydžių gyvybės draudimo rūšių analogai.

3.3.1 Viso gyvenimo gyvybės draudimas

Diskretaus viso gyvenimo gyvybės draudimo atveju draudimo suma išmokama apdraustojo mirties metų pabaigoje. Tai reiškia, kad draudimo išmokos momentas priklauso ne nuo tikslaus mirties laiko, bet nuo metų, kuriais mirtis įvyko.

Kaip buvo apibrėžta ankstesniame skyriuje, diskrečiame modelyje pagrindinis atsitiktinis dydis yra likusiojo gyvenimo trukmės sveikoji dalis $K_x = [T_x]$. Tuomet būsimos draudimo išmokos dabartinė vertė viso gyvenimo draudimo atveju yra

$$Z_x = \nu^{K_x+1}.$$

Pagal ekvivalentumo principą grynoji vienkartinė premija lygi šio atsitiktinio dydžio matematinei vilčiai ir užrašoma

$$A_x = \mathbb{E}Z_x = \mathbb{E}\nu^{K_x+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^{k+1} \mathbb{P}(K_x = k).$$

Tikimybė $\mathbb{P}(K_x = k)$ nusako įvykį, kai apdraustasis po sutarties sudarymo dar išgyvena k pilnų metų, bet miršta prieš pasibaigiant $(k+1)$ -iesiems metams. Tai galima užrašyti kaip

$$\mathbb{P}(K_x = k) = \mathbb{P}(k \leq T_x < k+1).$$

Naudojantis standartiniu ryšiu tarp diskrečių tikimybių, gauname [2]

$$\mathbb{P}(K_x = k) = {}_k p_x q_{x+k},$$

todėl

$$A_x = \mathbb{E}Z_x = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^{k+1}_k p_x q_{x+k}.$$

Diskrečiame viso gyvenimo gyvybės draudimo modelyje mirties momentas pakeičiamas mirties metų pabaiga, todėl premijos dydis skiriasi nuo tolydžiojo modelio, nepaisant to, kad remiamasi tomis pačiomis mirtingumo prielaidomis.

3.3.2 Terminuotas n -metų gyvybės draudimas

Diskretaus terminuoto n -metų gyvybės draudimo atveju draudimo suma išmokama apdrausitojo mirties metų pabaigoje, jeigu mirtis įvyksta per artimiausius n metų nuo sutarties sudarymo momento. Jei apdraustasis išgyvena visą n metų laikotarpį, tai draudimo išmoka nėra mokama.

Būsimų draudiko įsipareigojimų dabartinė vertė šiuo atveju lygi

$$Z_x = \begin{cases} \nu^{K_x+1}, & \text{jei } K_x < n, \\ 0, & \text{jei } K_x \geq n. \end{cases}$$

Diskrečiame terminuoto draudimo modelyje išmoka yra mokama tada, kai $K_x < n$, t. y., jei mirtis įvyksta iki n -ųjų metų pabaigos. Todėl grynoji vienkartinė premija apskaičiuojama pagal formulę

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = \mathbb{E}Z_x = \sum_{k=0}^{n-1} \nu^{k+1}_k p_x q_{x+k}.$$

Ši išraiška parodo, kad terminuoto diskretaus gyvybės draudimo premija priklauso nuo mirties tikimybių tik per ribotą, iš anksto nustatytą laikotarpį. Dėl šios priežasties terminuoto draudimo premijos paprastai yra mažesnės nei viso gyvenimo draudimo atveju, nes draudikas prisiima riziką tik per baigtinį laiką.

3.4 Ryšys tarp draudimo išmokų, mokamų mirties momentu, ir draudimo išmokų, mokamų mirties metų gale

Draudimo sutartys, pagal kurias mirties išmoka mokama mirties metų pabaigoje, yra rečiau sutinkamos teoriniuose modeliuose, tačiau tokios diskrečios draudimo funkcijos vis tiek yra naudingos. Taip yra todėl, kad iš A_x galime apskaičiuoti tolydaus gyvybės draudimo funkciją $\bar{A}_x$. Tai tampa ypač aktualu tais atvejais, kai turime tik mirtingumo lentelę su funkcijų reikšmėmis sveikaisiais amžiais ir negalime pritaikyti mirtingumo intensyvumo formulės bet kokiam amžiui [1].

Praktikoje mirtingumo duomenys dažniausiai pateikiami tik sveikaisiais amžiais, todėl nėra žinoma, kuriuo kalendorinių metų momentu tiksliai įvyksta mirtis. Dėl šios priežasties tiesioginis tolydžiosios mirties momento draudimo funkcijos $\bar{A}_x$ apskaičiavimas nėra galimas. Siekiant susieti tolydžiąją draudimo funkciją su diskrečiąja, taikomos trupmeninio amžiaus prielaidos.

Prisiminkime, kad T_x yra likusiojo gyvenimo trukmė, o K_x – likusiojo gyvenimo trukmės sveikoji dalis. Tuomet likusiojo gyvenimo trukmės trupmeninę dalį galime žymėti S_x ir apibrėžti kaip

$$S_x = T_x - K_x = \{T_x\}.$$

Toliau nagrinėjamas UDD prielaidos poveikis likusiojo gyvenimo trukmės skaidymui į sveikąją ir trupmeninę dalis.

Teiginys 6. Jeigu mirtingumas pasiskirstęs tolygiai bet kuriame intervale $[x, x+1]$, $x \in \mathbb{N}_0$, tai išraiškoje $T_x = K_x + S_x$ atsitiktiniai dydžiai $K_x = [T_x]$ ir $S_x = \{T_x\}$ yra nepriklausomi. Be to, atsitiktinis dydis S_x tolygiai pasiskirstęs intervale $[0, 1]$.

Šio teiginio įrodymą galima rasti [2].

Remdamiesi teiginiu (6), gausime sąryšius tarp vienkartinių grynųjų premijų, kai išmoka mokama mirties momentu, ir vienkartinių grynųjų premijų, kai išmoka mokama mirties metų gale viso gyvenimo ir terminuoto n metų draudimams.

Teiginys 7. Jei mirtingumas pasiskirstęs tolygiai metų intervaluose, tai

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x.$$

Čia, kaip apibrėžta 3.1 skyriuje, i – palūkanų norma, δ – palūkanų galia.

Įrodymas. Kadangi $S_x = \{T_x\} \in [0, 1)$ yra tolygiai pasiskirstęs atsitiktinis dydis, o $\nu^t = e^{-\delta t}$, tai

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\nu^{S_x-1}) &= \int_0^1 \nu^{s-1} ds = \frac{\nu^{s-1}}{\ln \nu} \Big|_0^1 = \frac{1}{\ln \nu} (1 - \nu^{-1}) \\ &= \frac{1}{\ln e^{-\delta}} (1 - (1 + i)) = -\frac{i}{\ln e^{-\delta}} = \frac{i}{\delta}. \end{aligned}$$

Tęsdami toliau ir pasinaudodami atsitiktinių dydžių $S_x = \{T_x\}$ ir $K_x = [T_x]$ nepriklausomumu, gauname

$$\begin{aligned} \bar{A}_x &= \mathbb{E}(\nu^{T_x}) = \mathbb{E}(\nu^{K_x+S_x}) = \mathbb{E}(\nu^{K_x+1-1+S_x}) = \mathbb{E}(\nu^{K_x+1} \nu^{S_x-1}) \\ &= \mathbb{E}(\nu^{K_x+1}) \mathbb{E}(\nu^{S_x-1}) = A_x \mathbb{E}(\nu^{S_x-1}) = \frac{i}{\delta} A_x. \end{aligned}$$

□

Teiginys 8. Jei mirtingumas pasiskirstęs tolygiai metų intervaluose, tai

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{i}{\delta} A_{x:\overline{n}|}^1.$$

Įrodymas. Dydis $\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1$ yra vienkartinė grynoji premija n metų gyvybės draudimo atveju, t. y.

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = \mathbb{E} \left(\nu^{T_x} \mathbb{1}_{\{T_x \leq n\}} \right).$$

Tada remdamiesi teiginiu (7) ir nepriklausomumu, gauname

$$\begin{aligned} \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 &= \mathbb{E} \left(\nu^{T_x} \mathbb{1}_{\{T_x \leq n\}} \right) = \mathbb{E} \left(\nu^{K_x+1} \nu^{S_x-1} \mathbb{1}_{\{K_x \leq n\}} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\nu^{K_x+1} \mathbb{1}_{\{K_x \leq n\}} \nu^{S_x-1} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\nu^{K_x+1} \mathbb{1}_{\{K_x \leq n\}} \right) \mathbb{E} \nu^{S_x-1} \\ &= \frac{i}{\delta} A_{x:\overline{n}|}^1. \end{aligned}$$

□

Iš teiginių matyti, kad pagal UDD prielaidą vienkartinė grynoji premija, kai išmoka mokama mirties momentu, skiriasi nuo premijos, kai išmoka mokama mirties metų gale, tik diskontavimo koeficientu $\frac{i}{\delta}$. Šis koeficientas priklauso tik nuo palūkanų normos ir nepriklauso nuo apdraustojo amžiaus x , todėl tolydžiosios draudimo funkcijos gali būti patogiai apskaičiuojamos naudojant diskrečias, mirtingumo lentelėse pateikiamas reikšmes, kas yra ypač naudinga praktiniuose aktuariniuose skaičiavimuose.

4 Praktinė dalis

Šioje darbo dalyje atliekama praktinė vienkartinių grynųjų gyvybės draudimo premijų analizė, remiantis realiais mirtingumo duomenimis ir taikant tolygaus mirtingumo pasiskirstymo (UDD) prielaidą. Skaičiavimuose taikomi teorinėje darbo dalyje aptarti gyvybės draudimo modeliai, kurie pritaikomi periodinėms mirtingumo lentelėms. Ap-skaiciuojamos vienkartinės grynosios viso gyvenimo ir n -metų terminuoto draudimo premijos, analizuojamas jų kitimas laike, atliekamas tarptautinis palyginimas bei įvertinamas palūkanų normos poveikis skirtingo amžiaus apdraustiesiems.

Pirmiausia apžvelgiami naudoti duomenys ir pagrindinės prielaidos. Vėliau nagrinėjamos Lietuvos vienkartinių grynųjų premijų tendencijos laikui bėgant, atliekamas tarptautinis palyginimas, leidžiantis įvertinti Lietuvos rezultatus kitų šalių kontekste, o galiausiai nagrinėjamas palūkanų normos poveikis skirtingiems amžiams bei terminuoto gyvybės draudimo premijų palyginimas su viso gyvenimo draudimu. Tokia analizės seka leidžia nuosekliai atskleisti, kaip mirtingumo ir finansinių prielaidų pokyčiai veikia draudimo premijas.

4.1 Pradinės prielaidos ir duomenys

Praktinėje darbo dalyje nagrinėjami viso gyvenimo bei terminuotas gyvybės draudimai, kai draudimo išmoka mokama apdraustojo mirties momentu. Skaičiuojamos vienkartinės grynosios draudimo premijos asmenims, sulaukusiems 30, 40 ir 50 metų. Visuose skaičiavimuose draudimo suma normuojama, t. y. laikoma lygi vienetui ($S = 1$), todėl gauti rezultatai interpretuojami kaip tikėtinos dabartinės išmokos dydžiai vienam draudimo vienetui.

Diskontavimui taikoma pastovi metinė palūkanų norma $i = 3\%$, o papildomai atliekama palūkanų normos jautrumo analizė, vertinant $i = 2\%$ ir $i = 4\%$ atvejus. Toks pasirinkimas leidžia lyginti skirtingus laikotarpius ir šalis, eliminuojant finansinių prielaidų įtaką ir išryškinant mirtingumo skirtumus.

Skaičiavimuose naudojamos periodinės visos populiacijos mirtingumo lentelės yra pa-imtos iš Human Mortality Database duomenų bazės (www.mortality.org). Nors mirtingumo lentelės apima 1959–2024 metus, analizėje naudojamas 2010–2024 m. laikotarpis. Lentelėse pateikiami mirtingumo rodikliai sveikiesiems amžiams. Pateikti rodikliai apima mirties tikimybes q_x , išgyvenusiųjų skaičius l_x bei mirusiųjų skaičius d_x , kurie sudaro pagrindą tolesniems vienkartinių grynųjų premijų skaičiavimams.

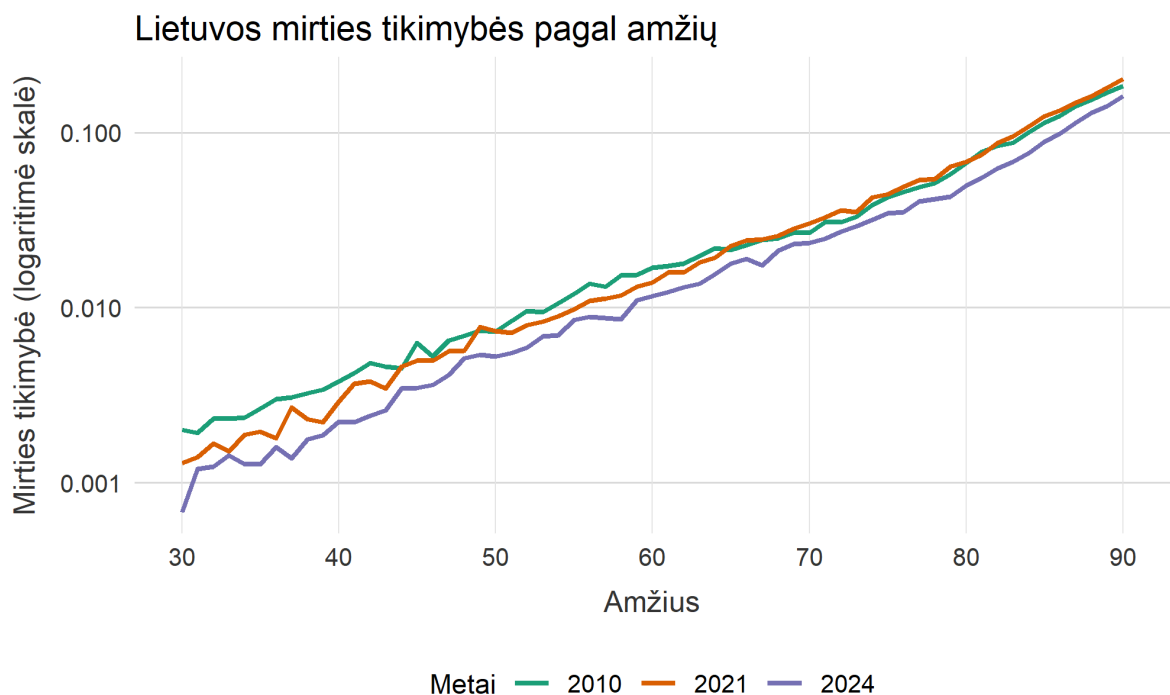
4.2 Lietuvos mirties tikimybių apžvalga

Prieš nagrinėjant vienkartinių grynųjų premijų kitimą, tikslinga įvertinti, kaip nagrinėjamu laikotarpiu kito mirtingumo rodikliai. Kadangi draudimo įmokų dydis tiesiogiai

priklauso nuo mirties tikimybių pagal amžių, mirtingumo pokyčių analizė leidžia pagrįsti ir interpretuoti vėlesniuose skyriuose pateikiamus premijų skaičiavimo rezultatus.

Siekiant apžvelgti mirtingumo duomenų kitimą laikui bėgant, 1 paveiksle pateiktas Lietuvos mirties tikimybių q_x palyginimas pagal amžių 2010, 2021 ir 2024 metais. Analizėje pateikiami 30–90 metų amžiaus mirtingumo duomenys, siekiant parodyti bendrą mirties tikimybių pasiskirstymą pagal amžių ir įvertinti, kaip nagrinėjami 30, 40 ir 50 metų amžiai įsiterpia į visą mirtingumo struktūrą. Nors tolesniuose skyriuose vienkartinių grynųjų premijų skaičiavimai atliekami tik 30–50 metų amžiaus asmenims, platesnis amžiaus intervalas grafike leidžia aiškiau atskleisti bendras mirtingumo tendencijas ir nagrinėjamų amžių vietą visame amžiaus intervale.

1 paveiksle mirties tikimybės yra pavaizduotos logaritminėje skalėje, nes skirtingų amžių q_x reikšmės skiriasi keliasdešimt ar net kelis šimtus kartų. Palyginimui Priede A pateikiamas tas pats q_x grafikas pavaizduotas linijinėje skalėje (žr. 7 pav.), kuriame jaunesnių amžių mirties tikimybės vizualiai susilieja ir tampa sunkiai atskiriamos.



1 pav.: Lietuvos mirties tikimybių q_x palyginimas pagal amžių (2010, 2021 ir 2024 m.)

Iš pateikto grafiko matyti (žr. 1 pav.), kad 2024 m. daugeliui amžių mirties tikimybės yra mažesnės nei 2010 m., ypač vidutiniame ir vyresniame amžiuje. Tuo tarpu 2021 m. stebimas laikinas mirtingumo padidėjimas, kuris labiausiai išryškėja vyresniame amžiuje. Šis trumpalaikis mirtingumo šokas pateikiamas per mirties tikimybių q_x analizę, nes ji leidžia aiškiai atskirti momentinius mirtingumo pokyčius. Vienkartinių grynųjų premijų analizėje dėmesys sutelkiamas į bendras premijų dydžio tendencijas, todėl vienkartinių grynųjų premijų skaičiavimams pasirenkami reprezentatyvūs metai prieš ir po šio laikino pokyčio.

4.3 Vienkartinės premijos skaičiavimas naudojant UDD prielaidą

Praktinėje darbo dalyje vienkartinės gryniosios premijos apskaičiuojamos taikant tolygaus mirtingumo pasiskirstymo (UDD) prielaidą, kuri leidžia diskrečius mirtingumo lentelių duomenis taikyti tolydžiam laiko modelyje. Ši prielaida pasirenkama remiantis teorinėje darbo dalyje aptartu ryšiu tarp diskrečių ir tolydžių gyvybės draudimo modelių.

Viso gyvenimo gyvybės draudimas

Pirmiausia diskrečiame modelyje vienkartinę grynoji viso gyvenimo gyvybės draudimo premija A_x apskaičiuojama pagal išraišką

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^{k+1} \frac{d_{x+k}}{l_x},$$

kur $\nu(1+i)^{-1}$ yra diskonto faktorius, o d_{x+k} ir l_x – mirtingumo lentelės rodikliai.

Toliau, taikant UDD prielaidą, diskretaus modelio premija transformuojama į tolydžio modelio dydį $\bar{A}_x$ pagal ryšį

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x,$$

kur $\delta = \ln(1+i)$ žymi palūkanų galią.

Terminuotas gyvybės draudimas

Diskrečiame modelyje vienkartinę grynoji n -metų terminuoto gyvybės draudimo premija apskaičiuojama pagal formulę

$$A_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} \nu^{k+1} \frac{d_{x+k}}{l_x},$$

kur draudimo išmoka mokama apdraustajam mirus per artimiausius n draudimo laikotarpio metus.

Taikant UDD prielaidą, terminuoto draudimo diskrečioji premija analogiškai transformuojama į tolydžiojo modelio dydį

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \frac{i}{\delta} A_{x:\overline{n}|}, \quad \delta = \ln(1+i).$$

Skaičiavimai atliekami R programavimo aplinkoje, taikant tą pačią skaičiavimo metodiką visiems nagrinėjamiems metams, apdraustųjų amžiams ir šalims. Tai leidžia tiesiogiai palyginti gautas vienkartinės grynąsias premijas ir aiškiai įvertinti, kaip jų dydį lemia mirtingumo bei palūkanų normos skirtumai.

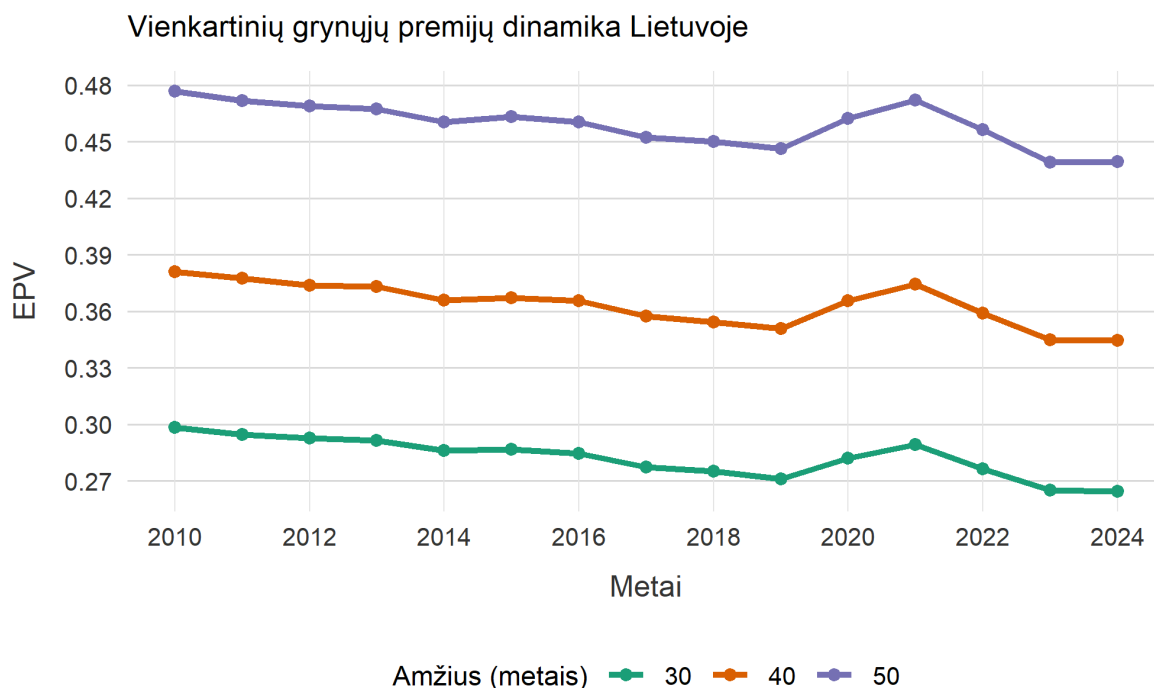
Toliau darbe vienkartinę grynoji draudimo premija žymima tarptautinėje literatūroje vartojamu sutrumpinimu EPV (angl. *Expected Present Value*). Visi tolesniuose praktinės dalies skyriuose pateikiami rezultatai apskaičiuoti taikant tą pačią UDD prielaidą, todėl jie tarpusavyje palyginami ir yra metodologiškai nuoseklūs.

4.4 Lietuvos vienkartinės gryniosios premijos tendencijos

Analizei parinkti 30, 40 ir 50 metų amžiai, atspindintys jauną, vidutinio amžiaus ir vyresnį apdraustąjį bei skirtingas mirties tikimybes. Skaičiavimuose daroma prielaida, kad draudimo suma lygi vienetui ($S = 1$). Kadangi vienkartinė grynoji premija yra proporcinga draudimo sumai, tai gauti rezultatai gali būti lengvai pritaikyti bet kuriai kitai draudimo sumai.

Papildomai, siekiant iliustruoti vienkartinės gryniosios premijos priklausomybę nuo apdraustojo amžiaus vienu fiksuotu laikotarpiu, priede pateikiamas 2024 m. EPV kitimo grafikas (žr. Priedą B), kuris parodo tolygią ir monotiniškai didėjančią premijos priklausomybę nuo amžiaus.

2010–2024 m. laikotarpiu apskaičiuotos tolydaus viso gyvenimo draudimo vienkartinės gryniosios premijos Lietuvoje rodo aiškią priklausomybę nuo apdraustojo amžiaus (žr. 2 pav.). Visais nagrinėtais metais didžiausios premijos tenka 50 metų amžiaus asmenims, mažesnės – 40 metų, o mažiausios – 30 metų amžiaus asmenims. Šis rezultatas išplaukia iš mirties tikimybių didėjimo su amžiumi bei trumpėjančio tikėtino laiko iki draudimo išmokos, dėl kurio diskonto poveikis būsimų išmokų dabartinei vertei silpnėja.



2 pav.: Viso gyvenimo gyvybės draudimo vienkartinių grynųjų premijų $\bar{A}_x$ kitimas Lietuvoje 2010–2024 m., taikant UDD prielaidą ($i = 3\%$)

Vertinant premijų kitimą laike, iki 2019 m. visiems amžiams stebima tolygiai mažėjanti tendencija, kuri sietina su ilgalaikiu mirties tikimybių mažėjimu Lietuvoje. Ši tendencija aiškiai matoma 2 paveiksle ir patvirtinama 1 lentelėje pateiktomis skaitinėmis reikšmėmis. Išsamesni vienkartinių grynųjų premijų kitimo rezultatai visam 2010–2024 m. laikotarpiui pateikiami Priedo C lentelėje.

Metai	Amžius	$\bar{A}_x$
2010	30	0,2984
2019	30	0,2711
2021	30	0,2892
2024	30	0,2646
2010	40	0,3811
2019	40	0,3507
2021	40	0,3744
2024	40	0,3446
2010	50	0,4767
2019	50	0,4463
2021	50	0,4722
2024	50	0,4395

1 lentelė: Lietuvos vienkartinių grynujų premijų $\bar{A}_x$ kitimas pasirinktais metais (UDD, $i = 3\%$)

2020–2021 m. laikotarpiu fiksuojamas ryškus premijų padidėjimas, kuris sutampa su COVID-19 pandemijos laikotarpiu ir yra akivaizdžiai matomas grafike (žr. 2 pav.). Šis padidėjimas labiausiai paveikė asmenis, sulaukusius 50 metų, kas patvirtina, jog mirtingumo šokai vyresniame amžiuje turi didesnę poveikį viso gyvenimo draudimo kainai. Tai paaiškinama tuo, kad padidėjusi mirties tikimybė lemia didesnę tikėtiną išmokų koncentraciją artimesnėje ateityje, kur diskonto efektas yra mažesnis.

Siekiant kiekybiškai įvertinti pandemijos laikotarpio poveikį, lyginamas 2019 ir 2021 m. premijų pokytis (žr. 2 lentelę).

Amžius	$\bar{A}_x(2019)$	$\bar{A}_x(2021)$	Absoliutus pokytis	Pokytis (%)
30	0,2711	0,2892	0,0181	6,68
40	0,3517	0,3744	0,0237	6,76
50	0,4463	0,4722	0,0259	5,80

2 lentelė: Vienkartinių grynujų premijų pokytis Lietuvoje 2019–2021 m. (UDD, $i = 3\%$)

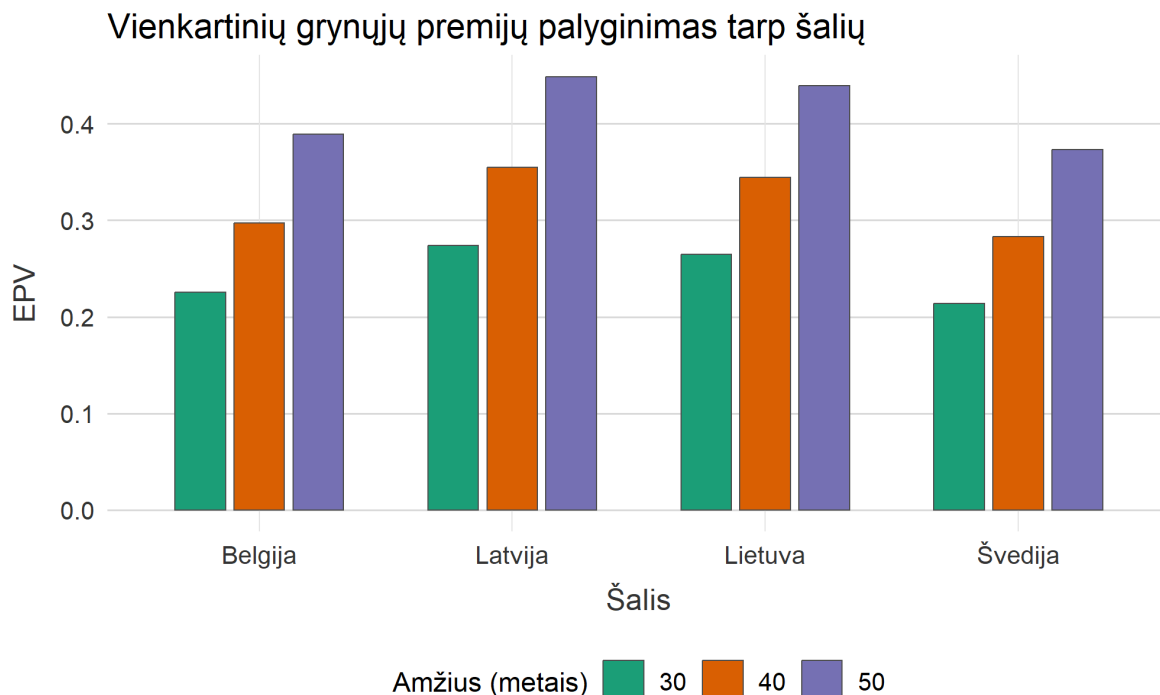
2019–2021 m. laikotarpiu visoms nagrinėtoms amžiaus reikšmėms fiksuojamas premijų padidėjimas, atitinkantis COVID-19 laikotarpiu stebėtą mirtingumo šoką. Santykinis padidėjimas svyruoja apie 6 %, o absoliutus pokytis didėja kartu su apdraustojo amžiumi, kas atspindi didesnę vyresnių asmenų jautrumą trumpalaikiams mirtingumo pokyčiams.

Po 2021 m. stebimas premijų sumažėjimas, tačiau daugeliu atvejų jos negrįžta į iki pandemijos buvusį lygį. Tai leidžia daryti išvadą, kad laikini mirtingumo šokai gali turėti užsitęsusių poveikį vienkartinių grynujų premijų dydžiui, ypač vyresnio amžiaus apdraustiesiems.

Šios tendencijos užfiksuojamos taikant tą pačią UDD prielaidą visam laikotarpiui, todėl pokyčiai atspindi mirtingumo duomenų, o ne modeliavimo metodo pasikeitimą.

4.5 Vienkartinių grynųjų premijų palyginimas tarp šalių

Tarptautinis viso gyvenimo draudimo vienkartinių grynųjų premijų palyginimas, atliktas 2024 m. taikant tolydų modelį pagal UDD prielaidą ir fiksuotą 3 % palūkanų normą, pateikia premijų dydžių skirtumus tarp keturių skirtingų nagrinėjamų šalių (žr. 3 pav.). Analizei pasirinktos Latvija, Belgija ir Švedija, siekiant palyginti Lietuvos rezultatus su geografiškai artima šalimi, Vakarų Europos valstybe bei šalimi, pasižyminčia aukštais išgyvenamumo rodikliais.



3 pav.: Tarptautinis vienkartinių grynųjų premijų $\bar{A}_x$ palyginimas (UDD, 2024 m., $i = 3\%$)

Visose nagrinėtose šalyse stebima nuosekli vienkartinių grynųjų premijų priklausomybė nuo apdraustojo amžiaus, t. y. vienkartinės gryniosios premijos didėja didėjant apdraustojo amžiui. Šis dėsniumas išlieka visose šalyse ir kyla iš mirties tikimybių pasiskirstymo pagal amžių bei silpnėjančio diskonto poveikio išmokų dabartinei vertei.

Kaip matyti 3 lentelėje, didžiausios vienkartinės gryniosios premijos visiems nagrinėtiems amžiams fiksuojamos Latvijoje, o mažiausios – Švedijoje, tuo tarpu Lietuvos ir Belgijos rezultatai užima tarpinę padėtį. Šie skirtumai išlieka visuose analizuotuose amžiuose, todėl galima teigti, jog jie atspindi sisteminius mirtingumo lygio skirtumus tarp šalių, o ne atsitiktinius trumpalaikius svyravimus.

Šalis	Amžius 30	Amžius 40	Amžius 50
Belgija	0,2252	0,2974	0,3891
Latvija	0,2741	0,3550	0,4489
Lietuva	0,2646	0,3446	0,4395
Švedija	0,2138	0,2830	0,3730

3 lentelė: Tarptautinis vienkartinių grynųjų premijų $\bar{A}_x$ palyginimas (UDD, 2024 m., $i = 3\%$)

Nors stulpelinis grafikas (žr. 3 pav.) leidžia vizualiai palyginti vienkartinių grynųjų premijų lygius tarp nagrinėjamų šalių, tačiau papildomai pateikiama ir lentelė, parodanti premijų kitimą pagal amžių. 4 lentelėje pateikiamos kiekvienam amžiui mažiausios ir didžiausios vienkartinių grynųjų premijų reikšmės tarp lyginamų šalių bei jas atitinkantis absoliutus ir santykinis skirtumas.

Amžius	$\min(\bar{A}_x)$	$\max(\bar{A}_x)$	Absoliutus pokytis	Santykinis pokytis (%)
30	0,214	0,274	0,0603	28,2
40	0,283	0,355	0,0720	25,4
50	0,373	0,449	0,0759	20,3

4 lentelė: Skirtumo tarp mažiausios ir didžiausios premijos apimtis pagal amžių (UDD, 2024 m., $i = 3\%$)

Lentelės (žr. 4 lentelę) duomenys rodo, kad absoliutus skirtumas tarp mažiausios ir didžiausios vienkartinės gryniosios premijos didėjant apdraustojo amžiui nuosaikiai didėja. Tuo tarpu santykinis skirtumas, išreikštas procentais, mažėja nuo 28,2 % 30 metų amžiuje iki 20,3 % 50 metų amžiuje. Tai rodo, kad, augant absoliučiam premijų lygiui, procentiniai skirtumai tarp šalių tampa mažesni, nors absoliutūs premijų dydžių skirtumai išlieka panašaus dydžio.

Mažiausios vienkartinės gryniosios premijos Švedijoje atspindi palankesnę mirtingumo profilį, ypač vyresniame amžiuje, tuo tarpu didesnės Latvijos ir Lietuvos premijos rodo aukštesnę mirties riziką vyresnio amžiaus apdraustiesiems. Belgijos rezultatai šiame kontekste išlieka tarpiniai.

4.6 Palūkanų normos jautrumo analizė

Vienkartinių grynųjų premijų dydis priklauso ne tik nuo mirtingumo prielaidų, bet ir nuo finansinių veiksnių, visų pirma – palūkanų normos. Todėl šiame skyriuje vertinamas palūkanų normos pokyčių poveikis viso gyvenimo draudimo vienkartinėms grynosioms premijoms, siekiant įvertinti, kaip palūkanų normos pokyčiai veikia viso gyvenimo draudimo vienkartinės gryniasios premijas.

Analizėje nagrinėjami 30, 40 ir 50 metų amžiaus asmenys, o palūkanų norma keičiama nuo 2 % iki 4 %, paliekant nepakitusius visus kitus skaičiavimo parametrus, įskaitant mirtingumo duomenis ir taikomą UDD prielaidą. Toks požiūris leidžia įvertinti palūkanų normos įtaką vienkartinių grynųjų premijų dydžiui, nekintant kitoms skaičiavimo prielaidoms.

Apskaičiuotos vienkartinės grynosios premijos, taikant skirtingas palūkanų normas, apibendrinamos 5 lentelėje. Rezultatai rodo, kad didėjant palūkanų normai vienkartinės grynosios premijos visiems nagrinėtiems amžiams nuosekliai mažėja (žr. 5 lentelę). Tai atitinka diskontavimo principą, pagal kurį didesnė palūkanų norma mažina būsimų išmokų dabartinę vertę.

Amžius	$\bar{A}_x(2\%)$	$\bar{A}_x(3\%)$	$\bar{A}_x(4\%)$
30	0,4010	0,2646	0,1796
40	0,4805	0,3446	0,2530
50	0,5680	0,4395	0,3459

5 lentelė: Vienkartinųjų grynųjų premijų $\bar{A}_x$ priklausomybė nuo palūkanų normos Lietuvoje (2024 m.)

Siekiant detaliau įvertinti palūkanų poveikį, 6 lentelėje pateiktas vienkartinųjų grynųjų premijų pokytis, kai palūkanų norma padidinama nuo 2 % iki 4 %.

Amžius	$\bar{A}_x(2\%)$	$\bar{A}_x(4\%)$	Absoliutus pokytis	Santykinis pokytis (%)
30	0,4010	0,1796	0,2214	55,21
40	0,4805	0,2530	0,2275	47,34
50	0,5680	0,3459	0,2221	39,10

6 lentelė: Palūkanų normos poveikis vienkartinėms grynosioms premijoms Lietuvoje (2024 m.)

Analizė atskleidžia, kad palūkanų normos poveikis reikšmingai skiriasi priklausomai nuo apdraustojo amžiaus. Didinant palūkanų normą nuo 2 % iki 4 %, 30 metų amžiaus asmenų vienkartinė grynoji premija sumažėja daugiau nei 55 %, o tuo tarpu 50 metų amžiaus asmenims sumažėjimas siekia apie 39 % (žr. 6 lentelę). Tai rodo, kad palūkanų normos pokyčiai turi santykinai didesnį poveikį jaunesnio amžiaus apdraustiesiems, kurių tikėtinos draudimo išmokos numatomos tolesnėje ateityje ir yra stipriau veikiamos diskonto efekto.

Vyresnio amžiaus asmenų atveju didesnė tikėtinų išmokų dalis pasireiškia artimesnėje ateityje, todėl palūkanų normos pokyčių poveikis vienkartinųjų grynųjų premijų dydžiui yra silpnesnis. Šie rezultatai patvirtina, kad finansinių prielaidų poveikis viso gyvenimo draudimo kainai yra ne tik reikšmingas, bet ir nevienodas skirtinguose amžiuose.

4.7 Vienkartinųjų grynųjų premijų apskaičiavimas n -metų terminuotam gyvybės draudimui

Vienkartinųjų grynųjų premijų skaičiavimas n -metų terminuotam gyvybės draudimui atliekamas taikant tą pačią metodiką kaip ir viso gyvenimo draudimo atveju, siekiant užtikrinti rezultatų palyginamumą. Skaičiavimuose naudojamos tos pačios mirtingumo lentelės, fiksuota 3 % palūkanų norma bei UDD prielaida. Analizei pasirinkti du terminuoto draudimo laikotarpiai, kai $n = 10$ ir $n = 20$ metų.

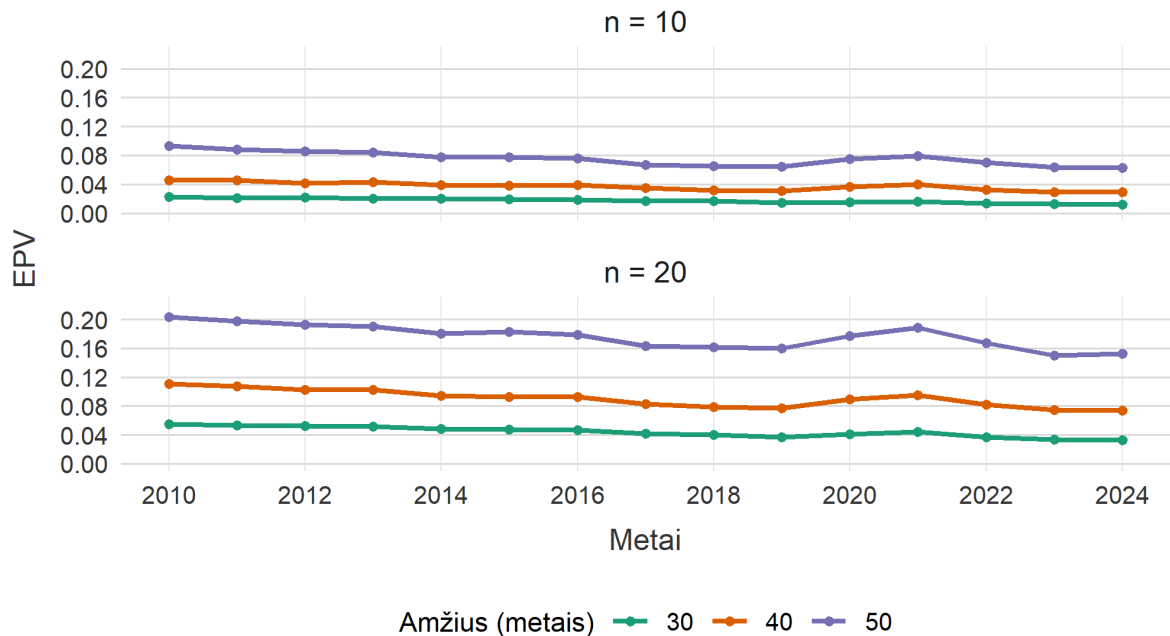
Apskaičiuotos terminuoto gyvybės draudimo vienkartinės grynosios premijos Lietuvoje 2010, 2019, 2021 ir 2024 metais pateiktos 7 lentelėje. Rezultatai rodo, kad 2024 m. premijų lygis visiems nagrinėtiems amžiams ir abiems terminams yra mažesnis nei 2010 m. Tai siejama su ilguoju laikotarpiu stebimu mirtingumo rodiklių gerėjimu. Tuo tarpu 2021 m. stebimas laikinas premijų padidėjimas, kuris atspindi trumpalaikį mirtingumo rodiklių pablogėjimą.

Amžius x	Terminas n	2010	2019	2021	2024
30	10	0,0222	0,0147	0,0158	0,0116
40	10	0,0451	0,0307	0,0394	0,0288
50	10	0,0927	0,0646	0,0790	0,0627
30	20	0,0549	0,0371	0,0446	0,0327
40	20	0,1105	0,0770	0,0954	0,0739
50	20	0,2034	0,1601	0,1885	0,1527

7 lentelė: Terminuoto gyvybės draudimo vienkartinės grynosios premijos $\bar{A}_{x:\overline{n}|}$ taikant UDD prielaidą (Lietuva, $i = 3\%$)

Duomenys taip pat rodo, kad vienkartinių grynųjų premijų dydis didėja tiek didėjant apdrausitojo amžiui, tiek ilgėjant draudimo terminui (žr. 4 pav.). Ilgesnio termino draudimo atveju premijos yra didesnės, nes mirties rizika vertinama ilgesniame laikotarpyje, o tai lemia didesnę tikėtiną išmokų dabartinę vertę. Šios priklausomybės išlieka stabilios visais nagrinėtais metais.

Terminuoto draudimo vienkartinių grynųjų premijų dinamika



4 pav.: Terminuoto gyvybės draudimo vienkartinių grynųjų premijų $\bar{A}_x : \overline{n}|$ kitimas (2010–2024 m., $i = 3\%$)

Siekiant įvertinti terminuoto ir viso gyvenimo draudimo santykinę kainą, 8 lentelėje pateiktas 2024 m. vienkartinį grynųjų premijų santykis $\bar{A}_{x:\overline{n}|}/\bar{A}_x$. Gauti rezultatai rodo, kad terminuoto gyvybės draudimo premijos yra reikšmingai mažesnės nei viso gyvenimo draudimo atveju. Dešimties metų termino atveju ši dalis svyruoja nuo maždaug 4 % 30 metų amžiaus apdraustiesiems iki apie 14 % 50 metų amžiaus asmenims. Ilgesnio, dvidešimties metų, termino atveju santykis reikšmingai padidėja ir siekia atitinkamai apie 12–35 %.

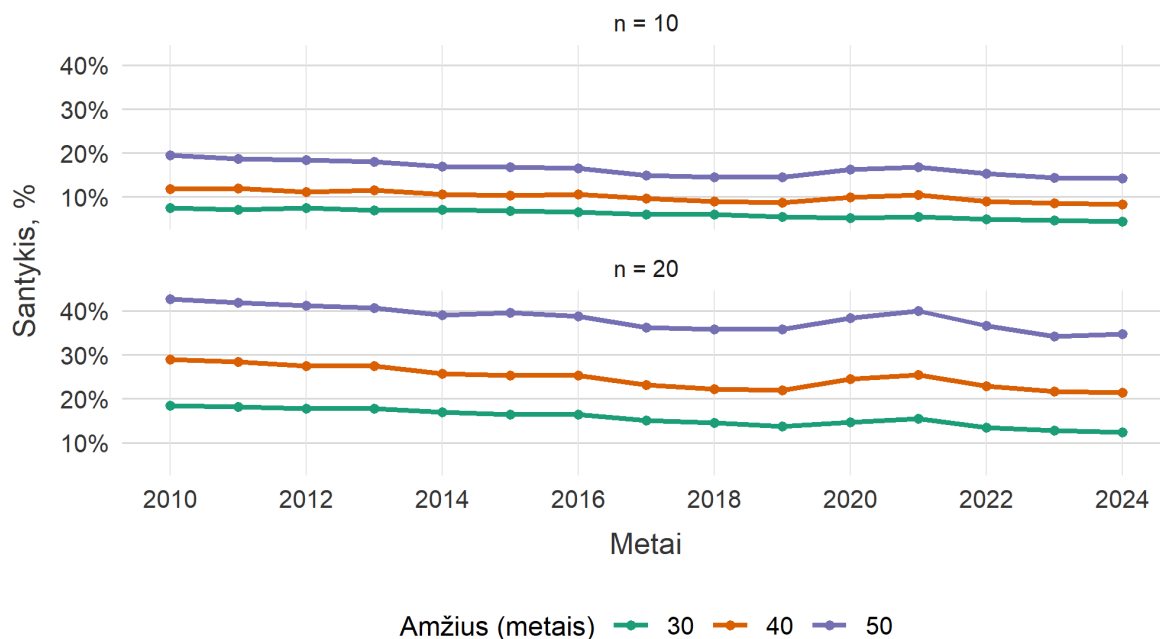
Amžius x	Terminas n	$\bar{A}_x$	$\bar{A}_{x:\overline{n} }$	Santykis (%)
30	10	0,2646	0,0116	4,39
40	10	0,3446	0,0288	8,35
50	10	0,4395	0,0627	14,26
30	20	0,2646	0,0327	12,37
40	20	0,3446	0,0739	21,43
50	20	0,4395	0,1527	34,74

8 lentelė: Terminuoto ir viso gyvenimo gyvybės draudimo vienkartinį grynųjų premijų palyginimas 2024 m. (Lietuva, $i = 3\%$, UDD). Santykis: $\bar{A}_{x:\overline{n}|}/\bar{A}_x$

Pastebima, kad didėjant apdraustojo amžiui, terminuoto draudimo premijos santykis su viso gyvenimo premija didėja. Tai rodo, kad vyresniame amžiuje didesnė mirties rizikos dalis pasireiškia artimesniame laikotarpyje, todėl terminuoto gyvybės draudimo vienkartinės gryniosios premijos santykinai labiau priartėja prie viso gyvenimo draudimo premijų.

Santykio $\bar{A}_{x:\overline{n}|}/\bar{A}_x$ dinamika 2010–2024 m. laikotarpiu, pateikta 4 paveiksle, leidžia įvertinti, kad 2024 m. stebimas santykis atitinka bendras ilgalaikes tendencijas ir nėra atsitiktinis vienerių metų rezultatas. Tai patvirtina, kad UDD prielaida užtikrina nuoseklų skirtingų gyvybės draudimo produktų palyginamumą, taikant tas pačias mirtingumo ir finansines prielaidas.

Terminuoto ir viso gyvenimo premijų santykio dinamika



5 pav.: Terminuoto gyvybės draudimo vienkartinių grynujų premijų santykio $\bar{A}_{x:\overline{n}|}/\bar{A}_x$ kitimas (2010–2024 m., $i = 3\%$)

Išsamesni terminuoto ir viso gyvenimo draudimo premijų palyginimo rezultatai visam 2010–2024 m. laikotarpiui pateikiami Priede D.

4.8 Rezultatų interpretacija

Praktinėje darbo dalyje gauti rezultatai leidžia nuosekliai įvertinti, kaip vienkartinių grynujų premijų dydį lemia apdraustojų amžius, su juo susijęs mirtingumo pasiskirstymas bei finansinės prielaidos. Kadangi visuose skaičiavimuose buvo taikoma vienoda palūkanų norma ir ta pati skaičiavimo metodika, nustatyti skirtumai gali būti tiesiogiai siejami su amžiaus ir mirtingumo struktūros poveikiu.

2024 m. rezultatų palyginimas Lietuvoje (žr. 9 lentelę) leidžia aiškiai įvertinti apdraustųjų amžiaus poveikį. Vienkartinė grynoji premija 50 metų amžiaus apdraustajam yra apie 1,66 karto didesnė nei 30 metų amžiaus asmeniui. Tai rodo, kad amžiaus poveikis vienkartinių grynujų premijų dydžiui yra reikšmingas net ir esant toms pačioms finansinėms bei mirtingumo prielaidoms.

	$\bar{A}_{30}$	$\bar{A}_{40}$	$\bar{A}_{50}$	Santykis
Lietuva	0,265	0,345	0,440	1,66

9 lentelė: Vienkartinių grynujų premijų palyginimas pagal amžių Lietuvoje (UDD, 2024 m., $i = 3\%$), santykis: $\bar{A}_{50}/\bar{A}_{30}$

Ilgesnio laikotarpio (2010–2024 m.) analizė parodė, kad vienkartinių grynujų premijų kitimo forma laikui bėgant išlieka panaši visiems amžiams, o bendras premijų lygis iki

2019 m. mažėjo dėl gerėjančių mirtingumo rodiklių. Laikini mirtingumo svyravimai, tokie kaip COVID-19 pandemijos laikotarpis, lėmė trumpalaikį premijų padidėjimą, kuris buvo ryškiausias vyresnio amžiaus apdraustiesiems.

Tarptautinis 2024 m. palyginimas parodė, kad, net taikant tas pačias finansines prielaidas ir vienodą draudimo modelį, vienkartinių grynųjų premijų lygiai tarp šalių reikšmingai skiriasi. Tai rodo, kad vienkartinių grynųjų premijų skirtumus tarp šalių lemia ne tik bendras mirties tikimybių lygis, bet ir tai, kuriuose amžiaus tarpsniuose šios tikimybės yra didesnės. Šis efektas ypač išryškėja vyresnio amžiaus grupėse, kur didesnė tikėtinų išmokų dalis tenka artimesniam laikotarpiui.

Palūkanų normos jautrumo analizė parodė, kad didėjant palūkanų normai vienkartinės grynosios premijos visiems nagrinėtiems amžiams mažėja, tačiau šis poveikis nėra vienodas. Santykinis premijų sumažėjimas yra didesnis jaunesniems apdraustiesiems, kurių tikėtinos išmokos labiau nutolusios laike, o vyresniame amžiuje šis poveikis silpnėja.

Apibendrinant galima teigti, kad vienkartinių grynųjų premijų dydį lemia ne pavienės prielaidos, bet jų tarpusavio sąveika su apdraustojo amžiumi. Taikoma UDD prielaida praktinėje analizėje pasirodė esanti tinkamas metodinis sprendimas, leidžiantis diskrečius mirtingumo duomenis nuosekliai taikyti tolydžiajam draudimo modeliui ir gauti stabilias, ekonomiškai interpretuojamas vienkartinių grynųjų premijų reikšmes.

Papildomos analizės, tokios kaip tarptautinis palyginimas ir palūkanų normos jautrumo analizė, šiame darbe atliekamos tik viso gyvenimo draudimo atveju, nes jų tikslas yra iliustruoti bendrą mirtingumo ir finansinių prielaidų poveikį premijų dydžiui, o ne analizuoti atskirų draudimo produktų struktūrinius skirtumus.

5 Išvados

Nors mirtingumo duomenys pateikiami diskrečių mirtingumo lentelių pavidalu ir apibrėžti sveikaisiais amžiais, gyvybės draudimo skaičiavimų praktikoje dažnai reikalinga tolydi mirties momento interpretacija metų intervale. Tolygaus mirtingumo pasiskirstymo metų intervaluose (UDD) prielaida leidžia nuosekliai pereiti nuo diskrečių mirtingumo rodiklių prie tolygaus draudimo modelio ir taikyti jį vienkartinių grynųjų premijų skaičiavimuose.

Šiame darbe, taikant tolygaus mirtingumo pasiskirstymo metų intervaluose prielaidą, išnagrinėta viso gyvenimo ir terminuoto gyvybės draudimo vienkartinių grynųjų premijų priklausomybė nuo apdraustojo amžiaus, mirtingumo pasiskirstymo pagal amžių ir palūkanų normos. Gauti rezultatai patvirtina teorinius dėsningumus ir rodo, kad premijų dydį lemia šių veiksnių tarpusavio sąveika.

Atlikta analizė patvirtino, kad apdraustojo amžius yra vienas esminių veiksnių, lemiančių vienkartinių grynųjų premijų dydį tiek viso gyvenimo, tiek terminuoto gyvybės draudimo atveju. Taip pat nustatyta, kad terminuoto draudimo vienkartinės grynosios premijos sudaro tik dalį viso gyvenimo draudimo premijų, tačiau šis santykis didėja didėjant apdraustojo amžiui ir ilgėjant draudimo terminui.

Apibendrinant galima teigti, kad UDD prielaida praktinėje analizėje pasirodė esanti tinkamas ir nuoseklus metodinis sprendimas, leidžiantis diskrečius mirtingumo duomenis taikyti tolydžiajam draudimo modeliui ir nuosekliai palyginti skirtingus gyvybės draudimo produktus, remiantis tomis pačiomis mirtingumo ir finansinėmis prielaidomis.

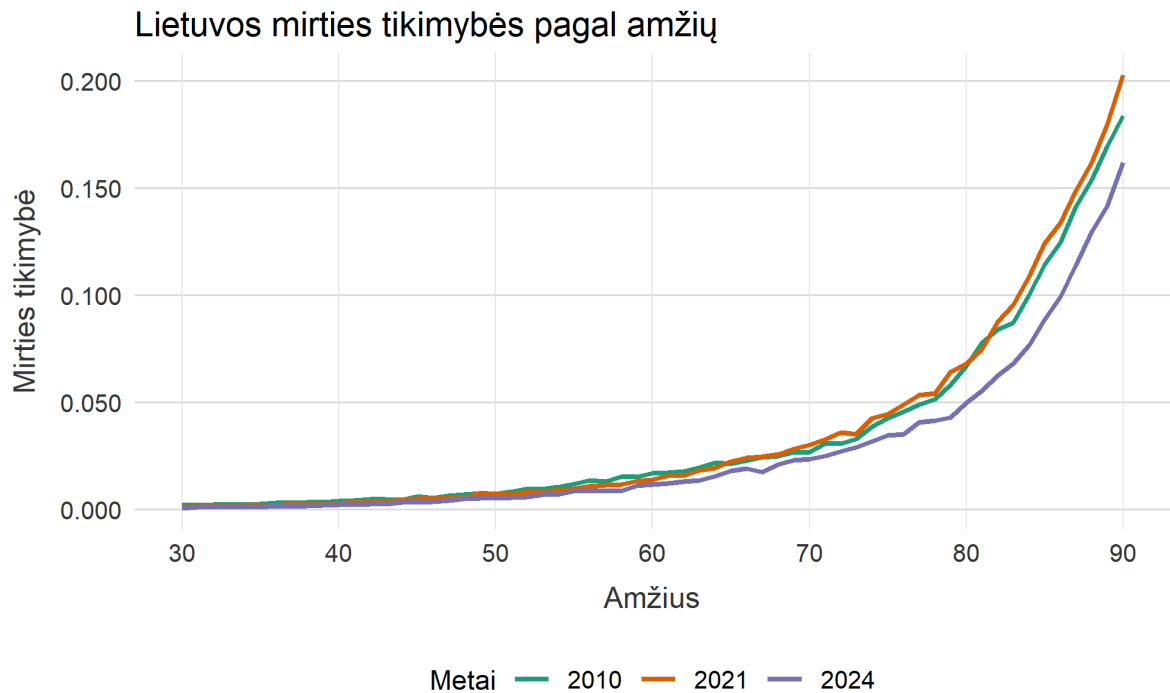
Literatūra

- [1] Dickson, D. C. M., Hardy, M. R., Waters, H. R. *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*. Cambridge University Press, Second Edition, 2013.
- [2] Grigutis, A., Šiaulys, J. *Aktuarinė matematika*. Paskaitų konspektas, Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, 2025. Prieiga internetu: <https://www.overleaf.com/project/62974f8d1cb60eb495f23f58>
- [3] Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbitt C.J., *Actuarial Mathematics*. The Society of Actuaries, Itasca, 1997.
- [4] Jones, B. L., Meru, J. *A critique of fractional age assumptions*. Insurance: Mathematics and Economics 30, 2002, 363–370
- [5] Jones, B. L., Meru, J. *A family of fractional age assumptions*. Insurance: Mathematics and Economics 27,2000, 261–276
- [6] Willmot, G. E. *Statistical Independence and Fractional Age Assumptions* North American Actuarial Journal, 1997, 1(4), 116–126.

Priedai

A Mirties tikimybių q_x tiesinis grafikas

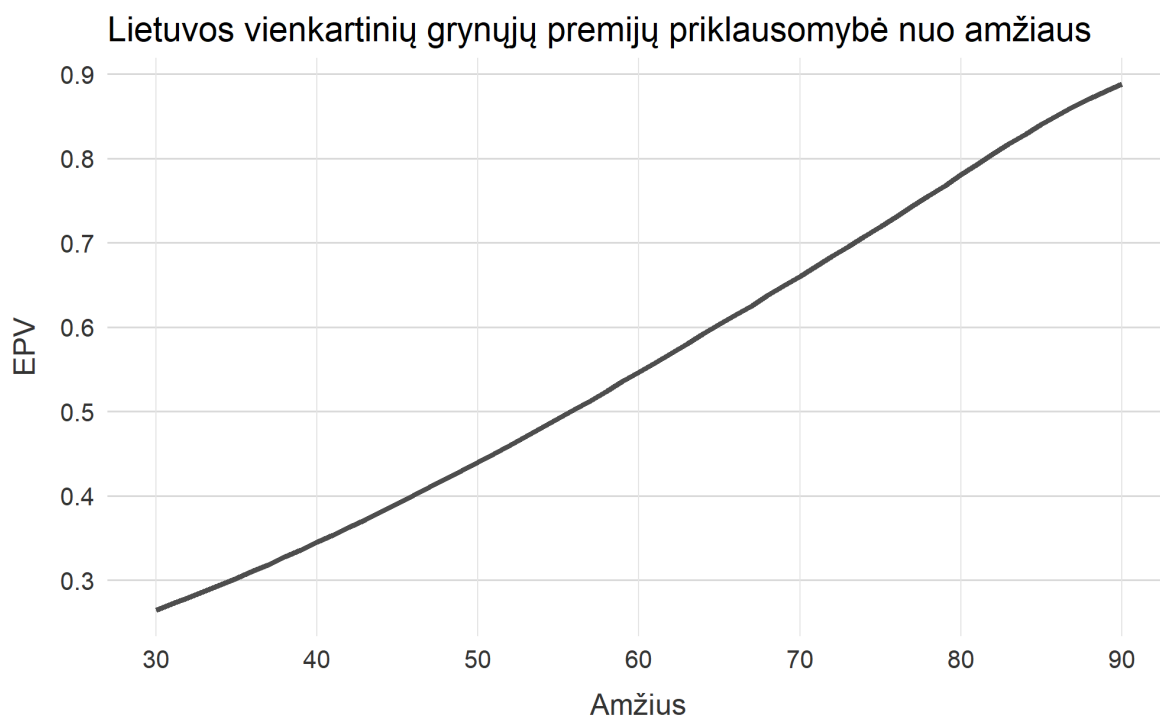
Palyginimui pateikiamas tas pats mirties tikimybių tiesinis grafikas, kuriame jaunesnių amžių q_x reikšmės tampa sunkiai vizualiai atskiriamos.



6 pav.: Lietuvos mirties tikimybės q_x pagal amžių 2010, 2021 ir 2024 m., $i = 3\%$

B Viso gyvenimo draudimo vienkartinių premijų priklausomybė nuo amžiaus

Priede pateikiama Lietuvos vienkartinių gryųjų viso gyvenimo draudimo premijų $\bar{A}_x$ priklausomybė nuo apdraustojo amžiaus 2024 m., taikant UDD prielaidą ir 3% palūkanų normą. Grafikas pateikiamas papildomai, siekiant vizualiai iliustruoti amžiaus poveikį premijos dydžiui, kuris pagrindiniame tekste analizuojamas pasitinktų 30, 40 ir 50 metų amžių atvejais.



7 pav.: Lietuvos viso gyvenimo gyvybės draudimo vienkartinų gryųjų premijų $\bar{A}_x$ priklausomybė nuo apdraustojo amžiaus 2024 m., taikant UDD prielaidą, $i = 3\%$

C Lietuvos vienkartinų gryųjų premijų $\bar{A}_x$ kitimas 2010–2024 m.

Lentelėje pateikiamos Lietuvos vienkartinų gryųjų viso gyvenimo draudimo premijų $\bar{A}_x$ reikšmės 30, 40 ir 50 metų amžiaus apdraustiesiems 2010–2024 m. laikotarpiu, taikant UDD prielaidą.

Metai	Amžius	$\bar{A}_x$
2010	30	0,2984
2011	30	0,2948
2012	30	0,2928
2013	30	0,2915
2014	30	0,2861
2015	30	0,2866
2016	30	0,2846
2017	30	0,2773
2018	30	0,2751
2019	30	0,2711
2020	30	0,2821
2021	30	0,2892
2022	30	0,2764

(Tęsinys kitame puslapyje)

Metai	Amžius	$\bar{A}_x$
2023	30	0,2652
2024	30	0,2646
2010	40	0,3811
2011	40	0,3775
2012	40	0,3737
2013	40	0,3732
2014	40	0,3660
2015	40	0,3673
2016	40	0,3657
2017	40	0,3574
2018	40	0,3543
2019	40	0,3507
2020	40	0,3656
2021	40	0,3744
2022	40	0,3589
2023	40	0,3448
2024	40	0,3446
2010	50	0,4767
2011	50	0,4717
2012	50	0,4691
2013	50	0,4673
2014	50	0,4606
2015	50	0,4634
2016	50	0,4604
2017	50	0,4522
2018	50	0,4502
2019	50	0,4463
2020	50	0,4625
2021	50	0,4722
2022	50	0,4564
2023	50	0,4392
2024	50	0,4395

10 lentelė: Lietuvos vienkartinių grynųjų viso gyvenimo draudimo premijų $\bar{A}_x$ kitimas 2010–2024 m. (UDD, $i = 3\%$)

D Terminuoto ir viso gyvenimo draudimo premijų palyginimas

Šioje lentelėje pateikiamas terminuoto ir viso gyvenimo gyvybės draudimo vienkartinių grynųjų premijų palyginimas bei jų santykis, apskaičiuoti Lietuvos mirtingumo duomenims taikant 3 % palūkanų normą.

Metai	Amžius x	Terminas n	$A_{x:\overline{n}}$	$\bar{A}_{x:\overline{n}}$	$\bar{A}_x$	Santykis
2010	30	10	0,02185881	0,02218507	0,2983722	0,07435369
2010	40	10	0,04446055	0,04512417	0,3810850	0,11840973
2010	50	10	0,09137415	0,09273801	0,4767468	0,19452256
2010	30	20	0,05408110	0,05488832	0,2983722	0,18395922
2010	40	20	0,10885140	0,11047612	0,3810850	0,28989893
2010	50	20	0,20042764	0,20341925	0,4767468	0,42668195
2011	30	10	0,02039075	0,02069510	0,2947611	0,07020975
2011	40	10	0,04448264	0,04514659	0,3775265	0,11958524
2011	50	10	0,08651115	0,08780243	0,4717233	0,18613122
2011	30	20	0,05268300	0,05346935	0,2947611	0,18139894
2011	40	20	0,10543906	0,10701286	0,3775265	0,28345791
2011	50	20	0,19465692	0,19756239	0,4717233	0,41880992
2012	30	10	0,02153570	0,02185715	0,2928038	0,07464778
2012	40	10	0,04119708	0,04181199	0,3737032	0,11188555
2012	50	10	0,08483674	0,08610302	0,4690926	0,18355230
2012	30	20	0,05140488	0,05217216	0,2928038	0,17818132
2012	40	20	0,10122056	0,10273138	0,3737032	0,27490100
2012	50	20	0,19019802	0,19303694	0,4690926	0,41151141
2013	30	10	0,02015604	0,02045689	0,2914595	0,07018778
2013	40	10	0,04243007	0,04306339	0,3731959	0,11539083
2013	50	10	0,08266811	0,08390203	0,4672754	0,17955584
2013	30	20	0,05096736	0,05172811	0,2914595	0,17747959
2013	40	20	0,10083552	0,10234060	0,3731959	0,27422757
2013	50	20	0,18719026	0,18998429	0,4672754	0,40657883
2014	30	10	0,01988045	0,02017719	0,2860639	0,07053385
2014	40	10	0,03836206	0,03893466	0,3660183	0,10637353
2014	50	10	0,07666481	0,07780912	0,4606032	0,16892876
2014	30	20	0,04774781	0,04846049	0,2860639	0,16940445
2014	40	20	0,09280330	0,09418849	0,3660183	0,25733274
2014	50	20	0,17737910	0,18002668	0,4606032	0,39084984
2015	30	10	0,01940145	0,01969104	0,2866275	0,06869907
2015	40	10	0,03719209	0,03774722	0,3672546	0,10278216
2015	50	10	0,07657490	0,07771786	0,4633822	0,16771869
2015	30	20	0,04643427	0,04712735	0,2866275	0,16442019
2015	40	20	0,09164387	0,09301176	0,3672546	0,25326236
2015	50	20	0,18050001	0,18319417	0,4633822	0,39534139
2016	30	10	0,01820959	0,01848139	0,2846405	0,06492888
2016	40	10	0,03810894	0,03867776	0,3656595	0,10577534
2016	50	10	0,07480949	0,07592611	0,4603674	0,16492504
2016	30	20	0,04594863	0,04663446	0,2846405	0,16383635
2016	40	20	0,09124333	0,09260524	0,3656595	0,25325538
2016	50	20	0,17593015	0,17855610	0,4603674	0,38785568
2017	30	10	0,01627861	0,01652158	0,2773310	0,05957352
2017	40	10	0,03407901	0,03458767	0,3574413	0,09676462
2017	50	10	0,06618389	0,06717176	0,4522101	0,14854104

Tęsinys kitame puslapyje

Metai	Amžius x	Terminas n	$A_{x:\overline{n}}$	$\bar{A}_{x:\overline{n}}$	$\bar{A}_x$	Santykis
2017	30	20	0,04114458	0,04175870	0,2773310	0,15057353
2017	40	20	0,08133073	0,08254469	0,3574413	0,23093214
2017	50	20	0,16113884	0,16354401	0,4522101	0,36165493
2018	30	10	0,01637784	0,01662230	0,2751058	0,06042147
2018	40	10	0,03138220	0,03185062	0,3543025	0,08989668
2018	50	10	0,06462102	0,06558556	0,4501977	0,14568166
2018	30	20	0,03927292	0,03985911	0,2751058	0,14488646
2018	40	20	0,07766668	0,07882595	0,3543025	0,22248205
2018	50	20	0,15894290	0,16131530	0,4501977	0,35832100
2019	30	10	0,01444997	0,01466566	0,2711392	0,05408903
2019	40	10	0,03021696	0,03066798	0,3507299	0,08744045
2019	50	10	0,06366840	0,06461872	0,4462569	0,14480159
2019	30	20	0,03654632	0,03709182	0,2711392	0,13679991
2019	40	20	0,07588085	0,07701346	0,3507299	0,21958053
2019	50	20	0,15773584	0,16009022	0,4462569	0,35874002
2020	30	10	0,01459395	0,01481178	0,2820989	0,05250563
2020	40	10	0,03570163	0,03623451	0,3656165	0,09910524
2020	50	10	0,07394154	0,07504520	0,4624677	0,16227122
2020	30	20	0,04069393	0,04130134	0,2820989	0,14640728
2020	40	20	0,08836479	0,08968373	0,3656165	0,24529453
2020	50	20	0,17473102	0,17733907	0,4624677	0,38346258
2021	30	10	0,01557803	0,01581055	0,2892154	0,05466705
2021	40	10	0,03880065	0,03937979	0,3743852	0,10518523
2021	50	10	0,07784936	0,07901135	0,4721595	0,16734038
2021	30	20	0,04391325	0,04456871	0,2892154	0,15410212
2021	40	20	0,09403613	0,09543972	0,3743852	0,25492388
2021	50	20	0,18577103	0,18854387	0,4721595	0,39932244
2022	30	10	0,01348066	0,01368188	0,2764382	0,04949344
2022	40	10	0,03172219	0,03219568	0,3588911	0,08970875
2022	50	10	0,06877530	0,06980184	0,4564271	0,15293098
2022	30	20	0,03670555	0,03725342	0,2764382	0,13476219
2022	40	20	0,08094928	0,08215753	0,3588911	0,22892048
2022	50	20	0,16484666	0,16730718	0,4564271	0,36655839
2023	30	10	0,01228326	0,01246661	0,2652491	0,04699962
2023	40	10	0,02889092	0,02932215	0,3447999	0,08504106
2023	50	10	0,06244503	0,06337709	0,4391851	0,14430611
2023	30	20	0,03346401	0,03396349	0,2652491	0,12804379
2023	40	20	0,07374677	0,07484752	0,3447999	0,21707523
2023	50	20	0,14805650	0,15026641	0,4391851	0,34214826
2024	30	10	0,01143635	0,01160705	0,2645565	0,04387361
2024	40	10	0,02837410	0,02879761	0,3446417	0,08355812
2024	50	10	0,06176583	0,06268775	0,4394596	0,14264736
2024	30	20	0,03226149	0,03274303	0,2645565	0,12376573
2024	40	20	0,07276582	0,07385193	0,3446417	0,21428613

Tęsinys kitame puslapyje

Metai	Amžius x	Terminas n	$A_{x:\overline{n} }$	$\bar{A}_{x:\overline{n} }$	$\bar{A}_x$	Santykis
2024	50	20	0,15045277	0,15269844	0,4394596	0,34746866

11 lentelė: Terminuoto $\bar{A}_{x:\overline{n}|}$ ir viso gyvenimo $\bar{A}_x$ draudimo premijų palyginimas (Lietuva, $i = 3\%$) ir santykis $\bar{A}_{x:\overline{n}|}/\bar{A}_x$

E R kodas

```
library(dplyr)
library(readr)
library(stringr)
library(ggplot2)
library(scales)

#isikeliname ir susitvarkome duomenis
LT_data <- read_table("C:/Users/1453/Desktop/library/R/data/Lithuania,
  Life tables (period 1x1), Total.txt")
LT_data$Age <- as.integer(gsub("\\+", "", LT_data$Age))
View(LT_data)

#LT mirtingumo apzvalga
qx_LT <- LT_data %>%
  filter(
    Year %in% c(2010, 2021, 2024),
    Age >= 30,
    Age <= 90
  ) %>%
  mutate(Year = factor(Year))

#bendras apipavidalinimas visiems grafikams
base_theme <- theme_minimal(base_size = 12) +
  theme(
    axis.title.x = element_text(color = "grey20", margin = margin(t = 8), size = 12),
    axis.title.y = element_text(color = "grey20", margin = margin(r = 8), size = 12),
    axis.text.x = element_text(color = "grey20", size = 10),
    axis.text.y = element_text(color = "grey20", size = 10),

    panel.grid.major.x = element_line(color = "grey90", linewidth = 0.25),
    panel.grid.major.y = element_line(color = "grey85", linewidth = 0.35),
    panel.grid.minor = element_blank(),

    legend.position = "bottom",
    legend.title = element_text(size = 11),
    legend.text = element_text(size = 10),

    plot.title = element_text(margin = margin(b = 4), size = 14),
    #plot.subtitle = element_text(margin = margin(b = 10))
  )

#log grafikas
qx_plot <- ggplot(
```

```

    qx_LT,
    aes(x = Age, y = qx, colour = factor(Year), group = Year)
  ) +

  geom_line(linewidth = 1.0) +

  scale_y_log10(
    breaks = c(1e-3, 1e-2, 1e-1),
    labels = scales::label_number(accuracy = 0.001, trim = TRUE)
  ) +

  scale_x_continuous(
    breaks = seq(30, 90, by = 10),
    limits = c(30, 90)
  ) +

  scale_color_brewer(palette = "Dark2") +

  labs(
    title = "Lietuvos mirties tikimybės pagal amžių",
    x = "Amžius",
    y = "Mirties tikimybė",
    colour = "Metai"
  ) +
  base_theme +
  theme(
    panel.grid.major.x = element_line(color = "grey90", linewidth = 0.25),
    panel.grid.major.y = element_line(color = "grey85", linewidth = 0.35)
  )

qx_plot

ggsave("mirtingumas.png", plot = qx_plot,
       width = 17, height = 10.5, units = "cm", dpi = 300)

#tiesinis grafikas
qx_plot_linear <- ggplot(
  qx_LT,
  aes(x = Age, y = qx, colour = factor(Year), group = Year)
) +
  geom_line(linewidth = 1.0) +

  scale_y_continuous(
    labels = scales::label_number(accuracy = 0.001, trim = TRUE)
  ) +

  scale_x_continuous(
    breaks = seq(30, 90, by = 10),
    limits = c(30, 90)
  ) +

  scale_color_brewer(palette = "Dark2") +

  labs(

```

```

    title = "Lietuvos mirties tikimybės pagal amžių",
    x = "Amžius",
    y = "Mirties tikimybė",
    colour = "Metai"
  ) +
  base_theme +
  theme(
    panel.grid.major.x = element_line(color = "grey90", linewidth = 0.25),
    panel.grid.major.y = element_line(color = "grey85", linewidth = 0.35)
  )

qx_plot_linear

ggsave(
  "mirtingumas_tiesinis.png",
  plot = qx_plot_linear,
  width = 17, height = 10.5, units = "cm", dpi = 300
)

#VISO GYVENIMO DRAUDIMAS
#diskretaus modelio vienkartinė premija
Ax_discrete <- function(df_year, x, i) {
  v <- 1/(1+i)
  df <- df_year %>% arrange(Age)

  lx_x <- df %>% filter(Age == x) %>% pull(lx)
  if (length(lx_x) != 1 || lx_x <= 0) stop("Invalid lx at age x")

  df_tail <- df %>% filter(Age >= x)
  k <- df_tail$Age - x

  #A_x = sum v^(k+1) * d_{x+k} / l_x (formule is teorijos)
  Ax <- sum((v^(k + 1)) * df_tail$dx) / lx_x
  Ax
}

#tolydaus modelio vienkartinė premija, pagal UDD
Ax_UDD <- function(Ax, i) {
  delta <- log(1 + i)
  (i / delta) * Ax
}

#parametrai
ages <- c(30, 40, 50)
i0 <- 0.03
years_LT <- 2010:2024
key_years <- c(2010, 2019, 2021, 2024)

#tendencijos skaičiavimas Lietuvai
LT_trend <- LT_data %>%
  filter(Year %in% years_LT) %>%
  group_by(Year) %>%
  group_modify(~{

```

```

    Ax <- sapply(ages, \(age) Ax_discrete(.x, x = age, i = i0))
    tibble(
      Age = ages,
      Ax_discrete = Ax,
      Ax_uniform = Ax_UDD(Ax, i = i0)
    )
  }) %>%
  ungroup() %>%
  mutate(across(everything(), ~ round(.x, 4)))

#LT tendencijos grafikas
trend_plot <- ggplot(
  LT_trend %>% mutate(Age = factor(Age, levels = ages)),
  aes(x = Year, y = Ax_uniform, color = Age, group = Age)) +

  geom_line(linewidth = 1.0) +
  geom_point(size = 1.3) +

  scale_x_continuous(breaks = seq(min(years_LT), max(years_LT), by = 2)) +
  scale_y_continuous(breaks = scales::breaks_width(0.03)) +

  scale_color_brewer(palette = "Dark2")+
  labs(
    title = "Vienkartinių grynųjų premijų dinamika Lietuvoje",
    #subtitle = "Lietuva, 2010 - 2024 m., i = 3 %",
    x = "Metai",
    y = "EPV",
    color = "Amžius (metais)"
  ) +
  base_theme

trend_plot

ggsave("LT_tolydus.png", plot = trend_plot,
  width = 17, height = 10.5, units = "cm", dpi = 300)

#premiju lenteles
all_LT_table <- LT_trend %>%
  filter(Year %in% years_LT) %>%
  select(Year, Age, Ax_uniform) %>%
  arrange(Year, Age)

LT_table <- LT_trend %>%
  filter(Year %in% key_years) %>%
  select(Year, Age, Ax_uniform) %>%
  arrange(Age, Year)

#kovido itaka
covid_impact_LT <- LT_trend %>%
  filter(Year %in% c(2019, 2021), Age %in% c(30, 40, 50)) %>%
  select(Year, Age, Ax_uniform) %>%

```

```

pivot_wider(names_from = Year, values_from = Ax_uniform, names_prefix = "Y_") %>%
mutate(
  Abs_change = Y_2021 - Y_2019,
  Pct_change = (Y_2021 / Y_2019 - 1) * 100
) %>%
mutate(across(everything(), ~ round(.x, 4))) %>%
arrange(Age)

covid_impact_LT

#2024m grafikas
year0 <- 2024
ages_grid <- 30:90

LT_2024 <- LT_data %>% filter(Year == year0)

appendix_age_curve <- tibble(Age = ages_grid) %>%
  rowwise() %>%
  mutate(
    Ax_discrete = Ax_discrete(LT_2024, x = Age, i = i0),
    Ax_uniform = Ax_UDD(Ax_discrete, i = i0)
  ) %>%
  ungroup()

plot_2024 <- ggplot(appendix_age_curve, aes(x = Age, y = Ax_uniform)) +
  geom_line(linewidth = 1.1, color = "grey30") +
  scale_x_continuous(
    breaks = seq(30, 90, by = 10),
    minor_breaks = seq(30, 90, by = 5),
    limits = c(30, 90)
  ) +
  scale_y_continuous(
    breaks = seq(0.2, 0.9, by = 0.1),
    minor_breaks = seq(0.2, 0.9, by = 0.05)
  ) +
  labs(
    title = "Lietuvos vienkartinių grynujų premijų priklausomybė nuo amžiaus",
    x = "Amžius",
    y = "EPV"
  ) +
  base_theme +
  theme(
    legend.position = "none",
    panel.grid.major.x = element_line(color = "grey90", linewidth = 0.25),
    panel.grid.major.y = element_line(color = "grey85", linewidth = 0.35)
  )

plot_2024

ggsave("grafikas_2024.png", plot = plot_2024,
  width = 17, height = 10.5, units = "cm", dpi = 300)

```

```

#Tarptautinis palyginimas
#susikeliame ir susitvarkome duomenis
LV_data <- read_table("C:/Users/1453/Desktop/library/R/data/Latvia,
  Life tables (period 1x1), Total.txt")
LV_data$Age <- as.integer(gsub("\\+", "", LV_data$Age))
View(LV_data)

SE_data <- read_table("C:/Users/1453/Desktop/library/R/data/Sweden,
  Life tables (period 1x1), Total.txt")
SE_data$Age <- as.integer(gsub("\\+", "", SE_data$Age))
View(SE_data)

BE_data <- read_table("C:/Users/1453/Desktop/library/R/data/Belgium,
  Life tables (period 1x1), Total.txt",
  na = ".",
  col_types = cols()
)
BE_data$Age <- as.integer(gsub("\\+", "", BE_data$Age))
View(BE_data)

#funkcija premijom apskaiciuoti pasaliui
calc_country_2024 <- function(df, country_code) {
  df_y <- df %>% filter(Year == year0)
  if (nrow(df_y) == 0) stop(paste0(country_code, ": nėra Year=", year0, " duomenų."))

  Ax <- sapply(ages, \(age) Ax_discrete(df_y, x = age, i = i0))

  tibble(
    Country = country_code,
    Age = ages,
    Ax_discrete = Ax,
    Ax_uniform = Ax_UDD(Ax, i = i0)
  )
}

#sujungiam į vieną dataframe
intl_2024 <- bind_rows(
  calc_country_2024(LT_data, "Lietuva"),
  calc_country_2024(LV_data, "Latvija"),
  calc_country_2024(SE_data, "Švedija"),
  calc_country_2024(BE_data, "Belgija")
)

#rezultatu lentele
intl_table <- intl_2024 %>%
  select(Country, Age, Ax_uniform) %>%
  pivot_wider(names_from = Age, values_from = Ax_uniform, names_prefix = "Age_") %>%
  arrange(Country) %>%
  mutate(across(c(Age_30, Age_40, Age_50), ~ round(.x, 4)))

#skirtumai tarp saliu pagal amziu
intl_change <- intl_2024 %>%
  filter(Age %in% c(30, 40, 50)) %>%
  group_by(Age) %>%

```

```

summarise(
  min_Abar = min(Ax_uniform, na.rm = TRUE),
  max_Abar = max(Ax_uniform, na.rm = TRUE),
  abs_spread = max_Abar - min_Abar,
  pct_spread = (max_Abar / min_Abar - 1) * 100,
  .groups = "drop"
) %>%
arrange(Age) %>%
mutate(across(everything(), ~ round(.x, 4)))

intl_change

#stulpelinis grafikas
international_plot <- ggplot(
  intl_2024 %>% mutate(Age = factor(Age, levels = ages)),
  aes(x = Country, y = Ax_uniform, fill = Age)
) +
  geom_col(
    position = position_dodge(width = 0.7),
    width = 0.6,
    color = "grey30",
    linewidth = 0.3
  ) +
  scale_fill_brewer(palette = "Dark2") +
  labs(
    title = "Vienkartinių grynųjų premijų palyginimas tarp šalių",
    x = "Šalis",
    y = "EPV",
    fill = "Amžius (metais)"
  ) +
  base_theme

international_plot

ggsave("tarptautinis.png", plot = international_plot,
  width = 17, height = 10.5, units = "cm", dpi = 300)

#palukanu jautrumo analize
#parametrai
rates <- c(0.02, 0.03, 0.04)

#premijos su naujais rate'ais
sensitivity_LT <- expand.grid(
  Age = ages,
  i = rates
) %>%
  rowwise() %>%
  mutate(
    Ax_discrete = Ax_discrete(LT_2024, x = Age, i = i),
    Ax_uniform = Ax_UDD(Ax_discrete, i)
  ) %>%
  ungroup()

#absoliutus ir santykinis pokyciai

```

```

abs_effect <- sensitivity_LT %>%
  filter(i %in% c(0.02, 0.04)) %>%
  select(Age, i, Ax_uniform) %>%
  pivot_wider(names_from = i, values_from = Ax_uniform,
              names_prefix = "i_") %>%
  mutate(
    abs_change = i_0.02 - i_0.04,
    rel_change_pct = 100 * abs_change / i_0.02
  )

#rezultatu lentele
sens_table <- sensitivity_LT %>%
  mutate(i = paste0(i * 100, "%")) %>%
  select(Age, i, Ax_uniform) %>%
  pivot_wider(names_from = i, values_from = Ax_uniform) %>%
  mutate(across(everything(), ~ round(.x, 4)))

#TERMINUOTAS DRAUDIMAS
#diskretaus modelio vienkartinę premiją
Axn_discrete <- function(df_year, x, n, i) {
  v <- 1 / (1 + i)
  df <- df_year %>% arrange(Age)

  lx_x <- df %>% filter(Age == x) %>% pull(lx)
  if (length(lx_x) != 1 || lx_x <= 0) stop("Invalid lx at age x")

  df_term <- df %>% filter(Age >= x, Age <= x + n - 1)
  if (nrow(df_term) != n) stop("Not enough ages in df_year for selected x and n")

  k <- df_term$Age - x # 0..n-1
  Axn <- sum((v^(k + 1)) * df_term$dx) / lx_x
  Axn
}

#perejimas i tolydų dydį pagal UDD
Axn_UDD <- function(A_discrete, i) {
  delta <- log(1 + i)
  (i / delta) * A_discrete
}

#galutinę tolydaus formulę
Axn_uniform <- function(df_year, x, n, i) {
  Axn_UDD(Axn_discrete(df_year, x, n, i), i)
}

#LT tendencija
terms <- c(10, 20)

LT_term_trend <- LT_data %>%
  filter(Year %in% years_LT) %>%
  group_by(Year) %>%
  group_modify(~{
    # skaičiuojam visus (Age, Term) derinius

```

```

grid <- expand.grid(Age = ages, Term = terms)

Axn <- mapply(
  FUN = function(a, n) Axn_discrete(.x, x = a, n = n, i = i0),
  a = grid$Age,
  n = grid$Term
)

tibble(
  Age = grid$Age,
  Term = grid$Term,
  Axn_discrete = Axn,
  Axn_uniform = Axn_UDD(Axn, i = i0)
) %>%
ungroup()

LT_term_table <- LT_term_trend %>%
  filter(Year %in% key_years) %>%
  select(Year, Age, Term, Axn_uniform) %>%
  arrange(Term, Age, Year)

LT_term_table

#palyginimas
LT_compare <- LT_term_trend %>%
  left_join(
    LT_trend %>%
      select(Year, Age, Ax_uniform),
    by = c("Year", "Age")
  ) %>%
  mutate(
    ratio = (Axn_uniform / Ax_uniform) * 100
  )

#grafikas - terminuotas laikui begant
term_plot_data <- LT_term_trend %>%
  mutate(
    Age = factor(Age, levels = ages),
    Term = factor(Term, levels = c(10, 20),
      labels = c("n = 10", "n = 20"))
  )

term_plot <- ggplot(term_plot_data,
  aes(x = Year, y = Axn_uniform, color = Age, group = Age)) +
  geom_line(linewidth = 1.0) +
  geom_point(size = 1.3) +
  facet_wrap(~ Term, ncol = 1, scales = "fixed") +

  scale_x_continuous(breaks = seq(min(years_LT), max(years_LT), by = 2)) +
  scale_y_continuous(
    limits = c(0, 0.22),
    breaks = seq(0, 0.22, by = 0.04),

```

```

      labels = scales::label_number(accuracy = 0.01)
    ) +
    scale_color_brewer(palette = "Dark2") +
    labs(
      title = "Terminuoto draudimo vienkartinių grynųjų premijų dinamika",
      x = "Metai",
      y = "EPV",
      color = "Amžius (metais)"
    ) +
    base_theme +
    theme(panel.spacing = unit(10, "pt"),
          strip.text = element_text(size = 12))

term_plot

ggsave("terminuotas_trendas.png", plot = term_plot,
       width = 17, height = 10.5, units = "cm", dpi = 300)

#grafikas - palyginimas
ratio_plot_data <- LT_compare %>%
  mutate(
    Age = factor(Age, levels = ages),
    Term = factor(Term, levels = c(10, 20),
                  labels = c("n = 10", "n = 20"))
  )

term_ratio_plot <- ggplot(ratio_plot_data,
  aes(x = Year, y = ratio, color = Age, group = Age)) +
  geom_line(linewidth = 1.0) +
  geom_point(size = 1.3) +
  facet_wrap(~ Term, ncol = 1, scales = "fixed") +

  scale_x_continuous(breaks = seq(min(years_LT), max(years_LT), by = 2)) +
  scale_y_continuous(
    labels = scales::label_percent(accuracy = 1),
    breaks = seq(0, 0.45, by = 0.1)
  ) +
  scale_color_brewer(palette = "Dark2") +
  labs(
    title = "Terminuoto ir viso gyvenimo premijų santykio dinamika",
    x = "Metai",
    y = "Santykis, %",
    color = "Amžius (metais)"
  ) +
  base_theme

term_ratio_plot

ggsave("terminuotas_palyginimas.png", plot = term_ratio_plot,
       width = 17, height = 10.5, units = "cm", dpi = 300)

#premių palyginimas pagal amžių
age_effect_2024 <- LT_trend %>%
  filter(Year == 2024, Age %in% c(30, 40, 50)) %>%

```

```

select(Age, Ax_uniform) %>%
pivot_wider(names_from = Age, values_from = Ax_uniform, names_prefix = "Age_") %>%
mutate(
  ratio_40_30 = Age_40 / Age_30,
  ratio_50_30 = Age_50 / Age_30,
  pct_40_vs_30 = (ratio_40_30 - 1) * 100,
  pct_50_vs_30 = (ratio_50_30 - 1) * 100
) %>%
mutate(across(everything(), ~ round(.x, 4)))

age_effect_2024

```