



VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MAGISTRO STUDIJŲ PROGRAMA
FINANSŲ IR DRAUDIMO MATEMATIKA

**Kainų indeksų sudarymo metodų ir matematinių savybių analizė:
taikymas SVKI skaičiavimo kontekste**

**Analysis of Price Indices Construction Methods and Their Mathematical
Properties: Application in the Context of HICP Calculation**

Magistro baigiamasis darbas

Atliko: Audrius Sabaitis

VU el.p.: audrius.sabaitis@mif.stud.vu.lt

Vadovas: Dr. Martynas Manstavičius

Vilnius

2025

Santrauka

Suderintas vartotojų kainų indeksas (SVKI) yra svarbus ekonominis rodiklis, leidžiantis pagal Europos Sąjungoje suderintą metodologiją įvertinti vartojimo prekių ir paslaugų kainų pokyčius. Šio kainų indekso pokyčiai praktikoje laikomi infliacijos rodikliu. Atsižvelgiant į SVKI svarbą, būtina tobulinti skaičiavimo metodus, siekiant patikimesnių infliacijos įverčių. Pastaruoju metu daugelis šalių SVKI skaičiavimui pradeda naudoti prekybos tinklų kvitų duomenis, kurie laikomi patikimiausiu duomenų šaltiniu šio kainų indekso skaičiavimui. Lietuvoje šių duomenų naudojimas dar nėra plačiai ištirtas ir integruotas į SVKI skaičiavimą, todėl reikalingi papildomi tyrimai.

Pagrindinis šio magistro darbo tikslas – atlikti praktinius kainų indeksų skaičiavimus, išanalizuoti gautus rezultatus bei pateikti rekomendacijas Lietuvos SVKI skaičiavimo tobulinimui. Magistrinio darbo pradžioje pristatomi pagrindiniai kainų indeksų teorijos elementai, apimantys kainų indeksų sudarymo metodus ir savybes. Taip pat nagrinėjamos skirtingų kainų indeksų klasių formulės ir jų tarpusavio sąryšiai, pristatomi metodologiniai aspektai reikalingi kainų indeksų agregavimui, grandininiam laiko eilučių jungimui, poslinkio vertinimui, kainų ir kiekių indikatoriams bei kainų indeksų statistinėms charakteristikoms skaičiuoti.

Praktinėje dalyje naudojami Valstybės duomenų agentūros pateikti Lietuvos prekybos tinklų kvitų duomenys, atliekami įvairių kainų indeksų skaičiavimai ir statistinių charakteristikų analizė. Praktikoje naudojant kvitų duomenis rekomenduojami daugialypiai kainų indeksai, todėl ypatingas dėmesys skiriamas šių kainų indeksų parametrų modifikacijoms ir įtakų analizėms. Be to, prisidedant prie daugialypių kainų indeksų teorinio indėlio, darbe įrodomos GEKS–LM kainų indekso aksiomatinės savybės.

Raktiniai žodžiai: kainų indeksai, Suderintas vartotojų kainų indeksas (SVKI), kvitų duomenys, infliacija.

Summary

The Harmonised Index of Consumer Prices (HICP) is an important economic indicator that allows the assessment of changes in consumer goods and services prices based on a harmonised methodology applied within the European Union. In practice, changes in this price index are considered an indicator of inflation. Given the importance of the HICP, it is necessary to improve calculation methods in order to ensure a more reliable measurement of inflation. In recent years, many countries have begun to use retail scanner data for the calculation of the HICP, which are considered one of the most reliable data sources for calculating this price index. In Lithuania, the use of such data has not yet been widely studied or integrated into the HICP calculation, therefore further research is required.

The main objective of this master's thesis is to perform practical price indices calculations, analyse the obtained results, and provide recommendations for improving the calculation of the HICP in Lithuania. At the beginning of the thesis, the main elements of price index theory are presented, including methods and properties of price index construction. Different classes of price indices formulas and their interrelationships are also examined, along with methodological aspects required for price index aggregation, chain linking of time series, bias assessment, price and quantity indicators, and statistical characteristics of price indices.

In the empirical part, scanner data provided by the State Data Agency are used to perform various price indices calculations and statistical analyses. Since multilateral price indices are recommended in practice when using scanner data, particular attention is paid to parameter modifications of these indices and the analysis of the obtained results. In addition, contributing to the theoretical literature on multilateral price indices, the axiomatic properties of the GEKS–LM price index are proven in this thesis.

Keywords: price indices, Harmonised Index of Consumer Prices (HICP), scanner data, inflation.

Iliustracijų sąrašas

1	Duonos produktų kainų ir kiekių koreliacijos kitimas.	72
2	Pieno produktų kainų ir kiekių koreliacijos kitimas.	73
3	Obuolių kainų ir kiekių koreliacijos kitimas.	73
4	Duonos imties produktų Montgomery indikatorių kitimas.	75
5	Visų duonos produktų Montgomery indikatorių kitimas.	76
6	Pieno imties produktų Montgomery indikatorių kitimas.	76
7	Visų pieno produktų Montgomery indikatorių kitimas.	77
8	Obuolių imties Montgomery indikatorių kitimas.	77
9	Visų obuolių Montgomery indikatorių kitimas.	78
10	Duonos produktų pardavimų išskirtys, naudojant ekstremalių kainų filtrą, kuris pašalina po 1 procentą mažiausių ir didžiausių kainų.	79
11	Duonos produktų pardavimų išskirtys, naudojant ekstremalių kainų filtrą, kuris pašalina produktų pardavimus, kurių kaina yra 50 proc. mažesnė arba du kartus didesnė už vidutinę produkto kainą.	80
12	Duonos produktų pardavimų išskirtys, naudojant ekstremalių kainų, kuris pašalina produktų pardavimus, kurių kaina yra 50 proc. mažesnė arba du kartus didesnė už vidutinę produkto kainą, bei mažų pardavimų filtrus.	80
13	Obuolių pardavimų išskirtys, naudojant ekstremalių kainų filtrą, kuris pašalina po 1 procentą mažiausių ir didžiausių kainų.	81
14	Obuolių pardavimų išskirtys, naudojant ekstremalių kainų filtrą, kuris pašalina produktų pardavimus, kurių kaina yra 50 proc. mažesnė arba du kartus didesnė už vidutinę produkto kainą.	81
15	Obuolių pardavimų išskirtys, naudojant ekstremalių kainų, kuris pašalina produktų pardavimus, kurių kaina yra 50 proc. mažesnė arba du kartus didesnė už vidutinę produkto kainą, bei mažų pardavimų filtrus.	82
16	Duonos imties produktų elementariųjų kainų indeksų koeficientų kitimas.	83
17	Visų duonos produktų elementariųjų kainų indeksų koeficientų kitimas.	84
18	Pieno imties produktų elementariųjų kainų indeksų koeficientų kitimas.	86
19	Visų pieno produktų elementariųjų kainų indeksų koeficientų kitimas.	86
20	Obuolių imties elementariųjų kainų indeksų koeficientų kitimas.	88
21	Visų obuolių elementariųjų kainų indeksų koeficientų kitimas.	89
22	Pieno imties produktų bazinių kainų indeksų koeficientų kitimas.	91
23	Pieno imties produktų grandiniu metodu susietų bazinių kainų indeksų koeficientų kitimas.	92
24	Pieno imties produktų bazinių kainų indeksų grandininio nuokrypio kitimas.	93
25	Visų pieno produktų bazinių kainų indeksų koeficientų kitimas.	94
26	Visų pieno produktų grandiniu metodu susietų bazinių kainų indeksų koeficientų kitimas.	95
27	Visų pieno produktų bazinių kainų indeksų grandininio nuokrypio kitimas.	96
28	Obuolių imties bazinių kainų indeksų koeficientų kitimas.	96
29	Obuolių imties grandiniu metodu susietų bazinių kainų indeksų koeficientų kitimas.	98
30	Obuolių imties bazinių kainų indeksų grandininio nuokrypio kitimas.	99
31	Obuolių imties superlatyvių kainų indeksų koeficientų kitimas.	100
32	Obuolių imties superlatyvių grandiniu metodu susietų kainų indeksų koeficientų kitimas.	100
33	Obuolių imties superlatyvių kainų indeksų grandininio nuokrypių kitimas.	103
34	Pieno imties produktų superlatyvių kainų indeksų grandininio nuokrypių kitimas.	103
35	Visų pieno produktų superlatyvių kainų indeksų grandininio nuokrypių kitimas.	104
36	<i>Jackknife</i> metodu apskaičiuotų obuolių imties superlatyvių kainų indeksų rezultatų diagrama.	104
37	<i>Jackknife</i> metodu apskaičiuotų obuolių imties grandininio superlatyvinių kainų indeksų rezultatų diagrama.	105
38	Superlatyvaus r -ojo laipsnio kvadratinio vidurkio duonos imties produktų kainų indeksų koeficientų kitimo grafikas pasirinktoms parametro r reikšmėms.	106
39	<i>Jackknife</i> metodu apskaičiuotų duonos imties produktų r -ojo laipsnio kvadratinio vidurkio kainų indeksų rezultatų diagrama.	107

40	Obuolių daugialypių kainų indeksų kitimo grafikas.	108
41	GEKS obuolių kainų indeksas su 4, 7, 10 bei 13 mėnesių laiko lango trukmėmis.	110
42	CCDI obuolių kainų indeksas su 4, 7, 10 bei 13 mėnesių laiko lango trukmėmis.	111
43	GEKS–L obuolių kainų indeksas su 4, 7, 10 bei 13 mėnesių laiko lango trukmėmis.	111
44	GEKS–GL obuolių kainų indeksas su 4, 7, 10 bei 13 mėnesių laiko lango trukmėmis.	112
45	GEKS–W obuolių kainų indeksas su 4, 7, 10 bei 13 mėnesių laiko lango trukmėmis.	112
46	GEKS obuolių kainų indeksas suskaičiuotas naudojant skirtingus kainų indeksų laiko eilučių susiejimo metodus.	113
47	CCDI obuolių kainų indeksas suskaičiuotas naudojant skirtingus kainų indeksų laiko eilučių susiejimo metodus.	114
48	GEKS–L obuolių kainų indeksas suskaičiuotas naudojant skirtingus kainų indeksų laiko eilučių susiejimo metodus.	114
49	GEKS–GL obuolių kainų indeksas suskaičiuotas naudojant skirtingus kainų indeksų laiko eilučių susiejimo metodus.	115
50	GEKS–W obuolių kainų indeksas suskaičiuotas naudojant skirtingus kainų indeksų laiko eilučių susiejimo metodus.	115
51	Duonos produktų elastingumo kitimas, remiantis Lloyd–Moulton modelio rezultatais.	117
52	Pieno produktų elastingumo kitimas, remiantis Lloyd–Moulton modelio rezultatais.	117
53	Obuolių elastingumo kitimas, remiantis Lloyd–Moulton modelio rezultatais.	118
54	Duonos produktų GEKS–LM kainų indekso kitimas naudojant skirtingas elastingumo reikšmes.	119
55	Pieno produktų GEKS–LM kainų indekso kitimas naudojant skirtingas elastingumo reikšmes.	120
56	Obuolių GEKS–LM kainų indekso kitimas naudojant skirtingas elastingumo reikšmes.	120
57	Visų duonos produktų skirtingų kainų indeksų ir agregavimo metodų rezultatai.	121
58	Visų pieno produktų skirtingų kainų indeksų ir agregavimo metodų rezultatai.	122
59	Visų obuolių skirtingų kainų indeksų ir agregavimo metodų rezultatai.	122
60	Pieno imties produktų Jevons kainų indekso kitimai naudojant skirtingus išskirčių filtrus.	124
61	Pieno imties produktų Lowe kainų indekso kitimai naudojant skirtingus išskirčių filtrus.	124
62	Pieno imties produktų Törnqvist kainų indekso kitimai naudojant skirtingus išskirčių filtrus.	125
63	Pieno imties produktų GEKS kainų indekso kitimai naudojant skirtingus išskirčių filtrus.	125
64	Duonos imties produktų Bennet indikatorių kitimas.	139
65	Visų duonos produktų Bennet indikatorių kitimas.	139
66	Pieno imties produktų Bennet indikatorių kitimas.	140
67	Visų pieno produktų Bennet indikatorių kitimas.	140
68	Obuolių imties Bennet indikatorių kitimas.	141
69	Visų obuolių Bennet indikatorių kitimas.	141
70	Duonos imties produktų bei visų pardavimų elementariųjų kainų indeksų skirtumų kitimas.	142
71	Pieno imties produktų bei visų pardavimų elementariųjų kainų indeksų skirtumų kitimas.	142
72	Obuolių imties bei visų pardavimų elementariųjų kainų indeksų skirtumų kitimas.	143
73	Duonos imties produktų superlatyvių kainų indeksų koeficientų kitimas.	144
74	Duonos imties produktų grandininio metodu susietų superlatyvių kainų indeksų koeficientų kitimas.	144
75	Pieno imties produktų superlatyvių kainų indeksų koeficientų kitimas.	145
76	Pieno imties produktų grandininio metodu susietų superlatyvių kainų indeksų koeficientų kitimas.	145

Lentelių sąrašas

1	COICOP 2018 klasifikatoriaus struktūros pavyzdys.	53
2	Kainų indeksų skaičiavimo naudojant kvitų duomenis variantai ir jų parametrai.	54
3	Daugialypių kainų indeksų agregavimo variantai.	55
4	Imties ir visų pardavimų duomenų statistika.	71
5	Agreguotų duomenų, naudojamų kainų indeksų skaičiavimams, pavyzdys.	72
6	Metiniai produktų apyvartų bei parduotų kiekių duomenys.	74
7	Skirtingų išskirčių algoritmų taikymo rezultatai – pardavimų, nespriskiriamų išskirtims, skaičiai.	82
8	Duonos imties produktų elementariųjų kainų indeksų sąryšių charakteristikos.	84
9	Duonos imties bei visų produktų elementariųjų kainų indeksų sąryšių charakteristikos.	85
10	Pieno imties produktų elementariųjų kainų indeksų sąryšių charakteristikos.	87
11	Pieno imties bei visų produktų elementariųjų kainų indeksų sąryšių charakteristikos.	88
12	Obuolių imties elementariųjų kainų indeksų sąryšių charakteristikos.	89
13	Obuolių imties bei visų produktų elementariųjų kainų indeksų sąryšių charakteristikos.	90
14	Pieno imties produktų bazinių kainų indeksų sąryšių charakteristikos.	91
15	Pieno imties produktų bazinių kainų palyginimas su grandiniu metodu susietais baziniais kainų indeksais.	93
16	Visų pieno produktų bazinių kainų indeksų sąryšių charakteristikos.	94
17	Visų pieno produktų bazinių kainų indeksų palyginimas su grandininiu metodu susietais baziniais kainų indeksais.	95
18	Obuolių imties bazinių kainų indeksų sąryšių charakteristikos.	97
19	Obuoliai bazinių kainų indeksų palyginimas su grandininiu metodu susietais baziniais kainų indeksais.	98
20	Obuolių imties superlatyvių kainų indeksų statistinės charakteristikos bei tarpusavio sąryšio rodikliai.	101
21	Superlatyvių kainų indeksų palyginimas su grandininiais kainų indeksais.	101
22	Superlatyvių obuolių kainų indeksų vidutiniai skirtumai tarp tiesioginių bei grandininių kainų indeksų.	102
23	Bazinių obuolių kainų indeksų vidutiniai skirtumai tarp tiesioginių bei grandininių kainų indeksų.	102
24	Superlatyvių kainų indeksų iteracijų statistikos	105
25	Grandininių superlatyvių kainų indeksų iteracijų statistikos.	106
26	<i>Jackknife</i> metodo r -ojo laipsnio kvadratinio vidurkio kainų indeksų iteracijų statistikos.	107
27	Daugialypių kainų indeksų vidutiniai tarpusavio skirtumai.	109
28	Daugialypių kainų indeksų priklausomybės ir nuokrypių statistinės charakteristikos.	110
29	Produktų elastingumo vertinimo metodų rezultatai.	119
30	COICOP 2018 klasifikatoriaus agregatų pavyzdys.	128
31	Prekybos tinklų kvitų duomenų struktūra.	138
32	Europos šalių SVKI skaičiavimo naudojant kvitų duomenis metodų lentelė.	146

Turinys

Santrauka	2
Summary	3
Iliustracijų sąrašas	4
Lentelių sąrašas	6
Žymėjimai	9
Santrumpos	10
Išvadas	11
1. Literatūros apžvalga	13
1.1. Kainų indeksų raida	13
1.2. Kainų indeksų skaičiavimas Lietuvoje	13
2. Teorinė dalis	15
2.1. Kainų indeksų sudarymo metodai	15
2.1.1. Aksiomatinis kainų indeksų sudarymo metodas	15
2.1.2. Ekonominis kainų indeksų sudarymo metodas	19
2.1.3. Stochastinis kainų indeksų sudarymo metodas	24
2.2. Kainų indeksų klasės	27
2.2.1. Elementarieji kainų indeksai	27
2.2.2. Baziniai kainų indeksai	31
2.2.3. Superlatyvūs kainų indeksai	37
2.2.4. Daugialypiai kainų indeksai	43
2.2.5. Tolydūs kainų indeksai	49
2.3. Kainų indeksų agregavimas	52
2.4. Kainų indeksų grandininis jungimas	55
2.5. Kainų indeksų poslinkio vertinimas	58
2.6. Kainų ir kiekių indikatoriai	60
2.7. Statistiniai kainų indeksų rodikliai	62
3. GEKS–LM kainų indekso savybių analizė	65
4. Praktinė dalis	71
4.1. Duomenų apžvalga	71
4.2. Kainų ir kiekio indikatoriai	74
4.3. Duomenų išskirčių analizė	78
4.4. Elementarieji kainų indeksai	83
4.5. Baziniai kainų indeksai	90
4.6. Superlatyvūs kainų indeksai	99
4.7. Daugialypiai kainų indeksai	108
4.8. GEKS–LM kainų indeksas	116
4.9. Kainų indeksų agregavimas	121
4.10. Kainų indeksų jautrumas duomenų filtrams	123
4.11. Kainų indeksų rezultatų apibendrinimas	126
5. Metodologiniai aspektai skaičiuojant SVKI	128
5.1. Lietuvos SVKI sudarymo aspektai	128
5.2. SVKI tobulinimo rekomendacijos	130

Rezultatai ir išvados	134
Literatūra ir šaltiniai	137
1 priedas. Prekybos tinklų kvitų duomenų struktūra	138
2 priedas. Bennet kainų ir kiekių indikatorių grafikai	139
3 priedas. Elementariųjų kainų indeksų skirtumų grafikai	142
4 priedas. Superlatyvių kainų indeksų koeficientų kitimo grafikai	144
5 priedas. Europos šalių SVKI skaičiavimo naudojant kvitų duomenis metodai	146

Žymėjimai

Pagrindiniai darbe naudojami žymėjimai bei jų paaiškinimai.

- I – kainų indeksas
- Q – kiekio indeksas
- I_C – Carli kainų indeksas
- I_D – Dutot kainų indeksas
- I_F – Fisher kainų indeksas
- Q_F – Fisher kiekio indeksas
- I_H – harmoninis kainų indeksas
- I_J – Jevons kainų indeksas
- I_K – Konüs kainų indeksas
- I_L – Laspeyres kainų indeksas
- Q_L – Laspeyres kiekio indeksas
- I_{GL} – geometrinis Laspeyres kainų indeksas
- I_{Lo} – Lowe kainų indeksas
- I_{LM} – Lloyd–Moulton kainų indeksas
- I_P – Paasche kainų indeksas
- Q_P – Paasche kiekio indeksas
- I_{GP} – geometrinis Paasche kainų indeksas
- I_r – r -ojo laipsnio kvadratinio vidurkio kainų indeksas
- Q_r – r -ojo laipsnio kvadratinio vidurkio kiekio indeksas
- I_T – Törnqvist kainų indeksas
- I_W – Walsh kainų indeksas
- I_Y – Young kainų indeksas
- I_{SV} – Sato–Vartia kainų indeksas
- I_{CCDI} – Caves–Christensen–Diewert–Inklaar (CCDI) kainų indeksas
- I_{GEKS} – Gini–Éltető–Köves–Szulc (GEKS) kainų indeksas
- I_{GEKS-L} – GEKS–Laspeyres kainų indeksas
- $I_{GEKS-GL}$ – GEKS–geometrinis Laspeyres kainų indeksas
- I_{GEKS-W} – GEKS–Walsh kainų indeksas
- $I_{GEKS-LM}$ – GEKS–Lloyd–Moulton kainų indeksas

Santrumpos

Pagrindinės darbe vartojamos santrumpos bei jų paaiškinimai.

COICOP	–	Individualaus vartojimo išlaidų pagal paskirtį klasifikatorius (angl. <i>Classification of Individual Consumption by Purpose</i>)
DTW	–	Dinaminis laiko eilutės išlyginimas
EA	–	Elementarusis agregatas
ECB	–	Europos centrinis bankas
ES	–	Europos Sąjunga
EUROSTAT	–	Europos Sąjungos statistikos tarnyba
ILO	–	Tarptautinė darbo organizacija (TDO)
IMF	–	Tarptautinis valiutos fondas (TVF)
MAD	–	Vidutinis absoliutus nuokrypis
MAE	–	Vidutinė absoliuti paklaida
OECD	–	Ekonominio bendradarbiavimo ir plėtros organizacija (EBPO)
SVKI	–	Suderintas vartotojų kainų indeksas
UN	–	Jungtinės Tautos (JT)
UNECE	–	Jungtinių Tautų Europos ekonominė komisija (JTEEK)
VDA	–	Valstybės duomenų agentūra
VKI	–	Vartotojų kainų indeksas
WB	–	Pasaulio bankas (PB)
RMSE	–	Šaknis iš vidutinės absoliučiosios paklaidos

Išvadas

Suderintas vartotojų kainų indeksas (SVKI) yra vienas svarbiausių ekonominių rodiklių, leidžiančių vertinti infliacijos tempus Europos Sąjungoje. Šio rodiklio nuolatinis tobulinimas ir tikslumo užtikrinimas yra būtinas siekiant patikimos infliacijos analizės bei pagrįstų ekonominės politikos sprendimų. Pastaraisiais metais, sparčiai augant prekybos tinklų kvitų duomenų prieinamumui ir populiarumui, vis daugiau šalių į SVKI skaičiavimus įtraukia šį alternatyvų duomenų šaltinį.

Prekybos tinklų kvitų duomenys suteikia galimybę itin detalai ir tiksliai įvertinti produktų kainas įvairiais pjūviais – teritoriniu, laiko bei produktų charakteristikų aspektu. Dėl šių privalumų vis dažniau analizuojamos galimybės SVKI skaičiavimui panaudoti ir Lietuvos prekybos tinklų kvitų duomenis, kas leistų efektyviau ir tiksliau vertinti infliacijos procesus šalyje.

Pagrindinė priežastis, kodėl šių duomenų neįmanoma tiesiogiai integruoti taikant tradicinius SVKI skaičiavimo metodus, yra ta, jog kvitų duomenys pasižymi dideliu apimties, struktūros ir dinamikos sudėtingumu, todėl šie reikalauja pažangesnių skaičiavimo algoritmų [16]. Šiuo metu labiausiai rekomenduojami ir plačiausiai taikomi metodai yra daugialypiai (angl. *multilateral*) kainų indeksai, kurie buvo sukurti siekiant tinkamai apdoroti didelio detalumo kainų duomenis ir užtikrinti laiko eilučių palyginamumą.

Daugialypių kainų indeksų teorija pastaraisiais metais sparčiai plėtojama, o prie šios srities vystymo prisideda daugybė ekonomistų, matematikų ir statistikos mokslininkų visame pasaulyje. Naujausiuose darbuose profesorius Jacek Białek nagrinėja GEKS tipo kainų indeksų pritaikomumą bei jų modifikacijas [3], taikant skirtingus agregavimo aspektus. Tradiciškai daugialypiuose kainų indeksuose agregavimui naudojami superlatyvūs kainų indeksai, tačiau naujausiuose tyrimuose analizuojamos ir bazinių kainų indeksų alternatyvos bei vertinama jų įtaka galutiniams rezultatams [6].

Be to, Jacek Białek 2018 metais pristatė R programavimo kalbos paketą [2], skirtą kainų indeksų skaičiavimui naudojant prekybos tinklų kvitų duomenis. Šis paketas yra nuolat plėtojamas ir pritaikomas naujiems metodologiniams sprendimams. Remiantis būtent šiuo R paketu, darbe bus atliekama kainų indeksų analizė, naudojant Lietuvos prekybos tinklų kvitų duomenų pavyzdžius.

Pastaruosiuose savo straipsniuose Jacek Białek taip pat pristato naujas kainų indeksų klases bei kuria naujus GEKS tipo kainų junginius [5]. Vienas iš jų – GEKS–LM indeksas, paremtas Lloyd–Moulton kainų indeksu, kuris leidžia įvertinti kainų lygio pasikeitimą naudojant produktų elastingumo parametą. Nors straipsnyje pateikiama šio kainų indekso matematinė išraiška ir pagrindinės savybės, įrodymas paliekamas skaitytojui, tad šiame darbe minėtas įrodymas bus pateiktas ir išsamiai aptartas.

Darbo problema: atsižvelgiant į prekybos tinklų kvitų duomenų teigiamas savybes SVKI skaičiavimo tikslumui užtikrinti bei šių duomenų prieinamumą Lietuvoje, aktuali tampa šių duomenų panaudojimas oficialiojoje statistikoje, tačiau pagrindinė problema yra ta, jog Lietuvoje iki šiol nėra pakankamai nuosekliai išanalizuoti kainų indeksų skaičiavimo metodai, kurie taikomi naudojant kvitų duomenis. Siekiant į SVKI skaičiavimą įtraukti daugialypius kainų indeksus, būtina pagrįsti jų pasirinkimą ir įvertinti, kodėl kitos kainų indeksų klasės nėra tinkamos dirbant su kvitų duomenimis, taip pat detaliau išnagrinėti jų skaičiavimo formules ir savybes. Be to, šiuo metu nėra galimybės visų SVKI skaičiavimo lygmenų visiškai pakeisti vien tik kvitų duomenimis, todėl būtina spręsti skirtingų duomenų šaltinių derinimo klausimą, užtikrinant kvitų duomenimis apskaičiuotų kainų indeksų suderinamumą su tradiciniu būdu renkamais kainų duomenimis.

Darbo tikslai:

- Pagrindinius kainų indeksų teorijos principus pritaikyti praktiniams kainų indeksų skaičiavimams, atlikti gautų rezultatų analizę remiantis kainų indeksų teorijos elementais bei statistinėmis charakteristikomis;
- Įrodyti GEKS–LM kainų indeksui būdingų daugialypių kainų indeksų aksiomų teisingumą;

- Atliktus Lietuvos SVKI skaičiavimo elementų analizę, pateikti rekomendacijas šio rodiklio skaičiavimo tobulinimui į skaičiavimus įtraukiant prekybos tinklų kvitų duomenis.

Darbo struktūra: darbą sudaro penkios dalys — literatūros apžvalga, teorinė bei praktinė dalys, taip pat skyrius, skirtas GEKS–LM aksiomatinių savybių įrodymui bei dalis, skirta metodologinėms rekomendacijoms Lietuvoje skaičiuojamo SVKI tobulinimui. Be šių dalių, taip pat yra įvadas, rezultatų ir išvadų, literatūros bei priedų skyriai. Darbo pradžioje pateikiami iliustracijų bei lentelių sąrašai, pagrindiniai žymėjimai bei santrumpos. Literatūros apžvalgoje pristatomi pagrindiniai teorijos šaltiniai ir pagrindinė darbo problematika. Teorinėje dalyje pateikiami pagrindiniai kainų indeksų sudarymo metodai, pristatomos kainų indeksų klasės bei jų savybės, aptariamas kainų indeksų agregavimas, gradininis jungimas, statistinės charakteristikos bei kainų ir kiekio indikatoriai. Vėliau pateikiamas GEKS–LM kainų indekso aksiomatinių savybių įrodymas. Praktinėje dalyje naudojant R programavimo kalbą ir *RStudio* programavimo aplinką bei *PriceIndices* paketą kainų indeksų skaičiavimui atliekama skirtingų duomenų rinkinių bei kainų indeksų skaičiavimo analizė. Atlikus gautų rezultatų analizę bei apžvelgus SVKI sudarymo metodiką, pateikiamos rekomendacijos Lietuvos SVKI skaičiavimo metodologijai tobulinti. Darbo pabaigoje apibendrinami gauti rezultatai bei pateikiamos išvados. Darbą sudaro 32 lentelės bei 76 paveikslėliai. Literatūros sąrašas – 27 šaltiniai.

1. Literatūros apžvalga

1.1. Kainų indeksų raida

Kainų indeksai yra vieni svarbiausių ekonominių rodiklių, naudojamų kainų dinamikai, infliacijai bei perkamajai galiai vertinti. Jų raida glaudžiai susijusi su ekonominės teorijos, statistinių metodų ir duomenų prieinamumo pažanga. Pirmieji kainų indeksai buvo grindžiami paprastais vidurkių skaičiavimo principais, tačiau ilgainiui tapo sudėtingais, teoriniu pagrindu pagrįstais rodikliais.

XIX a. pabaigoje ir XX a. pradžioje susiformavo klasikiniai kainų indeksai, tokie kaip Laspeyres, Paasche ir Fisher, kurie padėjo pagrindus šiuolaikinei indeksų teorijai. Laspeyres indeksas remiasi bazinio laikotarpio svoriais, todėl yra lengvai interpretuojamas, tačiau linkęs pervertinti kainų augimą. Paasche indeksas naudoja einamojo laikotarpio svorius, bet reikalauja daugiau duomenų ir gali nuvertinti kainų pokyčius. Fisher indeksas, apibrėžiamas kaip Laspeyres ir Paasche indeksų geometrinis vidurkis, dažnai laikomas kompromisiniu ir teoriškai pagrįstu sprendimu [11].

Vystantis ekonomikos teorijai, kainų indeksų analizė buvo papildyta aksiomatinio ir ekonominiu požiūriais. Aksiomatinis požiūris vertina indeksus pagal jų atitikimą tam tikroms matematinėms savybėms, pavyzdžiui, laiko grįžtamumui ar tranzityvumui, o ekonominis požiūris sieja indeksus su vartotojo elgsena ir naudingumo teorija. Šie požiūriai reikšmingai prisidėjo prie indeksų teorijos formalizavimo [12].

Sparčiai populiarėjant kvitų duomenų panaudojimui kainų indeksų skaičiavime, atsirado poreikis indeksams, gebantiems apdoroti didelius duomenų rinkinius. Šiam tikslui atsirado pirmieji daugialypiai kainų indeksai, tokie kaip GEKS (Gini–Eltető–Köves–Szulc) kainų indeksas. GEKS kainų indeksai pasižymi tranzityvumo savybe ir leidžia palyginti kainų lygius tarp kelių laikotarpių, todėl tapo ypač svarbiais oficialiojoje statistikoje [21].

Kita vertus, daugialypių kainų indeksų taikymas laiko eilučių analizėje sukėlė metodologinių iššūkių, susijusių su kainų indeksų stabilumu. Siekiant užtikrinti laiko eilučių tęstinumą, buvo sukurti įvairūs susiejimo metodai. Šie metodai leidžia suderinti teorines kainų indeksų aksiomas su praktiniais oficialiosios statistikos reikalavimais [9].

Apibendrinant, kainų indeksų raida atspindi nuolatinę pusiausvyros paiešką tarp teorinio pagrįstumo, statistinio tikslumo ir praktinio pritaikomumo. Šiuolaikiniai kainų indeksai, ypač daugialypiai, tokie kaip GEKS, yra svarbus žingsnis į priekį, leidžiantis geriau išnaudoti didžiulius kvitų duomenis ir tiksliau įvertinti kainų dinamiką sparčiai kintančioje ekonominėje aplinkoje.

1.2. Kainų indeksų skaičiavimas Lietuvoje

Lietuvoje kainų indeksų skaičiavimą, analizę ir plėtrą vykdo Valstybės duomenų agentūros Kainų statistikos skyrius. Remiantis skyriaus nuostatomis [25], skyrius organizuoja ir tvarko kainų statistiką, kuria ir plečia kainų indeksų sistemą, diegia naujus kainų duomenų šaltinius, sudaro vartotojų ir trumpojo laikotarpio kainų indeksus, reikalingus infliacijos procesų stebėsenai bei makroekonomikos prognozėms rengti.

Lietuvoje skaičiuojami ir analizuojami įvairūs kainų indeksai, kurie apimta vartojimo prekių ir paslaugų, suderintą vartotojų kainų indeksą, suderintą vartotojų kainų indeksą pagal pastovius mokesčių tarifus, būsto kainų indeksą, savininkų užimtų būstų kainų indeksą, gamintojų parduotos pramonės produkcijos, importuotų prekių bei eksportuotų prekių kainų indeksus, ūkio subjektams suteiktų paslaugų kainų indeksą, statybos sąnaudų elementų kainų indeksą, taip pat išgautos naftos, gamtinių dujų bei elektros energijos kainų indeksus. Nors kiekvienas iš šių kainų indeksų yra svarbus įvairioms valstybės ekonominėms analizės ir prognozavimo

tikslams, šiame magistro darbe ypatingas dėmesys bus skirtas suderinto vartotojų kainų indekso (SVKI) analizei bei tobulinimui.

Remiantis SVKI sudarymo metodika [27], suderintas vartotojų kainų indeksas yra skirtas metodologiškai suderintam infliacijos rodikliui Europos Sąjungoje (ES) apskaičiuoti, užtikrinti tarptautinį palyginamumą bei sudarant prielaidas Europos Centrinio Banko (ECB) pinigų politikos vykdymui. ES valstybių narių SVKI naudojami Europos vartotojų kainų, pinigų sąjungos vartotojų kainų ir Europos ekonominės erdvės vartotojų kainų indeksams sudaryti. Pagrindiniai statistinės informacijos vartotojai yra Europos Komisijos institucijos, ECB, tarptautinės organizacijos, šalies valstybės institucijos, žiniasklaida, verslo ir mokslo atstovai bei fiziniai asmenys. Šie duomenys naudojami ekonomikos raidos ir vartojimo rinkos analizei, prognozėms, sutarčių indeksavimui bei konvergencijos ataskaitoms rengti.

Ne mažiau svarbus rodiklis yra ir Vartotojų kainų indeksas (VKI), kuris, nors ir skaičiuojamas nacionaliniu lygmeniu, save reikšme yra lygiavertis SVKI, o jo skaičiavimo sandara panaši ir paremta tuo pačiu vartojimo prekių ir paslaugų klasifikatoriumi bei naudojamais duomenimis. Remiantis VKI sudarymo metodika [26], šio indekso tikslas – nustatyti vartojimo prekių ir paslaugų, kurias įsigyja, apmoka ir tiesiogiai vartojimo poreikiams naudoja namų ūkiai, vidutinį kainų lygio pokytį per tam tikrą laikotarpį. VKI naudojamas infliacijos lygiui šalyje matuoti, makroekonominiams rodikliams palyginamosiomis kainomis vertinti, analitiniais ir prognozavimo tikslams, tai pat yra pagrindinė indeksavimo priemonė.

Pagrindiniai VKI vartotojai yra Lietuvos bankas, Finansų ministerija, Socialinė apsaugos ir darbo ministerija, Ekonomikos ir inovacijų ministerija, Aplinkos ministerija, Teisingumo ministerija, Europos Sąjungos statistikos tarnyba (Eurostatas), Tarptautinė darbo organizacija, Ekonominio bendradarbiavimo ir plėtros organizacija ir kitos tarptautinės organizacijos. Be to, VKI plačiai naudojamas nacionalinių sąskaitų, vidaus prekybos, transporto ir paslaugų statistikos srityse.

2. Teorinė dalis

Šioje darbo dalyje pateikiama reikalinga teorinė medžiaga apie kainų indeksų sudarymo metodus, pagrindines kainų indeksų klases, jų pagrindines savybes bei sąryšius. Taip pat pristatomi kainų indeksų agregavimo ir grandininio jungimo metodai, nagrinėjama kainų indeksų poslinkio bei dinamikos vertinimo teorija, apžvelgiamos pagrindinės kainų indeksų charakteristikos bei įverčių skaičiavimo algoritmai naudojant kvitų duomenis, o skyriaus pabaigoje trumpai apžvelgiami pagrindiniai SVKI sudarymo principai.

2.1. Kainų indeksų sudarymo metodai

Šiame skyriuje apžvelgiami pagrindiniai kainų indeksų sudarymo metodai – aksiomatinis, ekonominis ir stochastinis, bei pateikiami šių metodų rezultatai. Medžiaga parengta remiantis [19, 20] vartotojų kainų indekso sudarymo vadovais.

2.1.1. Aksiomatinis kainų indeksų sudarymo metodas

Aksiomatinis kainų indeksų sudarymo metodas grindžiamas teorinių savybių vadinamų aksiomomis apibrėžimu kainų indeksams bendrąja prasme, tačiau dėl savo ypatumų kiekvienas kainų indeksas nebūtinai teikina visas aksiomas, nes tai priklauso nuo kiekvieno kainų indeksų skaičiavimo tikslo. Taigi, toliau apžvelkime kainų indeksų aksiomas bazinių kainų indeksų grupei. Baziniai kainų indeksai – tai indeksai, kurie įvertina kainų lygio pasikeitimą tarp dviejų laiko momentų – bazinio laikotarpio ir ataskaitinio laikotarpio. Tai buvo pirmoji kainų indeksų klasė, kuriai buvo suformuluotos pradinės kainų indeksų teorijos aksiomos.

Apibrėžkime pagrindinius žymėjimus – tegul n yra produktų skaičius, p_i^0 – i -ojo produkto bazinė kaina, p_i^t – i -ojo produkto kaina laiko momentu t , q_i^0 – i -ojo produkto bazinis kiekis, q_i^t – i -ojo produkto kiekis laiko momentu t . Žymėjimai be indekso i reiškia visų produktų kainų ar kiekių vektorius atitinkamais laiko momentais. Pažymėkime $I(p^0, p^t, q^0, q^t)$ bazinį kainų indeksą, kaip funkciją, priklausomą nuo kainų ir kiekių vektorių. Analogiškai, pažymėkime $Q(p^0, p^t, q^0, q^t)$ kaip bazinį kiekių indeksą. Be to, tegul $V^t = \sum_{i=1}^n p_i^t q_i^t$ žymi bendrą visų produktų išlaidų sumą laiko momentu t , tuomet

$$\frac{V^t}{V^0} = I(p^0, p^t, q^0, q^t) \times Q(p^0, p^t, q^0, q^t), \quad (1)$$

t. y. laikotarpio t ir bazinio laikotarpio išlaidų santykis yra išreiškiamas kainų ir kiekių indeksų sandauga.

Laikykite, jog kiekvienas kainų ar kiekių vektorių elementas yra teigiamas, t. y. $p_i^t > 0$ ir $q_i^t > 0$. Be to, jeigu $p^0 = p^t$, žymėsime p , analogiškai, jeigu $q^0 = q^t$, žymėsime q . Toliau pateikiamos kainų indeksų aksiomos pagal atitinkamų savybių grupes.

Bendrosios aksiomos

A1. **Neneigiamumas** – $I(p^0, p^t, q^0, q^t) > 0$;

A2. **Tolydumas** – $I(p^0, p^t, q^0, q^t)$ yra tolydi funkcija kiekvieno iš argumentų atžvilgiu;

A3. **Identiškumas arba pastovių kainų aksioma** – $I(p, p, q^0, q^t) = 1$;

ši aksioma teigia, jeigu produktų kainos yra vienodos laiko momentais 0 ir t , kainų indeksas lygus vienetui, nepriklausomai nuo parduotų produktų kiekių pasikeitimo šias laiko momentais. Ši aksioma negalioja, jeigu kiekiai lieka pastovūs, o kainos pasikeičia.

A4. Fiksuoto krepšelio arba pastovių kiekių aksioma –

$$I(p^0, p^t, q, q) = \frac{\sum_{i=1}^n p_i^t q_i}{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i};$$

ši aksioma teigia, jeigu parduotų produktų kiekiai išlieka pastovūs laiko momentais 0 ir t , t. y. $q^0 = q^t$, tuomet kainų indeksas lygus fiksuoto krepšelio išlaidų santykiui atitinkamais laiko momentais.

Homogeniškumo aksiomos

Toliau pateiktos aksiomos apibrėžia kainų indekso $I(p^0, p^t, q^0, q^t)$ elgesį, kai vienas iš parametrų p^0, p^t, q^0, q^t yra proporcingas dydžiui λ .

A5. Proporcingumas laikotarpio t kainų atžvilgiu –

$$I(p^0, \lambda p^t, q^0, q^t) = \lambda I(p^0, p^t, q^0, q^t), \forall \lambda > 0;$$

A6. Atvirkščias proporcingumas bazinio laikotarpio kainų atžvilgiu –

$$I(\lambda p^0, p^t, q^0, q^t) = \lambda^{-1} I(p^0, p^t, q^0, q^t), \forall \lambda > 0;$$

aksiomos A5 ir A6 apibrėžia kaip keičiasi kainų indeksas, jeigu kainos proporcingos parametru λ . Jei laikotarpio t kainos yra padauginamos iš parametro λ , tuomet kainų indeksas tiesiogiai proporcingas tam parametru, jeigu padauginamos bazinio laikotarpio kainos, kainų indeksas atvirkščiai proporcingas pradiniam kainų indeksui.

A7. Invariantiškumas proporcingo pasikeitimo laikotarpio t kiekio atžvilgiu –

$$I(p^0, p^t, q^0, \lambda q^t) = I(p^0, p^t, q^0, q^t), \forall \lambda > 0;$$

A8. Invariantiškumas proporcingo pasikeitimo bazinio laikotarpio kiekio atžvilgiu –

$$I(p^0, p^t, \lambda q^0, q^t) = I(p^0, p^t, q^0, q^t), \forall \lambda > 0;$$

aksiomos A7 ir A8 teigia, jeigu bazinio ar laiko momento t svoriai yra proporcingi parametru λ , kainų indeksas nepasikeičia.

Invariantiškumo ir simetriškumo aksiomos

A9. Produktų apverčiamumo savybė arba invariantiškumas produktų sekos keitimo atžvilgiu –

$$I(p^{0*}, p^{t*}, q^{0*}, q^{t*}) = I(p^0, p^t, q^0, q^t),$$

kur p^{j*} žymi kainų p^j , o q^{j*} kiekio vektoriaus q^j perstatą (vektoriaus komponentų sekos eilės pakeitimą) atitinkamiems laiko momentams $j \in \{0, t\}$.

A10. **Invariantiškumas matavimo vienetų pakeitimo atžvilgiu arba suderinamumo aksioma** –

$$I(\alpha_1 p_1^0, \dots, \alpha_n p_n^0; \alpha_1 p_1^t, \dots, \alpha_n p_n^t; \alpha_1^{-1} q_1^0, \dots, \alpha_n^{-1} q_n^0; \alpha_1^{-1} q_1^t, \dots, \alpha_n^{-1} q_n^t) \\ = I(p_1^0, \dots, p_n^0; p_1^t, \dots, p_n^t; q_1^0, \dots, q_n^0; q_1^t, \dots, q_n^t), \forall \alpha_1 > 0, \dots, \alpha_n > 0;$$

aksioma teigia, jog kainų indeksas nepasikeičia, jeigu pasikeičia produktų matavimo vienetų dydžiai.

A11. **Laiko apverčiamumo aksioma** – $I(p^0, p^t, q^0, q^t) = \frac{1}{I(p^t, p^0, q^t, q^0)}$;

aksioma teigia, jog sukeitus momento t ir bazinio laikotarpio kainų ir atitinkamai kiekių vektorius, kainų indeksas yra atvirkščiai proporcingas pradiniam kainų indeksui be pakeitimų.

A12. **Kiečio apverčiamumo aksioma** – $I(p^0, p^t, q^0, q^t) = I(p^0, p^t, q^t, q^0)$;

aksioma teigia, jog vietomis sukeitus kiekių vektorius, kainų indeksas nepasikeičia.

A13. **Kainų apverčiamumo arba kainų svorių simetriškumo aksioma** –

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i^t q_i^t}{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^0} \right) / I(p^0, p^t, q^0, q^t) = \left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^t}{\sum_{i=1}^n p_i^t q_i^0} \right) / I(p^t, p^0, q^0, q^t);$$

pasinaudojus (1) formule galima apibrėžti kiečio indeksą Q kainų indekso I pagalba, tuomet galima matyti, jog aksioma A13 yra ekvivalenti toliau pateiktai aksiomai apibrėžtai kiečio indeksui Q , t. y. $Q(p^0, p^t, q^0, q^t) = Q(p^t, p^0, q^0, q^t)$. Taigi, jeigu sukeičiame abiejų periodų kainų vektorius, tuomet kiečio indeksas išlieka nepakitęs, todėl, jeigu tų pačių produktų kainos abiem laiko momentais yra naudojamos kiekių svoriams įvertinti kiečio indeksui, tuomet aksioma A13 teigia, jog tos kainos yra simetriškos kiečio indekso atžvilgiu.

Vidutinės reikšmės aksiomos

A14. **Vidutinės kainos vertės aksioma** –

$$\min_{i=1, \dots, n} \left(\frac{p_i^t}{p_i^0} \right) \leq I(p^0, p^t, q^0, q^t) \leq \max_{i=1, \dots, n} \left(\frac{p_i^t}{p_i^0} \right),$$

aksioma teigia, jog kainų indekso reikšmė yra tarp mažiausio ir didžiausio galimo produktų dviejų laikotarpių kainų santykių.

A15. **Vidutinės kiečio vertės aksioma** –

$$\min_{i=1, \dots, n} \left(\frac{q_i^t}{q_i^0} \right) \leq \frac{V^t/V^0}{I(p^0, p^t, q^0, q^t)} \leq \max_{i=1, \dots, n} \left(\frac{q_i^t}{q_i^0} \right),$$

čia V^t yra periodo t produktams skirtos išlaidos. Pasinaudojus (1) formule ir apibrėžus kiečio indeksą Q naudojant kainų indeksą I , galima matyti, jog aksioma A15 yra ekvivalenti toliau pateiktai aksiomai susijusiai su kiečio indeksu Q :

$$\min_{i=1, \dots, n} \left(\frac{q_i^t}{q_i^0} \right) \leq Q(p^0, p^t, q^0, q^t) \leq \max_{i=1, \dots, n} \left(\frac{q_i^t}{q_i^0} \right),$$

t. y. kiečio indeksas Q yra tarp mažiausio ir didžiausio galimų dviejų periodų produktų kiekių santykių.

A16. **Rėžių aksioma** – kainų indeksas $I(p^0, p^t, q^0, q^t)$ yra aprėžtas iš viršaus Laspeyres ir iš apačios Paasche kainų indeksais. Ši aksioma glaudžiai susijusi su ekonominiu kainų indeksų sudarymo požiūriu, todėl jos suderinamumas bus apžvelgiamas kitame skyrelyje.

Monotoniškumo aksiomos

Monotoniškumo aksiomos apibrėžia kainų indekso elgesį, kai pasikeičia vieno iš dviejų kainų p^0 ir p^t ar kiekių q^0 ar q^t vektorių komponentai.

A17. **Monotoniškumas periodo t kainų atžvilgiu** –

$$I(p^0, p^t, q^0, q^t) < I(p^0, p^{t+k}, q^0, q^t), \text{ jeigu } k > 0 \text{ ir } p_i^t < p_i^{t+k} \forall i.$$

Parametras k šioje bei toliau pateiktose aksiomose įgija diskrečias reikšmes, nes skaičiavimo laikotarpiais yra laikomi mėnesiai, savaitė, diena ar kitas pasirinktas laiko tarpas. Taigi, jeigu visos periodo t kainos didėja, tuomet kainų indeksas taip pat didėja, todėl $I(p^0, p^t, q^0, q^t)$ taip didėja p^t atžvilgiu.

A18. **Monotoniškumas bazinio periodo kainų atžvilgiu** –

$$I(p^0, p^t, q^0, q^t) > I(p^{t+k}, p^t, q^0, q^t), \text{ jeigu } k > 0 \text{ ir } p_i^0 < p_i^{t+k} \forall i.$$

Aksioma teigia, jeigu bet kuri bazinio laikotarpio kaina padidėja, tuomet privalo didėti ir kainų indeksas, todėl $I(p^0, p^t, q^0, q^t)$ yra mažėjanti argumento p^0 atžvilgiu.

A19. **Monotoniškumas periodo t kiekių atžvilgiu** – jeigu $q^t < q^{t+k}$, kai $k > 0$, tai

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i^t q_i^t}{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^0} \right) / I(p^0, p^t, q^0, q^t) < \left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i^t q_i^{t+k}}{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^0} \right) / I(p^0, p^t, q^0, q^{t+k}).$$

A20. **Monotoniškumas bazinio periodo kiekių atžvilgiu** – jeigu $q^0 < q^{t+k}$, kai $k > 0$, tai

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i^t q_i^t}{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^0} \right) / I(p^0, p^t, q^0, q^t) > \left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i^t q_i^t}{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^{t+k}} \right) / I(p^0, p^t, q^{t+k}, q^t).$$

Pasinaudojus kiekio indekso Q apibrėžimu, aksiomos A19 ir A20 gali būti perrašytos taip

$$Q(p^0, p^t, q^0, q^t) < Q(p^0, p^t, q^0, q^{t+k}), \text{ jeigu } q^t < q^{t+k} \text{ ir } k > 0,$$

t. y. jeigu laiko momento t kiekiai didėja, tuomet kiekio indeksas Q taip pat didėja. Be to,

$$Q(p^0, p^t, q^0, q^t) > Q(p^0, p^t, q^{t+k}, q^t), \text{ jeigu } q^0 < q^{t+k} \text{ ir } k > 0,$$

t. y. jeigu bazinio periodo kiekiai mažėja, tuomet kiekio indeksas Q taip pat mažėja.

Taigi, aksiomatiniu požiūriu kainų indeksas $I(p^0, p^t, q^0, q^t)$ gali tenkinti 20 aksiomų, tačiau išlieka klausimas ar egzistuoja bent vienas toks kainų indeksas, kuris visas šias aksiomas tenkintų. Visas šias aksiomas

tenkina tik Fisher kainų indeksas, kuris bus pristatytas kituose skyriuose. Parodyti, jog šis indeksas tenkina visas aksiomas nėra sunku, tačiau iki šiol išlieka klausimas ar šis kainų indeksas yra toks vienintelis, nes šiomis dienomis kainų indeksų įvairovė yra pakankamai didelė ir daugelis naujų kainų indeksų nėra pilnai ištirti bei įrodytos jų savybės.

Istoriškai aksiomatinis kainų indeksų sudarymo metodas įgavo kitokį požiūrį, kuris rėmėsi kainų indekso apibrėžimu kaip panašių produktų (angl. *price relatives*) kainų santykių svertiniu vidurkiu ir kainų indeksas buvo pateiktas kaip funkcija priklausoma nuo trijų paremetrų $I(r, v^0, v^t)$, kur r yra panašių produktų kainų santykis, o v^0 ir v^t yra atitinkamų laiko momentų išlaidų, taip pat vadinamų svoriais, vektoriai. Analogiškos aksiomos galioja ir šiuo naujesniu požiūriu (plačiau galima pasiskaityti Vartotojų kainų sudarymo vadove [19]); tik kiekių vektorius pakeitė svorių vektoriai, bei buvo pridėtos naujos aksiomos, susijusios su svoriais.

2.1.2. Ekonominis kainų indeksų sudarymo metodas

Vartotojų elgseną tradiciškai nagrinėja ekonomikos mokslas, tačiau vartotojų kainų indeksų teorijoje ypač svarbus ekonominis vartotojų elgsenos supratimas tam tikromis sąlygomis, nes jis leidžia tiksliau įvertinti kainų pokyčius ir jų poveikį vartotojų gerovei. Šis požiūris sudaro teorinį pagrindą pragyvenimo išlaidų kainų indeksams ir kitiems ekonomiškai pagrįstiems kainų indeksams. Vartotojų elgseną tradiciškai nagrinėja ekonomikos mokslas, tačiau vartotojų kainų indeksų teorijoje ypač svarbus ekonominis vartotojų elgsenos supratimas tam tikromis sąlygomis, nes jis leidžia tiksliau įvertinti kainų pokyčius ir jų poveikį vartotojų gerovei. Šis požiūris sudaro teorinį pagrindą pragyvenimo išlaidų kainų indeksams ir kitiems ekonomiškai pagrįstiems kainų indeksams. Šio skyrelio medžiaga parengta remiantis [14, 19].

Ekonominis kainų indeksų sudarymo požiūris glaudžiai susijęs su vieno vartotojo pragyvenimo išlaidų indeksu (angl. *cost-of-living index*), kuris 1924 metais buvo pasiūlytas ekonomisto Aleksandro Konūs¹. Ši teorija remiasi vartojimo elgesio optimizavimo prielaida. Taigi, tegul p^t yra produktų, kuriuos vartotojas vartoja laiko momentu t , vektorius. Laikykime, jog q^t yra produktų kiekių vektorius, kuris yra išlaidų minimizavimo uždavinio sprendinys, pagrįstas vartotojų pasirinkimais arba naudingumo funkcija $f(q)$.

Šiuo kainų indeksų konstravimo būdu laikoma, jog vartotojas žino ir apibrėžia savo pasirinkimus (angl. *preferences*), naudodamas įvairias produktų kombinacijas. Kiekviena kombinacija gali būti apibrėžta teigiamu kiekių vektoriumi $q = (q_1, \dots, q_n)$. Vartotojo pasirinkimai galimų vartojimo kombinacijų atžvilgiu apibrėžiami tolydžia, nemažėjančia ir iškyla naudingumo funkcija $f(q)$. Taigi, jeigu $f(q^t) > f(q^0)$, tuomet vartotojas labiau linkęs rinktis vartojimo kiekių vektorių q^t nei q^0 . Toliau laikysime, jog vartotojas minimizuoja savo išlaidas laiko momentu t , esant naudingumo lygiui $u^t = f(q^t)$. Laikykime, jog vartojimo vektorius q^j yra laiko momento j yra išlaidų minimizavimo problemos sprendinys:

$$C(u^j, p^j) \equiv \min_q \left\{ \sum_{i=1}^n p_i^j q_i : f(q) = u^j \equiv f(q^j) \right\} = \sum_{i=1}^n p_i^j q_i^j, \quad j = 0, t. \quad (2)$$

Laikoma, jog sprendinys vartojimo išlaidų minimizavimo problemai, esant naudingumo lygiui u ir produktų kainų vektoriui p , apibrėžia vartotojo išlaidų funkciją $C(u, p)$, kuri bus naudojama apibrėžiant vartotojo pragyvenimo išlaidų kainų indeksą.

Konūs tikrasis pragyvenimo išlaidų kainų indeksas lygina du laiko periodus, kuriais vartotojas griežtai teigimai apibrėžia kainų vektorius $p^0 = (p_1^0, \dots, p_n^0)$ ir $p^t = (p_1^t, \dots, p_n^t)$ laiko momentais 0 ir t , ir yra atitinkamai apibrėžiamas, kaip išlaidų, reikalingų pasiekti naudingumo lygmenį $u = f(q)$, kur $q = (q_1, \dots, q_n)$, funkcijų

¹Aleksandas Konūs (1895 – 1990) – rusų kilmės ekonomistas.

santykis,

$$I_K(p^0, p^t, q) \equiv \frac{C(f(q), p^t)}{C(f(q), p^0)}.$$

Pateiktoje funkcijoje būtina apibrėžti du laiko momentus: bazinio periodo kiekių vektoriaus q^0 , bei stebimo laikotarpio kiekių vektorių q^t . Šiuo atveju, pasirinkus dviejų laikotarpių kiekių vektorius, galima išvesti Laspeyres–Konüs tikrąjį pragyvenimo išlaidų kainų indeksą:

$$\begin{aligned} I_K(p^0, p^t, q) &= \frac{C(f(q^0), p^t)}{C(f(q^0), p^0)} = \frac{C(f(q^0), p^t)}{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^0} \\ &= \frac{\min_q \left\{ \sum_{i=1}^n p_i^t q_i : f(q) = f(q^0) \right\}}{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^0} \leq \frac{\sum_{i=1}^n p_i^t q_i^0}{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^0} = I_L(p^0, p^t, q^0, q^t). \end{aligned} \quad (3)$$

Taigi, galima matyti, jog tikrasis Laspeyres–Konüs pragyvenimo išlaidų kainų indeksas yra aprėžtas iš viršaus Laspeyres kainų indeksu².

Kitu atveju, nagrinėjant bazinio laiko momento atžvilgiu, gauname Paasche–Konüs tikrojo pragyvenimo išlaidų kainų indeksą:

$$I_K(p^0, p^t, q^t) \equiv \frac{C(f(q^t), p^t)}{C(f(q^t), p^0)} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i^t q_i^t}{C(f(q^t), p^0)} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i^t q_i^t}{\min_q \left\{ \sum_{i=1}^n p_i^0 q_i : f(q) = f(q^t) \right\}},$$

pasinaudojus išlaidų minimavimo problemos apibrėžimu, galima apibrėžti

$$C(f(q^0), p^0) \geq \frac{\sum_{i=1}^n p_i^t q_i^t}{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^t}, \text{ kai } q^t \equiv (q_1^t, \dots, q_n^t),$$

kas yra pasiekiamas sprendinys minimavimo problemai išspręsti, tad

$$C(f(q^t), p^0) \leq \sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^t$$

ir todėl

$$\frac{1}{C(f(q^t), p^0)} \geq \frac{1}{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^t} = I_P(p^0, p^t, q^0, q^t). \quad (4)$$

Taigi, Paasche–Konüs pragyvenimo išlaidų kainų indeksas yra aprėžtas iš apačios Paasche kainų indeksu². Be to, teisingas toliau pateiktas teiginys.

2.1.1 Teiginys ([14]) *Tegul λ^* skaičius intervale $[0,1]$, tuomet egzistuoja toks λ^* , kad*

$$I_L \leq I_K(p^0, p^t, \lambda^* q^0 + (1 - \lambda^*) q^t) \leq I_P \quad \text{arba} \quad I_P \leq I_K(p^0, p^t, \lambda^* q^0 + (1 - \lambda^*) q^t) \leq I_L.$$

Pirmosios nelygybės galioja, kai $I_L \leq I_P$, o antrosios, kai $I_P \leq I_L$.

²Plačiau apie šį indeksą pateikiama bazinių kainų indeksų skyriuje.

Panagrinėkime kitą pragyvenimo išlaidų kainų indekso požiūrį, kai vartotojo preferencijos yra homotetinės, t. y. jei vartotojas teikia pirmenybę vienam produktų krepšeliui kito atžvilgiu, tai proporcingai padidintas ar sumažintas tas pats krepšelis jam taip pat bus pageidaujamas arba lygiai vienodai naudingas. Iki šiol vartotojo naudingumo funkcija $f(q)$ netenkino homogeniškumo sąlygų. Toliau laikysime, jog $f(q)$ yra teigiama homogeninė funkcija. Ekonominėje literatūroje ši prielaida vadinama vartotojo homotetinėmis preferencijomis. Ši prielaida nesiremia tiesiogiai ekonominiu požiūriu, bet krypta į standartinius vartotojų pasirinkimus ir šių pasirinkimų kainų indeksus. Remiantis šia prielaida, vartotojų išlaidų arba kaštų funkcija $C(u, p)$ išskaičiuojama, naudojantis šiomis prielaidomis: visoms teigiamoms n produktų kainoms bei naudingumo lygmeniui u , naudojantis funkcijos C apibrėžimu, kaip išlaidų minimizavimo uždavinio sprendiniu, siekiant naudingumo lygio u , gaunama išraiška, išvedama čia:

$$\begin{aligned} C(u, p) &= \min_q \left\{ \sum_{i=1}^n p_i q_i : f(q_1, \dots, q_n) \geq u \right\} = \min_q \left\{ \sum_{i=1}^n p_i q_i : \frac{1}{u} f(q_1, \dots, q_n) \geq 1 \right\} \\ &= \min_q \left\{ \sum_{i=1}^n p_i q_i : f\left(\frac{q_1}{u}, \dots, \frac{q_n}{u}\right) \geq 1 \right\} = u \min_q \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{p_i q_i}{u} : f\left(\frac{q_1}{u}, \dots, \frac{q_n}{u}\right) \geq 1 \right\} \\ &= u \min_z \left\{ \sum_{i=1}^n p_i z_i : f(z_1, \dots, z_n) \geq 1 \right\} = uc(p), \text{ kur } z_i = \frac{q_i}{u} \text{ ir } c(p) = C(1, p), \end{aligned}$$

čia $C(1, p)$ yra vieneto vertės funkcija, kuri tenkina tuos pačius reikalavimus kaip ir naudingumo funkcija $f(q)$, t. y. $c(p)$ yra teigiama, iškyla ir tiesinė homogeninė funkcija teigiamų kainų vektorių atžvilgiu. Panagrinėkime visiškai priešinga požiūrį – vietoj to, jog vartotojas siekia minimizuoti išlaidas siekiant tam tikro naudingumo lygmens, laikykime, jog vartotojas siekia didžiausio naudingumo su turimu biudžetu, t. y. minimizavimo uždavinys tampa naudingumo maksimizavimo uždaviniu. Taigi, tegul $p^j > 0_n$ ir $q^j > 0_n$ yra vartojimo produktų stebimi kainų ir kiekių vektoriai laiko momentais $j \in \{0, t\}$, kur 0_n žymi n elementų ilgio vektorių, kurio elementai lygūs nuliui. Apibrėžkime vartotojo išlaidas kaip $e^j = p^j q^j$. Vartotojo laiko momento j naudingumo maksimizavimo problema apibrėžiama toliau pateikta maksimizavimo problema:

$$\max_q \{ f(q) : p^j q \leq e^j; q \geq 0_n \} \equiv g(e^j, p^j), \quad j \in \{0, t\}. \quad (5)$$

Vietoj to, jog vartotojo produktų kiekių vektorius q^j yra sprendinys laiko momento j išlaidų minimizavimo problemai, apibrėžtai (2) formulėje, ekvivalenti prielaida galioja, jog vartotojo produktų kiekių vektorius q^j yra laiko momento j naudingumo maksimizavimo problemos, apibrėžtos (5) formule, sprendinys. Ši funkcija apibrėžiama kaip vartotojo netiesioginė naudingumo funkcija ir žymima $g(e^j, p^j)$. Ši funkcija apibrėžia maksimalų naudingumą, kurį vartotojas gali pasiekti laiko momentu $j \in \{0, t\}$, turėdamas biudžetą e^j ir pirksdamas n produktų, kurių kainos atitinka vektorių p^j . Jeigu laikysime, jog laiko momento j vartojimo produktų kiekių vektorius q^j yra (5) maksimizavimo problemos sprendinys, bei $f(q)$ turi dalines išvestines laiko momentais $j \in \{0, t\}$, galima parodyti ryšį tarp dalinių išvestinių ir kainų vektorių p^0 bei p^t , todėl galioja toliau pateiktas teiginys.

2.1.2 Teiginys (Wold tapatybė, [14]) *Laikykime, kad*

1. $p^j > 0_n$ kiekvienam $j \in \{0, t\}$;
2. vartotojo naudingumo funkcija $f(q)$ yra didėjanti, tolydi ir iškyla visiems $q > 0_n$;
3. $f(q)$ turi pirmos eilės dalines išvestines taškuose q^0 ir q^t ;
4. $q^t > 0_n$ yra namų ūkio periodo t naudingumo maksimizavimo problemos (5) sprendinys,

tuomet galioja ši lygybė:

$$\frac{p_i^j}{\sum_{k=1}^n p_k^j q_k^j} = \frac{\frac{\partial f(q^j)}{\partial q_i}}{\sum_{k=1}^n q_k^j \frac{\partial f(q^j)}{\partial q_k}}, \quad j \in \{0, t\} \text{ ir } k = 1, \dots, n,$$

čia $\frac{\partial f(q^j)}{\partial q_i}$ yra naudingumo funkcijos $f(q)$ dalinės išvestinės i -ojo kiekio q_i atžvilgiu, įvertintu naudojant kiekių vektorių q^j laiko momentu j .

Irodymas. Pasinaudojus antra bei ketvirta prielaidomis, $q^j \geq 0_n$ yra toliau pateiktos maksimizavimo problemos $\max_q \{f(q) : p^j q \leq e^j; q \geq 0_n\}$, $j \in \{0, t\}$ sprendinys. Kadangi q^j yra teigiamas, todėl pasinaudojus diferencijuojamumo prielaida, Lagranžo metodui reikiamos sąlygos yra būtinos ir pakankamos kiekių vektorių q^j , jog būtų galima rasti maksimizavimo problemos (5) sprendinį:

$$\nabla f(q^j) = \lambda_j p^j \text{ ir } p^j q^j = e^j.$$

Padalinę pirmos lygybės abi puses iš q^j , išsprendžiame lygybę λ_j atžvilgiu. Tuomet sprendinys lygus $\lambda_j = q^j \nabla f(q^j) / p^j q^j > 0$. Įstatę šį gautą rezultatą į pirmąją lygybę ir atlikę pertvarkymus, gauname, jog $p^j / p^j q^j = \nabla f(q^j) / q^j \nabla f(q^j)$, kai $j \in \{0, t\}$. $\square$

Jeigu $C(w^j, q^j)$ turi pirmos eilės dalines išvestines $\frac{\partial C(w^j, p^j)}{\partial p_i}$ kiekvienam produktui $i = 1, \dots, n$ ir laiko momentui $j \in \{0, t\}$, kur $w^j = f(q^j)$ galioja toliau pateiktas teiginys.

2.1.3 Lema (Shepard lema, [14]) Laikykime, jog

1. naudingumo funkcija $f(q)$ yra didėjanti, tolydi ir išskyla kiekių vektoriaus q atžvilgiu;
2. $p^j = (p_1^j, \dots, p_n^j) > 0_n$;
3. $q^j = (q_1^j, \dots, q_n^j) > 0_n$ yra išlaidų minimizavimo problemos (2) sprendinys;
4. funkcijai $w^j \equiv f(q^j)$ egzistuoja pirmos eilės dalinės išvestinės funkcijos $C(w^j, p^j)$ kainų vektoriaus p atžvilgiu laiko momentams $j \in \{0, t\}$,

tuomet galioja ši lygybė:

$$q_i^j = \frac{\partial C(w^j, p^j)}{\partial p_i} \quad i = 1, \dots, n \text{ ir } j \in \{0, t\}.$$

Be to, q^j yra vienintelis išlaidų minimizavimo problemos sprendinys laiko momentais $j \in \{0, t\}$.

Irodymas. Tegul $w^j = f(q^j)$. Pasinaudojus trečiąja prielaida, q^j išsprendžia išlaidų minimizavimo problemą, apibrėžtą naudojant $C(w^j, p^j)$ laiko momentams $j \in \{0, t\}$. Kadangi q^j yra pasiekiamas sprendinys, toliau pateiktai išlaidų minimizavimo problemai, kurioje kainų vektorius $p > 0_n$ yra vietoj vektoriaus p^j laiko momentu j ,

$$C(w^j, p) \equiv \min_q \{pq : f(q) \geq w^j; q \geq 0_n\} \leq pq^j, \quad (6)$$

kur nelygybė galioja, kai q^j yra pasiekiamas, bet nebūtinai yra optimalus išlaidų minimizavimo problemos, apibrėžtos naudojant funkciją $C(w^j, p)$, sprendinys. Remiantis trečiąja prielaida, q^j yra išlaidų minimizavimo problemos sprendinys, turime, jog galioja toliau pateikta lygybė:

$$C(w^j, p^j) = p^j q^j. \quad (7)$$

Apibrėžkime funkciją $g^j(p) = C(u^j, p) - pq^j$ laiko momentams $j \in \{0, t\}$. Kadangi $C(u^j, p)$ yra iškilą funkciją p atžvilgiu bei tiesinė funkcija $-pq^j$ taip pat yra iškilą p atžvilgiu, galima teigti, jog funkcija $g^j(p)$ yra taip pat iškilą funkcija argumento p atžvilgiu laiko momentais $j \in \{0, t\}$. Pasinaudojus nelygybe (6) ir lygybe (7) galima parodyti, jog funkcija $g^j(p)$ pasiekia globalų maksimumą taške $p = p^j$ kiekvienam laiko momentui $j \in \{0, t\}$. Kadangi funkcija $C(u^j, p)$ yra diferencijuojama kainų vektoriaus p atžvilgiu taške $p = p^j$, toliau pateikta pirmos eilės būtinoji sąlyga maksimizuojant $C(u^j, p)$ kainų vektoriaus p elementų atžvilgiu privalo galioti:

$$\nabla_p g(p^j) = \nabla_p C(u^j, p^j) - q^j = 0_n. \quad (8)$$

Lygybė (8) atlikus elementariusius pertvarkymus gali būti perrašyta:

$$q^j = \nabla_p C(u^j, p^j).$$

Jrodant sprendinio q^j vienatį, tegul q^{*j} yra kitas išlaidų minimizavimo problemos apibrėžtos naudojant funkciją $C(u^j, p^j)$ sprendinys kiekvienam laiko momentui $j \in \{0, t\}$. Atlikus aukščiau pateiktą įrodymą galima parodyti, jog $q^{*j} = \nabla_p C(u^j, p^j)$ kiekvienam $j \in \{0, t\}$. Todėl galima teigti, jog $q^j = q^{*j}$ kiekvienam laiko momentui j ir todėl išlaidų minimizavimo problemos apibrėžtos funkcija $C(u^j, p^j)$ sprendinys yra vienintelis. $\square$

Iki šiol nagrinėjome kainų indekso sudarymą vienam namų ūkiui, toliau panagrinėkime kelių namų ūkių atvejį. Kelių namų ūkių atvejis yra artimesnis realiam gyvenimui. Be to, literatūroje išskiriami keli sudarymo variantai — plutokratinis bei demokratinis. Plutokratinio kainų indekso sudarymo atveju namų ūkiams suteikiami svoriai pagal šių išlaidas produktams, o demokratinio atveju visi namų ūkiai turi lygų lyginamąjį svorį. Toliau apžvelkime pagrindines šių sudarymo metodų formules. Laikykite, jog turime H namų ūkių, kur individualų namų ūkį žymėsime h . Tegul namų ūkiai vartoja n skirtingų produktų. Pažymėkime naudingumo funkciją $f^h(q, e)$, kur q — namų ūkio vartojamų produktų kiekiai, o e — aplinkos faktorių kintamasis. Laikykite, jog laiko momentui $j \in \{0, t\}$ stebime namų ūkius $h = 1, \dots, H$ ir laikykite, jog namų ūkio h suvartojamų produktų kiekių vektorius $q_h^j = (q_{h1}^j, \dots, q_{hH}^j)$ yra toliau pateiktos h -ojo namų ūkio išlaidų minimizavimo problemos sprendinys, t. y.,

$$\min_q \{p_h^j q : f^h(q, e_h^j) \geq u_h^j\} = C^h(u_h^j, e_h^j, p_h^j), \quad j \in \{0, t\} \text{ ir } h = 1, 2, \dots, H, \quad (9)$$

čia e_h^j yra aplinkos veiksnių vektorius h -ojo namų ūkio laiko momentu $j \in \{0, t\}$, o $u_h^j = f^h(q_h^j, e_h^j)$ yra naudingumo lygis, kurio namų ūkis h siekia laiko momentu j ir C^h yra namų ūkio išlaidų funkcija. Išlaidų minimizavimo problema yra identiška abejais atvejais, tiek plutokratiniam, tiek demokratiniam, tačiau skiriasi kainų indeksų formulės, toliau jas ir apžvelkime. Plutokratinis pragyvenimo išlaidų kainų indeksas pasirinktam naudingumo lygių vektoriui kiekvieno iš namų ūkio $u = (u_1, u_2, \dots, u_H)$ bei aplinkos kintamajam e_h kiekvienam $h = 1, 2, \dots, H$ yra apibrėžiamas kaip

$$P^*(p_1^0, \dots, p_H^0, p_1^t, \dots, p_H^t, u, e_1, e_2, \dots, e_H) = \frac{\sum_{h=1}^H C^h(u_h, e_h, p_h^t)}{\sum_{h=1}^H C^h(u_h, e_h, p_h^0)}. \quad (10)$$

Aukščiau pateiktos (10) formulės skaitiklis yra visų namų ūkių minimalių išlaidų, t. y. funkcijos $C^h(u_h, e_h, p_h^t)$, reikšmių suma, kur h -asis namų ūkis siekia pasirinkto naudingumo lygio u_h , laikant, jog namų ūkis turi aplinkos veiksnių kintamąjį e_h , o namų ūkio vartojamų produktų kainos laiko momentu t yra p_h^t . Vardiklyje yra analogiška suma, tačiau išlaidų funkcija yra $C^h(u_h, e_h, p_h^0)$, ir jų santykis priklauso tik nuo kainų pokyčių — tai ir yra

pagrindinis tikslas skaičiuojant vartotojų kainų indeksus. Kitas namų ūkių skirstymas vadinamas demokratinu. Kaip jau minėta, namų ūkiai skaičiavimuose turi vienodą svorį. Šiuo atveju, naudojant analogiškus žymėjimus, demokratinis pragyvenimo išlaidų kainų indeksas užrašomas kaip

$$P_D^*(p_1^0, \dots, p_H^0, p_1^t, \dots, p_H^t, u, e_1, e_2, \dots, e_H) = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \frac{C^h(u_h, e_h, p_h^t)}{C^h(u_h, e_h, p_h^0)},$$

čia P_D^* yra besvoris aritmetinis visų individualių sąlyginių išlaidų funkcijų santykių vidurkis. Analogiškai, tiek išraiškos skaitiklis, tiek vardiklis priklauso tik nuo kainų pokyčių. Jeigu aplinkos veiksnių kintamieji e_h nėra nagrinėjami, šis pragyvenimo išlaidų kainų indekso sudarymas tampa įprastu, kaip ir vienam namų ūkiui, ir yra identiškas Konūs pragyvenimo išlaidų kainų indeksui. Analogiškai, kaip vieno namų ūkio atveju, galima parodyti, jog pragyvenimo išlaidų kainų lygio indeksas yra aprėžtas Laspeyres bei Paasche kainų indeksais. Šie išvedimai toliau nėra nagrinėjami, tačiau plačiau galima pasiskaityti vartotojų kainų indeksų sudarymo vadove [19].

2.1.3. Stochastinis kainų indeksų sudarymo metodas

Kitas kiek kitoks kainų indeksų sudarymo metodas apima stochastinį kainų pasikeitimo įsivaizdavimą. Išskiriami keli stochastinio kainų indeksų sudarymo metodai, kurie keitėsi laikui bėgant, o jų rezultatai – skirtingi kainų indeksai. Skyrelio medžiaga parengta pagal [13].

Laikykime, jog turime n produktų, kurių kainas bei kiekius žymėsime p_i^t ir q_i^t kiekvienu laiko momentu t . Pirmasis kainų indeksų stochastinis modelis³ apibrėžiamas kaip:

$$\frac{p_i^t}{p_i^0} = \alpha_t + \varepsilon_i^t, \text{ kiekvienam } i = 1, \dots, n, \quad (11)$$

čia α_t žymi kainų pokyčio tarp laiko momentų 0 ir t simetrinę dalį, o ε_i^t – nepriklausomai tarpusavyje pasiskirstęs atsitiktiniai dydžiai tenkinantys toliau pateiktas sąlygas:

$$\mathbb{E}(\varepsilon_i^t) = 0 \text{ ir } \text{Var}(\varepsilon_i^t) = \sigma_t^2, i = 1, \dots, n, \quad (12)$$

t. y. ε_i^t turi nulinį vidurkį ir dispersiją $\sigma^2 > 0$. Mažiausių kvadratų ir didžiausio tikėtimumo metodais α_t apibrėžtas (11) ir (12) formulėmis yra Carli kainų indeksas:

$$\hat{\alpha}_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{p_i^t}{p_i^0},$$

kuris atitinka laiko momentų 0 ir t kainų santykių p_i^t/p_i^0 įprastą aritmetinį vidurkį. Dispersija $\hat{\alpha}_t$ yra lygi

$$\text{Var}(\hat{\alpha}_t) = \frac{1}{n} \sigma_t^2 \quad (13)$$

ir nepaslinktas dispersijos įvertinys yra

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{p_i^t}{p_i^0} \right) - \hat{\alpha}_t \right)^2. \quad (14)$$

³Pristatytas Selvanathan ir Prasada Rao, 1994 metais.

Pasinaudojus (13) ir (14) formulėmis, pasikliautinis intervalas Carli kainų indeksui $\hat{\alpha}_t$ gali būti suskaičiuotas pasinaudojus prielaida, jog liekanos pasiskirsčiusios pagal normalųjį skirstinį.

Vietoj to, jog laikėme, kad nepriklausomos liekanos ε_i^t yra adityvios, dabar laikykime, jog paklaidos yra multiplikatyvios. Šiuo atveju turime pirmo modelio modifikaciją, kuri apibrėžiama toliau pateiktos lygybėmis bei sąlygomis:

$$\ln \left(\frac{p_i^t}{p_i^0} \right) = \pi_t + \varepsilon_i^t, i = 1, \dots, n \quad (15)$$

ir

$$\mathbb{E}(\varepsilon_i^t) = 0 \text{ ir } \text{Var}(\varepsilon_i^t) = \sigma_t^2, i = 1, \dots, n. \quad (16)$$

Pasinaudojus mažiausių kvadratų bei didžiausio tikėtimumo metodais, π_t įvertinys lygus

$$\hat{\pi}_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{p_i^t}{p_i^0} \right). \quad (17)$$

Dispersijos įvertis $\hat{\pi}_t$ šiuo atveju konstruojamas analogiškai – naudojant (13) ir (14) formules. Jeigu apibrėšime α_t kaip eksponentę π_t , pasinaudojus eksponentinės funkcijos savybėmis $\hat{\pi}_t$ galime užrašyti taip:

$$\exp(\hat{\pi}_t) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{p_i^t}{p_i^0} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (18)$$

Dešinė pastarosios lygybės pusė yra Jevons geometrinio vidurkio kainų indeksas. Jevons vėliau pritaikė mažiausių kvadratų metodą (15) formulei ir suskaičiuojo tikėtiną paklaidą $\hat{\pi}_t$ įverčiui (17) formulėje. Gautas rezultatas tapo stochastinio kainų indeksų sudarymo pagrindu. Šis metodas dar vadinamas besvoriu stochastinių kainų indeksų metodu, toliau pateikiamas kiek vėliau sukurtas stochastinis kainų indeksų sudarymo metodas – kuomet kainų indeksai skaičiuojami naudojant svorių sistemas.

Laikykime, jog konstruojamas modelis turi tą pačią pagrindinę išraišką apibrėžta (11) formulėje, tačiau (12) formulėje apibrėžtos sąlygos paklaidoms ε_t yra keičiamos toliau pateiktomis

$$\mathbb{E}(\varepsilon_i^t) = 0 \text{ ir } \text{Var}(\varepsilon_i^t) = \sigma_t^2 / s_i, i = 1, \dots, n, \quad (19)$$

kur s_i yra neatsitiktinis fiksuotas dydis, kuris žymi vartotojo išlaidų dalį. Be to, s_i tenkina šias sąlygas:

$$s_i > 0 \text{ kiekvienam } i = 1, \dots, n \text{ ir } \sum_{i=1}^n s_i = 1. \quad (20)$$

Kadangi abi lygybės pusės yra teigiamos, galima abi (11) lygybes puses padauginti iš šaknies iš s_i , t. y. $s_i^{1/2}$, norint gauti homoskedastiškas paklaidas. Pasinaudojus mažiausių kvadratų ir didžiausio tikėtimumo metodais, infliacijos įvertis α_t yra

$$\hat{\alpha}_t = \frac{\sum_{i=1}^n s_i \left(\frac{p_i^t}{p_i^0} \right)}{\sum_{i=1}^n s_i} = \sum_{i=1}^n s_i \left(\frac{p_i^t}{p_i^0} \right), \quad (21)$$

kur antroji lygybė seka iš (20) formulės. Pasinaudojus (19) formule, galima matyti, jog $\hat{\alpha}_t$ yra nepaslinktas α_t įvertinys ir jo dispersija lygi

$$\text{Var}(\hat{\alpha}_t) = \sum_{i=1}^n s_i^2 \left(\frac{\sigma_i^2}{s_i} \right) = \sigma_i^2, \quad (22)$$

kur antroji lygybė išplaukia iš (20) formulės. Nepaslinktas σ_t^2 įvertis yra

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n s_i \left(\left(\frac{p_i^t}{p_i^0} \right) - \hat{\alpha} \right)^2. \quad (23)$$

Darant prielaidą, jog liekanos ε_t yra pasiskirsčiusios pagal normalųjį skirstinį, (22) ir (23) formulės gali būti panaudotos skaičiuojant pasikliautinį intervalą svertiniam indeksui $\hat{\alpha}_t$ apibrėžtam (21) formulėje.

Nagrinėkime skirtingus svorių variantus

$$s_i = \frac{p_i^0 q_i^0}{\sum_{j=1}^n p_j^0 q_j^0}, i = 1, \dots, n \quad (24)$$

ir

$$s_i = \frac{p_i^0 q_i^t}{\sum_{j=1}^n p_j^0 q_j^t}, i = 1, \dots, n. \quad (25)$$

Norint s_i laikyti nekintamu parametru, turime laikyti, jog bazinio laikotarpio kainos ir kiekiai, t. y. p_i^0 ir q_i^0 , bei ataskaitinio laikotarpio kiekiai q_i^t yra fiksuoti. Tuomet (4) formulėje vienintelis atsitiktinis kintamasis yra ataskaitinio laikotarpio kainos p_i^t . Įstačius (24) į (21) formulę, gauname, jog $\hat{\alpha}_t$ yra fiksuotos bazės Laspeyres kainų indeksas, o įstačius (25) į (21) formulę gauname Paasche kainų indeksą. Be to, įstačius (24) ir (25) į (21) – (23) gauname dispersijos įverčius Laspeyres ir Paasche kainų indeksams. Taigi, šis stochastinis būdas leidžia įvertinti Laspeyres ir Paasche kainų indeksų tikslumą.

Taip pat vėliau buvo sukurtas kiek kitoks stochastinis požiūris, tą padarė Clements and Izan 1981 metais. Laikykime, jog turime du skirtingus laiko momentus s ir t , kurie tenkina nelygybę $0 \leq s \leq t \leq T$. Tegul π_{st} yra laikotarpių s ir t kainų santykio logaritmas. Pagrindinės lygtys aprašančios šį modelį yra:

$$\ln \left(\frac{p_i^t}{p_i^s} \right) = \pi_{st} + \varepsilon_{ist}, i = 1, \dots, n \quad (26)$$

$$\mathbb{E}(\varepsilon_{ist}) = 0 \text{ ir } \text{Var}(\varepsilon_{ist}) = \sigma_{st}^2 / s_i, i = 1, \dots, n, \quad (27)$$

kur svoriai s_i tenkina sąlygas apibrėžtas (20) formulėje. Padauginus (26) formulės abi puses iš $(s_i)^{1/2}$ gauname homoskedastiškas dispersijas. Pasinaudojus mažiausių kvadratų ir didžiausio tikėtimumo metodais π_{st} įvertis šiam tranformuotam modeliui yra

$$\hat{\pi}_{st} = \sum_{i=1}^n s_i \ln \left(\frac{p_i^t}{p_i^s} \right). \quad (28)$$

Pasinaudojus (27) formule, įvertinio $\hat{\pi}_{st}$ dispersija yra σ_{st}^2 ir nepaslinktas σ_{st}^2 įvertis yra

$$\hat{\sigma}_{st}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n s_i \left(\ln \left(\frac{p_i^t}{p_i^s} \right) - \hat{\pi}_{st} \right)^2. \quad (29)$$

Tegul $s_i^t = p_i^t q_i^t / \sum_{j=1}^n p_j^t q_j^t$ yra vartotojo išlaidų dalis prekei i laiko momentui t . Clements ir Izan bei Selvanathan and Prasada Rao [13] pasirinko svorius s_i , kurie naudojami (27) formulėje įvertinti kaip laiko momentų s ir t svorių vidurkj, t. y.

$$s_i = \frac{1}{2} s_{is} + \frac{1}{2} s_{it}, i = 1, \dots, n. \quad (30)$$

Įstačius (30) formulę į (28) gauname, jog

$$\exp(\hat{\pi}_{st}) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{p_i^t}{p_i^s} \right)^{\frac{s_{is} + s_{it}}{2}}. \quad (31)$$

Dešinioji pastarosios lygybės pusė yra žinoma kaip Törnqvist kainų indeksas.⁴

Taigi, kaip matyti, stochastinio kainų indeksų sudarymo metodu gaunami Jevons ir Törnqvist kainų indeksai. Aprašyti kainų indeksų metodai – aksiomatinis, ekonominis ir stochastinis — yra pagrindiniai kainų indeksų sudarymo metodai, kurie lemia daugumos kainų indeksų egzistavimą bei apibrėžia jų savybes. Toliau, skirstant kainų indeksus į atitinkamas aibes, pristatomi pagrindiniai kainų indeksai bei jų tarpusavio sąryšiai.

2.2. Kainų indeksų klasės

Šiame skyriuje pateikiamos pagrindinės kainų indeksų klasės, jų sąryšiai bei savybės. Pirmiausia nagrinėjami elementarieji kainų indeksai, kurie naudojami kainų santykiui įvertinti. Vėliau aptariami baziniai kainų indeksai, kurie lygina kainų pokyčius su bazinio laikotarpio kainomis. Toliau nagrinėjami superlatyvūs kainų indeksai, kurie, anot daugumos ekonomistų ir analitikų, geriausiai aproksimuoja pragyvenimo išlaidų kainų lygio indeksą bei tiksliausiai įvertina kainų pasikeitimus. Taip pat apžvelgiami daugialypiai ir tolydūs kainų indeksai.

2.2.1. Elementarieji kainų indeksai

Šiame skyriuje apžvelgiami elementarieji kainų indeksai. Vartotojų kainų indeksams skaičiuoti naudojamas COICOP klasifikatorius, kuriuo klasifikuojamos prekės ir paslaugos. Žemiausias klasifikatoriaus lygmuo vadinamas elementaruju agregatu, kuris, pagal vartotojų kainų sudarymo metodologinius reikalavimus, neturi svorio ir negali būti skirstomas į žemesnius lygmenis. Todėl elementariesiems agregatams taikomi elementarieji kainų indeksai, kurie vėliau agreguojami į aukštesnius lygmenis, naudojant svorių sistemas. Elementariesiems kainų indeksams apskaičiuoti naudojamos tik dviejų lyginamų laiko periodų stebimos kainos. Jei stebimas didelis prekės pardavimų kiekis, apskaičiuojama vidutinė kaina, kuri vėliau dalyvauja elementaraus kainų indekso skaičiavime. Elementarieji kainų indeksai sudaro kainų indeksų aibę, turinčią tam tikras aksiomatinės savybes ir sąryšius, kurie aprašomi šiame skyriuje. Skyrelio medžiaga parengta pagal [19].

Praktikoje dažniausiai naudojamos kelios pagrindinės elementariųjų kainų indeksų formulės. Vienas dažniausiai naudojamų elementariųjų kainų indeksų yra Dutot⁵ 1738 metais pasiūlytas kainų indeksas lygus atskaitinio laikotarpio t ir bazinio laikotarpio aritmetinių kainų vidurkių santykiui ir yra užrašomas taip:

$$I_D(p^0, p^t) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i^t}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i^0} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i^t}{\sum_{i=1}^n p_i^0}.$$

Kitas taip pat praktikoje naudojamas elementarusis kainų indeksas yra Carli⁶ 1764 metais pasiūlytas kainų indeksas –

$$I_C(p^0, p^t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{p_i^t}{p_i^0},$$

lygus n produktų kainų santykių p_i^t/p_i^0 aritmetiniam vidurkiui. Dar vienas aritmetinių elementariųjų kainų in-

⁴ Apie šį indeksą plačiau superlatyviųjų kainų indeksų skyrelyje.

⁵ Nicolas Dutot (1685 – 1714) – prancūzų ekonomistas.

⁶ Gian Rinaldo Carli (1720 - 1795) - italų ekonomistas.

deksų grupei priskiriamas indeksas – Jevons ir Coggeshall pasiūlytas harmoninis kainų indeksas, kuris apibrėžiamas taip:

$$I_H(p^0, p^t) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{p_i^t}{p_i^0} \right)^{-1} \right)^{-1}.$$

Praktikoje šiuo metu vis labiau naudojamas elementarusis kainų indeksas, kuris apibrėžiamas naudojant kainų santykių geometrinį vidurkį. Šis indeksas 1863 metais buvo pasiūlytas ekonomisto Jevons⁷ bei apibrėžiamas kaip –

$$I_J(p^0, p^t) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{p_i^t}{p_i^0} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Kiek aukščiau aksiomatinio kainų indeksų sudarymo metode buvo pateiktos pagrindinės aksiomos baziniams kainų indeksams, kuriems laikėme, jog kainų indeksas priklauso nuo keturių parametru ir gali būti apibrėžtas kaip funkcija $I(p^0, p^t, q^0, q^t)$, elementariesiems kainų indeksams ši forma supaprastėja, nes funkcija priklauso tik nuo dviejų kainų vektorių, t. y. $p^0 = (p_1^0, \dots, p_n^0)$ – bazinio laikotarpio kainų bei $p^t = (p_1^t, \dots, p_n^t)$ – ataskaitinio laikotarpio kainų, o elementarųjį kainų indeksą žymėsime $I(p^0, p^t)$. Toliau pateikiamos tik elementariesiems kainų indeksams būdingos aksiomos:

- A1. **Tolydumas** – $I(p^0, p^t)$ yra tolydi funkcija kiekvieno iš argumentų atžvilgiu;
- A2. **Identiškumas** – $I(p, p) = 1$; t. y. jeigu bazinio ir laiko momento t kainų vektoriai yra lygūs, tuomet kainų indeksas lygus 1.
- A3. **Monotoniškumas ataskaitinio laikotarpio kainų atžvilgiu** – $I(p^0, p^t) < I(p^0, p)$, jeigu $p^t < p$, t. y. jeigu laikotarpio t kainos didėja – didėja ir kainų indeksas.
- A4. **Monotoniškumas bazinio laikotarpio kainų atžvilgiu** – $I(p^0, p^t) > I(p, p^t)$, jeigu $p^0 < p$, t. y. jeigu bazinio laikotarpio kainos didėja – didėja ir kainų indeksas.
- A5. **Ataskaitinio laikotarpio kainų proporcingumas** – $I(p^0, \lambda p^t) = \lambda I(p^0, p^t)$, jeigu $\lambda > 0$, t. y. jeigu visos ataskaitinio periodo kainos yra padaugintos iš teigiamo skaičiaus λ , tuomet pradinis kainų indeksas taip pat turi būti padaugintas iš koeficiento λ .
- A6. **Bazinio laikotarpio kainų proporcingumas** – $I(\lambda p^0, p^t) = \lambda^{-1} I(p^0, p^t)$, jeigu $\lambda > 0$, t. y. jeigu visos bazinio periodo kainos yra padaugintos iš teigiamo skaičiaus λ , tuomet pradinis kainų indeksas turi būti padaugintas iš koeficiento $1/\lambda$.
- A7. **Vidutinės reikšmės aksioma** – $\min_i (p_i^t/p_i^0 : i = 1, \dots, n) \leq I(p^0, p^t) \leq \max_i (p_i^t/p_i^0 : i = 1, \dots, n)$, t. y. elementariojo kainų indekso reikšmė yra tarp mažiausio ir didžiausio galima produktų kainų santykių.
- A8. **Simetriškumas** – $I(p^0, p^t) = I(p^{0*}, p^{t*})$, kur p^{0*} ir p^{t*} apibrėžia kainų vektorių p^0 ir p^t elementų perstatas, t. y. kainų vektorių eiliškumo tvarka neturi įtakos kainų indekso reikšmei, jeigu atliekami identiški elementų eilės pakeitimai.
- A9. **Kainų grįžtamumo aksioma** – $I(p^0, p^t) = I(p^{0*}, p^{t**})$, kur p^{0*} ir p^{t**} apibrėžia visas galimas skirtingas vektorių p^0 bei p^t elementų perstatas. Šiuo atveju perstatos gali būti skirtingos ir nebūtinai vienodos abiemis kainų vektoriams.

⁷William Stanley Jevons (1835 – 1882) – anglų ekonomistas ir logikas.

- A10. **Laiko apverčiamumo aksioma** – $I(p^t, p^0) = 1/I(p^0, p^t)$, t. y. jeigu bazinio ir ataskaitinių laikotarpių kainų duomenys yra sukeičiami, tuomet gautas kainų indeksas yra atvirkščiai proporcingas pradiniam kainų indeksui be pakeitimų.
- A11. **Cikliškumas** – $I(p^0, p^t) \times I(p^t, p^{t+k}) = I(p^0, p^{t+k})$, kai $k > 0$, t. y. galioja kainų indekso tranzityvumo laike savybė.
- A12. **Suderinamumas** – $I(\lambda_1 p_1^0, \dots, \lambda_n p_n^0; \lambda_1 p_1^t, \dots, \lambda_n p_n^t) = I(p_1^0, \dots, p_n^0; p_1^t, \dots, p_n^t) = I(p^0, p^t)$ visiems $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_n > 0$, t. y. jeigu kiekvienam produktui yra pakeičiami matavimo vienetai, elementarusis kainų indeksas išlieka nepakitęs.

Taigi, elementarieji kainų indeksai gali tenkinti 12 aksiomų. Visas šias aksiomas tenkina tik Jevons elementarusis kainų indeksas I_J , kuris praktikoje yra labiausiai rekomenduojamas, nes jis laikomas tinkamiausiu elementariajam indeksui dėl visų tenkinamų aksiomų, ypač laiko grįžtamumo ir tranzityvumo laike. Dutot elementarusis kainų indeksas I_D tenkina visas aksiomas, išskyrus suderinamumo aksiomą. Jeigu elementarusis kainų indeksas apima nehomogeniškas prekes į elementarųjį agregatą, jis kainų santykį įvertina gana netikslingai, todėl labiau tinka homogeniškų produktų kainoms lyginti. Carli bei harmoninis kainų indeksai I_C ir I_H netenkina kainų grįžtamumo, laiko apverčiamumo bei cikliško aksiomų, tačiau tenkina visas likusias. Be to, elementarieji kainų indeksai tenkina toliau pateiktą nelygybę –

$$I_H(p^0, p^t) \leq I_J(p^0, p^t) \leq I_C(p^0, p^t),$$

t. y. harmoninis indeksas visada yra lygus arba mažesnis nei Jevons kainų indeksas, kuris visada yra lygus arba mažesnis už Carli elementarųjų kainų indeksą.

Panagrinėkime šios nelygybės įrodymą. Pateikta nelygybė tiksliai neįvertina, kiek Carli kainų indeksas viršija Jevons kainų indeksą, bei kiek Jevons kainų indeksas viršija harmoninį kainų indeksą. Toliau panagrinėsime šių indeksų aproksimacijas bei sąryšius. Pirmiausia panagrinėkime Jevons kainų indekso I_J bei Dutot kainų indekso I_D sąryšį. Laiko momentui t apibrėžkime aritmetinį n produktų kainų vidurkį:

$$p^{t*} = \sum_{i=1}^n p_i^t.$$

Be to, apibrėžkime multiplikatyvųjį nuokrypį i -ojo produkto kainai laiko momentu t vidutinės visų produktų kainos atžvilgiu ir žymėkime e_i , tuomet $p_i^t = p^{t*}(1 + e_i)$. Taip pat iš paskutinių dviejų lygybių išplaukia, jog nuokrypių e_i suma yra lygi nuliui kiekvienam laiko periodui t , t. y. $\sum_{i=1}^n e_i^t = 0$. Dutot kainų indeksas pasinaudojus produktų aritmetinio vidurkio žymėjimu gali būti perrašytas taip:

$$I_D(p^0, p^t) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i^t}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i^0} = \frac{p^{t*}}{p^{0*}}.$$

Į Jevons kainų indekso formulę įstatę lygybę $p_i^t = p^{t*}(1 + e_i)$, gauname, jog

$$I_J(p^0, p^t) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{p^{t*}(1 + e_i^t)}{p^{0*}(1 + e_i^0)} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{p^{t*}}{p^{0*}} \prod_{i=1}^n \left(\frac{1 + e_i^t}{1 + e_i^0} \right)^{\frac{1}{n}} = I_D(p^0, p^t) f(e^0, e^t),$$

kur $f(e^0, e^t)$ žymi Jevons nuokrypių indeksą, o $e^t = (e_1^t, \dots, e_n^t)$ kiekvienam laiko momentui t . Pasinaudojus

Teiloro skleidiniu⁸ funkcijai $f(e^0, e^t)$ taškuose $e^0 = (0_1^0, \dots, 0_n^0)$ ir $e^1 = (0_1^1, \dots, 0_n^1)$ bei tuo, jog nuokrypių suma lygi nuliui, galima parodyti⁹, jog antro laipsnio aproksimacinis sąryšis tarp Jevons kainų Dutot kainų indeksų gali būti išreiškiamas kaip:

$$I_J(p^0, p^1) \approx I_D(p^0, p^1) \left(1 + \frac{1}{2n} e^0 e^0 - \frac{1}{2n} e^1 e^1 \right) = I_D(p^0, p^1) \left(1 + \frac{1}{2} \text{Var}(e^0) - \frac{1}{2} \text{Var}(e^1) \right),$$

kur $\text{Var}(e^t)$ yra laiko momento t multiplikatyvių nuokrypių dispersija, kuri apibrėžiama toliau pateikta formule

$$\text{Var}(e^t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (e_i^t - e^{t*})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (e_i^t)^2 = \frac{1}{n} e^t e^t.$$

Taigi, kainų nuokrypių dispersija lyginant su kainų vidurkiu kiekvieną laiko momentą t apytiksliai lygi konstantai, todėl Jevons kainų indeksas yra antros eilės Dutot kainų indekso aproksimacija.

Kiti elementarieji kainų indeksai naudoja produkto i dviejų laikotarpių kainų santykį, todėl apibrėžkime i -ojo produkto kainų santykį kaip $r_i = \frac{p_i^t}{p_i^0}$ bei apibrėžkime šių santykių aritmetinį vidurkį –

$$r^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i = I_C(p^0, p^t),$$

kur paskutinė lygybė apibrėžia Carli kainų indeksą. Analogiškai apibrėžkime kainų nuokrypį e_i – i -ajam kainų santykiui r_i iš artimutinio n produktų vidurkio panašaus produkto santykiui r^* , kaip $r_i = r^*(1 + e_i)$, kur analogiškai ankstesniam atvejui, pasinaudojus paskutinėmis dvejomis lygybėmis, nuokrypių e_i suma lygi nuliui, t. y. $\sum_{i=1}^n e_i = 0$. Pasinaudojus gautais rezultatais perrašykime elementariųjų kainų indeksų formules nuokrypių $e \equiv (e_1, \dots, e_n)$ vektoriaus atžvilgiu (čia nuokrypių vektorius e nėra tas pats, kuris naudojamas lygybėje $r_i = r^*(1 + e_i)$ ir $p_i^t = p_i^{t*}(1 + e_i)$), tuomet

$$\begin{aligned} I_C(p^0, p^t) &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} r_i \equiv r^* f_C(e), \\ I_J(p^0, p^t) &= \prod_{i=1}^n r_i^{\frac{1}{n}} = r^* \prod_{i=1}^n (1 + e_i)^{\frac{1}{n}} \equiv r^* f_J(e) \\ I_H(p^0, p^t) &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} (r_i)^{-1} \right)^{-1} = r^* \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} (1 + e_i)^{-1} \right)^{-1} \equiv r^* f_H(e), \end{aligned}$$

kur paskutinės kiekvieno iš elementariųjų kainų indeksų lygybės užrašomos naudojant nuokrypių funkcijas. Pasinaudojus antro laipsnio Teiloro skleidiniu kiekvienai iš nuokrypių funkcijų taške $e = (0_1, \dots, 0_n)$ gauname, jog

$$\begin{aligned} f_C(e) &\approx 1 \\ f_J(e) &\approx 1 + \frac{1}{2n} e^2 = 1 - \frac{1}{2} \text{Var}(e); \\ f_H(e) &\approx 1 - \frac{1}{n} e^2 = 1 - \text{Var}(e), \end{aligned}$$

kur e apibrėžia atsitiktinių nuokrypių vektorių ir todėl pasinaudojus antros eilės skleidinio rezultatu gauname,

⁸Jrodant naudojamas tik aproksimacinis antros eilės rezultatas. Pilną skleidinio išvedimą galima rasti [19].

⁹Jrodyta Carruthers, Sellwood ir Ward straipsnyje (1980 m.)

jog

$$r^*(1 - \text{Var}(e)) \leq r^* \left(1 - \frac{1}{2}\text{Var}(e)\right) \leq r^*$$

ir iš to išplaukia, kad

$$I_H(p^0, p^t) \leq I_J(p^0, p^t) \leq I_C(p^0, p^t),$$

tad harmoninis kainų indeksas yra mažesnis už Jevons kainų indeksą, o šis – mažesnis už Carli kainų indeksą. Be to, Carli kainų indeksas I_C yra didesnis už Jevons kainų indeksą dydžiu lygiu $1/2r^*\text{Var}(e)$, t. y. kainų santykiui padauginant iš pusės visų n produktų kainų dispersijos, o harmoninis kainų indeksas I_H tokiu pačiu dydžiu mažesnis už Jevons kainų indeksą I_J . Toliau panagrinėkime bazinių kainų indeksų aibę bei šių indeksų sąryšius bei savybes.

2.2.2. Baziniai kainų indeksai

Šiame skyriuje nagrinėsime bazinius kainų indeksus. Kaip jau minėta anksčiau, baziniai kainų indeksai – tai indeksai, kurie įvertina kainų lygio pasikeitimą tarp dviejų laiko momentų, įprastai ataskaitinio laikotarpio ir bazinio laikotarpio. Šių kainų indeksų aksiomos buvo aptartos aksiomatinio kainų indeksų sudarymo skyriuje, todėl čia pateikiamos tik pagrindinės bazinių kainų indeksų formulės ir nagrinėjami jų tarpusavio sąryšiai. Medžiaga parengta naudojantis [15, 19, 20] šaltiniais.

Pradėkime nuo pačio reikšmingiausio ir praktikoje labiausiai naudojamo Laspeyres¹⁰ kainų indekso, kuris apibrėžiamas kaip

$$I_L(p^0, p^t, q^0, q^t) = \frac{\sum_{i=1}^n p_i^t q_i^0}{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^0}, \quad (32)$$

t. y. ataskaitinio t bei bazinio laikotarpių išlaidų, tenkančių visiems vartotojo produktams, santykis. Jeigu apibrėšime išlaidų dalį i -ajam produktui kaip

$$s_i^t = \frac{p_i^t q_i^t}{\sum_{j=1}^n p_j^t q_j^t},$$

tuomet Laspeyres kainų indeksą galima perrašyti kaip

$$I_L(p^0, p^t, q^0, q^t) = \frac{\sum_{i=1}^n p_i^t q_i^0}{\sum_{j=1}^n p_j^0 q_j^0} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{p_i^t}{p_i^0}\right) p_i^0 q_i^0}{\sum_{j=1}^n p_j^0 q_j^0} = \sum_{i=1}^n s_i^0 \left(\frac{p_i^t}{p_i^0}\right). \quad (33)$$

Kitas panašus į Laspeyres kainų indeksą yra Paasche¹¹ kainų indeksas apibrėžiamas kaip

$$I_P(p^0, p^t, q^0, q^t) = \frac{\sum_{i=1}^n p_i^t q_i^t}{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^t}, \quad (34)$$

tačiau vietoj bazinių kiekių naudojami ataskaitinio laikotarpio t kiekiai, t. y. atsižvelgia į aktualiausias vartotojo

¹⁰Ernst Louis Étienne Laspeyres (1834 – 1913) – vokiečių ekonomistas.

¹¹Hermann Paasche (1851 – 1925) – vokiečių statistikas bei ekonomistas.

preferencijas. Šis kainų indeksas gali būti pateikiamas ir alternatyviu būdu pateiktu toliau –

$$I_P(p^0, p^t, q^0, q^t) = \frac{\sum_{i=1}^n p_i^t q_i^t}{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^t} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i^t q_i^t}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{p_i^t}{p_i^0}\right) p_i^0 q_i^t} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{p_i^t}{p_i^0}\right)^{-1} s_i^t} = \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{p_i^t}{p_i^0}\right)^{-1} s_i^t \right)^{-1}.$$

Taip pat apibrėšime Laspeyres ir Paasche kiekio indeksus, kurie savo formulėmis panašūs į kainų indeksus, tačiau šių tikslas įvertinti kaip pasikeitė parduodamų produktų kiekiai. Laspeyres kiekio indeksas –

$$Q_L(p^0, p^t, q^0, q^t) = \frac{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^t}{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^0}.$$

Paasche kiekio indeksas –

$$Q_P(p^0, p^t, q^0, q^t) = \frac{\sum_{i=1}^n p_i^t q_i^t}{\sum_{i=1}^n p_i^t q_i^0}.$$

Taip pat praktikoje nagrinėjamos ir šių indeksų geometrinės versijos, kurios apibrėžiamos toliau pateiktuose formulėse.

Geometrinis Laspeyres kainų indeksas –

$$I_{GL} = \prod_{i=1}^n \left(\frac{p_i^t}{p_i^0} \right)^{s_i^0}. \quad (35)$$

Geometrinis Paasche kainų indeksas –

$$I_{GP} = \prod_{i=1}^n \left(\frac{p_i^t}{p_i^0} \right)^{s_i^t}. \quad (36)$$

Taip pat nagrinėkime kiek rečiau naudojamus Lowe¹² ir Young¹³ kainų indeksus, kurie taip pat priskiriami prie bazinių kainų indeksų, tačiau turi modifikuotą bazinį laikotarpį. Tradiciškai priimta, jog bazinis laikotarpis šiuose indeksuose yra laikotarpis, kuris žymimas 0, tačiau Lowe ir Young indeksų atvejais yra nagrinėjamas kiek kitoks bazinis laikotarpis (angl. *reference period*), kurį galima pasirinkti laisvai ir dažniausiai žymimas raide *b*. Lowe kainų indeksas apibrėžiamas kaip

$$I_{Lo}(p^0, p^t, s^{0b}) = \frac{\sum_{i=1}^n p_i^t q_i^b}{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^b} = \sum_{i=1}^n s_i^{0b} \left(\frac{p_i^t}{p_i^0} \right), \quad (37)$$

kur

$$s_i^{0b} = \frac{p_i^0 q_i^b}{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^b}.$$

Panašiai, kaip Laspeyres ir Paasche kainų indeksai, Lowe turi svorių modifikaciją, kur baziniai svoriai pakeičiami

¹² Joseph Lowe (1780 – 1831) – Didžiosios Britanijos žurnalistas bei politinis ekonomistas.

¹³ Arthur Young (1741 – 1820) – Didžiosios Britanijos rašytojas bei ekonomistas.

ataskaitinio laikotarpio svoriais, o tai atliekama Young kainų indekse, kuris lygus

$$I_Y(p^0, p^t, s^b) = \sum_{i=1}^n s_i^b \left(\frac{p_i^t}{p_i^0} \right), \quad (38)$$

kur

$$s_i^b = \frac{p_i^b q_i^b}{\sum_{k=1}^n p_k^b q_k^b}.$$

Taip pat nagrinėkime Lloyd–Moulton kainų indeksą, kurį žymėsime I_{LM} . Šis kainų indeksas priskiriamas prie bazinių kainų indeksų klasės, tačiau jis išsiskiria tuo, jog turi papildomą parametą, kuris turi būti įvertinamas ar parenkamas, t. y. parametras σ , kuris parodo produktų pakeičiamumo elastingumą. Lloyd–Moulton kainų indeksas apibrėžiamas kaip

$$I_{LM} = \left(\sum_{i=1}^n s_i^0 \left(\frac{p_i^t}{p_i^0} \right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}, \quad (39)$$

kur $\sigma \geq 0$ ir $\sigma \neq 1$.

Toliau panagrinėsime bazinių kainų indeksų tarpusavio sąryšius. Pradėkime nuo Laspeyres bei Paasche kainų indeksų sąryšio.

2.2.1 Teiginys ([19]) *Laspeyres ir Paasche kainų indeksų skirtumas yra išreiškiamas kovariacijos ir Laspeyres kiekių indekso santykiu, t. y.*

$$I_P(p^0, p^t, p^0, q^t) - I_L(p^0, p^t, q^0, q^0) = \frac{\sum_{i=1}^n (r_i - r^*)(t_i - t^*) s_i^0}{Q_L}.$$

Irodymas. Pasinaudoję jau naudojamais žymėjimais, apibrėžkime i -ojo produkto kainų bei kiekių santykius

$$r_i = \frac{p_i^t}{p_i^0} \text{ ir } t_i = \frac{q_i^t}{q_i^0}, \text{ kai } i = 1, \dots, n.$$

Pasinaudoję (33) formule bei santykių žymėjimais, turime, jog Laspeyres kainų indeksas gali būti užrašomas taip

$$I_L = \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_i^t}{p_i^0} \right) s_i^0 = \sum_{i=1}^n r_i s_i^0 = r^*.$$

Taip pat apibrėžkime ir Laspeyres kiekio indeksą –

$$Q_L = \sum_{i=1}^n \left(\frac{q_i^t}{q_i^0} \right) s_i^0 = \sum_{i=1}^n t_i s_i^0 = t^*.$$

Prieš nagrinėjant Laspeyres ir Paasche kainų indeksų skirtumą apibrėžkime svertinę r_i ir t_i kovariaciją –

$$\begin{aligned} \text{Cov}(r, t; s^0) &= \sum_{i=1}^n (r_i - r^*)(t_i - t^*) s_i^0 = \sum_{i=1}^n r_i t_i s_i^0 - \sum_{i=1}^n r_i t^* s_i^0 - \sum_{i=1}^n r^* t_i s_i^0 + \sum_{i=1}^n r^* t^* s_i^0 \\ &= \sum_{i=1}^n r_i t_i s_i^0 - t^* \sum_{i=1}^n r_i s_i^0 - r^* \sum_{i=1}^n t_i s_i^0 + r^* t^* \sum_{i=1}^n s_i^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n r_i t_i s_i^0 - t^* \sum_{i=1}^n r_i s_i^0 - r^* \sum_{i=1}^n t_i s_i^0 + r^* t^* \\
&= \sum_{i=1}^n r_i t_i s_i^0 - t^* r^* - r^* t^* + r^* t^* = \sum_{i=1}^n r_i t_i s_i^0 - t^* r^*,
\end{aligned}$$

pasinaudojus faktu, jog $\sum_{i=1}^n s_i^0 = 1$.

$$\begin{aligned}
I_P(p^0, p^t, q^0, q^t) &= \frac{\sum_{i=1}^n p_i^t q_i^t}{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^t} = \frac{\sum_{i=1}^n r_i t_i p_i^0 q_i^0}{\sum_{i=1}^n t_i p_i^0 q_i^0} = \frac{\sum_{i=1}^n r_i t_i s_i^0}{\sum_{i=1}^n t_i s_i^0} = \frac{\sum_{i=1}^n (r_i - r^*)(t_i - t^*) s_i^0 + t^* r^*}{t^*} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n (r_i - r^*)(t_i - t^*) s_i^0}{t^*} + r^* = \frac{\sum_{i=1}^n (r_i - r^*)(t_i - t^*) s_i^0}{Q_L} + I_L(p^0, p^t, q^0, q^0).
\end{aligned}$$

Taigi, perkėlus Laspeyres kainų indeksą į kitą lygybės pusę, gauname, jog Paasche ir Laspeyres indeksų skirtumas lygus svorinei kovariacijai padalintai iš Laspeyres kiekio indekso. $\square$

Nagrinėkime Laspeyres kainų indeksus, t. y. įprastą bei geometrinį, kadangi įprastas Laspeyres kainų indeksas naudoja aritmetinį, geometrinis kainų indeksas, akivaizdu, jog geometrinį svertinį vidurkį, remiantis Schlomilch nelygybe, gauname, jog $I_{GL}^t < I_L^t$ kiekvienam laiko momentui t , todėl galioja toliau pateikta šių indeksų aproksimacija¹⁴ –

$$\frac{I_{GL}^t}{I_L^t} \approx 1 - \frac{1}{2} \text{Var} \left(\frac{p^t}{p^0 I_L^t} \right) = 1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n s_i^0 \left[\left(\frac{p_i^t}{p_i^0 I_L^t} \right) - 1 \right]^2.$$

Pasinaudojus Schlomilch nelygybe yra parodoma, jog panaši nelygybė galioja ir Paasche kainų indekso atveju, tačiau geometrinis indeksas didesnis už aritmetinį, t. y. $I_P \leq I_{GP}$. Be to, galioja toliau pateiktas sąryšis:

$$\frac{(I_{GP}^t)^{-1}}{(I_P^t)^{-1}} \approx 1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n s_i^t \left[\left(\frac{p_i^0}{p_i^t [I_P^t]^{-1}} \right) - 1 \right]^2,$$

kurį galima perrašyti į geometrinio Paasche kainų indekso priklausomybę nuo aritmetinio Paasche kainų indekso, t. y.

$$I_{GP}^t \approx \frac{I_P^t}{1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n s_i^t \left[\left(\frac{p_i^0}{p_i^t [I_P^t]^{-1}} \right) - 1 \right]^2}.$$

Taip pat galima užrašyti ir geometrinių Laspeyres bei Paasche kainų indeksų skirtumą –

$$\begin{aligned}
\ln I_{GP}^t - \ln I_{GL}^t &= \sum_{i=1}^n s_i^t \ln \left(\frac{p_i^t}{p_i^0} \right) - \sum_{i=1}^n s_i^0 \ln \left(\frac{p_i^t}{p_i^0} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n (s_i^t - s_i^0) (\ln p_i^t - \ln p_i^0).
\end{aligned}$$

Toliau nagrinėkime geometrinių Laspeyres bei Paasche kainų indeksų sąryšį su geometriniu Jevons kainų indeksu. Nagrinėkime logaritmines kainų indeksų išraiškas. Pasinaudoję jau apibrėžtomis kainų indeksų

¹⁴Plačiau apie šią ir kitas toliau pateiktas aproksimacijas galima rasti [15].

formulėmis, gauname, jog logaritmuotų geometrinio Laspeyres bei Jevons kainų indeksų skirtumas lygus

$$\begin{aligned}\ln I_{GL}^t - \ln I_J^t &= \sum_{i=1}^n \left(s_i^0 - \left(\frac{1}{n} \right) \right) (\ln p_i^t - \ln p_i^0) \\ &= n \text{Cov} \left(s^0 - \left(\frac{1}{n} \right) \mathbf{1}_n, \ln p^t - \ln p^0 \right) \equiv \varepsilon_t.\end{aligned}\quad (40)$$

Elementariųjų kainų indeksų kontekste, kuomet turime n homogeniškų produktų ir jų išlaidų dalys yra labai panašios arba lygios, tuomet galima laikyti, jog ε_t yra teigiamas dydis, t. y. $\ln p_i^0$ reikšmės yra paprastai mažos, tuomet s_i^0 dažniausiai yra neįprastai didelės ir todėl $s_i^0 - (1/n) > 0$. Be to, iš $\ln p_i^t - \ln p_i^0$ atėmus logaritminį kainų santykį $\ln(p_i^t/p_i^0)$ gausime daugiau nei 0, todėl ir $\varepsilon_t > 0$ ir iš to seka, jog $I_{GL}^t > I_J^t$. Tačiau, jeigu produktų skaičius n yra mažas bei produktų išlaidų dalys stipriai kinta, t. y. turi aukštą dispersiją, jeigu vienas ar keli produktai yra išparduodami, tuomet negalime laikyti, jog $s_i^0 > 1/n$ ir todėl negalima teigti, jog ε_t yra dydis didesnis už nulį ir iš to seka, jog nebūtinai I_{GL}^t yra didesnis už I_J^t . Tačiau tam tikromis sąlygomis $I_{GL}^t = I_J^t$ –

1. Kovariacija (40) formulėje yra lygi nuliui, t. y. $\text{Cov}(s^0 - (1/n)\mathbf{1}_n, \ln p^t - \ln p^0) = 0$.
2. Ataskaitinio laikotarpio t kainos yra proporcingos baziniam laikotarpiui, t. y. $p^t = \lambda_t p^0$, $\lambda_t > 0$.
3. Bazinio laikotarpiu produktų išlaidų dalys yra lygios, t. y. $s^0 = (1/n)\mathbf{1}_n$.

Taip pat panagrinėkime ir Jevons bei geometrinio Paasche kainų indeksų sąryšį, tuomet

$$\begin{aligned}\ln I_{GP}^t - \ln I_J^t &= \sum_{i=1}^n \left(s_i^t - \frac{1}{n} \right) (\ln p_i^t - \ln p_i^0) \\ &= n \text{Cov} \left(s^t - \frac{1}{n} \mathbf{1}_n, \ln p^t - \ln p^0 \right) \equiv \eta_t.\end{aligned}$$

Šio sąryšio analizei yra teisingi teiginiai pateikti analizuojant Jevons bei geometrinio Laspeyres kainų indeksų ryšį, tačiau bazinio laikotarpio produktų išlaidos keičiami į ataskaitinio laikotarpio produktų išlaidas.

2.2.2 Teiginys ([19]) *Laspeyres ir Lowe kainų indeksų skirtumas yra išreiškiamas kovariacijos ir Laspeyres kiekių indekso santykiu, t. y.*

$$I_{Lo}(p^0, p^t, p^b) - I_L(p^0, p^t, q^0) = \frac{\sum_{i=1}^n (r_i - r^*)(t_i - t^*) s_i^0}{Q_L(q^0, q^b, p^0)}.\quad (41)$$

Irodymas. Pasinaudojus jau žinomais žymėjimais pažymėkime i -ojo produkto kainų santykį r_i bei kiekių santykį lyginantį bazinius metus b ir laikotarpį 0 kaip

$$r_i = \frac{p_i^t}{p_i^0} \text{ ir } t_i = \frac{q_i^b}{q_i^0}, \text{ kiekvienam } i = 1, \dots, n.\quad (42)$$

Taip pat pažymėkime Laspeyres kainų indeksą kaip $r^* = \sum_{i=1}^n r_i s_i^0 = I_L$ bei Laspeyres kiekio indeksą atitinkamai

$t^* = \sum_{i=1}^n t_i s_i^0 = Q_L$, kur $Q_L = Q_L(q^0, q^b, p^0)$. Pasinaudojus Lowe kainų indeksų apibrėžimu gauname, jog

$$\begin{aligned}
I_{Lo}(p^0, p^t, q^b) &= \frac{\sum_{i=1}^n p_i^t q_i^b}{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^b} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i^t t_i q_i^0}{\sum_{i=1}^n p_i^0 t_i q_i^0} = \frac{\sum_{i=1}^n r_i t_i s_i^0}{t^*} = \frac{\sum_{i=1}^n (r_i - r^*) t_i s_i^0}{t^*} + \frac{\sum_{i=1}^n r^* t_i s_i^0}{t^*} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n (r_i - r^*) t_i s_i^0}{t^*} + \frac{r^* \left[\sum_{i=1}^n t_i s_i^0 \right]}{t^*} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n (r_i - r^*) t_i s_i^0}{t^*} + \frac{r^* [t^*]}{t^*} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n (r_i - r^*) (t_i - t^*) s_i^0}{t^*} + \frac{\sum_{i=1}^n (r_i - r^*) t^* s_i^0}{t^*} + r^* \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n (r_i - r^*) (t_i - t^*) s_i^0}{t^*} + \frac{t^* \left[\sum_{i=1}^n r_i s_i^0 - r^* \right]}{t^*} + r^* \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n (r_i - r^*) (t_i - t^*) s_i^0}{t^*} + r^* \\
&= I_L(p^0, p^t, q^0) + \frac{\sum_{i=1}^n (r_i - r^*) (t_i - t^*) s_i^0}{Q_L(q^0, q^b, p^0)}.
\end{aligned}$$

Taigi, perkėlus Laspeyres kainų indeksą į kitą lygybės pusę, gauname, jog Lowe ir Laspeyres kainų skirtumas lygus kovariacijos bei Laspeyres bazinio laikotarpio b kiekių indekso santykiui. $\square$

Prisiminkime Lowe kainų indekso išraišką –

$$I_{Lo}(p^0, p^t, q^b) = \frac{\sum_{i=1}^n p_i^t q_i^b}{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^b} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{p_i^t}{p_i^0} \right) p_i^0 q_i^b}{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^b} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_i^t}{p_i^0} \right) s_i^{0b},$$

kur

$$s_i^{0b} = \frac{p_i^0 q_i^b}{\sum_{j=1}^n p_j^0 q_j^b} = \frac{p_i^b q_i^b \left(\frac{p_i^0}{p_i^b} \right)}{\sum_{j=1}^n p_j^b q_j^b \left(\frac{p_j^0}{p_j^b} \right)}.$$

Tuomet Lowe kainų indeksą galima išreikšti dviejų Laspeyres kainų indeksų santykiu, t. y.

$$I_{Lo}(p^0, p^t, q^b) = \frac{\sum_{i=1}^n p_i^t q_i^b}{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^b} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i^t q_i^b / \sum_{i=1}^n p_i^b q_i^b}{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^b / \sum_{i=1}^n p_i^b q_i^b} = \frac{\sum_{i=1}^n s_i^b (p_i^t / p_i^b)}{\sum_{i=1}^n s_i^b (p_i^0 / p_i^b)} = \frac{I_L(p^b, p^t, q^b)}{I_L(p^b, p^0, q^b)}.$$

Ir skyrelio pabaigai panagrinėkime Lowe bei Young kainų indeksų sąryšį. Pasinaudoję jau apibrėžtais žymėjimais gauname, jog

$$\begin{aligned}
 I_{Lo}(p^0, p^t, q^b) &= \frac{\sum_{i=1}^n p_i^t q_i^b}{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^b} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{p_i^t}{p_i^0}\right) p_i^0 q_i^b}{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^b} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{p_i^t}{p_i^0}\right) p_i^0 q_i^b \left(\frac{p_i^0}{p_i^b}\right)}{\sum_{i=1}^n p_i^b q_i^b \left(\frac{p_i^0}{p_i^b}\right)} \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n s_i^b \left(\frac{p_i^t}{p_i^0}\right) \left(\frac{p_i^0}{p_i^b}\right)}{\sum_{i=1}^n s_i^b \left(\frac{p_i^0}{p_i^b}\right)} = \frac{\sum_{i=1}^n s_i^b \left(\frac{p_i^t}{p_i^0}\right) \left(\frac{p_i^0}{p_i^b}\right)}{I_Y(p^b, p^0, s^b)} \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n s_i^b r_i t_i}{I_Y(p^b, p^0, s^b)} = \frac{\sum_{i=1}^n s_i^b (r_i - r^*)(t_i - t^*) + r^* t^*}{I_Y(p^b, p^0, s^b)} = \frac{\text{Cov}(r, t, s^b) + I_Y(p^0, p^t, s^b) I_Y(p^b, p^0, s^b)}{I_Y(p^b, p^0, s^b)} \\
 &= \frac{\text{Cov}(r, t, s^b)}{I_Y(p^b, p^0, s^b)} + I_Y(p^0, p^t, s^b),
 \end{aligned}$$

kur svertinė kovariacija apibrėžiama analogiškai kaip ir anksčiau –

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(r, t, s^b) &= \sum_{i=1}^n s_i^b (r_i - r^*)(t_i - t^*) = \sum_{i=1}^n s_i^b \left(\left(\frac{p_i^t}{p_i^0} \right) - r^* \right) \left(\left(\frac{p_i^0}{p_i^b} \right) - t^* \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n s_i^b \left(\left(\frac{p_i^t}{p_i^0} \right) - I_Y(p^0, p^t, s^b) \right) \left(\left(\frac{p_i^0}{p_i^b} \right) - I_Y(p^b, p^0, s^b) \right).
 \end{aligned}$$

Žvelgiant iš ekonominės pusės, ilguoju laikotarpiu, tikimasi, jog kovariacija $\text{Cov}(r, t, s^b)$ bus teigiama; jeigu produkto i kainos didės kitų panašių produktų atžvilgiu, tuomet $p_i^t/p_i^0 - r^*$ ir $p_i^0/p_i^b - t^*$ bus teigiami, jeigu produkto kainos mažėja, abu skirtumai bus neigiami, tad jų sandauga bus taip pat teigiama, todėl bet kuriuo atveju kovariacija bus teigiama. Taigi, remiantis šiuo faktu Lowe kainų indeksas bus didesnis už Young kainų indeksą. Taigi, apžvelgus pagrindinius bazinius kainų indeksus bei jų sąryšius, teorinę dalį tęskime superlatyvių kainų indeksų apžvalga.

2.2.3. Superlatyvūs kainų indeksai

Toliau nagrinėkime superlatyvių kainų indeksus. Skyrelio medžiaga parengta remiantis [14, 19].

Laikykime, jog vartotojo naudingumo funkcija yra

$$f(q_1, \dots, q_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} q_i q_k}, \text{ kur } a_{ik} = a_{ki} \text{ visiems } i \text{ ir } k. \quad (43)$$

Be to, koeficientų a_{ik} matrica turi būti neneigiamai apibrėžta. Skaičiuojant funkcijos $f(q)$ išvestinę q_i atžvilgiu, gauname, jog

$$f_i(q) = \frac{\partial f(q)}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \frac{2 \sum_{k=1}^n a_{ik} q_k}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} q_j q_k}} = \frac{\sum_{k=1}^n a_{ik} q_k}{f(q)}. \quad (44)$$

Norint gauti paskutinę lygybę reikia pasinaudoti simetriškumo savybe, t. y. $a_{ik} = a_{ki}$. Padalinę (44) lygybės abi puses iš $f(q^t)$, gauname, jog

$$\frac{f_i(q^t)}{f(q^t)} = \frac{\sum_{k=1}^n a_{ik} q_k^t}{(f(q^t))^2}, \forall t \text{ ir } i = 1, \dots, n. \quad (45)$$

Laikykime, jog vartotojas siekia minimizuoti savo išlaidas. Kadangi naudingumo funkcija $f(q)$ apibrėžta (43) formulėje yra tiesinė homogeninė ir diferencijuojama, galima taikyti Shepard lemą. Apibrėžkime Fisher kiekio indeksą kaip

$$Q_F(p^0, p^t, q^0, q^t) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^t \sum_{i=1}^n p_i^t q_i^t}{\sum_{k=1}^n p_k^0 q_k^0 \sum_{k=1}^n p_k^t q_k^0}} = \frac{f(q^t)}{f(q^0)}, \quad (46)$$

t. y. galiojant paminėtoms sąlygoms Fisher kiekio indeksas Q_F lygus tikrajam kiekio indeksui $f(q^t)/f(q^0)$ ¹⁵. Tegul $c(p)$ yra vieneto vertės funkcija, kuri atitinka homogeninę kvadratinę naudingumo funkciją $f(q)$ apibrėžtą (43) formulėje, tuomet pasinaudojus Shepard lema, gauname, jog Fisher kainų indeksas lygus

$$I_F(p^0, p^t, q^0, q^t) = \frac{c(p^t)}{c(p^0)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n p_i^t q_i^0 \sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^t}{\sum_{k=1}^n p_k^0 q_k^0 \sum_{k=1}^n p_k^t q_k^t}}. \quad (47)$$

Analogiškai kaip ir Fisher kiekio indeksas, Fisher kainų indeksas lygus tikrajam kainų indeksui $c(p^t)/c(p^0)$.¹⁶

Du kartus diferencijuojama tolydi funkcija $f(q)$, kur $q = (q_1, \dots, q_n)$ gali būti laikoma antros eilės panašios funkcijos $f^*(q)$ aproksimacija taške q^* , jeigu tik egzistuoja funkcijų $f(q)$ ir $f(q^*)$ pirmos bei antros eilės dalinės išvestinės taške q^* . Galima, parodyti, jog homogeninė kvadratinė funkcija f apibrėžta (43) formulėje gali būti antros eilės aproksimacija funkcijai f^* griežtai teigiamam taške q^* tiesinių homogeninių funkcijų aibėje. Todėl homogeninė kvadratinė funkcija apibrėžta (43) formulėje vadinama lanksčia funkcinė forma (angl. *flexible functional form*). Diewert [14] apibrėžė kiekio indeksą $Q(p^0, p^t, q^0, q^t)$ kaip tikrąjį kiekio indeksą $f(q^t)/f(q^0)$, kur f yra lanksti funkcinė forma, todėl šis indeksas buvo priskirtas superlatyvių kainų indeksų aibei. Analogiškai, kadangi Fisher kainų indeksas atitinka tikrąjį kainų indeksą $c(p^t)/c(p^0)$ ir naudojama lanksti funkcinė forma vieneto vertės funkcijai, todėl ir Fisher kainų indeksas yra superlatyvus.

Toliau nagrinėsime kitus superlatyvių kainų indeksų atstovus. Šie indeksai pasižymi tuo, kad jų sudarymui naudojamos lanksčios funkcinės formos, kurios tenkina tam tikras jau aptartas aksiomas bei ekonomines sąlygas. Kadangi tokių funkcinų formų gali būti įvairių, iš to seka, jog galima sukonstruoti daug skirtingų superlatyvių kainų indeksų. Svarbu pažymėti, kad superlatyvių indeksų teorijoje daugiausia analizuojamos tik kelios specifinės naudojimo funkcijų rūšys, kurios atitinka vartotojo naudingumo teoriją ir yra išlaidų minimizavimo problemos sprendiniai. Tai užtikrina, kad superlatyvus kainų indeksas tiksliai atspindėtų vartotojų išlaidų struktūrą ir kainų lygio pokyčius.

Toliau panagrinėkime kiek kitokią naudingumo funkciją, kuri vadinama r -osios eilės kvadratine naudingumo funkcija. Laikykime, jog vartotojo naudingumo funkcija yra r -ojo laipsnio kvadratinė funkcija apibrėžiama

¹⁵ Fisher kiekio ir kainų indeksų išvedimus galima rasti [19] 318-322 psl.

¹⁶ Įrodymas pateiktas [19].

kaip

$$f^r(q_1, \dots, q_n) = \sqrt[r]{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} q_i^{r/2} q_k^{r/2}}, \quad (48)$$

kur parametrai a_{ik} tenkina simetriškumo savybę, t. y. $a_{ik} = a_{ki}, \forall i$ ir k , o parametras $r \neq 0$. Funkcija f^r tenkina lanksčią funkcinę formą, t. y. funkcija gali aproksimuoti du kartus diferencijuojamą tolydžią tiesinę homogeninę funkciją antros eilės aproksimacija. Kai $r = 2$, f^r yra lygi apibrėžtai (43) formulei. Tuomet kiekio indeksas apibrėžiamas kaip

$$Q^r(p^0, p^t, q^0, q^t) = \frac{\sqrt[r]{\sum_{i=1}^n s_i^0 \left(\frac{q_i^t}{q_i^0}\right)^{r/2}}}{\sqrt[r]{\sum_{i=1}^n s_i^t \left(\frac{q_i^t}{q_i^0}\right)^{r/2}}}, \quad (49)$$

čia $s_i^t = p_i^t q_i^t / \sum_{k=1}^n p_k^t q_k^t$ laiko momento t išlaidų dalis tenkantį prekei i . Analogiškai kaip ir Fisher kiekio indekso atveju, r -ojo laipsnio kvadratinio vidurkio kiekio indeksas taip pat yra lygus tikrajam kiekio indeksui bei kiekio indeksas yra superlatyvus. Kainų indeksas šiuo atveju lygus

$$P^{r*}(p^0, p^t, q^0, q^t) = \frac{\sum_{i=1}^n p_i^t q_i^t}{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^0 Q^r(p^0, p^t, q^0, q^t)} = \frac{c^{r*}(p^t)}{c^{r*}(p^0)},$$

čia c^{r*} yra vieneto vertės funkcija. Kiekvienam $r \neq 0$, r -osios eilės kvadratinio vidurkio kainų indeksas P^{r*} yra superlatyvus indeksas. Nagrinėkime atvejį, kai $r = 2$, tuomet kainų ir kiekio indeksai lygūs Fisher kainų bei kiekio indeksams. Kai $r = 1$, kiekio indeksas lygus

$$\begin{aligned} Q^1(p^0, p^t, q^0, q^t) &= \frac{\sum_{i=1}^n s_i^0 \sqrt{\frac{q_i^t}{q_i^0}}}{\sum_{i=1}^n s_i^t \sqrt{\frac{q_i^0}{q_i^t}}} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i^t q_i^t \sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^0 \sqrt{\frac{q_i^t}{q_i^0}}}{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^0 \sum_{i=1}^n p_i^t q_i^t \sqrt{\frac{q_i^0}{q_i^t}}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n p_i^t q_i^t \sum_{i=1}^n p_i^0 \sqrt{q_i^0 q_i^t}}{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^0 \sum_{i=1}^n p_i^t \sqrt{q_i^0 q_i^t}} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i^t q_i^t}{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^0} \bigg/ \frac{\sum_{i=1}^n p_i^t \sqrt{q_i^0 q_i^t}}{\sum_{i=1}^n p_i^0 \sqrt{q_i^0 q_i^t}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n p_i^t q_i^t}{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^0} \bigg/ I_W(p^0, p^t, q^0, q^t), \end{aligned}$$

čia I_W yra Walsh¹⁷ kainų indeksas. Kai $r = 1$, kainų indeksas yra

$$P^1(p^0, p^t, q^0, q^t) = \frac{\sum_{i=1}^n s_i^0 \sqrt{\frac{p_i^t}{p_i^0}}}{\sum_{i=1}^n s_i^t \sqrt{\frac{p_i^0}{p_i^t}}} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i^t q_i^t}{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^0} \bigg/ Q_W(p^0, p^t, q^0, q^t),$$

¹⁷Correa Moylan Walsh (1862 – 1936) – Jungtinių Amerikos Valstijų ekonomistas, autorius.

kur Q_W yra Walsh kiekio indeksas, kuris lygus

$$Q_W(p^0, p^t, q^0, q^t) = \frac{\sum_{i=1}^n q_i^t \sqrt{p_i^0 p_i^t}}{\sum_{i=1}^n q_i^0 \sqrt{p_i^0 p_i^t}}. \quad (50)$$

Iki šiol nagrinėjome tik tiesines homogenines naudingumo funkcijas, panagrinėkime kiek kitokią – kvadratinę. Laikykite, jog turime kvadratinę formą $f(z_1, \dots, z_n) = f(z)$, kuri lygi

$$f(z_1, \dots, z_n) \equiv a_0 + \sum_{i=1}^n a_i z_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} z_i z_k, \text{ kur } a_{ik} = a_{ki} \text{ kiekvienam } i \text{ ir } k. \quad (51)$$

Pažymėkime $f_i(z)$ pirmos eilės funkcijos f dalinę išvestinę kintamojo z_i , o $f_{ik}(z)$ – antros eilės dalinę išvestinę kintamųjų z_i ir z_k atžvilgiu. Be to, apibrėžta kvadratinė naudingumo funkcija turi antros eilės Teiloro eilutės aproksimaciją, t. y. jeigu f yra apibrėžta (51) formulėje, tuomet bet kuriems taškams z^0 ir z^1 galioja toliau pateikta lygybė:

$$f(z^1) - f(z^0) = \sum_{i=1}^n f_i(z^0)(z_i^1 - z_i^0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n f_{ik}(z^0)(z_i^1 - z_i^0)(z_k^1 - z_k^0).$$

Taip pat nagrinėkime pirmų Teiloro skleidinio dviejų narių vidurkį¹⁸, kuris lygus

$$f(z^1) - f(z^0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (f_i(z^0) + f_i(z^1)) (z_i^1 - z_i^0). \quad (52)$$

Laikykite, jog vartotojo išlaidų funkcija $C(u, p)$ turi translogaritminę funkcinę formą ir yra apibrėžiama kaip

$$\ln C(u, p) \equiv a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \ln p_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} \ln p_i \ln p_k + b_0 \ln u + \sum_{i=1}^n b_i \ln p_i \ln u + \frac{1}{2} b_{00} (\ln u)^2, \quad (53)$$

kur reikalingi apribojimai:

$$a_{ik} = a_{ki}, \sum_{i=1}^n a_i = 1, \sum_{i=1}^n b_i = 0 \text{ ir } \sum_{k=1}^n a_{ik} = 0 \quad \forall i, k = 1, \dots, n.$$

Šie parametrų apribojimai užtikrina, kad išlaidų funkcija $C(u, p)$ būtų tiesinė homogeninė funkcija kintamojo p atžvilgiu. Sakykite, jog vartotojo preferencijos atitinka translogaritminės išlaidų funkcijos formą naudojamą išlaidų minimizavimo problemai spręsti. Kaip ir anksčiau, p^0 ir p^t atitinkamų laikotarpių kainų, o q^0 ir q^t kiekių vektoriai, tuomet

$$C(u^0, p^0) = \sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^0 \quad \text{ir} \quad C(u^t, p^t) = \sum_{i=1}^n p_i^t q_i^t, \quad (54)$$

kur C yra translogaritminė išlaidų funkcija apibrėžta kiek aukščiau. Pasinaudoję Shepard lema gauname, jog

$$q_i^t = \frac{\partial C(u^t, p^t)}{\partial p_i} = \frac{C(u^t, p^t)}{p_i^t} \frac{\partial \ln C(u^t, p^t)}{\partial \ln p_i}. \quad (55)$$

¹⁸Vidurkis literatūroje vadinamas kvadratinės aproksimacijos lema (Diewert, 1976).

Įstatykime (54) į (55) vietoj $C(u^t, p^t)$. Atlikę pertvarkymus gauname, jog

$$\frac{p_i^t q_i^t}{\sum_{k=1}^n p_k^t q_k^t} = s_i^t = \frac{\partial \ln C(u^t, p^t)}{\partial \ln p} \quad (56)$$

arba

$$s_i^t = a_i + \sum_{k=1}^n a_{ik} \ln p_k^t + b_i \ln u^t, \quad (57)$$

kiekvienam $i = 1, \dots, n$, kur s_i^t yra produktui i tenkanti išlaidų dalis laiko momentu t . Apibrėžkime dviejų laikotarpių naudingumo lygių geometrinį vidurkį kaip u^* , kuris lygus $u^* = \sqrt{u^0 u^t}$. Įstatę u^* į (53) ir pasinaudoję (52) formule gauname toliau pateiktą rezultatą

$$\begin{aligned} \ln C(u^*, p^t) - \ln C(u^*, p^0) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \ln C(u^*, p^0)}{\partial \ln p_i} + \frac{\partial \ln C(u^*, p^t)}{\partial \ln p_i} \right) (\ln p_i^t - \ln p_i^0) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(a_i + \sum_{k=1}^n a_{ik} \ln p_k^0 + b_i \ln u^* + a_i + \sum_{k=1}^n a_{ik} \ln p_k^t + b_i \ln u^* \right) (\ln p_i^t - \ln p_i^0) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(a_i + \sum_{k=1}^n a_{ik} \ln p_k^0 + b_i \ln \sqrt{u^0 u^t} + a_i + \sum_{k=1}^n a_{ik} \ln p_k^t + b_i \ln \sqrt{u^0 u^t} \right) (\ln p_i^t - \ln p_i^0) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(a_i + \sum_{k=1}^n a_{ik} \ln p_k^0 + b_i \ln u^0 + a_i + \sum_{k=1}^n a_{ik} \ln p_k^t + b_i \ln u^t \right) (\ln p_i^t - \ln p_i^0) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \ln C(u^0, p^0)}{\partial \ln p_i} + \frac{\partial \ln C(u^t, p^t)}{\partial \ln p_i} \right) (\ln p_i^t - \ln p_i^0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (s_i^0 + s_i^t) (\ln p_i^t - \ln p_i^0). \quad (58) \end{aligned}$$

Šio išvedimo rezultatas – Tornqvist–Theil kainų indeksas, kuris, kaip galima matyti, atitinka tikrąjį pragyvenimo išlaidų kainų indeksą, kurio naudingumo funkcija u^* , t. y.

$$\frac{C(u^*, p^t)}{C(u^*, p^0)} = I_T(p^0, p^t, q^0, q^t). \quad (59)$$

Törnqvist–Theil kainų indeksas yra superlatyvus, nes išvedimui naudojama translogaritminė išlaidų funkcija yra lanksčios funkcinės formos. Panagrinėkime šio indekso sąryšį su elementariuoju Jevons kainų indeksu. Apibrėžkime logaritminį šių kainų indeksų skirtumą:

$$\begin{aligned} \ln I_T^t - \ln I_J^t &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} s_i^t + \frac{1}{2} s_i^0 - \frac{1}{n} \right) (\ln p_i^t - \ln p_i^0) \\ &= n \text{Cov} \left(\frac{1}{2} s^t + \frac{1}{2} s^0 - \frac{1}{n} \mathbb{I}_n, \ln p^t - \ln p^0 \right) \\ &= \frac{n}{2} \text{Cov}(s^t + \frac{1}{n} \mathbb{I}_n, \ln p^t - \ln p^0) + \frac{n}{2} \text{Cov}(s^0 - \frac{1}{n} \mathbb{I}_n, \ln p^t - \ln p^0) = \frac{1}{2} \varepsilon_t + \frac{1}{2} \eta_t. \end{aligned} \quad (60)$$

Törnqvist ir Jevons kainų indeksai nėra lygūs, tačiau, jeigu galioja bent viena iš toliau pateiktų sąlygų, jų rezultatas yra identiškas. Taigi, kainų indeksai lygūs, jeigu

- Kovariacija, esanti (60) formulėje yra lygi nuliui, t. y.

$$\text{Cov} \left(\frac{1}{2} s^t + \frac{1}{2} s^0 - \frac{1}{n} \mathbb{I}_n, \ln p^t - \ln p^0 \right) = 0 = \frac{1}{2} \varepsilon_t + \frac{1}{2} \eta_t$$

arba ekvivalenčiai

$$\text{Cov}(s^t - \frac{1}{n}\mathbb{I}_n, \ln p^t - \ln p^0) = -\text{Cov}(s^t - \frac{1}{n}\mathbb{I}_n, \ln p^t - \ln p^0);$$

- Galioja laikotarpio t kainų proporcingumas, t. y. $p^t = \lambda_t p^0$, kai $\lambda_t > 0$;
- Aritmetinis laiko momentų 0 ir t produkto išlaidų dalies vidurkis yra lygus $\frac{1}{n}$, t. y.

$$\frac{1}{2}s^t + \frac{1}{2}s^0 = \frac{1}{n}\mathbb{I}_n.$$

Apibrėžkime dar vieną superlatyvų kainų indeksą. Sato–Vartia kainų indeksas lygus

$$I_{SV}^{0,t} = \prod_{i=1}^n \left(\frac{p_i^t}{p_i^0} \right)^{s_i^{0,t}}, \quad (61)$$

čia s žymi produktų svorius, kurie apskaičiuojami naudojant šią formulę:

$$s_i^{0,t} = \frac{\frac{s_i^t - s_i^0}{\ln s_i^t - \ln s_i^0}}{\sum_{j=1}^n \frac{s_j^t - s_j^0}{\ln s_j^t - \ln s_j^0}},$$

kur

$$s_i^0 = \frac{p_i^0 q_i^0}{\sum_{j=1}^n p_j^0 q_j^0} \quad \text{ir} \quad s_i^t = \frac{p_i^t q_i^t}{\sum_{j=1}^n p_j^t q_j^t}.$$

Skyrelio pabaigai panagrinėkime superlatyvų kainų indeksų sąryšį. Visi superlatyvūs kainų indeksai ap-
roksimuoja vienas kitą antros eilės išvestinėmis bet kuriuose taškuose, kuriose kainų vektoriai p^0 ir p^t arba
kiekių vektoriai q^0 ir q^t yra lygūs. Toliau pateiktos lygybės galioja visiems r ir s nelygiams nuliui bei tuomet, kai
 $p^0 = p^t$ ir $q^0 = q^t$, t. y.,

$$\begin{aligned} I_T(p^0, p^t, q^0, q^t) &= I_r(p^0, p^t, q^0, q^t) = I_{r^*}(p^0, p^t, q^0, q^t), \\ \frac{\partial I_T(p^0, p^t, q^0, q^t)}{\partial p_i^t} &= \frac{\partial I_r(p^0, p^t, q^0, q^t)}{\partial p_i^t} = \frac{\partial I_{r^*}(p^0, p^t, q^0, q^t)}{\partial p_i^t}, \\ \frac{\partial I_T(p^0, p^t, q^0, q^t)}{\partial q_i^t} &= \frac{\partial I_r(p^0, p^t, q^0, q^t)}{\partial q_i^t} = \frac{\partial I_{r^*}(p^0, p^t, q^0, q^t)}{\partial q_i^t}, \\ \frac{\partial^2 I_T(p^0, p^t, q^0, q^t)}{\partial p_i^t \partial p_k^t} &= \frac{\partial^2 I_r(p^0, p^t, q^0, q^t)}{\partial p_i^t \partial p_k^t} = \frac{\partial^2 I_{r^*}(p^0, p^t, q^0, q^t)}{\partial p_i^t \partial p_k^t}, \\ \frac{\partial^2 I_T(p^0, p^t, q^0, q^t)}{\partial p_i^t \partial q_k^t} &= \frac{\partial^2 I_r(p^0, p^t, q^0, q^t)}{\partial p_i^t \partial q_k^t} = \frac{\partial^2 I_{r^*}(p^0, p^t, q^0, q^t)}{\partial p_i^t \partial q_k^t}, \\ \frac{\partial^2 I_T(p^0, p^t, q^0, q^t)}{\partial q_i^t \partial q_k^t} &= \frac{\partial^2 I_r(p^0, p^t, q^0, q^t)}{\partial q_i^t \partial q_k^t} = \frac{\partial^2 I_{r^*}(p^0, p^t, q^0, q^t)}{\partial q_i^t \partial q_k^t}. \end{aligned}$$

Apibendrinant šias lygybes galima teigti, jog visi superlatyvūs kainų indeksai tam tikruose taškuose vienas
kitą aproksimuoja. Toliau nagrinėkime daugialypius kainų indeksus.

2.2.4. Daugialypiai kainų indeksai

Dar viena svarbi kainų indeksų grupė yra daugialypiai (angl. *multilateral*) kainų indeksai, kurie ypač tinka skaičiuojant kainų pokyčius naudojant prekybos tinklų kvitų duomenis. Pasak [16], daugialypiai kainų indeksai įvertina agreguotų produktų kainų pokyčius tarp dviejų laikotarpių, remiantis stebimomis kainomis keliuose laiko momentuose. Palyginimui laike daugialypiai indeksai dažniausiai naudoja tik kvitų duomenis, o pagrindinis jų privalumas – nebuvimas grandininio kainų jungimo poslinkio. Toks poslinkis dažnai pasireiškia baziniams indeksams dėl vartojimo prekių krepšelio dinamiškumo laike. Skyrelio medžiaga parengta pagal [3, 4, 6, 16, 17].

Pagrindiniai daugialypių kainų indeksų privalumai:

1. Šie kainų indeksai atsižvelgia į visų produktų, kurių duomenys stebimi tarp dviejų laiko momentų. Tai svarbu, nes kvitų duomenys dažnai yra dinamiški, t. y. stebimų produktų aibė gali keistis;
2. Skaičiuojant šiuos indeksus naudojami mėnesiniai produktų svoriai, todėl indeksai atspindi naujausius vartotojų įpročius ir didesnę įtaką suteikia labiausiai vartojamiems produktams;
3. Šių kainų indeksų tranzityvumo laike savybė leidžia sumažinti grandininio jungimo metu susidariusią paklaidą.

Nors šie indeksai laikomi geriausiu pasirinkimu skaičiuojant kainų pokyčius naudojant kvitų duomenis, tačiau jie turi ir tam tikrų neigiamų aspektų:

1. Šie indeksai tenkina tranzityvumo laike aksiomą, todėl grandininio jungimo metu paklaidos nesusidaro, tačiau paklaida gali atsirasti naudojant skirtingus laiko langus ar sujungimo momentus;
2. Ilgesnis laiko langas didina produktų pakeitimų tikimybę, kai vienas produktas pakeičiamas kitu (panašiu pagal charakteristikas arba pasikeitus brūkšniniam kodui), todėl mažėja produktų, įtraukiamų į skaičiavimus tarp dviejų laikotarpių, skaičius;
3. Agreguotam kainų pokyčiui tarp dviejų laiko momentų didžiausią įtaką dažniausiai turi duomenys iš viso laikotarpio, t. y. visų pardavimų, stebimų tarp šių dviejų laiko momentų;
4. Daugialypiai kainų indeksai netenkina stipraus identiškumo aksiomos, tačiau tenkina silpno identiškumo aksiomą;
5. Šie indeksai yra sudėtingesni nei baziniai kainų indeksai, nes jų skaičiavimai sunkiau paaiškinami ir reikalauja sudėtingesnių metodų bei gilesnių analitinių žinių, tad prieš įtraukiant daugialypius kainų indeksus į oficialiąją statistiką rekomenduojama atlikti įtakos analizę naudojant specializuotus vertinimo algoritmus.

Daugialypių kainų indeksų aibė, kaip ir kitos kainų indeksų aibės, tenkina tam tikras, tik šiai kainų indeksų aibei būdingas toliau pateiktas aksiomas. Tegul P ir Q apibrėžia visas stebimas produktų kainas bei stebimų produktų kiekius laiko intervale $[0, T]$, t. y. $P = (p^0, p^1, \dots, p^T)$, o $Q = (q^0, q^1, \dots, q^T)$, kur p^t ir q^t žymi atitinkamai produktų kainas ir kiekius kiekvienu laiko momentu t , o $I^{0,t}(p^0, \dots, p^T, q^0, \dots, q^T) = I^{0,t}(P, Q)$ tegul žymi daugialypį kainų indeksą, kuris laikomas funkcija, priklausančia nuo kainų ir kiekio vektorių laiko periodu nuo momento 0 iki T . Tegul $G_{0,t}$ yra produktų rinkinys, kurio produktų kainas galima stebėti momentais 0 ir t . Tuomet daugialypis kainų indeksas tenkina toliau pateiktas aksiomas.

A1. **Tranzityvumas:** aksioma teigia, jog

$$I^{0,t}(P,Q) = I^{0,s}(P,Q) \times I^{s,t}(P,Q), \forall 0 \leq s < t \leq T.$$

A2. **Identiškumas:** aksioma teigia, jog kainų indeksas lygus vienetui, jeigu visos kainos grįžta į bazinio laikotarpio kainų lygį, t. y., jeigu $p_i^t = p_i^0 \forall i \in G_{0,t}$, tuomet

$$I^{0,t}(P,Q) = 1.$$

Laikome, jog produktų aibės laiko momentais 0 ir t yra identiškos.

A3. **Daugelio periodų identiškumas:** aksioma teigia, jog grandininio būdu sujungtos kainų indeksų laiko eilutė sandauga yra lygi vienetui, jeigu visos produktų kainos ir kiekiai grįžta į pradinio (bazinio) laiko momento lygį, t. y. tegul $p_i^t = p_i^0$ ir $q_i^t = q_i^0 \forall i \in G_{0,t}$, tuomet

$$I^{0,1}(P,Q) \times I^{1,2}(P,Q) \times \dots \times I^{t-1,t}(P,Q) = 1.$$

Laikome, jog produktų aibės laiko momentais 0 ir t yra identiškos.

A4. **Tolygumas, neneigiamumas ir normalizacija:** $I^{0,t}(P,Q)$ yra teigiama ir tolydi funkcija kainų ir kiekių atžvilgiu bei $I^{0,0}(P,Q) = 1$.

A5. **Kainų proporcingumas:** jeigu kainos laiko momentais 0 ir t yra proporcingos, t. y. $p_i^t = k p_i^0 \forall i \in G_{0,t}$ ir bet kokiam teigiamam k , tuomet kainų indeksas priklauso tik nuo proporcingumo koeficiento ir tada $I^{0,t}(P,Q) = k$. Laikome, jog produktų aibę laiko momentais 0 ir t yra sudaryta iš tų pačių produktų.

A6. **Kiekių homogeniškumas:** bet kurio periodo s kiekių perskaičiavimas neturi įtakos kainų indeksui, t. y. bet kuriam $k > 0$ galioja, jog

$$I^{0,t}(P, q^0, \dots, k q^s, \dots, q^t) = I^{0,t}(P, q^0, \dots, q^s, \dots, q^t).$$

A7. **Kainų homogeniškumas:** perskaičius ataskaitinio laikotarpio kainas proporcingumo koeficientu k , kainų indeksas padidėja arba sumažėja atitinkamu koeficientu k , t. y.

$$I^{0,t}(p^0, p^1, \dots, k p^t, Q) = k I^{0,t}(p^0, p^1, \dots, p^t, Q).$$

A8. **Suderinamumas:** perskaičiuojant matavimo vienetus, kuriais pateiktos produktų kainos ir kiekiai, kainų indeksui įtakos nėra. Kitaip tariant, jeigu bet kuriam laiko momentui $s \in [0, T]$ turime, jog $\tilde{p}_i^s = \lambda_i p_i^s$ ir $\tilde{q}_i^s = \frac{q_i^s}{\lambda_i}$ kiekvienam $i \in G_{0,t}$ ($\lambda_i > 0$), tuomet $I^{0,t}(\tilde{P}, \tilde{Q}) = I^{0,t}(P, Q)$.

A9. **Fiksuoto prekių krepšelio savybė:** jeigu $G_0 = G_t$ ir $q_i^0 = q_i^t = q_i \forall i \in G_{0,t}$, tuomet

$$I^{0,t}(P, Q) = \frac{\sum_{i \in G_{0,t}} p_i^t q_i}{\sum_{i \in G_{0,t}} p_i^0 q_i}.$$

A10. **Jautrumo savybė:** kiekvienai aibei $G_0 \neq G_t$, jeigu $p_i^t = p_i^0, \forall i \in G_{0,t}$, tuomet $I^{0,t}(P, Q)$ nebūtinai visada lygus vienetui, nepaisant aibių skirtumų – $G_0 \setminus G_t$ ar $G_t \setminus G_0$.

A11. **Viršutinio rėžio aksioma:** jeigu $G_0 \subset G_t$ ir $p_i^t \leq p_i^0 \forall i \in G_{0,t}$, tuomet $I^{0,t}(P,Q) \leq 1$.

A12. **Apatinio rėžio aksioma:** jeigu $G_t \subset G_0$ ir $p_i^t \geq p_i^0 \forall i \in G_{0,t}$, tuomet $I^{0,t}(P,Q) \geq 1$.

Daugialypių kainų indeksų skaičiavimo kontekste svarbus laiko lango pasirinkimas, nes šie indeksai lygina kelis laikotarpius ir į skaičiavimus įtraukia visus duomenis, esančius tame laikotarpyje. Skaičiuojant rodiklius, kiekvieną mėnesį laiko langas turi būti tinkamai parinktas ir įtraukti ankstesnius mėnesius. Praktikoje tai atliekama taikant du laiko lango pasirinkimo metodus:

- **Slankus laiko langas** (angl. *rolling time window*) – kiekvieną mėnesį pasirenkamas fiksuoto ilgio laiko langas, kuris pasislenka vieno mėnesio laikotarpiu. Laiko lango ilgis nekinta. Pavyzdžiui, turime 13 mėnesių laiko langą (praktikoje dažnai taikomi 13 arba 25 mėnesių laiko langai), kurio pradžia – 2025 metų sausis, o pabaiga – 2026 metų sausis. Tuomet šis laiko langas naudojamas 2026 metų sausio mėnesio kainų indeksų skaičiavimams.
- **Besiplečiantis laiko langas** (angl. *expanding time window*) – kiekvieną mėnesį laiko langas pratęsimas vienu mėnesiu, t. y. jo ilgis pailgėja vienu mėnesiu. Po metų laiko lango ilgis gali būti atstatomas į pradinį dydį. Pavyzdžiui, tegul pirmas laiko langas apima laikotarpį nuo 2025 metų sausio mėnesio iki 2026 metų sausio mėnesio imtinai (naudojamas 2026 metų sausio mėnesio skaičiavimui). Kito mėnesio laiko langas apims laikotarpį nuo 2025 metų sausio mėnesio iki 2026 metų vasario mėnesio imtinai (naudojamas 2026 metų vasario mėnesio skaičiavimui) ir taip toliau. Taikant šią strategiją, gali atsirasti laiko lango ilgio disbalansas, o metų pradžioje langas gali būti labai trumpas.

Kiekvieną skaičiavimo laikotarpį laiko langas skiriasi, todėl ankstesnių laikotarpių kainų indeksai gali taip pat skirtis. Dėl to taikomos skirtingos kainų indeksų laiko eilučių sujungimo technikos, kurios leidžia ataskaitinio laikotarpio daugialypius kainų indeksus susieti su publikuota kainų indeksų laiko eilute, taip išvengiant publikuotų kainų indeksų revizavimo.

Techniniu požiūriu dviejų kainų indeksų laiko eilučių sujungimas vykdomas naudojant sujungimo mėnesį. Praktikoje yra keli skirtingi laiko eilučių sujungimo variantai, kurie pasirenka skirtingus sujungimo mėnesius, skaičiuojant kainų indeksus laiko momentui t . Laiko langas toliau žymimas simboliu T . Metodologiškai tinkami bei Eurostato siūlomi sujungimo momentai yra šie:

- **Pokyčio sujungimas** (angl. *movement splice*) – kainų indeksų laiko eilučių susiejimui naudojamas $t - 1$ mėnuo;
- **Laiko lango sujungimas** (angl. *window splice*) – kainų indeksų laiko eilučių susiejimui naudojamas $t - T + 1$ mėnuo;
- **Vidurinio periodo sujungimas** (angl. *half splice*) – kainų indeksų laiko eilučių susiejimui naudojamas $t - ((T + 1)/2) + 1$ mėnuo;
- **Vidutinis sujungimas** (angl. *mean splice*) – visi pasirinkto laiko lango laikotarpiai yra naudojami kainų indeksų laiko eilučių susiejimui;
- **Fiksuotos bazės sujungimas** (angl. *fixed base splice*) – kainų indeksų eilučių susiejimui naudojamas $t - 1$ metų gruodžio mėnuo (praktikoje dažnai laikomu baziniu kainų indeksų laikotarpiu).

Apžvelgkime pagrindinių kainų indeksų laiko eilučių susiejimo metodų formules.

Pokyčio sujungimo metodu laikotarpio t kainų indeksas su publikuota kainų indeksų laiko eilute yra susiejamas pagal toliau pateiktą formulę

$$I_{pub}^{0,t} = I_{pub}^{0,t-1} \times I_{[t-T-1,t]}^{t-1,t}.$$

Laiko lango jungimo metodu laikotarpio t kainų indeksas jungiamas prie $t - 1$ laikotarpio suskaičiuotos kainų indeksų laiko eilutės taip

$$I_{pub}^{0,t} = I_{pub}^{0,t-1} \times I_{[t-T-1,t-1]}^{t-1,t-T+1} \times I_{[t-T+1,t]}^{t-T+1,t},$$

o susiejimas su publikuota kainų indeksų laiko eilute atliekamas taip

$$I_{pub}^{0,t} = I_{pub}^{0,t-1} \times I_{pub}^{t-1,t-T+1} \times I_{[t-T+1,t]}^{t-T+1,t} = I_{pub}^{0,t-T+1} \times I_{[t-T+1,t]}^{t-T+1,t}.$$

Vidurinio periodo sujungimo metodu laikotarpio t kainų indeksas jungiamas prie $t - 1$ laikotarpio suskaičiuotos kainų indeksų laiko eilutės taip

$$I_{pub}^{0,t} = I_{pub}^{0,t-1} \times I_{[t-T,t-1]}^{t-1,t-\left(\frac{T+1}{2}\right)+1} \times I_{[t-T+1,t]}^{t-\left(\frac{T+1}{2}\right)+1,t},$$

o susiejimas su publikuota kainų indeksų laiko eilute –

$$I_{pub}^{0,t} = I_{pub}^{0,t-1} \times I_{pub}^{t-1,t-\left(\frac{T+1}{2}\right)+1} \times I_{[t-T+1,t]}^{t-\left(\frac{T+1}{2}\right)+1,t} = I_{pub}^{0,t-\left(\frac{T+1}{2}\right)+1} \times I_{[t-T+1,t]}^{t-\left(\frac{T+1}{2}\right)+1,t}.$$

Vidutinio sujungimo metodu laikotarpio t kainų indeksas jungiamas prie $t - 1$ laikotarpio suskaičiuotos kainų indeksų laiko eilutės taip

$$I_{pub}^{0,t} = I_{pub}^{0,t-1} \times \prod_{k=t-T+1}^{t-1} \left(I_{[t-T,t-1]}^{t-1,k} \times I_{[t-T+1,t]}^{k,t} \right)^{\frac{1}{T-1}},$$

o susiejimas su publikuota kainų indeksų laiko eilute užrašomas kaip

$$I_{pub}^{0,t} = I_{pub}^{0,t-1} \times \prod_{k=t-T+1}^{t-1} \left(I_{pub}^{t-1,k} \times I_{[t-T+1,t]}^{k,t} \right)^{\frac{1}{T-1}} = \prod_{k=t-T+1}^{t-1} \left(I_{pub}^{0,k} \times I_{[t-T+1,t]}^{k,t} \right)^{\frac{1}{T-1}}.$$

Fiksuotos bazės sujungimo metodu laikotarpio t kainų indekso reikšmė jungiama kartu su publikuota kainų indeksų laiko eilute pasinaudojant šia formule:

$$I_{pub}^{0,t} = I_{pub}^{t-1} \times I_{pub}^{t-1,Dec(t)} \times I_{[t-T+1,t]}^{Dec(t),t} = I_{pub}^{0,Dec(t)} \times I_{[t-T+1,t]}^{Dec(t),t}.$$

Toliau apžvelgime pagrindinių praktikoje naudojamų daugialypių kainų indeksų formules. Daugialypių kainų indeksų tikslas įvertinti skirtumus tarp skirtingų regionų, teritorinių vienetų, prekybos centrų ar pan. Daugialypis kainų indeksas skaičiavime naudoja kainas ir kiekius stebimiems produktams, kurie yra įmanomi visais laiko lango mėnesiais. Dažniausiai praktikoje naudojamas GEKS¹⁹ kainų indeksas, tad toliau nagrinėjami GEKS tipo kainų indeksų junginiai.

Tarkime, jog nagrinėjame homogeniškų produktų, kurie priklauso vienai klasifikatoriaus grupei, aibę laiko momentais 0 ir t , pažymėkime atitinkamai G_0 ir G_t . Tegul $G_{0,t}$ apibrėžia sutampančių produktų aibę laiko momentais 0 ir t . Tegul p_i^τ ir q_i^τ apibrėžia i -ojo produkto kainą ir kiekį laiko momentu τ ir tegul $N_{0,t}$ žymi aibės $G_{0,t}$ elementų skaičių. GEKS kainų indeksas tarp dviejų laiko momentų – 0 (bazinio periodo) ir t (ataskaitinio laikotarpio) yra besvoris geometrinis vidurkis $T + 1$ bazinių kainų indeksų santykių $I^{\tau,t}$ ir $I^{\tau,0}$, kurie apibrėžiami ta pačia kainų indeksų formule. Dažniausiai, GEKS skaičiavimo metodas naudoja superlatyvų Fisher kainų

¹⁹GEKS – Gini–Eltető–Köves–Szulc. Corrado Gini (1884 – 1965) – italų statistikas, demografas ir sociologas, sukūręs Gini koeficientą – pajamų nelygybės visuomenėje matą. Ödön Eltető (1931 – 2020) – Vengrijos matematikas, statistikas. Pál Köves (1925 – 2021) – Vengrijos statistikas. Bohdan Szulc (1922? – 2014? (datos tiksliai nežinomos)) – Lenkijos statistikas, ekonomistas.

indeksą ir todėl yra apibrėžiamas kaip

$$I_{GEKS}^{0,t} = \prod_{\tau=0}^T \left(\frac{I_F^{\tau,t}}{I_F^{\tau,0}} \right)^{\frac{1}{T+1}},$$

čia $I_F^{\tau,t}$ apibrėžia Fisher kainų indeksą, kuris skaičiuojamas naudojant produktų aibę $G_{\tau,t}$.

Taip pat praktikoje naudojamas ir kitoks GEKS kainų indekso variantas, kuomet Fisher kainų indeksas pakeičiamas Törnqvist kainų indeksu ir yra apibrėžiamas formule pateikta toliau. Be to, šis indeksas GEKS–T praktikoje žymimas kaip CCDI²⁰ kainų indeksų skaičiavimo metodas.

$$I_{CCDI}^{0,t} = \prod_{\tau=0}^T \left(\frac{I_T^{\tau,t}}{I_T^{\tau,0}} \right)^{\frac{1}{T+1}},$$

čia $I_T^{\tau,t}$ apibrėžia Törnqvist kainų indeksą, suskaičiuotą produktų aibei $G_{\tau,t}$.

Kadangi daugeliu atvejų GEKS skaičiavimo metodas naudoja superlatyvius kainų indeksus, praktikoje taip pat siūlomas GEKS–W kainų indeksas, kur Fisher kainų indeksas pakeičiamas Walsh kainų indeksu ir apibrėžiamas kaip –

$$I_{GEKS-W}^{0,t} = \prod_{\tau=0}^T \left(\frac{I_W^{\tau,t}}{I_W^{\tau,0}} \right)^{\frac{1}{T+1}},$$

kur $I_W^{\tau,t}$ žymi Walsh kainų indeksą, skaičiuojamą produktų aibei $G_{\tau,t}$. Pastaruoju metu literatūroje apžvelgiami ir kitokie GEKS tipo kainų indeksų junginiai, kurie paneigia klasikinius šio indekso teiginius, jog GEKS metodas privalo naudoti superlatyvius kainų indeksus, tad yra pateikiami nauji kainų indeksų junginiai, kurie naudoja bazinius kainų indeksus, tokius kaip Laspeyres ar geometrinis Laspeyres kainų indeksai.

Apibrėžkime Laspeyres kainų indeksą daugialypių kainų indeksų kontekste. Laikykime, jog Laspeyres kainų indeksas lygina laiko periodus s ir τ ir yra skaičiuojamas produktų aibei $G_{\tau,s}$ ir žymėsime $I_L^{\tau,s}$. Tuomet Laspeyres kainų indeksas apibrėžiamas toliau pateikta formule –

$$I_L^{\tau,s} = \frac{\sum_{i \in G_{\tau,s}} q_i^{\tau} p_i^s}{\sum_{i \in G_{\tau,s}} q_i^{\tau} p_i^{\tau}}.$$

Pasinaudojus aukščiau pateiktais žymėjimais, apibrėžkime GEKS–L kainų indeksą –

$$I_{GEKS-L}^{0,t} = \prod_{\tau=0}^T \left(\frac{I_L^{\tau,t}}{I_L^{\tau,0}} \right)^{\frac{1}{T+1}} = \prod_{\tau=0}^T \left(\frac{\frac{\sum_{i \in G_{\tau,t}} q_i^{\tau} p_i^t}{\sum_{i \in G_{\tau,t}} q_i^{\tau} p_i^{\tau}}}{\frac{\sum_{i \in G_{\tau,0}} q_i^{\tau} p_i^0}{\sum_{i \in G_{\tau,0}} q_i^{\tau} p_i^{\tau}}} \right)^{\frac{1}{T+1}}.$$

²⁰CCDI – Caves–Christensen–Diewert–Inklaar. Richard E. Caves (g. 1931) – Jungtinių Amerikos Valstijų ekonomistas, profesorius. Laurits R. Christensen – Jungtinių Amerikos Valstijų ekonomistas, indeksų teorijos mokslininkas. W. Erwin Diewert (g. 1941) – Kanados ekonomistas. Robert C. Inklaar (g. 1980) – Nyderlandų ekonomistas.

GEKS–L kainų indeksą galima laikyti kaip apibendrinimą kelių periodų Fisher kainų indekso. Tarkime, jog produktų aibė G nekinta laiko intervale $[0,1]$, t. y. $G_0 = G_1 = G_{0,1} = G$, tuomet

$$I_{GEKS-L}^{0,1} = \prod_{\tau=0}^1 \left(\frac{\sum_{i \in G} q_i^{\tau} p_i^1}{\sum_{i \in G} q_i^{\tau} p_i^0} \right) = \left(\frac{\sum_{i \in G} q_i^0 p_i^1}{\sum_{i \in G} q_i^0 p_i^0} \times \frac{\sum_{i \in G} q_i^1 p_i^1}{\sum_{i \in G} q_i^1 p_i^0} \right)^{\frac{1}{2}} = I_F^{0,1}.$$

Apibrėžkime geometrinį Laspeyres indeksą daugialypių kainų indeksų kontekste, kaip indeksą, kuris lygina laiko periodus s ir τ produktų aibė $G_{\tau,s}$:

$$I_{GL}^{\tau,s} = \prod_{i \in G_{\tau,s}} \left(\frac{p_i^s}{p_i^{\tau}} \right)^{w_i^{\tau,s}(\tau)},$$

kur

$$w_i^{\tau,s}(\tau) = \frac{q_i^{\tau} p_i^{\tau}}{\sum_{k \in G_{\tau,s}} q_k^{\tau} p_k^{\tau}}.$$

Taigi naudojant šiuos žymėjimus, GEKS–GL kainų indeksas apibrėžiamas kaip

$$I_{GEKS-GL}^{0,t} = \prod_{\tau=0}^T \left(\frac{I_{GL}^{\tau,t}}{I_{GL}^{\tau,0}} \right)^{\frac{1}{T+1}} = \prod_{\tau=0}^T \left(\frac{\prod_{i \in G_{\tau,t}} \left(\frac{p_i^t}{p_i^{\tau}} \right)^{w_i^{\tau,t}(\tau)}}{\prod_{i \in G_{\tau,0}} \left(\frac{p_i^0}{p_i^{\tau}} \right)^{w_i^{\tau,0}(\tau)}} \right)^{\frac{1}{T+1}}.$$

GEKS–GL kainų indeksas gali būti laikomas Törnqvist kelių periodų kainų indekso apibendrinimu. Tarkime, jog turime statišką produktų aibę G , kuri stebima laiko interval $[0,1]$, tuomet

$$\begin{aligned} I_{GEKS-GL}^{0,1} &= \prod_{\tau=0}^1 \left(\frac{\prod_{i \in G} \left(\frac{p_i^1}{p_i^{\tau}} \right)^{w_i^{\tau,1}(\tau)}}{\prod_{i \in G} \left(\frac{p_i^0}{p_i^{\tau}} \right)^{w_i^{\tau,0}(\tau)}} \right)^{\frac{1}{1+1}} = \prod_{\tau=0}^1 \left(\prod_{i \in G} \left(\frac{p_i^1}{p_i^0} \right)^{w_i(\tau)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \prod_{i \in G} \left(\frac{p_i^1}{p_i^0} \right)^{\frac{w_i(0)}{2}} \prod_{i \in G} \left(\frac{p_i^1}{p_i^0} \right)^{\frac{w_i(1)}{2}} = \prod_{i \in G} \left(\frac{p_i^1}{p_i^0} \right)^{\frac{w_i(0)+w_i(1)}{2}} = I_T^{0,1}, \end{aligned}$$

kai $G_0 = G_1 = G_{0,1} = G$ ir $w_i^{\tau,0}(\tau) = w_i^{\tau,1}(\tau) = w_i(\tau)$ bet kuriam τ .

2.2.3 Teorema ([5]) *GEKS–L ir GEKS–GL kainų indeksai tenkina tranzityvumo, identiškumo, kelių periodų, jautrumo, tolydumo, teigiamumo ir normalizacijos, suderinamumo, kainų proporcingumo, kainų ir kiekių homogeniškumo savybes.*

Taip pat panagrinėkime Lloyd–Moulton kainų indeksą daugialypių kainų indeksų kontekste, šis indeksas yra užrašomas kaip

$$I_{LM}^{\tau,t}(\sigma) = \left(\sum_{i \in G_{\tau,t}} s_i^{\tau} \left(\frac{p_i^t}{p_i^{\tau}} \right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}},$$

kur parametras σ apibrėžia produktų pakeičiamumo elastingumą.

Lloyd–Moulton indeksas gali būti naudojamas kartu su GEKS tipo kainų indeksu ir yra apibrėžiamas kaip

$$I_{GEKS-LM}^{0,t}(\sigma) = \prod_{\tau=0}^T \left(\frac{I_{LM}^{\tau,t}(\sigma)}{I_{LM}^{\tau,0}(\sigma)} \right)^{\frac{1}{T+1}},$$

kuris turi specialius atvejus, kai parametro reikšmė lygi nuliui arba artėja prie 1, t. y.

$$I_{GEKS-LM}^{0,t}(0) = \prod_{\tau=0}^T \left(\frac{I_L^{\tau,t}}{I_L^{\tau,0}} \right)^{\frac{1}{T+1}} = I_{GEKS-L}^{0,t}$$

ir

$$I_{GEKS-LM}^{0,t}(\sigma \rightarrow 1) = \prod_{\tau=0}^T \left(\frac{I_{GL}^{\tau,t}}{I_{GL}^{\tau,0}} \right)^{\frac{1}{T+1}} = I_{GEKS-GL}^{0,t}.$$

GEKS–LM kainų indekso aksiomatinės savybės pristatomos šio darbo trečiame skyriuje.

2.2.5. Tolydūs kainų indeksai

Dar vienas, mažiau žinomas ir praktikoje retai naudojamas, yra Divisia²¹ kainų indeksas. Šis kainų indeksas skiriasi tuo, jog yra tolydus laike ir aprašomas kainų bei kiekių funkcijomis. Dažnai praktikoje tokie tolydūs duomenys kainų indeksų skaičiavimams nėra naudojami, tačiau jie labiau primena prekybos tinklų kvitų duomenis, kurie geriausiai tikėtų aproksimuoti šiuo kainų indeksus nei mėnesiniai duomenys. Šiame skyriuje, remiantis [22], pateikiamas Divisia kainų indekso išvedimas.

Tegul $P(\tau)$ apibrėžia kainų lygio, o $Q(\tau)$ – kiekio lygio funkcijas, tolydžias laiko atžvilgiu. Funkcijos $P(\tau)$ ir $Q(\tau)$ laikomos n produktų tolydžiomis funkcijomis, atitinkančiomis kainų lygius $p_i(\tau)$ ir kiekius $q_i(\tau)$ kiekvienam produktui $i = 1, \dots, n$ bei kiekvienam laiko momentui τ . Apibrėžkime produktų vertės funkciją

$$V(\tau) = \sum_{i=1}^n p_i(\tau)q_i(\tau), \quad (62)$$

kuri apibrėžia produktų vertę laiko momentu τ . Pastaroji formulė nėra vertės indeksas vertinant vertės pokytį laiko momentu $\tau = t$ lyginant su laiko momentu 0, tačiau tai tik vertės lygis, analogiškas kaip ir individualaus produkto kainų $p_i(\tau)$ ar kiekio $q_i(\tau)$ lygis laiko momentu τ . Suagregavus visų produktų kainų ir kiekių lygius gauname visų produktų kainų $P(\tau)$ ir kiekių $Q(\tau)$ lygių skaičius. Be to, vertės lygis gali būti užrašytas kaip kainų ir kiekio lygių sandauga, t.y.

$$V(\tau) = P(\tau)Q(\tau). \quad (63)$$

Priešingai nei funkcijos $p_i(\tau)$ ir $q_i(\tau)$, kainų $P(\tau)$ bei kiekio $Q(\tau)$ lygiai yra nestebimi, tačiau yra išreiškiami kainų bei kiekio indeksais. Praktikoje nėra aiškiai apibrėžta kaip skaičiuoti vertes apibrėžtas paskutinėje formulėje, tad yra apibrėžiamos tam tikros prielaidos. Divisia kainų skaičiavimo metodas remiasi idėja, jog turime laiko momentą τ arba mažą intervalą nuo τ iki $\tau + \Delta\tau$. Laikoma, jog šis laiko intervalas yra toks mažas, jog nėra reikalinga struktūrinė komponentė apibrėžianti koreliaciją tarp kainų ir kiekio lygių. Kitas žingsnis apibrėžti diferencialinius funkcijos $V(\tau)$ pokyčius, tuomet

$$dV(\tau) = \sum_i q_i(\tau)dp_i(\tau) + \sum_i p_i(\tau)dq_i(\tau). \quad (64)$$

²¹François Divisia (1889 – 1964) — prancūzų ekonomistas.

Padalinę (62) formulės abi puses iš $V(\tau)$, gauname

$$\frac{dV(\tau)}{V(\tau)} = \frac{\sum_i q_i(\tau) dp_i(\tau)}{\sum_i q_i(\tau) p_i(\tau)} + \frac{\sum_i p_i(\tau) dq_i(\tau)}{\sum_i p_i(\tau) q_i(\tau)},$$

ir

$$\frac{dV(\tau)/d\tau}{V(\tau)} = \frac{\sum_i q_i(\tau) dp_i(\tau)/d\tau}{\sum_i q_i(\tau) p_i(\tau)} + \frac{\sum_i p_i(\tau) dq_i(\tau)/d\tau}{\sum_i p_i(\tau) q_i(\tau)}. \quad (65)$$

Kitas žingsnis – analogiškus veiksmus atlikti (63) formulei ir tuomet pasinaudoję sandaugos diferencijavimo savybe, gauname, jog

$$\frac{dV(\tau)}{d\tau} = Q(\tau) \frac{dP(\tau)}{d\tau} + P(\tau) \frac{dQ(\tau)}{d\tau} \quad (66)$$

arba

$$\frac{dV(\tau)/d\tau}{V(\tau)} = \frac{dP(\tau)/d\tau}{P(\tau)} + \frac{dQ(\tau)/d\tau}{Q(\tau)}. \quad (67)$$

Pastaroji lygybė teigia, jog tolydaus laiko $V(\tau)$, $P(\tau)$ ir $Q(\tau)$ sandaugos, augimo greitis yra $P(\tau)$ ir $Q(\tau)$ augimo greičių suma. Akivaizdu, jog norint rasti kainų P ir kiekio Q indeksus reikia pasinaudoti (65) ir (67) formulėmis, tuomet gauname, jog

$$\begin{aligned} \frac{dP(\tau)/d\tau}{P(\tau)} &= \frac{d \ln P(\tau)}{d\tau} = \frac{\sum_i q_i(\tau)}{\sum_i q_i(\tau) p_i(\tau)} \frac{dp_i(\tau)}{d\tau} \\ &= \sum_i v_i(\tau) \frac{dp_i(\tau)/d\tau}{p_i(\tau)} = \sum_i v_i(\tau) \frac{d \ln p_i(\tau)}{d\tau}, \end{aligned} \quad (68)$$

čia $v_i(\tau)$ yra produkto i išlaidų dalis laiko momentu τ visų produktų atžvilgiu. Analogiškai išraišką gauname ir kiekio indeksui, t. y.

$$\frac{dQ(\tau)/d\tau}{Q(\tau)} = \frac{d \ln Q(\tau)}{d\tau} = \sum_i v_i(\tau) \frac{d \ln q_i(\tau)}{d\tau}. \quad (69)$$

Taigi, funkcijos $P(\tau)$ ir $Q(\tau)$ yra apibrėžiamos remiantis sąryšiu su funkcija $V(\tau)$ (63) formulėje bei atitinkamais augimo greičiais gautais iš diferencialinių lygybių (68) ir (69) formulėse.

2.2.4 Teorema (Divisia teorema, [22]) *Laikykime, jog kiekiai (65) formulėje nesikeičia, kai $dq_i(\tau) = 0$ kiekvienam i , tuomet kiekio lygio pasikeitimas $Q(\tau)$ išraiškoje, remiantis (69) formule, privalo būti lygus nuliui bei vertės (65) formulėje pasikeitimas turi būti lygus kainų pasikeitimui. Be to, ši aksioma galioja ir prielaidai, kai kainos nekinta, t. y. $dp_i(\tau) = 0$.*

Kitas žingsnis gauti Divisia kainų ir kiekio indeksų išraiškas. Norint gauti kainų indeksą reikia išspręsti diferencialinę lygtį (68) integruojant P atžvilgiu, tuomet

$$P(t) = P(0) \exp \left\{ \int_0^t \frac{\sum_i q_i(\tau) \frac{dp_i(\tau)}{d\tau}}{\sum_i q_i(\tau) p_i(\tau)} d\tau \right\} = P(0) \exp \left\{ \int_0^t \sum_i v_i(\tau) \frac{d \ln p_i(\tau)}{d\tau} d\tau \right\} \quad (70)$$

ir todėl Divisia kainų indeksas lygus

$$P_{Div}^{0,t} = \frac{P(t)}{P(0)}. \quad (71)$$

Analogiškai gaunamas ir Divisia kiekio indeksas, kuris lygus

$$Q_{0,t}^{Div} = \frac{Q(t)}{Q(0)} = \exp \left\{ \int_0^t \frac{\sum_i p_i(\tau) dq_i(\tau)}{\sum_i p_i(\tau) q_i(\tau)} \right\}. \quad (72)$$

Panagrinėkime Divisia indeksų aproksimacijas, kurios priklauso nuo to, kaip buvo gautos indeksų funkcijos, todėl išskiriami trys susiję aspektai, norint gauti aproksimacijas:

- skiriamas dėmesys kiekvienam laiko momentui iš stebimo laiko intervalo $[0, t]$, o ne tik intervalo kraštiniais taškais;
- norint įvertinti konkretaus produkto kainų diferencialą $d \ln p_i(\tau)/d\tau$ laikoma, jog tai yra kainų prieaugiai, o ne kainų santykiai p_i^t/p_i^0 ;
- svoriai $v_i(\tau)$ naudojami individualių produktų kainų santykių kainų indekso agregavimui nėra imami tik kraštinių laiko intervalo momentais, tačiau atsižvelgiama į visų laiko momentus τ intervale $0 \leq \tau \leq t$.

Divisia kainų indeksas gali turėti daugybę skirtingų aproksimacijų, tačiau toliau nagrinėjos aproksimacijos Laspeyres bei Paasche grandininiais kainų indeksais. Šiuo atveju pažymėkime grandininį Laspeyres kainų indeksą kaip $P_{0,t}^{LC}$, o grandininį Paasche kainų indeksą – $P_{0,t}^{PC}$. Įstatę $t+1$ ir t skirtumą $\Delta V_t = V_{t+1} - V_t = \sum p_{t+1} q_{t+1} - \sum p_t q_t$ į diferencialą dV gauname, jog

$$\Delta V_t = \sum_i q_{it} \Delta p_{it} + \sum_i p_{it} \Delta q_{it} + \sum_i \Delta p_{it} \Delta q_{it}. \quad (73)$$

Apibrėžkime P_t ir Q_t kiek kitokiu būdu –

$$\frac{\Delta P_t}{P_t} = \frac{\sum_i q_t \Delta p_t}{\sum_i q_t p_t} \quad \text{ir} \quad \frac{\Delta Q_t}{Q_t} = \frac{\sum_i p_t \Delta q_t}{\sum_i q_t p_t}.$$

Pasinaudoję (73) formule, gauname, jog

$$\frac{\Delta V_t}{V_t} = \frac{\Delta V_t}{\sum_i q_t p_t} = \frac{\Delta P_t}{P_t} + \frac{\Delta Q_t}{Q_t} + \frac{\sum_i \Delta p_t \Delta q_t}{\sum_i q_t p_t}$$

arba

$$\frac{\Delta V_t}{V_t} = \left(\frac{P_{t+1}}{P_t} - 1 \right) + \left(\frac{Q_{t+1}}{Q_t} - 1 \right) + R_t,$$

kur

$$R_t = \frac{\sum_i \Delta p_t \Delta q_t}{\sum_i q_t p_t}$$

yra liekamasis narys, kuris artėja link nulio²², todėl galime jį ignoruoti. Taigi, kainų lygio augimas yra apibrėžiamas kaip

$$\frac{P_{t+1}}{P_t} = \frac{\sum_i q_t p_{t+1}}{\sum_i q_t p_t} = P_{t+1}^{LC},$$

²²Jrodymas pateikiamas [22] straipsnyje.

naudojant Laspeyres kainų indeksą ir atitinkamai gauname, jog

$$\frac{P_{t+1}}{P_0} = \frac{P_1}{P_0} \cdot \frac{P_2}{P_1} \dots \frac{P_{t+1}}{P_t} = P_1^{LC} \cdot P_2^{LC} \dots P_{t+1}^{LC} = P_{0,t+1}^{LC}$$

bei analogiškai

$$\frac{Q_{t+1}}{Q_t} = Q_{t+1}^{LC} = \frac{\sum_i q_{t+1} p_t}{\sum_i q_t p_t}$$

ir

$$\frac{Q_{t+1}}{Q_0} = Q_{0,t+1}^{LC}.$$

Analogišku būdu galima išvesti Paasche grandininis kainų $P_{0,t}^{PC}$ ir kiekio $Q_{0,t}^{PC}$ indeksus, pasinaudojus skirtumu $\Delta^* P_t = P_t - P_{t-1}$ ir $\Delta^* p_i^t = p_i^t - p_i^{t-1}$ atitinkamai gauname, kad

$$\frac{\Delta^* P_t}{P_t} = 1 - \frac{\sum_i q_t p_{t-1}}{\sum_i q_t p_t} = 1 - \frac{P_{t-1}}{P_t} = 1 - \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right)^{-1} = 1 - (P_t^{PC})^{-1}.$$

Grandininiai kainų indeksai dažnai laikomi geriausiomis Divisia indeksų aproksimacijomis, laikant, jog Divisia ir grandininiai kainų indeksai turi pakankamai panašias indeksų aksiomatinės savybes. Nors ir Laspeyres grandininiai indeksai netenkina laiko grįžtamumo savybės, t.y.

$$\frac{\Delta V_t}{V_t} = \frac{\sum p_{t+1} q_{t+1}}{\sum p_t q_t} - 1 \neq \frac{\sum q_t \Delta p_t}{\sum q_t p_t} + \frac{\sum p_t \Delta q_t}{\sum p_t q_t} = (Q_t^{LC} - 1) + (P_t^{LC} - 1),$$

tačiau galioja toliau pateikta lygybė –

$$\frac{V_t}{V_{t-1}} = P_t^{LC} Q_t^{PC} = P_t^{PC} Q_t^{LC}.$$

Vadinasi, jog sąryšiai, kurie galioja tolydaus laiko indeksų kontekste, nebūtinai galioja diskretaus laiko kontekste. Taigi, išnagrinėjus tolydaus laiko kainų indeksus, pabaigėme apžvelgti pagrindines kainų indeksų aibes. Toliau pateikiamos kainų indeksų matematinės savybės, tokios kaip indeksų agregavimas, grandininis indeksų sujungimas bei poslinkio susidarymas.

2.3. Kainų indeksų agregavimas

Šis skyrius skirtas susipažinti su kainų indeksų agregavimu. Skyriaus medžiaga paremta pagal [16, 20].

Visos vartojimo prekės bei paslaugos yra klasifikuojamos naudojant individualaus vartojimo išlaidų pagal paskirtį klasifikatorių COICOP 2018. Klasifikatorius suskirstytas į skyrius, grupes, pogrupius, klases bei poklasius. Pavyzdžiui, pateiktoje COICOP 2018 klasifikatoriaus ištraukoje (žr. į 1 lentelę) skyrius yra Maistas ir nealkoholiniai gėrimai, grupė – Maistas, pogrupis – Varpinių javų grūdai ir grūdų produktai, klasė – Varpinių javų grūdai, o poklasiai yra visi 5-ojo lygmens produktai. Praktikoje 5-asis COICOP 2018 klasifikatoriaus lygmuo vadinamas elementariuoju agregatu. Skaičiuojant SVKI, elementarusis agregatas turi svorį, kuris nustatomas remiantis vartotojų išlaidomis, t. y. elementariajam agregatui apskaičiuojama, kokią dalį pajamų vartotojai išleido prekei ar paslaugai tam tikru laikotarpiu. Remiantis SVKI skaičiavimo reglamentais, elementariųjų agregatų kainų indeksai agreguojami į aukštesnio COICOP 2018 klasifikatoriaus lygmenis, naudojant jau minėtas svorių sistemas bei Laspeyres kainų indeksą. Elementaraus agregato kainų indekso skaičiavimas nėra regla-

mentuojamas, tačiau turi apimti tam tikrus aspektus, kuriuos rekomenduoja Vartotojų kainų indekso sudarymo vadovai.

Elementaraus agregato kainų indekso skaičiavimas turi apimti toliau pateiktas dimensijas.

- **Laiko dimensija** – prekės vieneto vertė gali būti apskaičiuojama pagal visus pardavimus metų, mėnesio, savaitės ar dienos laikotarpyje.
- **Erdvinė dimensija** – prekės vieneto vertė gali būti apskaičiuojama pagal visus konkrečios prekės pardavimus šalyje, apskrityje, rajone, mieste ar atskiroje prekybos vietoje.
- **Produkto dimensija** – prekės vieneto vertė gali būti apskaičiuojama pagal visus prekės pardavimus konkrečiame klasifikatoriaus lygmenyje (pvz., ryžiai) arba žemesniu lygmeniu – konkrečiam gamintojui ar prekės pavadinimui.
- **Ekonominių struktūrų dimensija** – prekės vieneto vertė gali būti apskaičiuojama konkrečiam namų ūkiui arba konkrečiai prekybos tinklų grupei.

1 lentelė. COICOP 2018 klasifikatoriaus struktūros pavyzdys.

COICOP 2018 kodas	Kodo lygmuo	Pavadinimas
01	1	MAISTAS IR NEALKOHOLINIAI GĖRIMAI
01.1	2	MAISTAS
01.1.1	3	Varpinių javų grūdai ir grūdų produktai
01.1.1.1	4	Varpinių javų grūdai
01.1.1.1.1	5	Kviečiai
01.1.1.1.2	5	Ryžiai
01.1.1.1.3	5	Sorgai
01.1.1.1.4	5	Miežiai
01.1.1.1.5	5	Soros
01.1.1.1.6	5	Kukurūzai
01.1.1.1.7	5	Bolivinės balandos
01.1.1.1.8	5	Abisinijos posmilgės
01.1.1.1.9	5	Kitų varpinių javų grūdai

Siekiant SVKI skaičiavimui naudoti prekybos tinklų kvitų duomenis, reikia apžvelgti, kaip gautus produktų duomenis priskirti atitinkamam COICOP 2018 klasifikatoriaus lygmeniui. Prekybos tinkluose galima rasti daugybę produktų, tad pirmas žingsnis — identifikuoti konkrečius produktų pavadinimus. Kiekvieno elementaraus agregato kainų indekso skaičiavimui reikia homogeniškų produktų. Homogeniškais produktais vadinami tokie produktai, kurie pasižymi panašiomis savybėmis bei parametrais. Pagrindinis aspektas, kaip išrinkti homogeniškus produktus, yra kainos parametras: produktų kainos turi būti panašios konkrečiai produktų grupei, nes didesni kainų svyravimai gali daryti neigiamą įtaką rezultatui. Norint išskirti homogeniškus produktus, reikia atlikti pardavimų agregavimą laiko atžvilgiu, t. y. suskaičiuoti vidutinę kainą pasirinktam laikotarpiui (pvz., mėnesiui, savaitei ar dienai), konkrečiam prekybos tinklui bei prekės brūkšniniam kodui. Kitas žingsnis — atlikti vidutinių kainų agregavimą keliems prekybos tinklams. Tuomet gaunamas rezultatas, lygus vidutinei kainai, suskaičiuotai konkrečiu laikotarpiu ir konkrečiam prekės brūkšniniam kodui. Paskutiniu agregavimo etapu skaičiuojama vidutinė kaina pasirinktam laikotarpiui bei keliems prekybos tinklams. Analizuojant skirtingų agregatų vidutines kainas, galima išrinkti homogeniškus produktus. Tokiu būdu, renkant produktus, kurių pardavimo kainomis bus skaičiuojami elementarieji agregatai, įtraukiamos reikalingos agregavimo dimensijos – laiko, produkto, prekybos tinklo ir teritorijos.

Elementaraus agregato kainų indeksų skaičiavimui, naudojant prekybos tinklų duomenis, galima taikyti įvairius kainų indeksus. Tai priklauso nuo įtraukiamų produktų kiekio, imties struktūros, svorių struktūrų atnaujinimo dažnumo bei kitų parametų. Remiantis [16], kainų indeksų skaičiavimui naudojant kvitų duomenis rekomendacijos pateikiamos 2-oje lentelėje. Priklausomai nuo pateiktų parametų, labiausiai rekomenduojami Jevons arba Dutot, Laspeyres, Törnqvist arba Fisher bei daugialypiai kainų indeksai. Pastarieji laikomi geriausiais, vertinant kainų lygio pasikeitimą naudojant kvitų duomenis, tad apžvelkime, kokius agregavimo lygmenis galima įtraukti, skaičiuojant elementariųjų agregatų kainų indeksus.

2 lentelė. Kainų indeksų skaičiavimo naudojant kvitų duomenis variantai ir jų parametrai.

	Jevons arba Dutot kainų indeksas	Laspeyres kainų indeksas	Törnqvist arba Fisher kainų indeksas	Daugialypis kainų indeksas
Svorio schema	Fiksuoti metiniai svoriai	Fiksuoti metiniai svoriai	Mėnesiniai svoriai	Mėnesiniai svoriai
Produktų visuma	Statiška	Statiška	Statiška	Dinamiška
Indekso savybės	Stiprus identiškas, laiko grįžtamumas, tranzityvumas	Stiprus identiškas, laiko grįžtamumas, tranzityvumas	Stiprus identiškas, laiko grįžtamumas	Silpnas identiškas, laiko grįžtamumas, tranzityvumas
Atnaujinimo bei laiko eilučių jungimo strategija	Metinis bazinio laikotarpio atnaujinimas, gruodžio mėnesio susiejimas	Metinis bazinio laikotarpio atnaujinimas, gruodžio mėnesio susiejimas	Metinis bazinio laikotarpio atnaujinimas, gruodžio mėnesio susiejimas	Kintamas laiko langas, specifiniai laiko eilučių susiejimo metodai
Duomenys	Imtis	Visi duomenys	Visi duomenys	Visi duomenys

Daugialypis kainų indeksas, skaičiuojant elementariojo agregato kainų indeksą, gali būti taikomas tik individualaus produkto kainų indeksui apskaičiuoti. Skirtingais agregavimo metodais galima pasirinkti žemesnį elementariojo agregato lygmenį, o šie lygmenys paryškinti 3-oje lentelėje. Remiantis SVKI sudarymo reglamentu, agreguojant elementariusius agregatus į aukštesnius klasifikatoriaus lygmenis galima naudoti tik Laspeyres kainų indeksą, tad virš lentelėje paryškintų modifikuotų elementariųjų agregatų įvardijami tik Laspeyres kainų indeksai.

Nepriklausomai nuo pasirinkto varianto, produkto pardavimo lygmenyje apskaičiuojama produkto vieneto vertė pasirinktam skaičiavimo laikotarpiui. Įprastai produkto vieneto vertė apskaičiuojama naudojant svertinį aritmetinį vidurkį. Skaičiuojant individualaus produkto kainų indeksą, naudojami daugialypiai kainų indeksai, į kurių skaičiavimus įtraukiami visi individualaus produkto pardavimai. Atliktuose skaičiavimuose atsižvelgiama į laiko aspektą. Aukštesni agregavimo lygmenys apima likusias standartines elementariųjų agregatų dimensijas — produkto, prekybos tinklo bei teritorijos. Skirtingais elementaraus agregato skaičiavimo būdais, šis gali būti nustatomas parduotuvės, produktų grupės ar prekybos tinklo lygmenyje. Taip pat reikia atkreipti dėmesį, kad pasirinktą elementarių agregatų prekybos tinklo lygmenyje arba produktų grupei skaičiuoti gali būti naudojamas Törnqvist kainų indeksas. Vadinas, suskaičiuoti aukštesnio lygmens kainų indeksai gali būti agreguoti taikant kelių rūšių kainų indeksus — bazinius (Laspeyres kainų indeksas), superlatyvius (Törnqvist kainų indeksas) bei daugialypius, o agregavimo procesas gali būti komplikotas dėl reikalingų parametų bei svorių struktūrų gausos.

3 lentelė. Daugialypių kainų indeksų agregavimo variantai.

Lygmuo	Variantas 1	Variantas 2	Variantas 3	Variantas 4
COICOP 2018 klasifikatoriaus lygmuo	Laspeyres indeksas	Laspeyres indeksas	Laspeyres indeksas	Laspeyres indeksas
Prekybos tinklas	Laspeyres indeksas	Laspeyres indeksas	Laspeyres indeksas	Laspeyres indeksas
Produktų grupė	Laspeyres indeksas	Laspeyres indeksas		Törnqvist indeksas
Parduotuvė	Laspeyres indeksas			
Individualus produktas	Daugialypis indeksas	Daugialypis indeksas	Daugialypis indeksas	Daugialypis indeksas
Parduotas produktas	Vieneto vertė	Vieneto vertė	Vieneto vertė	Vieneto vertė

2.4. Kainų indeksų grandininis jungimas

Šiame skyriuje aptarsime grandininį kainų indeksų susiejimą bei šio susiejimo metu susidariusi grandininį nuokrypį (angl. *chain drift*). Skyriaus medžiaga parengta naudojantis [22].

Grandininis kainų indeksas yra reikalingas praktikoje skaičiuojant rodiklius, kai kainų indekso skaičiavimo rezultatus norime susieti su kainų indeksų eilute. Kainų indeksų skaičiavimui galima naudoti du skirtingus būdus. Viena iš galimybių — skaičiuoti kainų indeksus tiesiogiai, t. y. kainų indekso skaičiavimui naudojami tik bazinio laikotarpio bei vertinamo laikotarpio duomenys. Praktikoje toks skaičiavimo metodas nėra dažnai naudojamas, nes reikia įvertinti ir trumpalaikių kainų indeksų reikšmes. Pavyzdžiui, jeigu kainų indeksas m metais skaičiuojamas naudojant $m - 1$ metų gruodžio mėnesio kainas kaip bazines kainas, kas yra įprasta vartotojų kainų indeksų skaičiavimo praktikoje, šiuo kainų indekso skaičiavimo metodu trumpalaikių kainų indeksų įvertinimai nėra tikslūs, arba, priklausomai nuo pasirinkto kainų indekso, gali būti net neįvertinami. Praktikoje dažnai naudojamas antrasis kainų indeksų palyginimo būdas — grandininis kainų indeksų susiejimas. Šis skaičiavimo metodas leidžia įtraukti visų laikotarpių kainų pokyčius tarp bazinio ir vertinamo laikotarpių. Grandininis kainų indeksas tarp dviejų laikotarpių 0 ir t yra išreiškiamas tarpinių laikotarpių kainų indeksų sandauga

$$I_{gr}^{0,t} = I_{0,1} \times I_{1,2} \times I_{2,3} \times \cdots \times I_{t-1,t} = \prod_{\tau=0}^{t-1} I_{\tau,\tau+1}. \quad (74)$$

Čia $I_{\tau,\tau+1}$ žymi kainų indeksą suskaičiuotą lyginant $\tau + 1$ laikotarpio kainas lyginant su τ laikotarpio kainomis.

Grandininis kainų indekso nuokrypis susidaro tuomet, kai laikotarpio t , kainoms sugrįžus į bazinio laikotarpio kainų lygį, kainų indeksas nėra lygus vienetui. Praktikoje, norint išvengti grandininio nuokrypio, siūlomi toliau pateikti sprendimo būdai:

1. Naudoti fiksuoto bazinio laikotarpio kainų indeksus;
2. Naudoti daugialypius kainų indeksus;
3. Kasmet atnaujinti svorių sistemas, naudojamas kainų indeksų skaičiavimams;
4. Žemiausio lygmens skaičiavimui naudoti Jevons kainų indeksą.

Nors pateikti sprendimo metodai laikomi geriausiais grandininio nuokrypio problemai spręsti, kiekvienas iš šių metodų turi tam tikrą aspektą. Pirmuoju metodu, rezultatai priklauso nuo asimetriškumo pasirenkant bazinį laikotarpį; be to, įtraukiant ar pakeičiant stebimus produktus gali nebūti galimybės įvertinti bazinio laikotarpio pardavimų struktūros, tad ilgalaikėje perspektyvoje gali susidaryti reprezentatyvumo paklaida. Antruoju sprendimo metodu – kiekvienu skaičiuojamu laikotarpiu reikia perskaičiuoti pasirinkto laiko lango visų tarpinių laikotarpių kainų indeksus. Be to, reikia pasirinkti skaičiavimo langą bei kainų indeksų laiko eilučių sujungimo metodą. Trečiuoju būdu problema yra ta, jog metinių svorių naudojimas neišvengiamai lemia tam tikrą pakeitimo pervertinimą, kuris, remiantis ekonomistų įverčiais, paprastai siekia nuo 0,15 iki 0,40 procentinio punkto per metus. O Jevons kainų indekso skaičiavimo metu pagrindinė problema yra ta, jog neįtraukiami parduoti kiekiai ar kitaip neįvertinami produktų svoriai.

Pagrindinė formulė kainų indeksų grandininiam nuokrypiui, žymėsime $D_{0,t}$, apskaičiuoti yra

$$D_{0,t} = \frac{I_{gr}^{0,t}}{I_{0,t}^{0,t}}, \quad (75)$$

čia $I_{gr}^{0,t}$ – grandininis kainų indeksas apibrėžtas (74) formulėje, o $I_{0,t}^{0,t}$ – tiesiogiai skaičiuojamas kainų indeksas.

Kainų indeksas nesudaro grandininio nuokrypio, jeigu $D_{0,t} = 1$; kai $D_{0,t} > 1$ susidaro teigiamas grandininis nuokrypis, o kai $D_{0,t} < 1$ – grandininį nuokrypį vadiname neigiamu²³. Be to, laikoma, jog kainų indeksas neturi grandininio nuokrypio, jeigu tenkinama kelių periodų identiško savybė, arba fiksuoto bazinio laikotarpio kainų indeksams, jeigu šie tenkina laiko grįžtamumo savybę.

Toliau teoriškai panagrinėsime Jevons ir Törnqvist kainų indeksų skaičiavimo metodus. Tikslas — išsiaiškinti, ar tiesiogiai ir grandininio metodu skaičiuojami indeksai yra lygūs. Pasinaudoję apibrėžtomis Jevons ir Törnqvist kainų indeksų formulėmis, gauname toliau pateiktus rezultatus.

$$\begin{aligned} I_{J,gr}^{0,t} &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{p_i^1}{p_i^0} \right)^{\frac{1}{n}} \times \prod_{i=1}^n \left(\frac{p_i^2}{p_i^1} \right)^{\frac{1}{n}} \times \dots \times \prod_{i=1}^n \left(\frac{p_i^t}{p_i^{t-1}} \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{p_i^1}{p_i^0} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{p_i^2}{p_i^1} \right)^{\frac{1}{n}} \dots \left(\frac{p_i^t}{p_i^{t-1}} \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{p_i^1 p_i^2 \dots p_i^t}{p_i^0 p_i^1 \dots p_i^{t-1}} \right)^{\frac{1}{n}} = \prod_{i=1}^n \left(\frac{p_i^t}{p_i^0} \right)^{\frac{1}{n}} = I_J^{0,t}. \end{aligned}$$

Vadinasi, Jevons kainų indeksas nesudaro grandininio poslinkio, nes grandininio susiejimo metu gautas kainų indeksas lygus tiesiogiai skaičiuojamam indeksui. Tačiau tai galioja tik tuo atveju, kai kiekvieną laikotarpį tarp bazinio ir ataskaitinio skaičiavimuose dalyvauja toks pats kainų skaičius n .

Toliau nagrinėkime Törnqvist kainų indeksą. Norint parodyti, jog šis kainų indeksas sudaro grandininį nuokrypį, analizuokime daugelio periodų identiško savybę, kuri apibrėžiama taip

$$I^{0,1} \times I^{1,2} \times I^{2,3} \times \dots \times I^{t-1,t} \times I^{t,0} = 1.$$

Pakeičiant daugybą į sudėtį, nagrinėkime logaritiminį Törnqvist kainų indeksą, kuris lygus

$$\ln I_T^{0,t} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (s_i^{0,t} + s_i^{t,0}) (\ln p_i^{t,0} - \ln p_i^{0,t}).$$

²³ Čia *neigiamas* nėra laikomas neigiamu skaičiumi, žodžiai *teigiamas* ir *neigiamas* šiuo atveju nurodo tik grandininio nuokrypio kryptį.

Išskleiskime daugelio periodų identiškumo savybę į išraišką įstatę logaritmines Törnqvist kainų indekso formules, tuomet

$$\begin{aligned}
\ln I_T^{0,1} + \ln I_T^{1,2} + \dots + \ln I_T^{t-1,t} + \ln I_T^{t,0} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (s_i^0 + s_i^1) (\ln p_i^1 - \ln p_i^0) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (s_i^1 + s_i^2) (\ln p_i^2 - \ln p_i^1) + \dots \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (s_i^{t-1} + s_i^t) (\ln p_i^t - \ln p_i^{t-1}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (s_i^t + s_i^0) (\ln p_i^0 - \ln p_i^t) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (s_i^0 - s_i^2) \ln p_i^1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (s_i^1 - s_i^3) \ln p_i^2 + \dots \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (s_i^{t-2} - s_i^t) \ln p_i^{t-1} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (s_i^t - s_i^{t-2}) \ln p_i^{t-1} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (s_i^{t-1} - s_i^0) \ln p_i^t.
\end{aligned}$$

Gautoji išraiška tikrai nelygi nuliui. Vadinasi, Törnqvist kainų indeksas sudaro grandininį nuokrypį, tačiau tam tikrais atvejais, teoriniu požiūriu, grandininis nuokrypis gali ir nesusidaryti. Tačiau praktikoje toliau pateiktos sąlygos beveik neįmanomos. Taigi, grandininis nuokrypis nesusidaro, jeigu

- kainos kinta griežtai proporcingai, t. y. $p^t = \lambda_t p^0$ kiekvienam $t = 1, 2, \dots, T$;
- išlaidų dalys s^t nekinta ir yra pastovios;
- narių sumos $\sum_{i=1}^n (s_i^0 - s_i^2) \ln p_i^1$ yra lygios $(s^0 - s^2) \ln p^1$, bei kurios lygios

$$(s^0 - s^2)(\ln p^1 \ln p^{1*}) = n \text{Cov}(s^0 - s^2, \ln p^1),$$

čia $\ln p^{1*} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln p_i^1$, t. y. $\ln p^{1*}$ komponentų vidurkis. Tuomet reikalinga narių suma, kuri turi būti lygi nuliui, gali būti interpretuojama kaip konstantų padaugintų iš išlaidų skirtumo kovariacijų suma. Tuomet, jeigu kovariacijos lygios nuliui, t. y.

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(s^0 - s^2; \ln p^1) &= \text{Cov}(s^1 - s^3; \ln p^2) = \dots = \text{Cov}(s^{t-2} - s^t; \ln p^{t-1}) \\
&= \text{Cov}(s^t - s^0; \ln p^1) = \text{Cov}(s^{t-1} - s^0; \ln p^t) = 0,
\end{aligned}$$

tenkinama kelių periodų identiškumo savybė, o galiojant šioms sąlygoms, išplaukia, jog Törnqvist kainų indeksas neturi grandininio nuokrypio.

Apžvelgę pavyzdžius, įsitikinome, jog kainų indeksai gali ir nesusidaryti grandininio nuokrypio, tačiau visada reikalingos papildomos sąlygos. Kainų indeksų jungimas į grandinę nėra vienintelis galimo netikslumo šaltinis — pagrindinis kainų indeksų poslinkis gaunamas pakeičiant tikrąjį pragyvenimo išlaidų kainų indeksą kitu kainų indeksu. Nors grandininį kainų nuokrypį galima sukontroliuoti, pasirinkus tokius indeksus, kurie šio nuokrypio nesusidaro, poslinkio, susidariusio pakeičiant pragyvenimo išlaidų kainų indeksą kitu kainų indeksu, išvengti neįmanoma. Tad kitame skyriuje apžvelgiamas pavyzdys, kaip įvertinti susidariusį pakeitimo poslinkį.

2.5. Kainų indeksų poslinkio vertinimas

Šiame skyriuje panagrinėsime kainų indeksų poslinkio pavyzdį, kuomet skaičiuojant konkretų kainų indeksą vietoj pragyvenimo išlaidų kainų indeksų susidaro kainų indekso pakeitimo poslinkis. Remiantis ekonominiu kainų indeksų sudarymo metodu, tiksliausiai vartotojo išlaidų kainų lygį įvertina pragyvenimo išlaidų kainų indeksas. Praktikoje šis kainų indeksas dažnai pakeičiamas kitais kainų indeksais, kuriuos paprasčiau skaičiuoti, nes nereikia įvertinti vartotojo išlaidų ar naudingumo funkcijų. Šiame skyriuje Cobb–Douglas kainų indekso lyginamas su Konüs kainų indeksu. Konüs kainų indeksas, dar vadinamas pragyvenimo išlaidų kainų indeksu, laikomas geriausiai įvertinančiu vartotojų produktų kainų pokyčius, remiantis vartotojo preferencijomis. Pavyzdys pateiktas iš Bert M. Balk straipsnio [1].

Apibrėžkime Cobb–Douglas kainų indeksą. Cobb–Douglas arba geometrinis Young kainų indeksas lygina laiko momentus 0 ir t ir yra apibrėžiamas kaip

$$I_{CD}(p^t, p^0; s^b) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{p_i^t}{p_i^0} \right)^{s_i^b}. \quad (76)$$

Kai $b = 0$, Cobb–Douglas kainų indeksas tampa geometrinis Laspeyres kainų indeksu, o kai $b = 1$, geometrinis Paasche kainų indeksu. Kainų indekso pakeitimo nuokrypis tarp Cobb–Douglas ir Konüs kainų indeksų apibrėžiamas kaip šių kainų indeksų logaritminis skirtumas

$$\ln I_{CD}(p^t, p^0; s^b) - \ln I_K(p^t, p^0; u^b), \quad (77)$$

čia $u^b = U(q^b)$, kur U – naudingumo funkcija. Tuomet pragyvenimo išlaidų kainų indekso skaitiklio logaritmui užrašykime antros eilės Teiloro eilutės skleidinį:

$$\begin{aligned} \ln C(p^t, u^b) &= \ln C(p^b, u^b) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln C(p^b, u^b)}{\partial \ln p_i} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^n \frac{\partial^2 \ln C(p^*, u^b)}{\partial \ln p_i \partial \ln p_{i'}} (\ln p_{i'}^t - \ln p_{i'}^b) \\ &= \ln C(p^b, u^b) + \sum_{i=1}^n s_i^b \ln \left(\frac{p_i^t}{p_i^b} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^n \frac{\partial^2 \ln C(p^*, u^b)}{\partial \ln p_i \partial \ln p_{i'}} \ln \left(\frac{p_i^t}{p_i^b} \right) \ln \left(\frac{p_{i'}^t}{p_{i'}^b} \right), \end{aligned} \quad (78)$$

kur $p^* = [p^b, p^t]$. Pastaroji išraiška buvo gauta pasinaudojus Shepard lema bei faktu, jog vartotojas minimizuoja savo išlaidas laiko momentu b . Atlikus analogiškus veiksmus, vardiklio antros eilės Teiloro eilutės išraiška yra

$$\begin{aligned} \ln C(p^0, u^b) &= \ln C(p^b, u^b) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln C(p^b, u^b)}{\partial \ln p_i} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^n \frac{\partial^2 \ln C(p^{**}, u^b)}{\partial \ln p_i \partial \ln p_{i'}} (\ln p_{i'}^0 - \ln p_{i'}^b) \\ &= \ln C(p^b, u^b) + \sum_{i=1}^n s_i^b \ln \left(\frac{p_i^0}{p_i^b} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^n \frac{\partial^2 \ln C(p^{**}, u^b)}{\partial \ln p_i \partial \ln p_{i'}} \ln \left(\frac{p_i^0}{p_i^b} \right) \ln \left(\frac{p_{i'}^0}{p_{i'}^b} \right), \end{aligned} \quad (79)$$

kur $p^{**} = [p^b, p^0]$.

Atėmę (79) iš (78) ir pasinaudoję Konüs ir Cobb–Douglas kainų indeksų išraiškomis gauname, jog

$$\begin{aligned} \ln I^{CD}(p^t, p^0, p^s) - \ln I^K(p^t, p^0, p^b) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^n \frac{\partial^2 \ln C(p^{**}, u^b)}{\partial \ln p_i \partial \ln p_{i'}} \ln \left(\frac{p_i^0}{p_i^b} \right) \ln \left(\frac{p_{i'}^0}{p_{i'}^b} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^n \frac{\partial^2 \ln C(p^*, u^b)}{\partial \ln p_i \partial \ln p_{i'}} \ln \left(\frac{p_i^t}{p_i^b} \right) \ln \left(\frac{p_{i'}^t}{p_{i'}^b} \right). \end{aligned}$$

Todėl

$$I^{CD}(p^t, p^0, s^b) \geq I^K(p^t, p^0, u^b)$$

tada ir tik tada, kai

$$-\sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^n \frac{\partial^2 \ln C(p^*, u^b)}{\partial \ln p_i \partial \ln p_{i'}} \ln \left(\frac{p_i^t}{p_i^b} \right) \ln \left(\frac{p_{i'}^t}{p_{i'}^b} \right) \geq -\sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^n \frac{\partial^2 \ln C(p^{**}, u^b)}{\partial \ln p_i \partial \ln p_{i'}} \ln \left(\frac{p_i^0}{p_i^b} \right) \ln \left(\frac{p_{i'}^0}{p_{i'}^b} \right).$$

Antros eilės išvestinė turi išreikštinį pavidalą ir yra užrašoma kaip

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^n \frac{\partial^2 \ln C(p^{**}, u^b)}{\partial \ln p_i \partial \ln p_{i'}} \ln \left(\frac{p_i^0}{p_i^b} \right) \ln \left(\frac{p_{i'}^0}{p_{i'}^b} \right) &= \sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^n \frac{p_i^{**} p_{i'}^{**}}{C(p^{**}, u^b)} \frac{\partial^2 C(p^{**}, u^b)}{\partial p_i \partial p_{i'}} \ln \left(\frac{p_i^0}{p_i^b} \right) \ln \left(\frac{p_{i'}^0}{p_{i'}^b} \right) \\ &\quad - \left(\sum_{i=1}^n s_i(p^{**}, u^b) \ln \left(\frac{p_i^0}{p_i^b} \right) \right)^2 + \sum_{i=1}^n s_i(p^{**}, u^b) \left(\ln \left(\frac{p_i^0}{p_i^b} \right) \right)^2 \\ &= \frac{1}{C(p^{**}, u^b)} A + \text{Var} \left(\ln \left(\frac{p_i^0}{p_i^b} \right) \right), \end{aligned}$$

kur narys A atitinka dvigubą sumą, o likę nariai – dispersiją, o

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^n \frac{\partial^2 \ln C(p^*, u^b)}{\partial \ln p_i \partial \ln p_{i'}} \ln \left(\frac{p_i^t}{p_i^b} \right) \ln \left(\frac{p_{i'}^t}{p_{i'}^b} \right) &= \frac{1}{C(p^*, u^b)} \sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^n \frac{\partial^2 C(p^*, u^b)}{\partial p_i \partial p_{i'}} (p_i^0 - p_i^b) (p_{i'}^0 - p_{i'}^b) \\ &\quad - \left(\sum_{i=1}^n s_i(p^*, u^b) \ln \left(\frac{p_i^t}{p_i^b} \right) \right)^2 + \sum_{i=1}^n s_i(p^*, u^b) \left(\ln \left(\frac{p_i^t}{p_i^b} \right) \right)^2 \\ &= \frac{1}{C(p^*, u^b)} B + \text{Var} \left(\ln \left(\frac{p_i^t}{p_i^b} \right) \right), \end{aligned}$$

kur narys B atitinka dvigubą sumą, o likusi dalis – dispersiją. Tuomet pasinaudoję gautomis išraiškomis, galime užrašyti tiksliai kam lygus skirtumas tarp Cobb–Douglas ir Konüs kainų indeksų. Taigi,

$$\begin{aligned} \ln I^{CD}(p^t, p^0; s^b) - \ln I^K(p^t, p^0; u^b) &= \frac{1}{2C(p^*, u^b)} \left(\frac{C(p^*, u^b)}{C(p^{**}, u^b)} A - B \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\text{Var} \left(\ln \left(\frac{p_i^t}{p_i^b} \right) \right) - \text{Var} \left(\ln \left(\frac{p_i^0}{p_i^b} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Akivaizdu, jog skirtumas tikrai nelygus nuliui, o ar gauta išraiška gali būti lygi nuliui, reiktų papildomos analizės. Vadinasi, remiantis nagrinėtu pavyzdžiu, galima daryti išvadą, Cobb–Douglas tikrai nėra lygus tikram pragyvenimo išlaidų Konüs kainų indeksui, todėl galima laikyti, jog ir kiti kainų indeksai teoriškai turi poslinkį, kurį galima įvertinti. Taigi, ne tik kainų indeksai tarpusavyje yra skirtingi ir gali sudaryti skirtingus poslinkius nei tiesiogiai skaičiuojant tikrąjį pragyvenimo išlaidų kainų indeksą, bet ir Konüs kainų indekso pakeitimas kitu indeksu taip pat sukelia paklaidą.

2.6. Kainų ir kiekių indikatoriai

Analizuoti duomenis ir suprasti jų tendencijas yra svarbu, ypač prekybininkams, norintiems suprasti vartotojų pirkimo elgseną. Prekybininkams lyginti skirtingų laikotarpių apyvartas tiesiogiai nėra tikslinga, tad reikalinga šias apyvartas skirstyti į tai, kokią įtaką turėjo kainų pasikeitimas, o kokią – parduotų produktų kiekiai. Šiame skyriuje nagrinėjami Bennet ir Montgomery kainų bei kiekio indikatoriai, kurių pagalba apyvartos pokyčius galima išskirti į kainų ir kiekių pasikeitimus. Šie indikatoriai ypatingai svarbūs analizuojant prekybos tinklų kvitų duomenis, nes tai leidžia lengviau suprasti vartotojų įpročius, įsivertinti rodiklius bei atlikti priežasčių analizes. Teorinė medžiaga parengta pagal Jacek Bialek ir Natalia Pawelec straipsnius [7, 10].

Tegul p_i^T ir q_i^T apibrėžia produkto i kainas ir kiekius laiko momentais $T \in \{0, t\}$. Tegul p_T ir q_T žymi kainų ir kiekių vektorius tais laiko momentais. Kaip ir anksčiau pažymėkime kainų ir kiekių indeksus – $P_{0,t} = P_{0,t}(p^0, q^0, p^t, q^t)$ – kainų, o $Q_{0,t} = Q_{0,t}(p^0, q^0, p^t, q^t)$ – kiekio indeksas. Apibrėžkime kainų indikatorių kaip $IP_{0,t} = IP_{0,t}(p^0, q^0, p^t, q^t)$, o kiekių indikatorių – $IQ_{0,t} = IQ_{0,t}(p^0, q^0, p^t, q^t)$. Suvartotojų produktų vertė yra apibrėžiama kaip $V_T = \sum_i p_i^T q_i^T$. Tegul $G_{0,t}$ žymi sutampančių produktų aibę stebimais laiko momentais, t. y. $G_{0,t} = G_0 \cap G_t$. Tuomet laikykime, jog G_0^t žymi produktų visų įmanomų produktų aibę laiko momentais 0 ir t , t. y. $G_0^t = G_0 \cup G_t$. Apibrėžkime Bennet kainų ir kiekio indikatorius. Kainų indikatorių apibrėžiamas kaip

$$IP_{0,t}^B = \sum_{i \in G_0^t} \frac{q_i^0 + q_i^t}{2} (p_i^t - p_i^0),$$

o kiekio indikatorių –

$$IQ_{0,t}^B = \sum_{i \in G_0^t} \frac{p_i^0 + p_i^t}{2} (q_i^t - q_i^0).$$

Galima parodyti, jog $V_t - V_0 = IP_{0,t}^B + IQ_{0,t}^B$, kas reiškia, jog Bennet indikatorių tenkina sumos savybę arba vertės pokyčio aksiomą.

Kaip ir anksčiau laikykime, jog $G_{0,t}$ yra laiko momentais 0 ir t sutampančių produktų aibė. Apibrėžkime Vartio vidurkį dviems teigiamiems skaičiams a ir b , kuris literatūroje taip pat žinomas kaip logaritminis vidurkis ir aprašomas toliau pateikta formule

$$L(a, b) = \begin{cases} \frac{a-b}{\ln(a)-\ln(b)}, & \text{kai } a \neq b, \\ a, & \text{kai } a = b. \end{cases}$$

Remiantis apibrėžtais žymėjimais apibrėžkime Montgomery kainų indikatorių sutampantiems produktams

$${}_m IP_{0,t}^M = \sum_{i \in G_{0,t}} L(p_i^t, q_i^t, p_i^0, q_i^0) \ln \left(\frac{p_i^t}{p_i^0} \right)$$

ir Montgomery kiekio indikatorių –

$${}_m IQ_{0,t}^M = \sum_{i \in G_{0,t}} L(p_i^t, q_i^t, p_i^0, q_i^0) \ln \left(\frac{q_i^t}{q_i^0} \right).$$

Nesunku parodyti, jog vartotojo dviejų laikotarpių išlaidų skirtumas, sutampančių produktų aibių elementų atveju, gali būti išskaidytas naudojant Montgomery kainų ir kiekio indikatorių, t. y.

$$V_{G_{0,t}}^t - V_{G_{0,t}}^0 = \sum_{i \in G_{0,t}} p_i^t q_i^t - \sum_{i \in G_{0,t}} p_i^0 q_i^0 = {}_m IP_{0,t}^M + {}_m IQ_{0,t}^M.$$

Kvitų duomenų atveju produktų aibės gali nebūti identiškos, ir kai kuriais atvejais negalima stebėti tų pačių produktų laiko momentais 0 ir t . Skaičiuojant Bennet indikatorį šiuo atveju kyla problemų, nes produktai turi būti stebimi abiem laiko momentais. Montgomery indikatoriams ši problema nėra aktuali, nes šiuo atveju laikoma, jog produkto kiekis yra tiesiog nestebimas, t. y. lygus nuliui. Be to, galima parodyti, jog tokiu atveju kainos ir kiekiai nesutampančių produktų gali būti apibrėžiami taip:

$$p_i^t = q_i^t = \varepsilon \text{ kiekvienam } i \in G_0 \setminus G_t \text{ ir } p_i^0 = q_i^0 = \varepsilon \text{ kiekvienam } i \in G_t \setminus G_0, \quad (80)$$

kur laikome, jog ε pakankamai mažas, realusis, teigiamas skaičius. Nesutampančių produktų aibių atveju Montgomery indikatoriai apibrėžiami toliau pateiktomis formulėmis –

$$IP_{0,t}^M = \sum_{i \in G_0^t} L(p_i^t, q_i^t, p_i^0, q_i^0) \ln \left(\frac{p_i^t}{p_i^0} \right), \quad (81)$$

$$IQ_{0,t}^M = \sum_{i \in G_0^t} L(p_i^t, q_i^t, p_i^0, q_i^0) \ln \left(\frac{q_i^t}{q_i^0} \right). \quad (82)$$

Bendru atveju, kai $G_0^t \neq G_{0,t}$, Montgomery indikatoriai (81) ir (82) yra funkcijos priklausomos nuo parametro ε , kurio prielaidos apibrėžiamos (80) formulėje, todėl galima indikatorius žymėti kaip $IP_{0,t}^M(\varepsilon)$ ir $IQ_{0,t}^M(\varepsilon)$. Tuomet Montgomery indikatoriai tenkina sumos savybę, kuri, remiantis prielaidomis (80) formulėje yra lygi

$$V_{G_0^t}^t - V_{G_0^t}^0 = \sum_{i \in G_t \setminus G_0} p_i^t q_i^t - \sum_{i \in G_0 \setminus G_t} p_i^0 q_i^0 + \sum_{i \in G_{0,t}} p_i^t q_i^t - \sum_{i \in G_{0,t}} p_i^0 q_i^0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (IP_{0,t}^M(\varepsilon) + IQ_{0,t}^M(\varepsilon)). \quad (83)$$

Pangrinėkime paskutinės lygybės teisingumą. Pažymėkime $V_i^t - V_i^0$ išlaidų vertės pokytį produktui i , kuris yra tarp laiko momento t bei bazinio laiko momento 0, t. y. $V_i^t - V_i^0 = p_i^t q_i^t - p_i^0 q_i^0$ ir pažymėkime ${}^j IP_{0,t}^M(\varepsilon)$ ir ${}^j IQ_{0,t}^M(\varepsilon)$ Montgomery kainų ir kiekio indikatorius j -ajam produktui skaičiuojant naudojantis prielaida (80). Laikykime, jog produktas jt yra stebimas tik laiko momentu t , o produktas $j0$ yra stebimas tik laiko momentu 0. Pardavėjo atžvilgiu, nestebimas produktas jt laiko momentu 0 ir produktas $j0$ laiko momentu t , apyvartos pasikietimas produktams jt ir $j0$ apibrėžiamas kaip

$$V_{jt}^t - V_{jt}^0 = p_{jt}^t q_{jt}^t \text{ ir } V_{j0}^t - V_{j0}^0 = -p_{jt}^0 q_{jt}^0. \quad (84)$$

Toliau pateikta lema yra pagrindinis (83) įrodymas.

2.6.1 Lema ([7]) *Panaudoję apibrėžtus žymėjimus turime, jog*

$$V_{jt}^t - V_{jt}^0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} ({}^j IP_{0,t}^M(\varepsilon) + {}^j IQ_{0,t}^M(\varepsilon)) \quad (85)$$

ir

$$V_{j0}^t - V_{j0}^0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} ({}^j IP_{0,t}^M(\varepsilon) + {}^j IQ_{0,t}^M(\varepsilon)). \quad (86)$$

Irodymas. Remiantis prielaidomis (80) formulėje ir tai, jog $p_{jt}^0 = q_{jt}^0 = p_{j0}^t = q_{j0}^t = \varepsilon$, iš to išplaukia, jog

$$\begin{aligned} {}^{jt}IP_{0,t}^M(\varepsilon) + {}^{jt}IQ_{0,t}^M &= \frac{(p_{jt}^t q_{jt}^t - \varepsilon^2) \left(\ln \left(\frac{p_{jt}^t}{\varepsilon} \right) + \ln \left(\frac{q_{jt}^t}{\varepsilon} \right) \right)}{\ln(p_{jt}^t q_{jt}^t) - \ln(\varepsilon^2)} \\ &= \frac{(p_{jt}^t q_{jt}^t - \varepsilon^2)(\ln(p_{jt}^t q_{jt}^t) - \ln(\varepsilon^2))}{\ln(p_{jt}^t q_{jt}^t) - \ln(\varepsilon^2)} \\ &= p_{jt}^t q_{jt}^t - \varepsilon^2, \end{aligned} \quad (87)$$

ir todėl, iš (84) ir (87), iš karto seka (85) įrodymas, nes

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} ({}^{jt}IP_{0,t}^M(\varepsilon) + {}^{jt}IQ_{0,t}^M(\varepsilon)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (p_{jt}^t q_{jt}^t - \varepsilon^2) = p_{jt}^t q_{jt}^t = V_{jt}^t - V_{jt}^0. \quad (88)$$

Taip pat

$$\begin{aligned} {}^{j0}IP_{0,t}^M(\varepsilon) + {}^{j0}IQ_{0,t}^M(\varepsilon) &= \frac{(\varepsilon^2 - p_{j0}^0 q_{j0}^0) \left(\ln \left(\frac{\varepsilon^2}{p_{j0}^0} \right) + \ln \left(\frac{\varepsilon^2}{q_{j0}^0} \right) \right)}{\ln(\varepsilon^2) - \ln(p_{j0}^0 q_{j0}^0)} \\ &= \frac{(\varepsilon^2 - p_{j0}^0 q_{j0}^0)(\ln(\varepsilon^2) - \ln(p_{j0}^0 q_{j0}^0))}{\ln(\varepsilon^2) - \ln(p_{j0}^0 q_{j0}^0)} \\ &= \varepsilon^2 - p_{j0}^0 q_{j0}^0, \end{aligned} \quad (89)$$

todėl, iš (84) ir (89), išplaukia (86) įrodymas, nes

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} ({}^{j0}IP_{0,t}^M(\varepsilon) + {}^{j0}IQ_{0,t}^M(\varepsilon)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\varepsilon^2 - p_{j0}^0 q_{j0}^0) = -p_{j0}^0 q_{j0}^0 = V_{j0}^t - V_{j0}^0. \quad (90)$$

□

Straipsnių autoriai pateikia ir šių indikatorių modifikacijas bei jų savybių įrodymus, taip pat indikatorius pritaikytus daugialypių kainų indeksų teorijoje, tačiau šiame darbe nagrinėjami tik baziniai Bennet ir Montgomery kainų bei kiekių indikatorių variantai. Plačiau galima pasiskaityti straipsniuose [7, 10].

2.7. Statistiniai kainų indeksų rodikliai

Šioje dalyje apžvelkime pagrindinius statistinius rodiklius, kuriais remiantis analizuosime kainų indeksus praktinėje dalyje. Skyriaus medžiaga parengta pagal [18, 23, 24]. Laikykime, jog turime dvi kainų indeksų laiko eilutes X ir Y , kur $X = (x_1, x_2, \dots, x_t)$ ir $Y = (y_1, y_2, \dots, y_t)$. Apibrėžkime pagrindinius statistinius rodiklius.

- **Vidutinis skirtumas**

Tegul d žymi kainų indeksų skirtumą, t. y. $d = x_t - y_t$, tuomet vidutinis skirtumas lygus

$$\bar{d} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (x_t - y_t).$$

- **Dispersija**

Kainų indeksų skirtumų dispersija apskaičiuojama pagal šią formulę:

$$\text{Var}(X - Y) = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T ((x_t - y_t) - (\bar{x} - \bar{y}))^2,$$

čia $\bar{x}$ ir $\bar{y}$ žymi atitinkamų kainų indeksų laiko eilučių vidurkius.

- **MAD**

Vidutinis absoliutusias dviejų kainų indeksų laiko eilučių nuokrypis lygus

$$\text{MAD} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |(x_t - y_t) - (\bar{x} - \bar{y})|.$$

- **Tiesinė koreliacija**

Tiesinės koreliacijos koeficientas tarp dviejų kainų indeksų laiko eilučių apibrėžiamas kaip

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2}}.$$

Kuo koreliacijos koeficiento reikšmė artimesnė 1, tuo kainų indeksų laiko eilutės kinta panašiai, t. y. jų pokyčiai sutampa. Kai koreliacijos koeficientas lygus -1, laiko eilutės kinta priešingomis kryptimis. Vertės, artimos 0, rodo, kad kainų indeksų pokyčiai neturi tiesinio ryšio.

- **DTW**

Dinaminis laiko eilutės išskaidymas (*Dynamic Time Warping*, DTW) leidžia palyginti dviejų laiko eilučių formą, net jei jos nevienodai išsidėsčiusios laike arba turi skirtingą kitimo tempą.

Tegul $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ ir $Y = \{y_1, \dots, y_M\}$ — dviejų kainų indeksų laiko eilutės. Pirmiausia, apibrėžiama skirtumų matrica:

$$D(i, j) = |x_i - y_j|, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M,$$

kur $D(i, j)$ rodo absoliutų skirtumą tarp i -ojo X elemento ir j -ojo Y elemento.

Tuomet DTW matrica užpildoma pagal rekursijos taisyklę

$$\text{DTW}(i, j) = D(i, j) + \min(\text{DTW}(i-1, j), \text{DTW}(i, j-1), \text{DTW}(i-1, j-1)),$$

su pradinėmis sąlygomis

$$\text{DTW}(0, 0) = 0, \quad \text{DTW}(i, 0) = \text{DTW}(0, j) = \infty, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M.$$

Galutinis DTW rodiklis apskaičiuojamas kaip

$$\text{DTW}(X, Y) = \text{DTW}(N, M).$$

Mažesnė DTW reikšmė reiškia didesnį dviejų laiko eilučių panašumą, net jei jos nėra tiksliai vienodos

laike. Šis metodas ypač naudingas, kai vienos laiko eilutės pokyčiai gali vėluoti arba skirtingai pasiskirstyti laike.

- **Tendencijų koreliacija**

Tendencijų koreliacija matuoja dviejų laiko eilučių pokyčių kitimą tarp gretimų laikotarpių.

Tegul

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1}, \quad \Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}, \quad t = 2, \dots, T,$$

žymi gretimų laikotarpių skirtumus. Tada tendencijų koreliacija apskaičiuojama pagal formulę

$$\rho_{\text{tend}} = \frac{\sum_{t=2}^T (\Delta X_t - \overline{\Delta X})(\Delta Y_t - \overline{\Delta Y})}{\sqrt{\sum_{t=2}^T (\Delta X_t - \overline{\Delta X})^2} \sqrt{\sum_{t=2}^T (\Delta Y_t - \overline{\Delta Y})^2}},$$

čia

$$\overline{\Delta X} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T \Delta X_t, \quad \overline{\Delta Y} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T \Delta Y_t$$

yra vidutiniai pokyčiai.

Jeigu ρ_{tend} yra artima 1, laiko eilutės kinta panašiai, t. y. jų pokyčių kryptys sutampa. Kai ρ_{tend} yra artima -1, laiko eilutės kinta priešingomis kryptimis. Vertės, artimos 0, rodo, kad laiko eilučių pokyčiai neturi tiesinio ryšio.

- **MAE**

Vidutinis absoliutus dviejų kainų indeksų laiko eilučių skirtumas lygus

$$\text{MAE} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |x_t - y_t|.$$

3. GEKS–LM kainų indekso savybių analizė

Šioje darbo dalyje pateikiamas GEKS–LM kainų indekso savybių įrodymas. Šio kainų indekso tenkinamų savybių teorema buvo pateikta Jacek Białek straipsnyje [5], tačiau straipsnio autorius teoremos įrodymo nepateikia ir palieka savybes įrodyti skaitytojui. Straipsnyje pristatomos panašių kainų indeksų, GEKS–QM ir GEKS–IQM, teoremos, apibrėžiančios pagrindines šių kainų indeksų savybes, bei pateikiami pilni šių daugialypių kainų indeksų savybių įrodymai. Remiantis [5] straipsnio teorine medžiaga bei GEKS–QM ir GEKS–IQM kainų indeksų savybių įrodymais, toliau pateiksiu GEKS–LM daugialypio kainų indekso savybių teoremos įrodymą. Prisiminkime GEKS–LM kainų indekso išraišką bei įrodomą teoremą. Lloyd-Moulton kainų indeksas daugialypių kainų indeksų kontekste išreiškiamas kaip

$$I_{LM}^{\tau,t}(\sigma) = \left(\sum_{i \in G_{\tau,t}} s_i^{\tau} \left(\frac{p_i^t}{p_i^{\tau}} \right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}},$$

čia parametras σ apibrėžia produktų elastingumą, o GEKS–LM kainų indeksas apibrėžiamas kaip

$$I_{GEKS-LM}^{0,t}(\sigma) = \prod_{\tau=0}^T \left(\frac{I_{LM}^{\tau,t}(\sigma)}{I_{LM}^{\tau,0}(\sigma)} \right)^{\frac{1}{T+1}}.$$

Toliau pateikiama pagrindinė teorema, kurią įrodysiu ir savo indėliu prisidėsiu prie daugialypių kainų indeksų savybių teorijos bei papildysiu Jacek Białek straipsnį [5].

3.0.1 Teorema Kiekvienam $\sigma \neq 1$ daugialypis kainų indeksas $I_{GEKS-LM}^{0,t}(\sigma)$ tenkina tranzityvumo, identiško, kelių periodų identiško, jautrumo, tolydumo, teigiamumo ir normalizacijos, suderinamumo, stipraus kainų proporcingumo bei kainų ir kiekių homogeniškumo savybes.

Įrodymas. Pasinaudojus daugialypių kainų indeksų savybėmis, pateiktomis daugialypių kainų indeksų skyriuje, kainų indeksų apibrėžimais bei [5] straipsnio idėjomis, įrodykime GEKS–LM kainų indekso savybes.

- **Tranzityvumas**

Reikia parodyti, jog $I^{0,t}(P,Q) = I^{0,s}(P,Q) \times I^{s,t}(P,Q)$, $\forall 0 \leq s < t \leq T$. Laikykime, jog s ir t tenkina aksiomoje pateiktą nelygybę, tuomet

$$\begin{aligned} I_{GEKS-LM}^{0,s}(\sigma) \times I_{GEKS-LM}^{s,t}(\sigma) &= \prod_{\tau=0}^T \left(\frac{I_{LM}^{\tau,s}(\sigma)}{I_{LM}^{\tau,0}(\sigma)} \right)^{\frac{1}{T+1}} \times \prod_{\tau=0}^T \left(\frac{I_{LM}^{\tau,t}(\sigma)}{I_{LM}^{\tau,s}(\sigma)} \right)^{\frac{1}{T+1}} \\ &= \prod_{\tau=0}^T \left(\frac{I_{LM}^{\tau,t}(\sigma)}{I_{LM}^{\tau,0}(\sigma)} \right)^{\frac{1}{T+1}} = I_{GEKS-LM}^{0,t}, \end{aligned}$$

pasinaudojus trupmenų sandaugos prastinimo savybe, gauname reikalingą rezultatą.

- **Identiškumas**

Reikia parodyti, jog laiko momento t kainoms grįžus į pradinio laiko momento 0 lygį, t. y. $p_i^t = p_i^0$ kiekvienam $i \in G_{0,t}$, kainų indeksas lygus 1. Įrodant šią savybę į GEKS–LM kainų indekso formulę įstatykime

$p_i^t = p_i^0$ ir tuomet

$$\begin{aligned}
 I_{GEKS-LM}^{0,t}(\sigma) &= \prod_{\tau=0}^T \left(\frac{I_{LM}^{\tau,t}(\sigma)}{I_{LM}^{\tau,0}(\sigma)} \right)^{\frac{1}{T+1}} = \prod_{\tau=0}^T \left(\frac{\left(\sum_{i \in G_{\tau,t}} s_i^{\tau} \left(\frac{p_i^t}{p_i^{\tau}} \right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}}{\left(\sum_{i \in G_{\tau,t}} s_i^{\tau} \left(\frac{p_i^0}{p_i^{\tau}} \right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}} \right)^{\frac{1}{T+1}} \\
 &= \prod_{\tau=0}^T \left(\frac{\left(\sum_{i \in G_{\tau,t}} s_i^{\tau} \left(\frac{p_i^0}{p_i^{\tau}} \right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}}{\left(\sum_{i \in G_{\tau,t}} s_i^{\tau} \left(\frac{p_i^0}{p_i^{\tau}} \right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}} \right)^{\frac{1}{T+1}} = \prod_{\tau=0}^T (1)^{\frac{1}{T+1}} = 1.
 \end{aligned}$$

Pasinaudojus lygybe $p_i^t = p_i^0$, įrodoma, jog GEKS–LM kainų indeksas tenkina identiškumo savybę.

- **Kelių periodų identiškumas**

Reikia parodyti, jog grandininio būdu sujungtos kainų indeksų laiko eilutės sandauga yra lygi vienetui, jeigu visos produktų kainos ir kiekiai grįžta į pradinio laiko momento lygius, t. y. tegul $p_i^t = p_i^0$ ir $q_i^t = q_i^0 \forall i \in G_{0,t}$, tuomet $I^{0,1}(P,Q) \times I^{1,2}(P,Q) \times \dots \times I^{t-1,t}(P,Q) = 1$. Taigi,

$$\begin{aligned}
 I_{GEKS-LM}^{0,1}(\sigma) \times I_{GEKS-LM}^{1,2}(\sigma) \times \dots \times I_{GEKS-LM}^{t-1,t}(\sigma) &= \\
 &= \prod_{\tau=0}^T \left(\frac{I_{LM}^{\tau,1}(\sigma)}{I_{LM}^{\tau,0}(\sigma)} \right)^{\frac{1}{T+1}} \times \prod_{\tau=0}^T \left(\frac{I_{LM}^{\tau,2}(\sigma)}{I_{LM}^{\tau,1}(\sigma)} \right)^{\frac{1}{T+1}} \times \dots \times \prod_{\tau=0}^T \left(\frac{I_{LM}^{\tau,t}(\sigma)}{I_{LM}^{\tau,t-1}(\sigma)} \right)^{\frac{1}{T+1}} \\
 &= \prod_{\tau=0}^T \left(\frac{I_{LM}^{\tau,1}(\sigma)}{I_{LM}^{\tau,0}(\sigma)} \frac{I_{LM}^{\tau,2}(\sigma)}{I_{LM}^{\tau,1}(\sigma)} \dots \frac{I_{LM}^{\tau,t}(\sigma)}{I_{LM}^{\tau,t-1}(\sigma)} \right)^{\frac{1}{T+1}} = \prod_{\tau=0}^T \left(\frac{I_{LM}^{\tau,t}(\sigma)}{I_{LM}^{\tau,0}(\sigma)} \right)^{\frac{1}{T+1}} = 1.
 \end{aligned}$$

Paskutinė lygybė gaunama pasinaudojus identiškumo savybe, nes nagrinėjamos sąlygos sutampa, todėl rezultatas lygus 1. Taigi, GEKS–LM kainų indeksas tenkina kelių periodų identiškumo savybę.

- **Jautrumas**

Įrodant šią savybę reikia parodyti, jog kiekvienai aibei $G_0 \neq G_t$, jeigu $p_i^t = p_i^0, \forall i \in G_{0,t}$, tuomet $I^{0,t}(P,Q)$ nebūtinai visada lygus vienetui. Pasinaudoję savybės reikalavimais, laikykime, jog yra bent vienas periodas τ_0 toks, kad $G_{\tau_0,t} \neq G_{\tau_0,0} \cap G_{\tau_0,t} \neq \emptyset$. Nemažinant bendrumo laikykime, jog egzistuoja vienintelis toks periodas τ_0 , jog visiems $\tau \neq \tau_0$ galioja aibių lygybė $G_{\tau,0} = G_{\tau,t}$. Tuomet GEKS–LM kainų išskaidykime į sangauą, t. y.

$$I_{GEKS-LM}^{0,t}(\sigma) = \left(\frac{I_{LM}^{\tau_0,t}(\sigma)}{I_{LM}^{\tau_0,0}(\sigma)} \right)^{\frac{1}{T+1}} \prod_{\tau=0, \tau \neq \tau_0}^T \left(\frac{I_{LM}^{\tau,t}(\sigma)}{I_{LM}^{\tau,0}(\sigma)} \right)^{\frac{1}{T+1}} = \left(\frac{I_{LM}^{\tau_0,t}(\sigma)}{I_{LM}^{\tau_0,0}(\sigma)} \right)^{\frac{1}{T+1}},$$

nes

$$\prod_{\tau=0, \tau \neq \tau_0}^T \left(\frac{I_{LM}^{\tau,t}(\sigma)}{I_{LM}^{\tau,0}(\sigma)} \right)^{\frac{1}{T+1}} = 1,$$

pasinaudojus tuo, jog $p_i^t = p_i^0$, trupmenos skaitiklis ir vardiklis tampa lygūs, todėl gauname vienetą.

Pangrinėkime likusį narį –

$$\left(\frac{I_{LM}^{\tau_0,t}(\sigma)}{I_{LM}^{\tau_0,0}(\sigma)} \right)^{\frac{1}{T+1}} = \prod_{\tau=0}^T \left(\frac{\left(\sum_{i \in G_{\tau_0,t}} s_i^{\tau} \left(\frac{p_i^t}{p_i^{\tau_0}} \right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}}{\left(\sum_{i \in G_{\tau_0,0}} s_i^{\tau} \left(\frac{p_i^0}{p_i^{\tau_0}} \right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}} \right)^{\frac{1}{T+1}},$$

jeigu įstatysime $p_i^t = p_i^0$ į nagrinėjamą išraišką, negausime vieneto vien dėl to, jog skaičiavimui skaitiklyje naudojama produktų aibė $G_{\tau_0,0}$ nesutampa su vardiklyje naudojamų produktų aibe $G_{\tau_0,t}$, todėl, akivaizdu, jog suprastinti negalėsime, nes sumuosime skirtingus narius, tad GEKS–LM kainų indeksas tenkina jautrumo savybę.

- **Tolydumas, teigiamumas ir normalizacija**

GEKS–LM kainų indekso tolydumas ir teigiamumas grindžiamas kainų indeksų fundamentaliosiomis aksiomomis, kurios teigia, jog visi kainų indeksai yra tolydūs savo argumentų atžvilgiu bei kiekviena bet kurio kainų indekso reikšmė yra teigiama. Šios aksiomos buvo apibrėžtos apžvelgiant aksiomatinio kainų indeksų sudarymo metodą. Normalizacijos savybei turime parodyti, jog $I^{0,0}(P,Q) = 1$. Tuomet,

$$I_{GEKS-LM}^{0,0}(\sigma) = \prod_{\tau=0}^T \left(\frac{I_{LM}^{\tau,0}(\sigma)}{I_{LM}^{\tau,0}(\sigma)} \right)^{\frac{1}{T+1}} = \prod_{\tau=0}^T (1)^{\frac{1}{T+1}} = 1.$$

- **Suderinamumas**

Reikia parodyti, kad jeigu bet kuriam laiko momentui $s \in [0, T]$ ir parametrai $\lambda_i > 0$ turime, jog $\tilde{p}_i^s = \lambda_i p_i^s$ ir $\tilde{q}_i^s = \frac{q_i^s}{\lambda_i}$ kiekvienam $i \in G_{0,t}$, tuomet $I^{0,t}(\tilde{P}, \tilde{Q}) = I^{0,t}(P, Q)$. Pasinaudoję pateiktu savybės apibrėžimu turime, kad

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{GEKS-LM}^{0,t}(\sigma) &= \prod_{\tau=0}^T \left(\frac{\tilde{I}_{LM}^{\tau,t}(\sigma)}{\tilde{I}_{LM}^{\tau,0}(\sigma)} \right)^{\frac{1}{T+1}} = \prod_{\tau=0}^T \left(\frac{\left(\sum_{i \in G_{\tau,t}} \tilde{s}_i^{\tau} \left(\frac{\tilde{p}_i^t}{\tilde{p}_i^{\tau}} \right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}}{\left(\sum_{i \in G_{\tau,t}} \tilde{s}_i^{\tau} \left(\frac{\tilde{p}_i^0}{\tilde{p}_i^{\tau}} \right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}} \right)^{\frac{1}{T+1}} \\ &= \prod_{\tau=0}^T \left(\frac{\left(\sum_{i \in G_{\tau,t}} \tilde{s}_i^{\tau} \left(\frac{\lambda_i p_i^t}{\lambda_i p_i^{\tau}} \right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}}{\left(\sum_{i \in G_{\tau,t}} \tilde{s}_i^{\tau} \left(\frac{\lambda_i p_i^0}{\lambda_i p_i^{\tau}} \right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}} \right)^{\frac{1}{T+1}} \\ &= \prod_{\tau=0}^T \left(\frac{\left(\sum_{i \in G_{\tau,t}} \tilde{s}_i^{\tau} \left(\frac{p_i^t}{p_i^{\tau}} \right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}}{\left(\sum_{i \in G_{\tau,t}} \tilde{s}_i^{\tau} \left(\frac{p_i^0}{p_i^{\tau}} \right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}} \right)^{\frac{1}{T+1}} = I_{GEKS-LM}^{0,t}(\sigma), \end{aligned}$$

čia paskutinė lygybė gaunama pasinaudojus tuo, jog $\tilde{s}_i = s_i$, nes

$$\tilde{s}_i^t = \frac{\tilde{p}_i^t \tilde{q}_i^t}{\sum_{j \in G_{0,t}} \tilde{p}_j^t \tilde{q}_j^t} = \frac{\lambda_i p_i^t \frac{1}{\lambda_i} q_i^t}{\sum_{j \in G_{0,t}} \lambda_j p_j^t \frac{1}{\lambda_j} q_j^t} = \frac{p_i^t q_i^t}{\sum_{j \in G_{0,t}} p_j^t q_j^t} = s_i^t.$$

Taigi, GEKS–LM kainų indeksas tenkina kainų indeksų suderinamumo savybę.

- **Stiprus kainų proporcingumas**

Kainų proporcingumo savybė, pasak [5] straipsnio autoriaus, gali būti išskiriama į silpnąjį bei stiprųjį kainų proporcingumą. Silpnąjį kainų proporcingumo atvejų, jeigu visos produktų kainos yra proporcingos lyginant laiko momentus 0 ir τ , t. y., jog $p_i^\tau = k^\tau p_i^0$ kiekvienam $i \in G_{0,t}$ ir $\tau = 1, 2, 3, \dots, T$, tuomet kainų indeksas, skaičiuojamas laiko momentu t ir kuris lygina kainas su bazinio laikotarpio kainomis yra proporcingas k^τ kartų, t. y. $I^{0,t}(P, Q) = k^\tau$. Nagrinėjant stiprųjį kainų proporcingumą, kurį reikia įrodyti GEKS–LM kainų indeksui, reikia parodyti, jeigu visos laiko momento t kainos yra proporcingos bazinio laikotarpio kainoms, t. y. $p_i^t = k p_i^0$ kiekvienam $i \in G_{0,t}$ ir teigiamam skaičiui k , tuomet kainų indeksas lygus koeficientui k , t. y. $I^{0,t}(P, Q) = k$. Laikoma, jog produktų aibės nekinta ir laiko momentais 0 ir t yra lygios. Tuomet pasinaudoję pagrindine GEKS–LM kainų indekso išraiška ir stipraus kainų proporcingumo savybes sąlygomis, turime, jog

$$\begin{aligned} I_{GEKS-LM}^{0,t}(\sigma) &= \prod_{\tau=0}^T \left(\frac{I_{LM}^{\tau,t}(\sigma)}{I_{LM}^{\tau,0}(\sigma)} \right)^{\frac{1}{T+1}} = \prod_{\tau=0}^T \left(\frac{\left(\sum_{i \in G_{\tau,t}} s_i^\tau \left(\frac{p_i^t}{p_i^\tau} \right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}}{\left(\sum_{i \in G_{\tau,t}} s_i^\tau \left(\frac{p_i^0}{p_i^\tau} \right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}} \right)^{\frac{1}{T+1}} \\ &= \prod_{\tau=0}^T \left(\frac{\left(\sum_{i \in G_{\tau,t}} s_i^\tau \left(\frac{k p_i^0}{p_i^\tau} \right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}}{\left(\sum_{i \in G_{\tau,t}} s_i^\tau \left(\frac{p_i^0}{p_i^\tau} \right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}} \right)^{\frac{1}{T+1}} \\ &= \prod_{\tau=0}^T \left(\frac{k^{\frac{1-\sigma}{1-\sigma}} \left(\sum_{i \in G_{\tau,t}} s_i^\tau \left(\frac{p_i^0}{p_i^\tau} \right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}}{\left(\sum_{i \in G_{\tau,t}} s_i^\tau \left(\frac{p_i^0}{p_i^\tau} \right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}} \right)^{\frac{1}{T+1}} \\ &= \prod_{\tau=0}^T (k)^{\frac{1}{T+1}} = k^{\frac{T+1}{T+1}} = k. \end{aligned}$$

Reikalingą rezultatą gauname pasinaudojus tuo, jog $\tau = 0, 1, 2, \dots, T$ ir tuomet narį $k^{\frac{1}{T+1}}$ dauginame $T+1$ kartų, todėl laipsnyje esanti trupmena tampa lygi vienetui ir gauname k . Vadinasi, GEKS–LM kainų indeksas tenkina stipraus kainų proporcingumo savybę.

- **Kainų homogeniškumas**

Reikia įrodyti, kad perskaičiavus laikotarpio t kainas proporcingumo koeficientu k , kainų indeksas padidėja arba sumažėja atitinkamu koeficientu k , t. y. $I^{0,t}(p^0, p^1, \dots, k p^t, Q) = k I^{0,t}(p^0, p^1, \dots, p^t, Q)$. Pažymėkime $\tilde{I}^{0,t} = I^{0,t}(p^0, p^1, \dots, k p^t, Q)$, tuomet GEKS–LM kainų indeksą išskirkime į sandaugą, kuri

atitinka GEKS–LM kainų indeksą, kai $\tau \neq t$, sandaugą su kainų indekso sandaugos nariu, kai $\tau = t$, tada turime, jog

$$\begin{aligned}
 \tilde{I}_{GEKS-LM}^{0,t}(\sigma) &= \prod_{\tau=0}^T \left(\frac{\tilde{I}_{LM}^{\tau,t}(\sigma)}{\tilde{I}_{LM}^{\tau,0}(\sigma)} \right)^{\frac{1}{T+1}} = \left(\frac{\tilde{I}_{LM}^{t,t}(\sigma)}{\tilde{I}_{LM}^{t,0}(\sigma)} \right)^{\frac{1}{T+1}} \prod_{\tau=0, \tau \neq t}^T \left(\frac{\tilde{I}_{LM}^{\tau,t}(\sigma)}{\tilde{I}_{LM}^{\tau,0}(\sigma)} \right)^{\frac{1}{T+1}} \\
 &= \left(\frac{\left(\sum_{i \in G_t} s_i^{\tau} \left(\frac{kp_i^t}{p_i^t} \right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}}{\left(\sum_{i \in G_t} s_i^{\tau} \left(\frac{p_i^0}{p_i^t} \right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}} \right)^{\frac{1}{T+1}} \prod_{\tau=0, \tau \neq t}^T \left(\frac{\tilde{I}_{LM}^{\tau,t}(\sigma)}{\tilde{I}_{LM}^{\tau,0}(\sigma)} \right)^{\frac{1}{T+1}} \\
 &= k^{\frac{1-\sigma}{1-\sigma} \frac{1}{T+1}} \left(\frac{I_{LM}^{t,t}(\sigma)}{I_{LM}^{t,0}(\sigma)} \right)^{\frac{1}{T+1}} \prod_{\tau=0, \tau \neq t}^T \left(\frac{k I_{LM}^{\tau,t}(\sigma)}{I_{LM}^{\tau,0}(\sigma)} \right)^{\frac{1}{T+1}} \\
 &= k^{\frac{1}{T+1}} k^{\frac{T}{T+1}} \left(\frac{I_{LM}^{t,t}(\sigma)}{I_{LM}^{t,0}(\sigma)} \right)^{\frac{1}{T+1}} \prod_{\tau=0, \tau \neq t}^T \left(\frac{I_{LM}^{\tau,t}(\sigma)}{I_{LM}^{\tau,0}(\sigma)} \right)^{\frac{1}{T+1}} \\
 &= k \prod_{\tau=0}^T \left(\frac{I_{LM}^{\tau,t}(\sigma)}{I_{LM}^{\tau,0}(\sigma)} \right)^{\frac{1}{T+1}} = k I_{GEKS-LM}^{0,t}(\sigma),
 \end{aligned}$$

pasinaudojus tuo, jog

$$\begin{aligned}
 \prod_{\tau=0, \tau \neq t}^T \left(\frac{\tilde{I}_{LM}^{\tau,t}(\sigma)}{\tilde{I}_{LM}^{\tau,0}(\sigma)} \right)^{\frac{1}{T+1}} &= \prod_{\tau=0, \tau \neq t}^T \left(\frac{\left(\sum_{i \in G_{\tau,t}} s_i^{\tau} \left(\frac{kp_i^t}{p_i^t} \right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}}{\left(\sum_{i \in G_{\tau,t}} s_i^{\tau} \left(\frac{p_i^0}{p_i^t} \right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}} \right)^{\frac{1}{T+1}} \\
 &= k^{\frac{T}{T+1}} \prod_{\tau=0, \tau \neq t}^T \left(\frac{\left(\sum_{i \in G_{\tau,t}} s_i^{\tau} \left(\frac{p_i^t}{p_i^t} \right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}}{\left(\sum_{i \in G_{\tau,t}} s_i^{\tau} \left(\frac{p_i^0}{p_i^t} \right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}} \right)^{\frac{1}{T+1}} \\
 &= k^{\frac{T}{T+1}} \prod_{\tau=0, \tau \neq t}^T \left(\frac{I_{LM}^{\tau,t}(\sigma)}{I_{LM}^{\tau,0}(\sigma)} \right)^{\frac{1}{T+1}},
 \end{aligned}$$

bei

$$\left(\frac{I_{LM}^{t,t}(\sigma)}{I_{LM}^{t,0}(\sigma)} \right)^{\frac{1}{T+1}} \prod_{\tau=0, \tau \neq t}^T \left(\frac{I_{LM}^{\tau,t}(\sigma)}{I_{LM}^{\tau,0}(\sigma)} \right)^{\frac{1}{T+1}} = \prod_{\tau=0}^T \left(\frac{I_{LM}^{\tau,t}(\sigma)}{I_{LM}^{\tau,0}(\sigma)} \right)^{\frac{1}{T+1}},$$

nes pastaroji formulė yra tik bendros sandaugos išskaidymas į vieno nario sandaugą su likusių narių sandauga. Vadinasi, GEKS–LM kainų indeksas tenkina kainų homogeniškumo savybę.

- **Kiekių homogeniškumas**

Jrodant šią savybę, reikia parodyti, jog bet kurio periodo m kiekių perskaičiavimas neturi įtakos kainų indeksui, t. y., bet kuriam $k > 0$ galioja lygybė $I^{0,t}(P, q^0, \dots, kq^m, \dots, q^t) = I^{0,t}(P, q^0, \dots, q^m, \dots, q^t)$.

Pažymėkime $\tilde{I}^{0,t} = I^{0,t}(P, q^0, \dots, kq^m, \dots, q^t)$. Kaip ir kainų homogeniškumo atveju, išskirkime GEKS–LM kainų indekso sandaugą į nario, kai $\tau = m$, sandaugą su likusia sandaugos dalimi. Tuomet turime, jog

$$\begin{aligned} I_{GEKS-LM}^{0,t}(P, q^0, \dots, kq^m, \dots, q^t) &= \left(\frac{\tilde{I}_{LM}^{m,t}(\sigma)}{\tilde{I}_{LM}^{m,0}(\sigma)} \right)^{\frac{1}{T+1}} \prod_{\tau=0, \tau \neq m}^T \left(\frac{\tilde{I}_{LM}^{\tau,t}(\sigma)}{\tilde{I}_{LM}^{\tau,0}(\sigma)} \right)^{\frac{1}{T+1}} \\ &= \prod_{\tau=0}^T \left(\frac{I_{LM}^{\tau,t}(\sigma)}{I_{LM}^{\tau,0}(\sigma)} \right)^{\frac{1}{T+1}} = I_{GEKS-LM}^{0,t}(P, q^0, \dots, q^m, \dots, q^t). \end{aligned}$$

Kadangi kiekių perskaičiavimas atliekamas tik momentu m , tuomet likusi sandaugos dalis, kai $\tau \neq m$, dėl atliekamo perskaičiavimo nepakinta, t. y.

$$\prod_{\tau=0, \tau \neq m}^T \left(\frac{\tilde{I}_{LM}^{\tau,t}(\sigma)}{\tilde{I}_{LM}^{\tau,0}(\sigma)} \right)^{\frac{1}{T+1}} = \prod_{\tau=0, \tau \neq m}^T \left(\frac{I_{LM}^{\tau,t}(\sigma)}{I_{LM}^{\tau,0}(\sigma)} \right)^{\frac{1}{T+1}}.$$

Lieka patikrinti tik iš sandaugos išskirtą narį, kai $\tau = m$, tuomet,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\tilde{I}_{LM}^{m,t}(\sigma)}{\tilde{I}_{LM}^{m,0}(\sigma)} \right)^{\frac{1}{T+1}} &= \left(\frac{\left(\sum_{i \in G_{\tau,t}} \tilde{s}_i^m \left(\frac{p_i^t}{p_i^m} \right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}}{\left(\sum_{i \in G_{\tau,t}} \tilde{s}_i^m \left(\frac{p_i^0}{p_i^m} \right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}} \right)^{\frac{1}{T+1}} \\ &= \left(\frac{\left(\sum_{i \in G_{\tau,t}} s_i^m \left(\frac{p_i^t}{p_i^m} \right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}}{\left(\sum_{i \in G_{\tau,t}} s_i^m \left(\frac{p_i^0}{p_i^m} \right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}} \right)^{\frac{1}{T+1}} = \left(\frac{I_{LM}^{m,t}(\sigma)}{I_{LM}^{m,0}(\sigma)} \right)^{\frac{1}{T+1}}, \end{aligned}$$

nes

$$\tilde{s}_i^m = \frac{p_i^m \tilde{q}_i^m}{\sum_{j \in G_{0,m}} p_j^m \tilde{q}_j^m} = \frac{p_i^m k q_i^m}{\sum_{j \in G_{0,m}} p_j^m k q_j^m} = \frac{p_i^m q_i^m}{\sum_{j \in G_{0,m}} p_j^m q_j^m} = s_i^m.$$

Vadinasi, GEKS–LM kainų indeksas tenkina kiekių homogeniškumo savybę. Įrodžius šią savybę, pabaigiamas GEKS–LM kainų indekso aksiomatinių savybių teoremos įrodymas.

□

4. Praktinė dalis

Ši darbo dalis skirta praktiškai išnagrinėti ir išanalizuoti kainų indeksų teoriją. Duomenų analizei bei kainų indeksų skaičiavimams naudojami Valstybės duomenų agentūros pateikti Lietuvos prekybos tinklų kvitų duomenys, kurių struktūra pateikta šio darbo priede (žr. Priedas 1). Praktinėje dalyje analizuojami duomenys yra konfidencialūs, tačiau bet kokie konkretūs identifikaciniai požymiai ar kiti jautrūs duomenys nėra atskleidžiami. Duomenų saugumui užtikrinti konkretūs prekybos tinklai duomenų struktūrose atvaizduojami skaičiaus identifikatoriumi, pvz. prekybos centras – 1, 2 ir t. t. Konkrečių produktų pavadinimai bei prekės identifikacinis numeris (kitaip vadinamas prekės brūkšninio kodu) yra viešai prieinama informacija, tad naudojamų duomenų pavyzdžiuose bus pateikiami. Darbui naudojami agreguoti pardavimų duomenys, o duomenų analizei naudojama R programavimo kalba naudojant įvairius grafikos ir duomenų apdorojimo paketus, bei kainų indeksų skaičiavimui R paketą *PriceIndices* [2]. Pagrindiniai praktinės dalies uždaviniai:

- Parengti duomenis kainų indeksų skaičiavimams;
- Atlikti skirtingų klasių kainų indeksų skaičiavimus bei tarpusavio analizę;
- Atlikti kainų indeksų bei jų agregavimo schemų modifikacijas bei įtakos rodikliams analizę.

4.1. Duomenų apžvalga

Praktiniams kainų indeksų skaičiavimams naudojami trijų maisto produktų grupių pardavimų duomenų rinkiniai. Duomenis sudaro COICOP 2018 klasifikatoriaus produktai: 01.1.1.3.1 Duona, 01.1.4.2 Nugriebtas pienas (toliau – pienas) bei 01.1.6.3.1 Obuoliai. Prekybos tinklų kvitų duomenys, kurių struktūra pateikta priede, buvo agreguojami ir transformuojami, jog būtų pateikiama tik reikalinga informacija kainų indeksams skaičiuoti. Kiekvieno produkto duomenis sudaro du pardavimų duomenų rinkiniai. Pirmasis rinkinys – imties produktų pardavimai. Šį rinkinį sudaro produktai, kurie galėtų būti naudojami SVKI skaičiuoti pagal šio kainų indekso sudarymo metodiką bei stebimų produktų sąrašą. Kitas duomenų rinkinys – produktai, kurie buvo suklasifikuoti ieškant raktinių žodžių ar jų trumpinių produktų aprašymuose. Pavyzdžiui, duonos produktams naudoti raktiniai žodžiai – *duona*, *batonas*, *duon*, *baton* ir t. t., pieno produktams – *pienas*, *pien*, obuoliams – *obuol*, *obuoliai*. Antrasis duomenys rinkinys kiekvienu atveju yra didesnis, tiek unikalių produktų skaičiumi, tiek pardavimų apimtimi, todėl toliau pirmasis duomenų rinkinys vadinamas imtimi, o antrasis – visais tos produktų grupės pardavimais. Pirmąjį duomenį rinkinį kiekvienu atveju galima vadinti tiesiogine imtimi, nes visi pirmo rinkinio produktai yra antrojo duomenų rinkinio poaibis. Toliau pateiktoje 4 lentelėje galima matyti kiek kiekviename rinkinyje yra unikalių produktų bei konkretų rinkinį sudaro pardavimų eilučių.

4 lentelė. *Imties ir visų pardavimų duomenų statistika.*

Kategorija	Imties pardavimai		Visi pardavimai	
	Produktų skaičius	Pardavimų skaičius	Produktų skaičius	Pardavimų skaičius
01.1.1.3.1 Duona	383	13 553	844	26 702
01.1.4.2 Pienas	39	1 353	128	4 048
01.1.6.3.1 Obuoliai	53	1 170	57	1 193

Nagrinėjamų duomenų laikotarpis apima visus produktų pardavimus nuo 2023 metų sausio mėnesio iki 2025 metų lapkričio mėnesio imtinai. Toliau šis laikotarpis vadinamas tiriamuoju laikotarpiu. Kainų indeksų

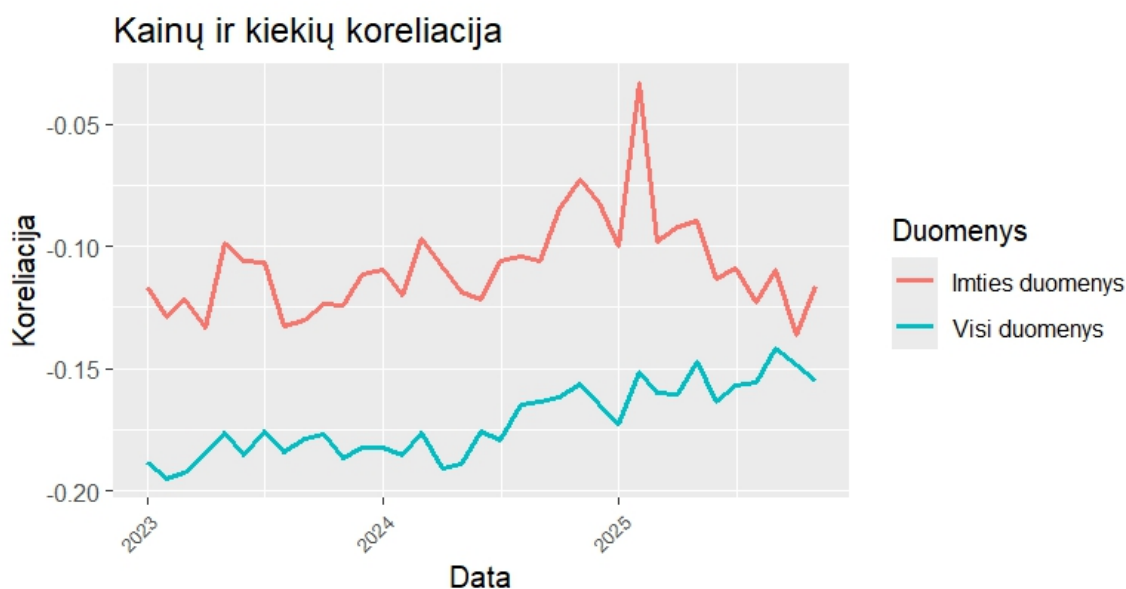
skaičiavimams pardavimai buvo suagreguoti iš pradinių prekybos tinklų kvitų duomenų į dieninius produktų pardavimus, skaičiuojant jų parduotą kiekį bei vidutinę dienos kainą, o vėliau naudojant svertinį aritmetinį vidurkį buvo skaičiuojamos vidutinės mėnesio konkrečių produktų kainos, kurios buvo naudojamos kainų indeksų skaičiavimo formulėse.

Kainų indeksų skaičiavimo funkcijoms R *PriceIndices* pakete yra svarbu duomenis parengti pagal funkcijose naudojamas struktūras. Pagrindiniai skaičiavimose naudojami kintamieji bei duomenų pavyzdys pateikiamas 5-oje lentelėje. Kintamasis *time* žymi laikotarpį, *prices* – vidutinę produkto mėnesinę kainą, *prodID* – produkto brūkšninį kodą, *quantities* – parduotą produkto kiekį, *description* – produkto aprašymą, o *retID* – prekybos tinklo kodą. Laikantis konfidencialumo prekybos tinklai buvo užkoduoti, todėl nurodomas prekybos tinklo numeris.

5 lentelė. Agreguotų duomenų, naudojamų kainų indeksų skaičiavimams, pavyzdys.

time	prices	quantities	prodID	description	retID
2023-01-01	1,4583740	1 845	4770777191152	BOČIŲ duona, 500g	5
2023-01-01	1,5351757	4 581	4770068196897	Juoda duona JORÉ, 290g	5
2023-01-01	1,3759312	6 427	4770163835882	AUTENTIŠKA visų grūdo dalių ruginė duona	3
2023-01-01	1,1459211	380	4771489192819	GURMANŲ duona su saulėgrąžomis	3
2023-01-01	1,5916543	4 177	4770163838128	Viso grūdo AGOTOS duona su rugiais	3
2023-01-01	1,1665076	985	4770217110309	Tamsi plikyta duona be pridėtinio cukraus	3

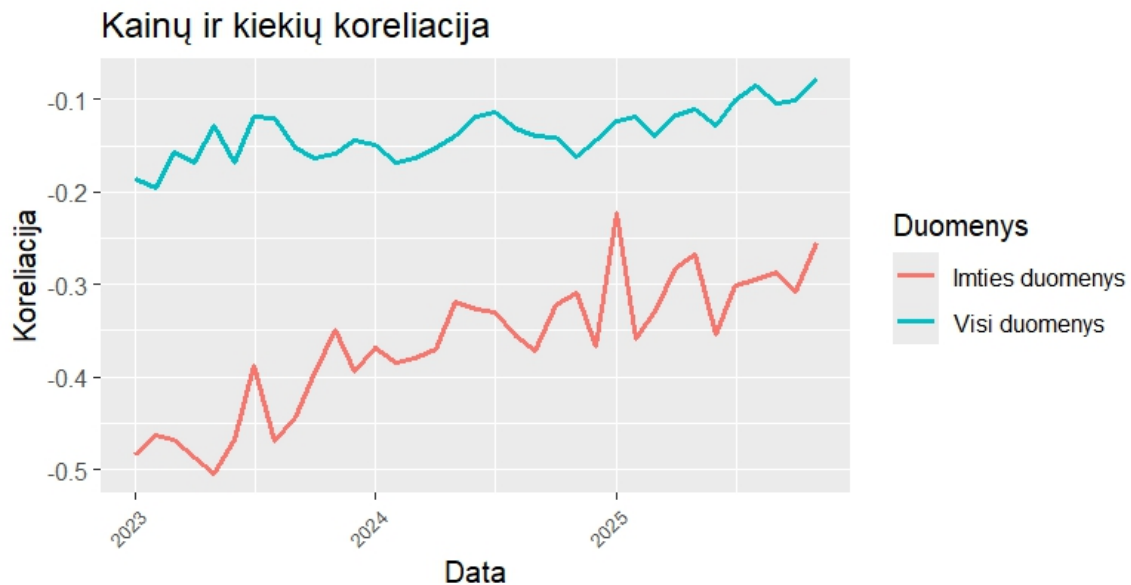
Panagrinėkime šių produktų kainų ir kiekio tiesinę koreliaciją. Remiantis ekonomikos teorija, vartotojai yra linkę pirkti daugiau, kai kaina mažesnė, bei pirkti mažiau, kai kaina didesnė – taip elgtųsi racionalūs vartotojai. Atsižvelgiant į tai, galima teigti, jog koreliacija tokiu atveju tarp parduotų produktų turi būti neigiama. Toliau pateiktuose grafikuose pateikiami nagrinėjamų produktų kainų ir kiekių koreliacijų kitimai.



1 pav. Duonos produktų kainų ir kiekių koreliacijos kitimas.

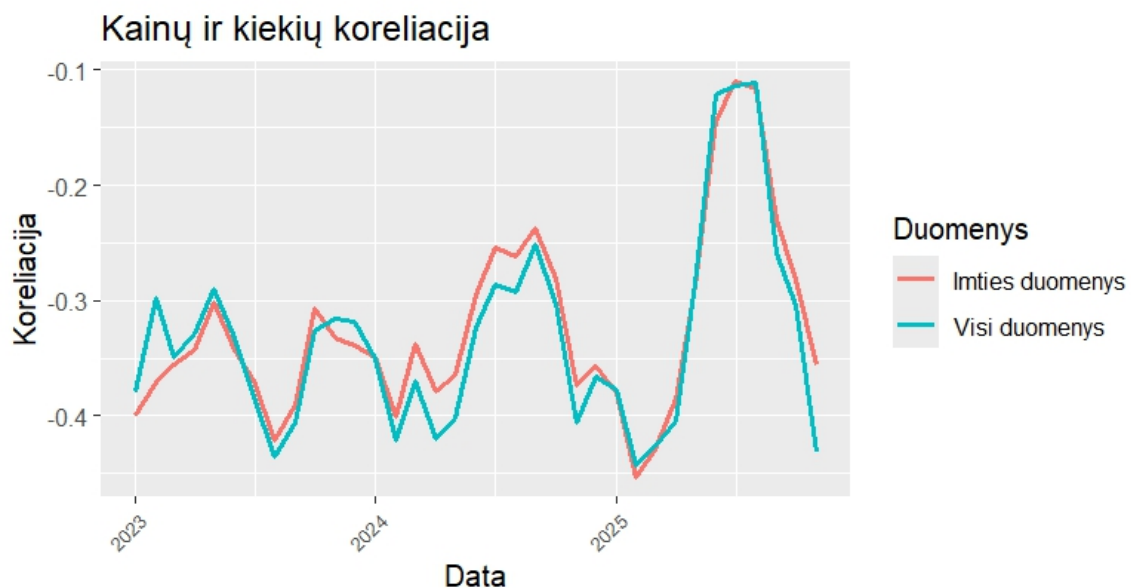
Žvelgiant į pateiktus grafikus matyti, jog kiekvienu atveju, nepriklausomai nuo produkto grupės bei duomenų rinkinio, kainų ir kiekio koreliacija yra neigiama, todėl galima teigti, jog vartotojai Lietuvoje elgiasi racionaliai, t. y. atitinka tradicinę vartojimo teoriją. Duonos imties produktų koreliacija šiek tiek mažesnė už visų duonos produktų (1 pav.), tačiau išlieka neigiama visą laikotarpį. Kadangi visų produktų pardavimuose yra dau-

giau prekių, konkrečių prekių pakeičiamumas yra didesnis, todėl, lyginant absoliučiuosius koreliacijos dydžius, stebima santykinai didesnė koreliacija. Pieno produktų koreliacijos kitimas pateiktas 2 pav., kuriame galima įžvelgti, jog koreliacija tiek imties, tiek visų produktų atžvilgiu taip pat yra neigiama. Be to, tiriamuoju laikotarpiu stebima koreliacijos mažėjimo tendencija, lyginant absoliučiąsias vertes. Skirtingai nei duonos produktų atveju, pieno produktų visų produktų koreliacija yra didesnė nei imties koreliacija. Galima spėti, jog pieno imties produktai yra labiau pakeičiami, t. y. vartotojai perka daugiau produktų su nuolaidomis nei produktų reguliariomis kainomis. Tai paaiškina neigiamą koreliaciją – ryšys tarp kainos ir produktų kiekio yra priešingas.



2 pav. Pieno produktų kainų ir kiekių koreliacijos kitimas.

Taip pat panagrinėkime obuolių kainų ir kiekių tiesinę koreliaciją. Žvelgiant į 3 paveikslėlį, galima matyti, kad tiek imties, tiek visų produktų koreliacijos kitimas laike yra labai panašus. Visą tiriamąjį laikotarpį koreliacija buvo neigiama, o jos kitimas – nepastovus; galima įžvelgti sezoninius svyravimus. 2025 metais matomas ryškus sezono efektas: metų pradžioje kainų ir kiekio koreliacija buvo apie $-0,4$, iki metų vidurio didėjo iki $-0,1$, tačiau iki lapkričio mėnesio pabaigos vėl mažėjo iki $-0,35$ imties ir $-0,4$ visų produktų duomenų atžvilgiu.



3 pav. Obuolių kainų ir kiekių koreliacijos kitimas.

Apibendrinant pateiktus produktų kainų ir kiekių koreliacijų kitimo grafikus, galima teigti, kad Lietuvos vartotojų įpročiai priklauso nuo produktų kainų kaitos. Vartotojai perka daugiau produktų, kai taikomos nuolaidos, ir mažiau, kai kainos yra reguliarios. Tai atspindi visų nagrinėjamų produktų neigiamoje kainų ir kiekių koreliacijoje, kuri visą tiriamąjį laikotarpį, nors ir besikeičia laike, išlieka neigiama.

4.2. Kainų ir kiekio indikatoriai

Išanalizavę nagrinėjamų produktų vartotojų pirkimo įpročius, apžvelkime šiuos duomenis naudodami kainų ir kiekio indikatorius. Pagrindinis šių indikatorių tikslas — parodyti, kaip kinta produktų pardavimų vertė. Be to, indikatorių pagalba bendros pardavimo vertės pokytį galima išskaidyti į kainų ir kiekių verčių pasikeitimus. Toliau praktiškai skaičiuojami teorinėje dalyje nagrinėti Bennet ir Montgomery vertės, kainų ir kiekių indikatoriai.

Iš pradžių apžvelkime pagrindinius rodiklius skaitine išraiška. Vartotojų išlaidos ir kiekiai duonos bei pieno produktams, taip pat obuoliams pagal metus pateikti 6-oje lentelėje. Svarbu paminėti, kad 2025 metų duomenys apskaičiuoti iki lapkričio mėnesio pabaigos.

6 lentelė. Metiniai produktų apyvartų bei parduotų kiekių duomenys.

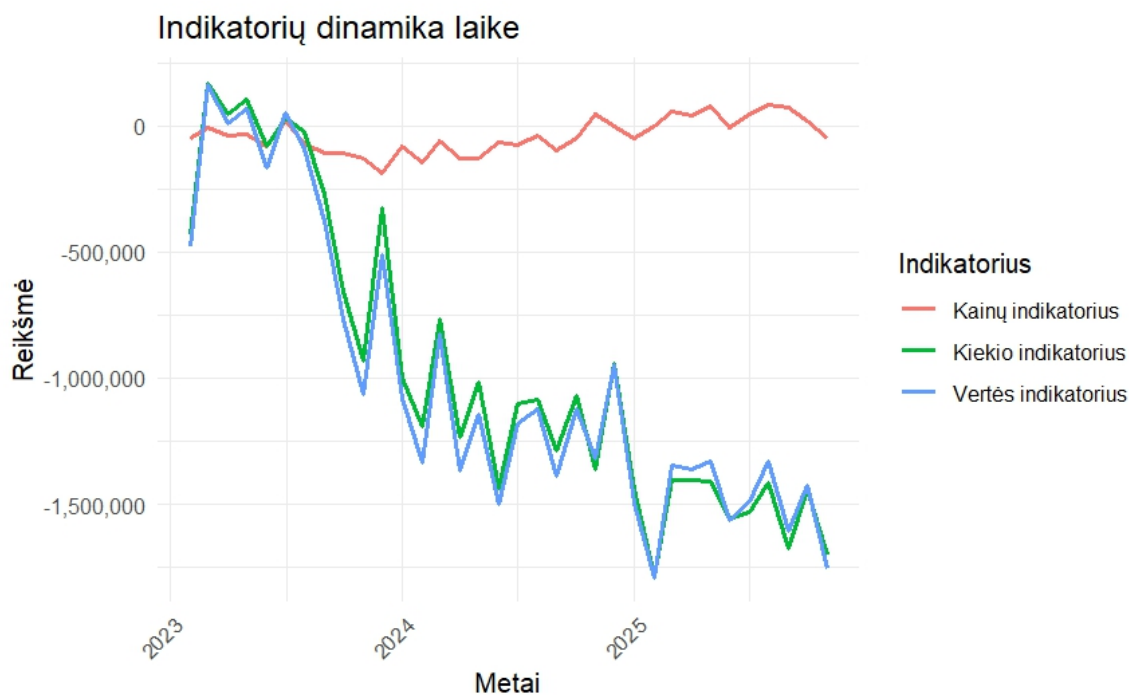
	Imties prekių pardavimai		Visų prekių pardavimai	
	Apyvarta	Kiekis	Apyvarta	Kiekis
01.1.1.3.1 Duona				
2023	67 974 812 €	52 712 793 vnt	143 228 997 €	115 840 073 vnt
2024	56 824 755 €	44 436 529 vnt	121 549 633 €	98 585 749 vnt
2025	48 874 980 €	37 695 597 vnt	110 967 646 €	87 246 394 vnt
01.1.4.2 Pienas				
2023	16 650 221 €	16 750 811 l	69 640 723 €	56 705 683 l
2024	13 696 570 €	14 150 503 l	59 920 424 €	49 943 616 l
2025	11 831 614 €	11 722 669 l	56 852 706 €	45 820 184 l
01.1.6.3.1 Obuoliai				
2023	8 903 411 €	10 736 952 kg	12 690 601 €	16 446 098 kg
2024	9 045 843 €	8 494 394 kg	11 748 385 €	11 971 296 kg
2025	11 104 142 €	8 632 783 kg	14 901 845 €	12 179 044 kg

Analizuojant lentelėje pateiktus skaičius, galima matyti, kad duonos produktų pardavimų apyvarta ir parduoti kiekiai, tiek imties, tiek visų produktų pardavimų atvejais, mažėja, nepaisant to, jog 2025 metų duomenys apima tik laikotarpį iki lapkričio mėnesio pabaigos. Identišką tendenciją galima įžvelgti ir pieno produktams. Obuolių pardavimai imties produktų atveju didėja, tačiau visų prekių pardavimų atveju apyvarta nėra pastovi: 2024 metais ji sumažėjo lyginant su 2023 metais, o 2025 metais jau buvo didesnė nei 2024 metais. Obuolių kiekis, tiek imties, tiek visų produktų atžvilgiu, trijų metų laikotarpiu buvo mažiausias 2024 metais, o 2025 metais pardavimo kiekis jau didesnis nei 2024 metais.

Pateiktos tendencijos, naudojant apibendrintus skaičius, iš dalies gali būti klaidingos, nes bendros prekių apyvartų tendencijos priklauso ne tik nuo parduotų kiekių, bet ir nuo produktų kainų kaitos, o šių duomenų lentelėje nematome. Dažnai galima pastebėti, klaidingai sakant, jog sumažėjo tam tikrų produktų apyvartos; tokiu atveju gali kilti mintis, jog sumažėjo produktų kainos, tačiau taip gali nebūti, nes kainos gali būti didėjančios, o sumažėjusią apyvartą galima pagrįsti tik sumažėjusiais produktų vartojimo kiekiais. Šiuo atveju įvertinti pagrindines produktų apyvartos pasikeitimo priežastis padeda kainų ir kiekių indikatoriai, kurie parodo, kokią

įtaką bendram apyvartos pasikeitimui turėjo pasikeitusios kainos, o kokią — padidėję ar sumažėję pardavimo kiekiai. Toliau, kiekvienai produktų grupei, apskaičiuotos Bennet ir Montgomery vertės, kainų ir kiekių indikatoriai. Kadangi Montgomery indikatoriai yra jautresni pasikeitimams, nes naudoja logaritminį vidurkį, toliau panagrinėkime juos, o Bennet indikatorių kitimo dinamikos grafikus tiriamuoju laikotarpiu galima rasti šio darbo priede.

Toliau 4 ir 5 paveikslėliuose pateikti Montgomery indikatoriai duonos imties bei visų produktų atvejais. Lyginant Montgomery vertės indikatorių kitimą tiek duonos produktų imties, tiek visų produktų atvejais, matyti, jog nuo 2023 metų pradžios (pirmosios vertės lygina produktų apyvartą 2023 metų vasario mėnesio pasikeitimą, lyginant su 2023 metų sausio mėnesio apyvartos duomenimis) produktų apyvarta imties atveju didėja tik kelis mėnesius, o visų produktų atžvilgiu – iki metų vidurio, tačiau vėliau, tiek vienu, tiek kitu atveju, apyvarta turi mažėjimo tendenciją iki 2025 metų lapkričio mėnesio. Taip pat galima matyti, jog pagrindinė duonos produktų apyvartos mažėjimo priežastis yra beveik identiški mažėjantys parduoto kiekio rodikliai. Bendrai apyvartai abiem atvejais kainų pasikeitimas turi nedidelę įtaką, lyginant su kiekio pasikeitimu. Kainų indikatoriai stebimuoju laikotarpiu išlieka labai panašūs ir nežymiai neigiami, tačiau 2025 metais tampa teigiami, t. y. apyvartos didėjimui nedidelę įtaką turi kainų didėjimas.

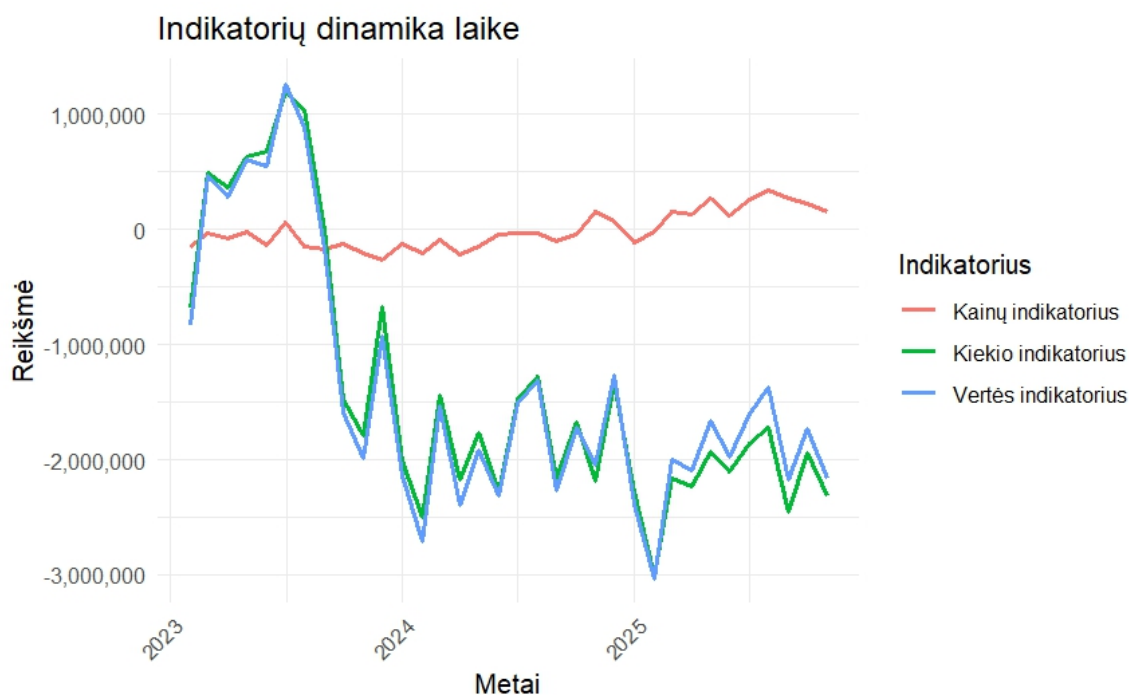


4 pav. Duonos imties produktų Montgomery indikatorių kitimas.

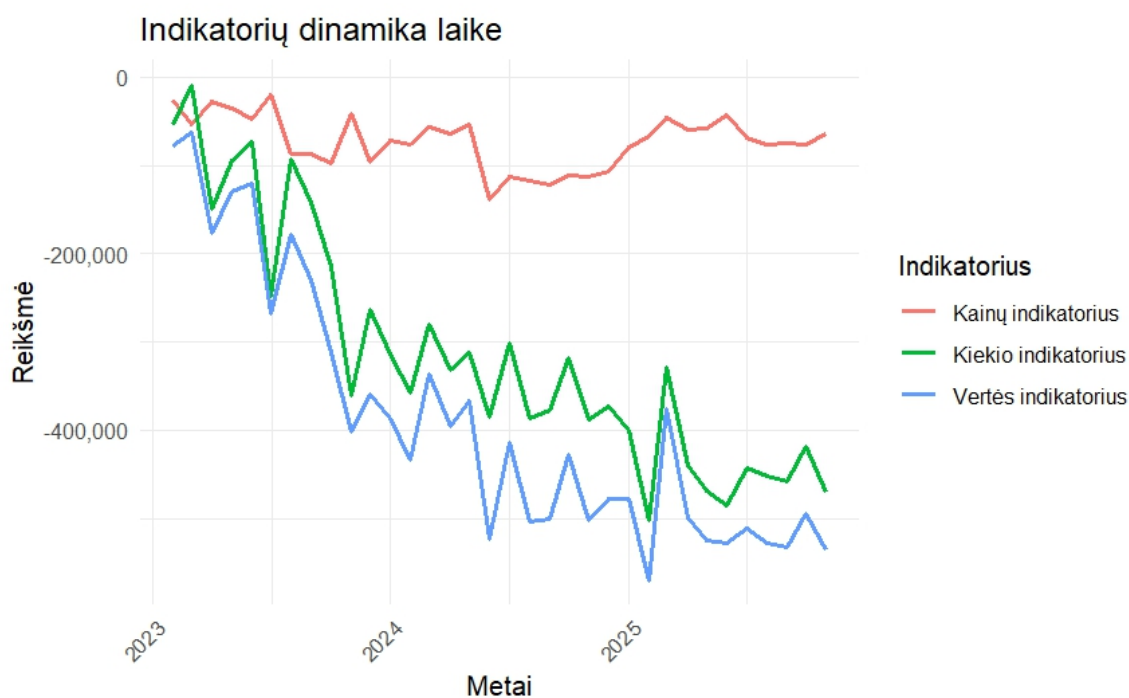
Toliau nagrinėkime pieno produktų Montgomery vertės, kainų ir kiekio indikatorių kitimus, pateiktus 6 ir 7 paveikslėliuose. Šiuo atveju imties ir visų produktų rodiklių tendencijos iš dalies skiriasi. Žvelgiant į pieno imties produktų indikatorių kitimą, aiškiai matyti bendros apyvartos, kuriai didžiausią įtaką turi parduoto kiekio mažėjimas, mažėjimo tendenciją. Bendros apyvartos mažėjimui įtakos turi ir kainų sumažėjimas, kuris stebimas visą laikotarpį.

Visų pieno produktų atžvilgiu tendencija kiek kitokia. Laikotarpio pradžioje, t. y. pirmaisiais 2023 metų mėnesiais iki metų vidurio, produktų apyvarta didėjo, kurią lėmė padidėjusios pardavimų apimtys, tačiau vėliau, kaip ir imties atveju, stebimas apyvartos sumažėjimas dėl sumažėjusių produktų pardavimų kiekių. 2024 ir 2025 metų eigoje sumažėjusi apyvarta svyruoja apie vidurkį ir neparodo žymesnės mažėjimo ar didėjimo tendencijos. Bendros apyvartos pasikeitimui kainų įtaka buvo neigiama, tačiau laikotarpio kainų indikatoriaus

reikšmė tapo teigiama, kas, tikėtina, reiškia, jog pagal stebimą tendenciją ateityje kainų didėjimas gali tapti pagrindiniu faktoriumi, lemiančiu apyvartos rodiklio didėjimą.



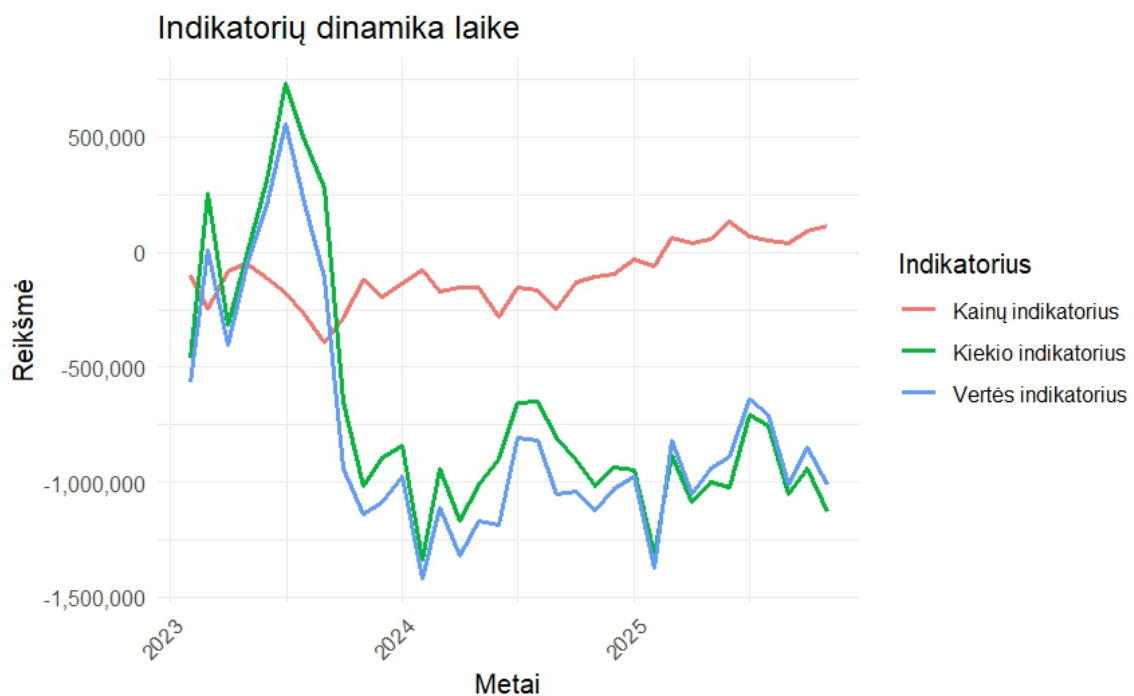
5 pav. Visų duonos produktų Montgomery indikatorių kitimas.



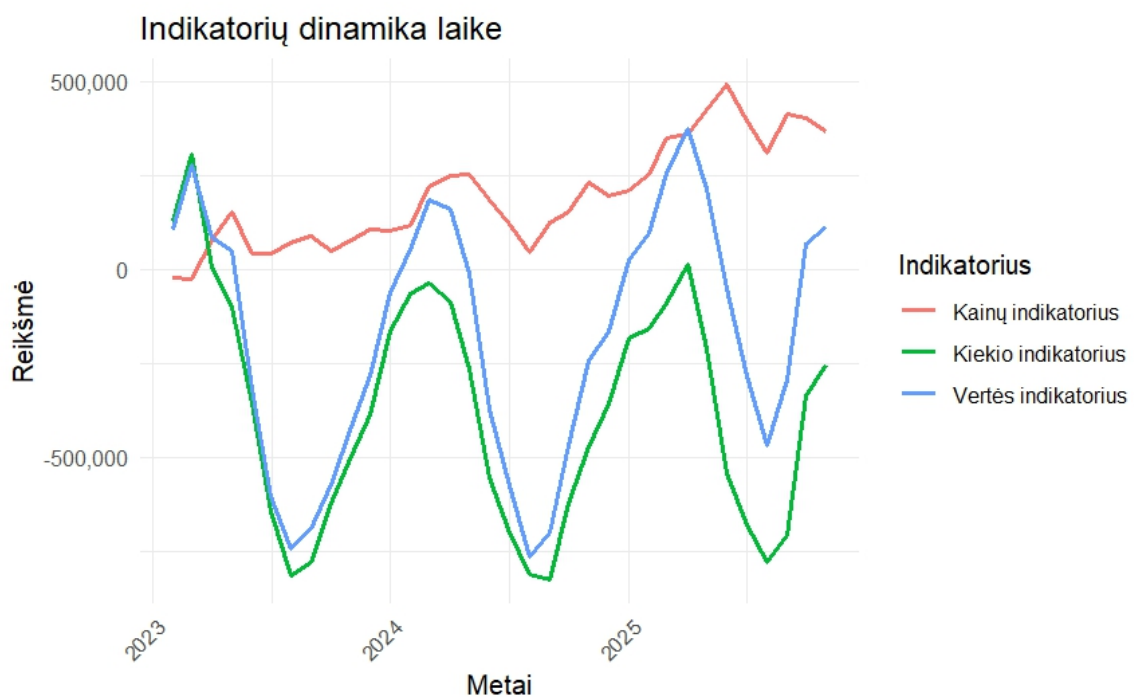
6 pav. Pieno imties produktų Montgomery indikatorių kitimas.

Liko panagrinėti obuolių Montgomery indikatorius, kurių kitimas pateikiamas 8 ir 9 paveikslėliuose. Montgomery indikatorių kitimas yra labai panašus tiek imties, tiek visų pardavimų atžvilgiu. Kadangi obuoliai yra sezoninis vaisius, nieko neįprasto, jog grafikuose matyti aiškūs sezoniskumo laikotarpiai, kurių metu apyvartos kaita nulemta sumažėjusiais ar padidėjusiais obuolių pardavimo kiekiais. Abiem atvejais sezonisku-

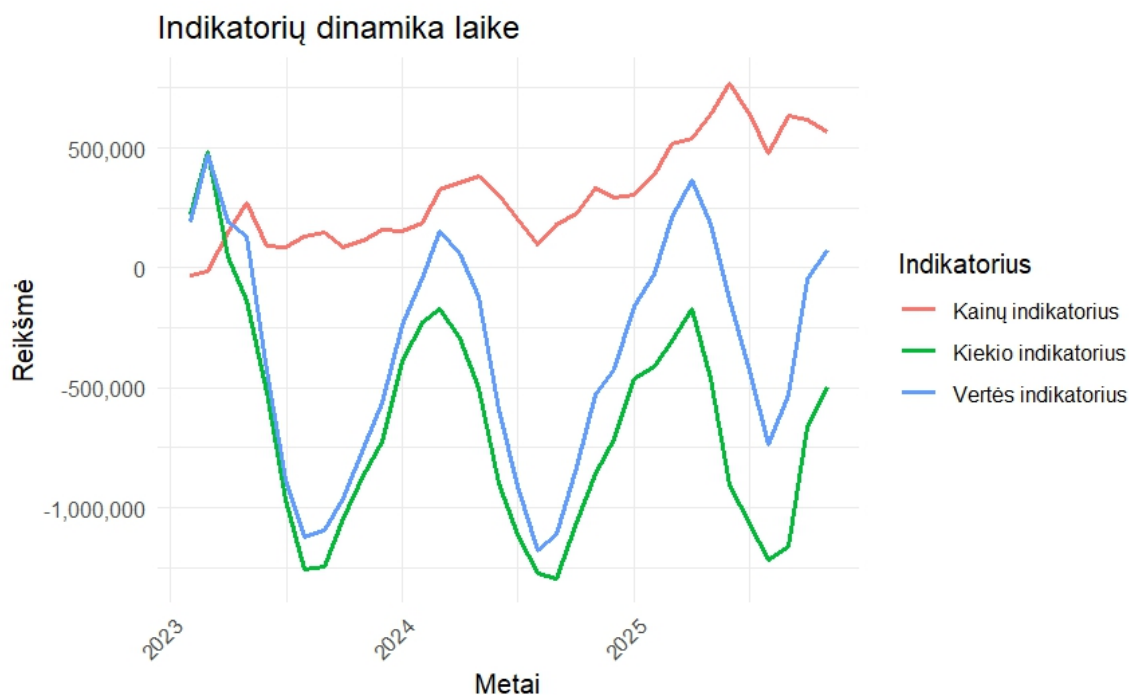
mo įtakai prisideda ir didėjančių kainų įtaka. Tai galima įžvelgti iš Montgomery kainų indikatorius kitimo, kuris nuo laikotarpio pradžios turi aiškią didėjimo tendenciją, ir todėl tarp vertės ir kiekio indikatorių grafikų laikui bėgant atsiranda didesnis skirtumas.



7 pav. Visų pieno produktų Montgomery indikatorių kitimas.



8 pav. Obuolių imties Montgomery indikatorių kitimas.



9 pav. Visų obuolių Montgomery indikatorių kitimas.

Apibendrinant Montgomery indikatorių rezultatus, galima teigti, jog indikatoriai aiškiai paaiškina, dėl kurio faktoriaus – kainų ar kiekio – pasikeičia apyvarta. Nors didesnę įtaką turi pardudamo kiekio pasikeitimas, kuris dažnai kinta beveik identišškai bendros vertės kitimui, kainų kitimo tendencija gali būti visiškai priešinga – tiek didėti, mažėti, ar likti pastovi. Kainų tendencijai įvertinti būtent ir naudojami kainų indeksai, kurie leidžia, nepriklausomai nuo apyvartos ar pardavimų kiekių kitimo tendencijų, įvertinti grynosios produkto pardavimo kainos kaitą; šių skaičiavimui pardavimų kiekiai dažniausiai naudojami tik įvertinti agreguotus rodiklius, kai vertinamos produktų grupės. Toliau būtent nagrinėsime kainų indeksų sudarymo metodus bei sąryšius, tačiau prieš skaičiuojant kainų indeksus apžvelkime, kokias išskirtis gali turėti pardavimų duomenys, kad skaičiuojami rodikliai būtų tikslesni.

4.3. Duomenų išskirčių analizė

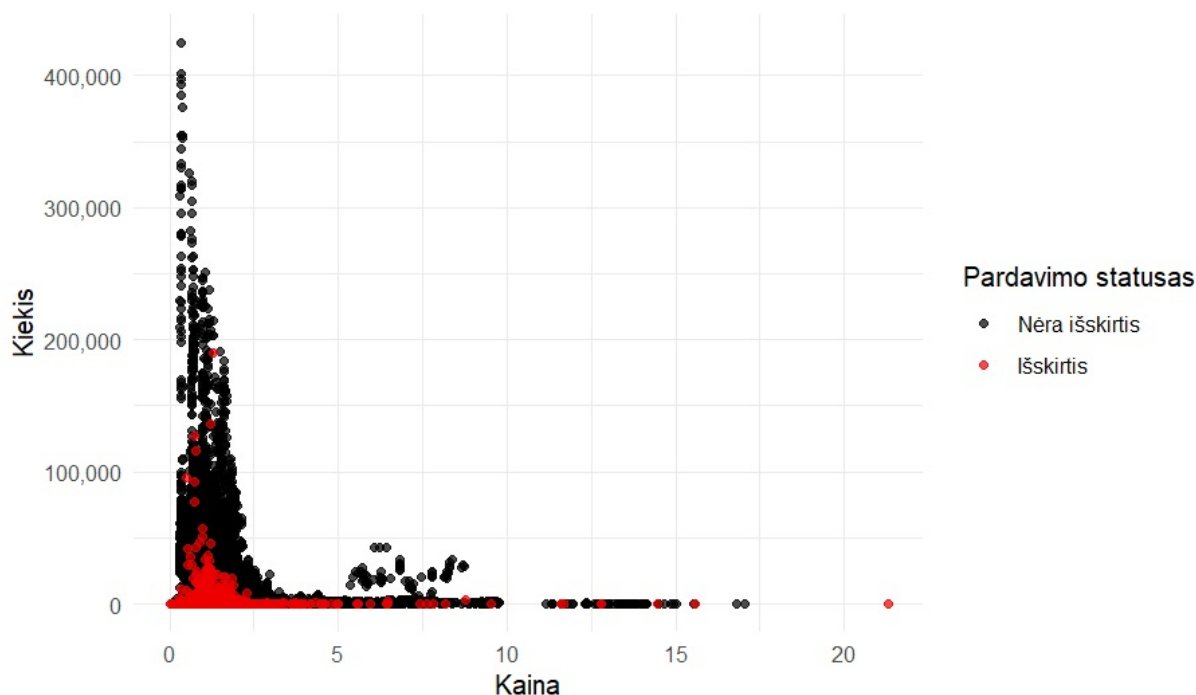
Šiame skyriuje susipažinkime su duomenimis iš arčiau. Anksčiau buvo suskaičiuoti bendri rodikliai apie kainų ir kiekių priklausomybę, tačiau dabar analizuokime visus įmanomus pardavimų stebėjimus. Dažnu atveju praktikoje pasitaiko duomenų, kuriuos laikome išskirtiniais, t. y. duomenų stebėjimais, kurie išsiskiria savo reikšme iš visų duomenų arba jų tendencijų. Tai gali būti nekorektiškai pateikti arba visiškai nelogiški duomenys, taip pat tokie, kurie turi didelę įtaką, kad skaičiuojamas rodiklis būtų visiškai iškraipytas.

Duomenų kokybei užtikrinti nagrinėkime tris išskirčių identifikavimo ir šalinimo algoritmus:

1. Ekstremalių kainų identifikavimas ir šalinimas – po 1 procentą mažiausių bei didžiausių kainų;
2. Ekstremalių kainų filtras, kuris pašalina produktų kainas, kurios yra mažesnės už vidutinę kainą 50 procentų arba didesnės nei du kartai;
3. Ekstremalių kainų bei mažų pardavimų kainų filtrų junginys. Mažų kainų filtras pašalina pardavimus, kurie išsiskiria iš bendrų individualių pardavimų kiekių tendencijos, arba produktas neturi pardavimų – pardavimų kiekis smarkiai sumažėja arba produktas yra nebeparduodamas.

Praktinei šių algoritmų analizei toliau naudojami duonos produktų pardavimų duomenys, nes šis duomenų rinkinys pardavimų apimtimi yra didžiausias, bei obuolių pardavimai, nes obuoliai yra sezoninė prekė ir pardavimų duomenys gali turėti nemažai išskirčių. Toliau 10, 11 ir 12 paveikslėliuose pateikiami duonos pardavimų duomenys bei atvaizduojami išsiskiriantys pardavimai, taikant aukščiau pateiktus išskirčių algoritmus.

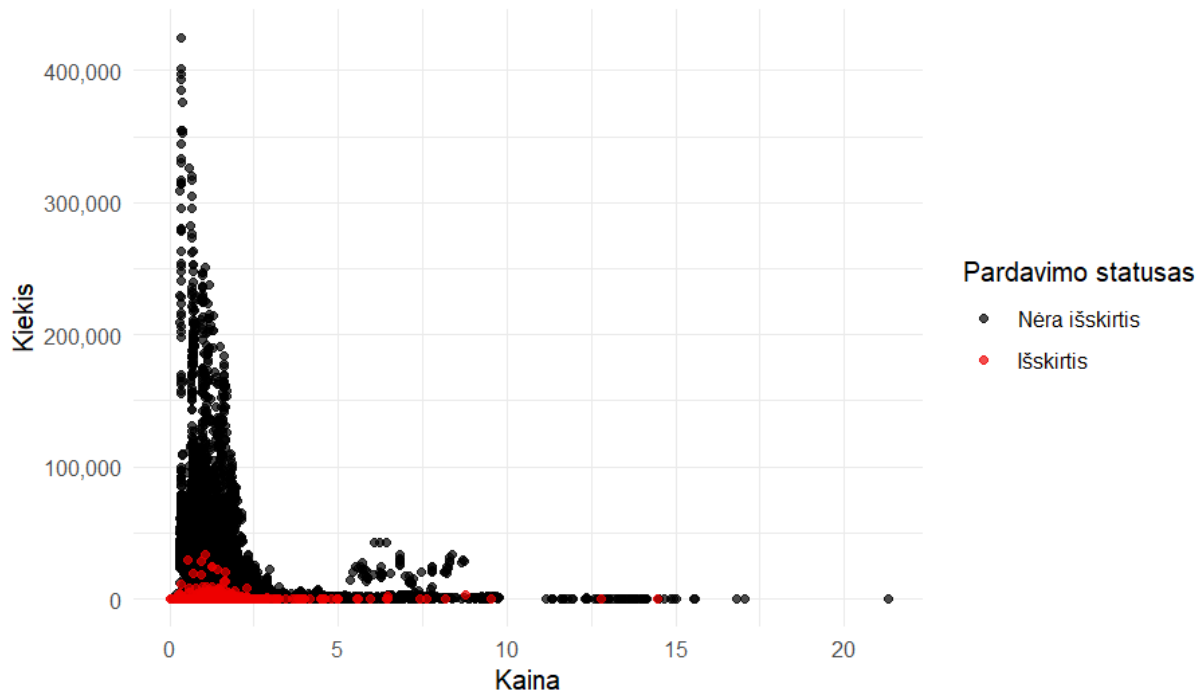
Žvelgiant į pateiktus duonos pardavimų grafikus, galima matyti, jog didžioji dauguma pardavimų yra tokie, kurių produktų kainos yra iki 2,5–3 eurų, o šių produktų pardavimų kiekis yra didžiausias. Taip pat kiek didesnis parduotas kiekis būdingas produktams, kurių kainos yra tarp 5 ir 10 eurų. Taikant išskirčių filtrą, kuris pašalina po 1 procentą mažiausių ir didžiausių pardavimų, matyti, jog didžioji dalis išsiskiriančių pardavimų yra parduodami nedideliais kiekiais bei kainuoja iki 5 eurų. Taikant šį algoritmą, priešingai nei ekstremalių kainų filtrą, kuris pašalina produktus, kurių kaina yra mažesnė perpus arba didesnė daugiau nei du kartai, pašalinama ir pardavimų, kurių parduotas kiekis yra didesnis nei 50 000 vienetų; t. y. taikant minėtąjį algoritmą, kuris naudoja ne procentilius, tokie pardavimai nėra pašalinami. Taikant ne tik ekstremalių kainų, bet ir mažų pardavimų filtrą, išskirtims yra priskiriami beveik visi pardavimai, kurių kiekis, lyginant su bendru parduotų produktų kiekiu, yra sąlyginai labai mažas. Šio algoritmo rezultatai (12 paveikslėlyje) indikuoja, jog šiuo atveju, taikant abu algoritmus vienu metu, išskirtims priskiriami ir pardavimai, kurių kaina yra labai maža, t. y. artima nuliui. Taigi, dauguma išskirčių yra prie koordinatų pradžios taško.



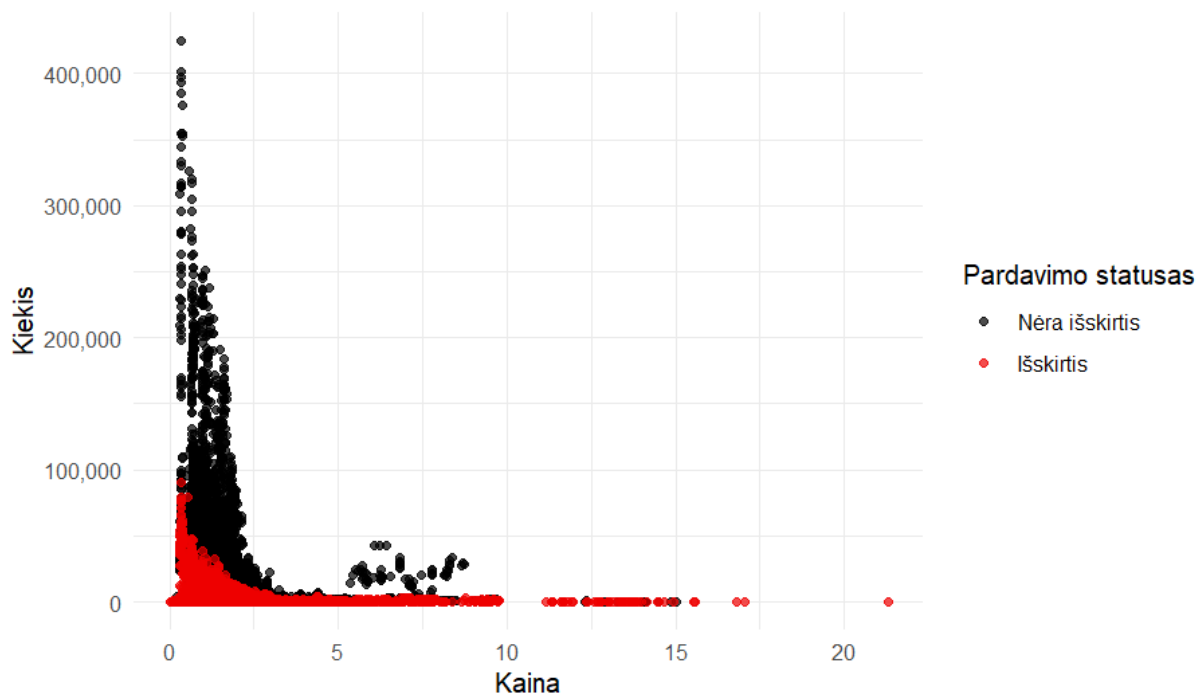
10 pav. Duonos produktų pardavimų išskirtys, naudojant ekstremalių kainų filtrą, kuris pašalina po 1 procentą mažiausių ir didžiausių kainų.

Taip pat apžvelkime obuolių pardavimų duomenis, kurie vaizduojami 13, 14 ir 15 paveikslėliuose. Skirtinai nei duonos produktų pardavimų grafikuose, obuolių pardavimų sklaida yra didesnė; nėra didelės pardavimų koncentracijos viename kainos intervale, kuriame sukoncentruota dauguma pardavimų. Taikant ekstremalių kainų algoritmą, kuris išskirtims priskiria po 1 procentą mažiausių bei didžiausių pardavimo kainų, išsiskiriantys pardavimai pasiskirstę beveik visame vaizduojamų pardavimų grafike. Išskirčių algoritmas, kuris išskirtimis laiko pardavimus, kurių kaina yra 50 procentų mažesnė arba du kartus didesnė už vidutinę produkto kainą, išskirtimis laiko labai mažai pardavimų, t. y. šiuo atveju rodiklių skaičiavimui gali būti naudojamas pirminis duomenų rinkinys. Taikant ekstremalių kainų bei mažų pardavimų filtrus, panašiai kaip ir duonos produktų pardavimams,

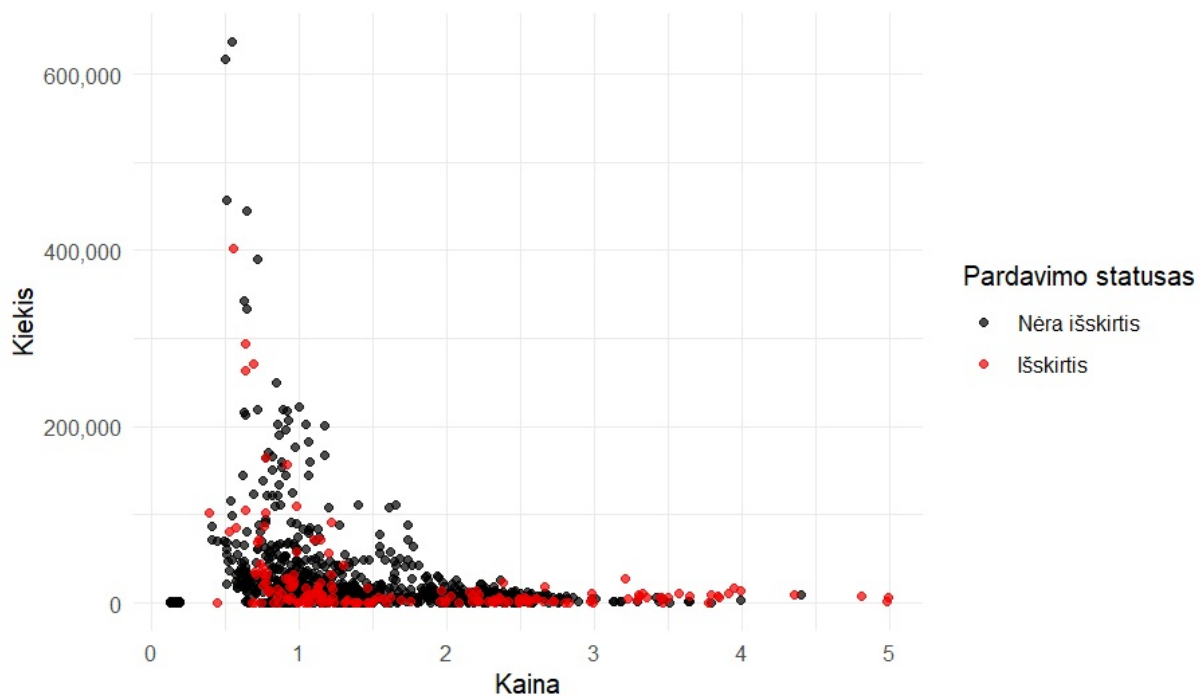
išskirtimis laikomi pardavimai, kurių pardavimo kiekis yra sąlyginai mažas, lyginant su bendru parduotu kiekiu; todėl išskirtims priskiriama dauguma pardavimų, esančių kainos ir kiekio plokštumoje arti kainos ašies.



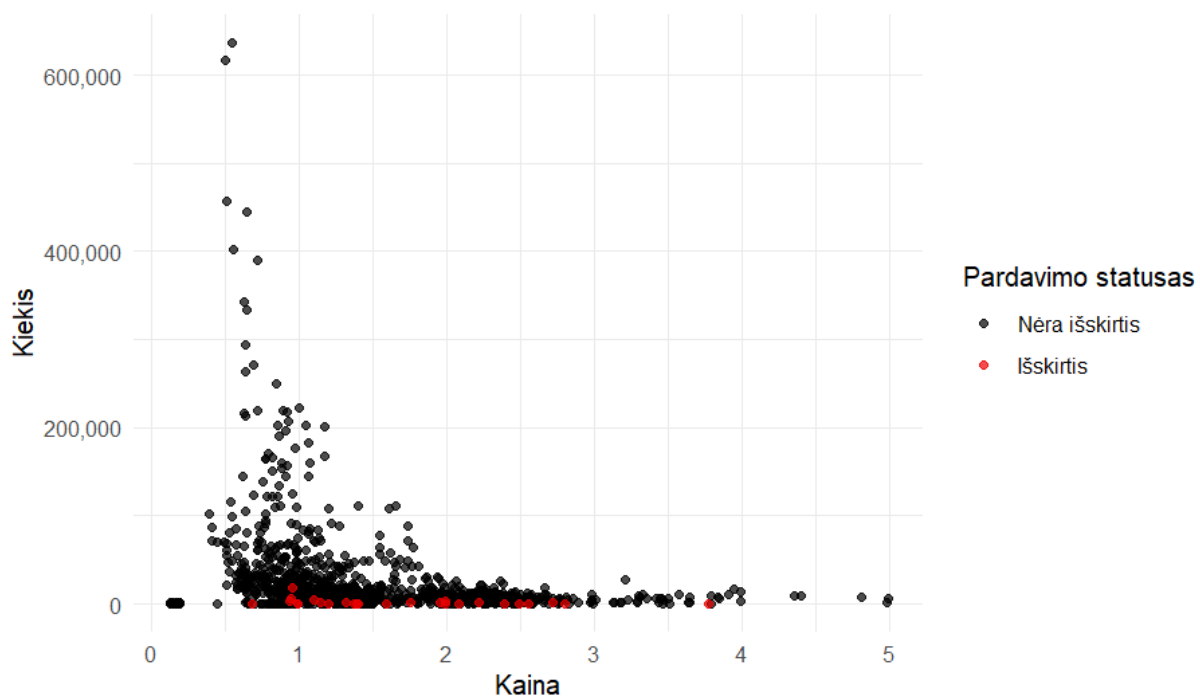
11 pav. Duonos produktų pardavimų išskirtys, naudojant ekstremalių kainų filtrą, kuris pašalina produktų pardavimus, kurių kaina yra 50 proc. mažesnė arba du kartus didesnė už vidutinę produkto kainą.



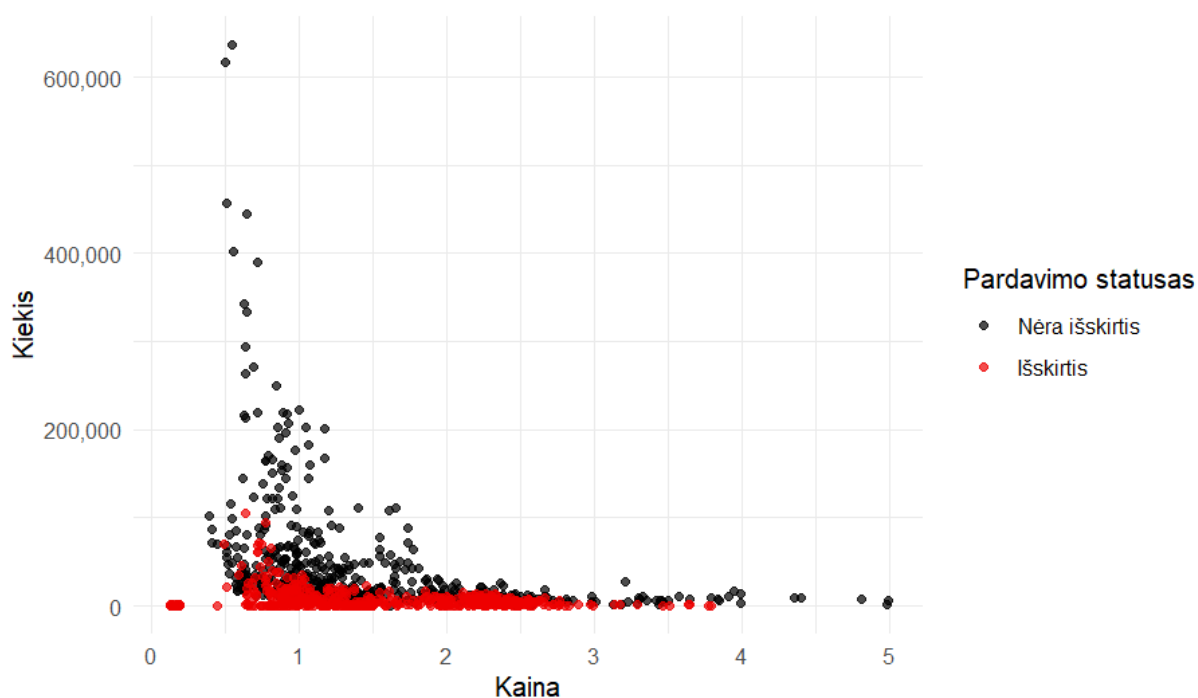
12 pav. Duonos produktų pardavimų išskirtys, naudojant ekstremalių kainų, kuris pašalina produktų pardavimus, kurių kaina yra 50 proc. mažesnė arba du kartus didesnė už vidutinę produkto kainą, bei mažų pardavimų filtrus.



13 pav. obuolių pardavimų išskirtys, naudojant ekstremalių kainų filtrą, kuris pašalina po 1 procentą mažiausių ir didžiausių kainų.



14 pav. obuolių pardavimų išskirtys, naudojant ekstremalių kainų filtrą, kuris pašalina produktų pardavimus, kurių kaina yra 50 proc. mažesnė arba du kartus didesnė už vidutinę produkto kainą.



15 pav. Obuolių pardavimų išskirtys, naudojant ekstremalių kainų, kuris pašalina produktų pardavimus, kurių kaina yra 50 proc. mažesnė arba du kartus didesnė už vidutinę produkto kainą, bei mažų pardavimų filtrus.

Toliau pateiktoje lentelėje apžvelgiami visų, šiame darbe nagrinėjamų produktų, pardavimų skaičiai, kurie galėtų būti naudojami skaičiavimams po atitinkamų algoritmų taikymo.

Duomenys	Pirminiai	Algoritmas 1	Algoritmas 2	Algoritmas 3
Duona (imtis)	11007	10409	10587	4796
Duona (visi duomenys)	21484	20203	20440	7951
Pienas (imtis)	1353	1202	1324	609
Pienas (visi duomenys)	4048	3837	3942	1515
Obuoliai (imtis)	1170	1012	1109	504
Obuoliai (visi duomenys)	1193	1018	1167	565

7 lentelė. Skirtingų išskirčių algoritmų taikymo rezultatai – pardavimų, nespriskiriamų išskirtims, skaičiai.

Čia Algoritmas 1 — ekstremalių kainų filtras, naudojantis procentilius; Algoritmas 2 — ekstremalių kainų filtras, naudojantis vidutines kainas; bei Algoritmas 3 — ekstremalių kainų bei mažų pardavimų filtrų derinys. Apibendrinant rezultatus, galima teigti, jog daugiausiai pardavimų išskirtims priskiria ekstremalių kainų bei mažų pardavimų filtrų derinys. Lyginant ekstremalių kainų filtrus tarpusavyje, galima matyti, jog naudojant vidutinių kainų parametrus priskiriamų išskirtims pardavimų skaičius yra mažesnis nei naudojant procentilius, nes likusių pardavimų skaičius yra didesnis.

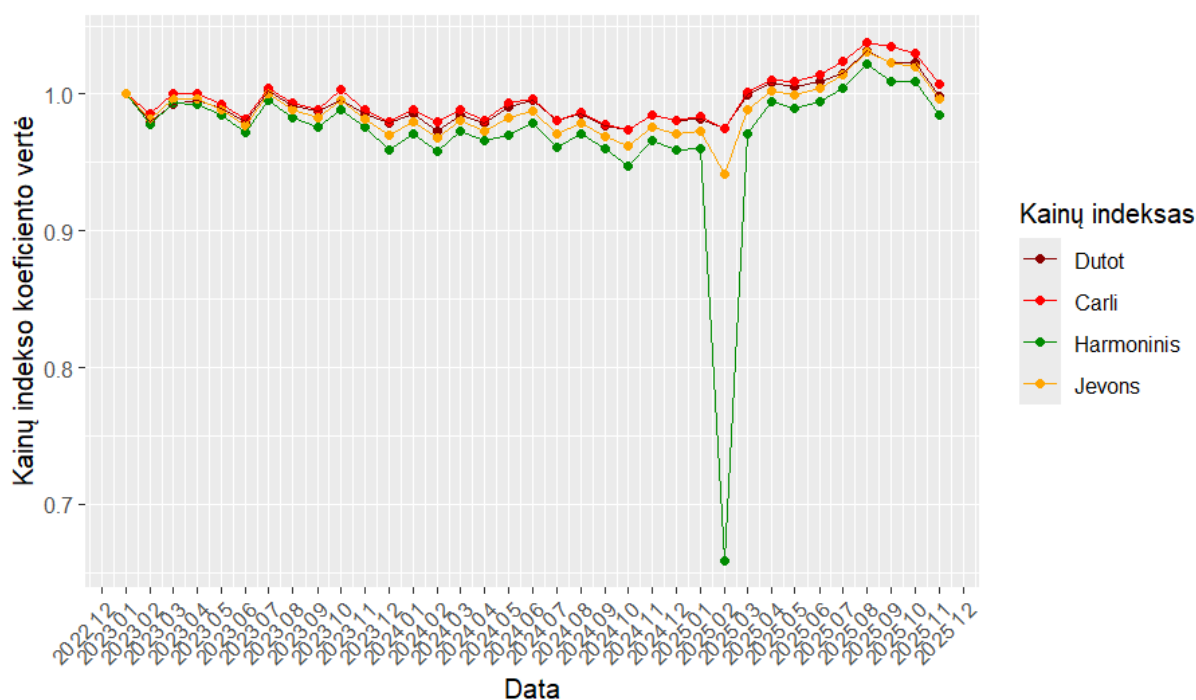
Nors produktų pardavimų duomenyse yra išskirčių, kurių skaičius, taikant skirtingus algoritmus, gali skirtis, toliau kainų indeksų skaičiavimams bus naudojami pradiniai duomenys, kad rodikliai atspindėtų tikrąjį vaizdą. Atskirame skyriuje bus nagrinėjama išskirčių įtaka kainų indeksų rodikliams. Taigi, tęskime duomenų analizę skaičiuojant elementariusius kainų indeksus.

4.4. Elementarieji kainų indeksai

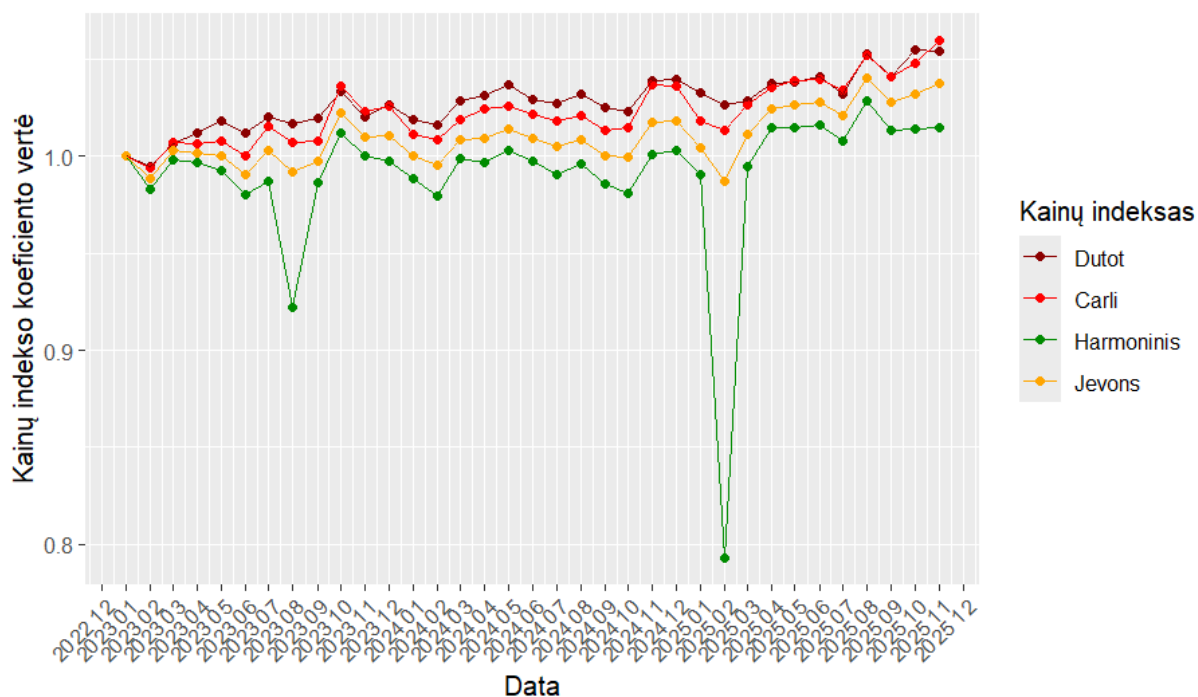
Šiame skyriuje praktiškai skaičiuojami elementarieji — Dutot, Carli, harmoninis bei Jevons — kainų indeksai, naudojant visus nagrinėjamus duonos, pieno produktų bei obuolių pardavimų duomenis. Standartiškai kainų indeksų reikšmės pateikiamos padaugintos iš 100 proc., o pats skaičius, kuris dauginamas, vadinamas kainų indeksų koeficientu. Tačiau toliau kainų indeksų koeficientai naudojami grafiškai pavaizduoti rezultatus, o analizuojant bus vadinami kainų indeksais.

Kainų indeksų analizę pradėkime nuo duonos produktų elementariųjų kainų indeksų rezultatų. Duonos produktų imties rezultatai pateikiami 16 pav., o visų produktų — 17 pav. Žvelgiant į duonos imties produktų elementariuosius kainų indeksus, galima matyti, jog jie kinta panašia tendencija, tačiau tarp atskirų indeksų atsiranda nežymių skirtumų. Šiuos skirtumus lemia kainų indeksų skaičiavimo struktūra — kaip ir buvo nagrinėta teorinėje dalyje, vieni kainų indeksai skaičiuoja vidutines kainas, kiti — kainų santykių vidurkius. Harmoninis kainų indeksas yra kiek jautresnis kainų pasikeitimams, tad tai puikiai iliustruoja staigus kainų indekso reikšmės sumažėjimas 2025 metų vasario mėnesį. Vis dėlto vėliau šio kainų indekso reikšmės grįžta į panašių reikšmių intervalą, lyginant su kitais elementariaisiais kainų indeksais.

Visų duonos produktų elementarieji kainų indeksai (17 pav.) turi šiek tiek didesnius tarpusavio skirtumus. Šiuo atveju harmoninis kainų indeksas didesnį nukrypimą turi ne tik 2025 metų vasario mėnesį, bet ir 2023 metų rugpjūtį. Žvelgiant į kainų indeksų reikšmes, elementarieji kainų indeksai tenkina nagrinėtą nelygybę, kuri teigia, jog harmoninis kainų indeksas yra mažesnis už Jevons kainų indeksą, o šis — už Carli elementariųjų kainų indeksą. Lyginant kainų indeksų reikšmes tarp duonos imties bei visų produktų, galima įžvelgti, jog duonos imties produktų kainos, lyginant su 2023 metų sausio mėnesio kainomis, turi nežymią mažėjimo tendenciją iki 2025 metų vasario mėnesio, nuo kurio kainos pradeda didėti, tačiau tiriamo laikotarpio pabaigoje vėl ima mažėti ir grįžta į 2023 metų sausio mėnesio kainų lygį. Kitaip nei imties produktų atveju, visų duonos produktų kainos turi didėjimo tendenciją, nepaisant kelių mėnesių didesnių harmoninio kainų indekso svyravimų žemyn.



16 pav. Duonos imties produktų elementariųjų kainų indeksų koeficientų kitimas.



17 pav. Visų duonos produktų elementariųjų kainų indeksų koeficientų kitimas.

Palyginkime elementariusius kainų indeksus pagal jų skaitines charakteristikas. Toliau pateiktose lentelėse pateikiamos pagrindinės charakteristikos, kurios leidžia palyginti duonos imties produktų elementariųjų kainų indeksų tarpusavio sąryšius (8 lentelė) bei sąryšius tarp imties ir visų produktų elementariųjų kainų indeksų (9 lentelė).

8 lentelė. Duonos imties produktų elementariųjų kainų indeksų sąryšių charakteristikos.

Kainų indeksas	Vidutinis nuokrypis	Dispersija	RMSE	MAD	Tiesinė koreliacija	DTW	Tendencijų koreliacija
Dutot ir Carli	-0,00341	0,000009	0,00451	0,00254	0,990	0,198	0,970
Dutot ir harmoninis	0,02189	0,00268	0,05553	0,01393	0,468	0,698	0,480
Dutot ir Jevons	0,00545	0,00004	0,00828	0,00472	0,950	0,241	0,918
Carli ir harmoninis	0,02530	0,00262	0,05644	0,01735	0,478	0,752	0,509
Carli ir Jevons	0,00886	0,000028	0,01028	0,00876	0,959	0,306	0,938
Jevons ir harmoninis	-0,01645	0,00216	0,04867	0,00887	0,682	0,642	0,762

Analizuojant duonos imties produktų elementariųjų kainų indeksų tarpusavio sąryšių skaitines charakteristikas, galima teigti, jog, lyginant koreliacijas tarp skirtingų elementariųjų kainų indeksų, labiausiai panašūs yra Dutot, Carli ir Jevons kainų indeksai, nes jie pasižymi stipria tarpusavio koreliacija — tiesinė koreliacija didesnė nei 0,95, o tendencijų koreliacija viršija 0,9. Tendencijų koreliacija įvertina dviejų kainų indeksų tendencijų panašumą, t. y. jeigu tendencijų koreliacija artima vienetui, tuomet lyginami kainų indeksai kinta beveik identišškai — tuo pačiu metu jų reikšmės arba didėja, arba mažėja. Kuo tendencijų koreliacija yra mažesnė, tuo kainų indeksų reikšmės kinta netvarkingai arba priešinga kryptimi.

Remiantis gautais rezultatais, mažiausias absoliutus vidutinis nuokrypis nustatytas Dutot ir Carli indeksų porai. Be to, šių kainų indeksų tarpusavio dispersija bei kiti nuokrypių rodikliai (RMSE, MAD) yra mažiausi iš

visų kainų indeksų porų, todėl galima teigti, jog šių kainų indeksų reikšmės yra labai panašios arba net tam tikrais momentais identiškos.

Priešinga tendencija pasižymi harmoninio bei Dutot, Carli ir Jevons kainų indeksų poros. Šių porų tiesinė bei tendencijų koreliacijos koeficientai yra gerokai mažesni nei Dutot, Carli ir Jevons kainų indeksų tarpusavio sąryšiai ir atitinkamai patenka į intervalus nuo 0,468 iki 0,682 bei nuo 0,48 iki 0,762. Remiantis dinaminio laiko poslinkio (DTW) rezultatais, Dutot ir Carli kainų indeksai turi mažiausią reikšmę, lygią 0,198. Vadinas, šių indeksų kitimo trajektorijos yra labai panašios. Taip pat šiuo atžvilgiu Jevons ir Dutot kainų indeksų trajektorijos yra panašios į harmoninio kainų indekso kitimą.

9 lentelė. Duonos imties bei visų produktų elementariųjų kainų indeksų sąryšių charakteristikos.

Kainų indeksas	Vidutinis nuokrypis	MAE	MAD	RMSE	Tiesinė koreliacija	DTW	Tendencijų koreliacija
Dutot	-0,03488	0,03488	0,03324	0,03766	0,500	0,600	0,533
Carli	-0,02651	0,02651	0,02603	0,03006	0,611	0,545	0,509
Harmoninis	-0,02007	0,02403	0,02328	0,03341	0,910	0,981	0,944
Jevons	-0,02267	0,02267	0,02357	0,02639	0,673	0,596	0,709

Lyginant elementariųjų kainų indeksų, suskaičiuotų naudojant imties bei visų produktų pardavimus, galima matyti, jog nuokrypių rodikliai (MAE, MAD, RMSE) įgauna nedideles reikšmes, o vidutinis nuokrypis tarp imties ir visų pardavimų kainų indeksų yra neigiamas. Didžiausias tiek tiesinę, tiek tendencijų koreliacijas turi harmoninis kainų indeksas. Vadinas, harmoninis kainų indeksas imties bei visų pardavimų atvejais kinta labai panašiai. Dutot, Carli ir Jevons kainų indeksai nepasižymi aukštais koreliacijų koeficientais, todėl duonos imties bei visų produktų kainos kinta skirtingomis tendencijomis ir neturi vienos aiškos kainų kitimo krypties.

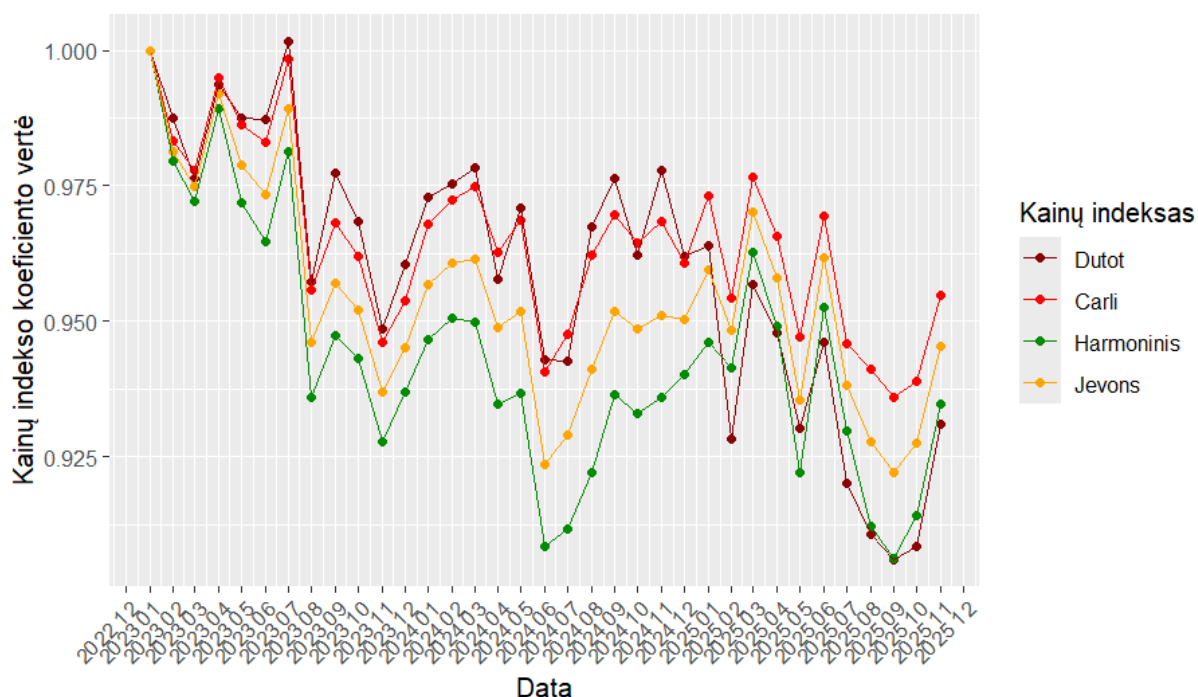
Elementarieji kainų indeksai yra pagrindas aukštesnių lygių kainų indeksų skaičiavimams bei agregavimui, todėl šie indeksai dėl savo svarbos yra suskaičiuoti visoms tiriamoms produktų grupėms, kad būtų galima suprasti, kaip keičiasi produktų kainų tendencijos. Toliau analizuojami pieno produktų elementarieji kainų indeksai (18, 19 pav.).

Žvelgiant į pateiktus kainų indeksų kitimo grafikus, tiek pieno imties produktų, tiek visų pieno produktų atvejais kainų indeksai kinta gan netvarkingai, lyginant su duonos elementariųjų kainų indeksų grafikais. Šiuo atveju galima paneigti ir teorinės elementariųjų kainų indeksų nelygybės teisingumą, t. y. nuo 2025 metų vasario mėnesio iki 2025 metų lapkričio mėnesio imtinai, išskyrus 2025 metų gegužę, pieno imties produktų Dutot kainų indeksas yra mažesnis už harmoninį kainų indeksą, nors teorinėje nelygybėje situacija yra priešinga.

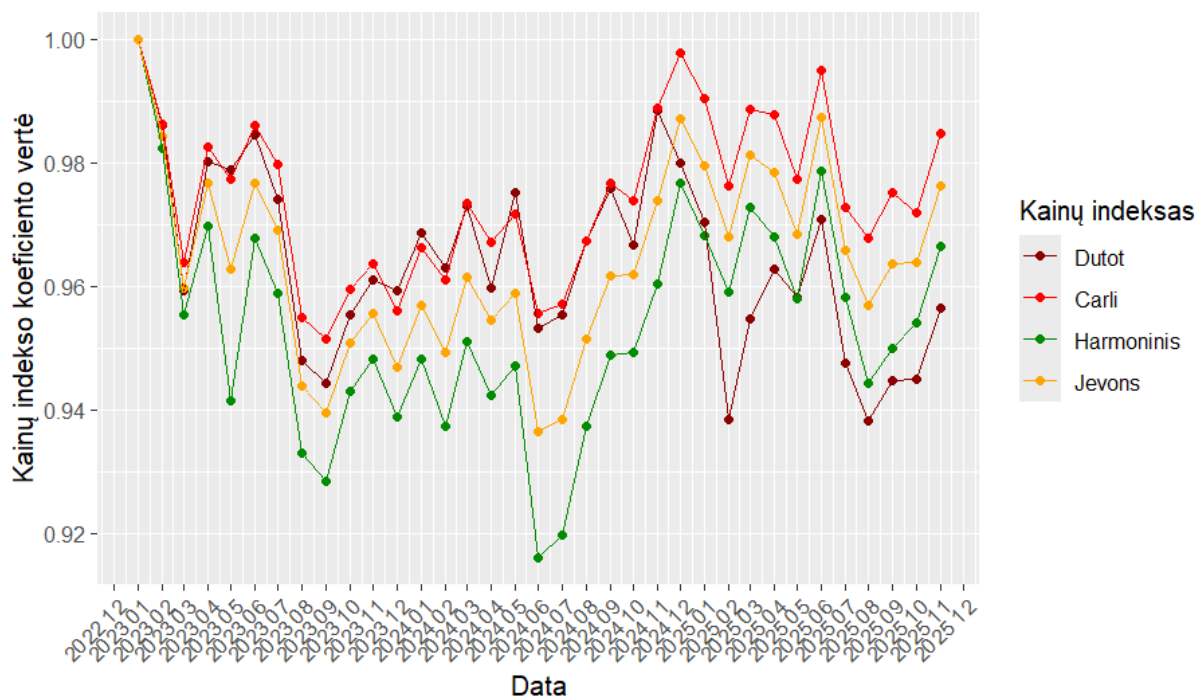
Šį atvejį galima paaiškinti tuo, jog teorinis kainų palyginimas buvo įrodytas turint visiškai identiškas tiriamų produktų aibes. Šiuo atveju produktų aibės laike kinta, todėl kintant įtraukiamų produktų aibėms, harmoninis indeksas gali tapti didesnis už Dutot kainų indeksą. Šis pasikeitimas atsiranda dėl produktų aibės pasikeitimo. Pavyzdžiui, tai gali nutikti, kai vieno iš produktų kaina yra lygi nuliui. Tokiu atveju Dutot kainų indeksas šį produktą įtraukia į skaičiavimą, o skaičiuojant harmoninį kainų indeksą to padaryti negalima, nes dalyba iš nulio negalima. Todėl skaičiuojant harmoninį ir Dutot kainų indeksus, į skaičiavimus įtraukiamų produktų aibės tame pačiame laikotarpyje gali būti skirtingos. Analogišką situaciją galima pastebėti ir visų pieno produktų elementariųjų kainų indeksų kitimo grafike (19 pav.).

Be to, pieno imties produktai, lyginant su 2023 metų sausio mėnesio kainomis, visą tiriamąjį laikotarpį, išskyrus 2023 metų liepos mėnesį Dutot kainų indekso rezultatai, yra pigesni. Grafike matyti, jog kainos mažėja, o pirmasis ženklus kainų sumažėjimas įvyksta 2024 metų birželio mėnesį. Vėliau visi elementarieji kainų indeksai identifikuoja nedidelę brangimo tendenciją, kurios metu kainos vis tiek išlieka mažesnės, lyginant su

2023 metų sausio mėnesio kainomis. Po šio laikotarpio didesnis kainų kritimas matomas nuo 2025 metų birželio mėnesio iki tų pačių metų rugsėjo mėnesio, po kurio stebimas kainų didėjimas. Lyginant 2025 metų lapkričio mėnesį su 2023 metų sausio mėnesiu, pieno imties produktų kainos sumažėjo, atsižvelgiant į skirtingų indeksų rezultatus, nuo 4 iki beveik 7 proc.



18 pav. Pieno imties produktų elementariųjų kainų indeksų koeficientų kitimas.



19 pav. Visų pieno produktų elementariųjų kainų indeksų koeficientų kitimas.

Kiek kitokį rezultatą galima įžvelgti iš visų pieno produktų elementariųjų kainų indeksų kitimų. Visi pieno produktai laikotarpio pabaigoje, lyginant su laikotarpio pradžia, atpigo nuo 1,5 iki 4,5 proc., priklausomai nuo

kainų indekso. Tai yra indikacija, jog renkant produktų imtį ypatingai svarbu, kad imtis būtų reprezentatyvi, nes kartais imties ir visų produktų rodikliai gali skirtis. Nors šiuo atveju tiek imties, tiek visų pardavimų kainų indeksų duomenys parodo prekių atpigimą, lyginant skaitine reikšme, šie skiriasi 2—3 kartus.

Aukščiau pateiktame visų pieno produktų elementariųjų kainų indeksų kitimo grafike, matyti, jog kitimo tendencijos skiriasi nuo imties produktų kainų indeksų. Nors abiem atvejais aiškiai identifikuojamas didesnis kainų sumažėjimas 2023 metų birželio bei liepos mėnesiais, visų produktų atveju toliau galima įžvelgti produktų brangimą, tad lyginant laikotarpio pabaigos rezultatus išryškėja didesni pokyčių skirtumai.

10 lentelė. *Pieno imties produktų elementariųjų kainų indeksų sąryšių charakteristikos.*

Kainų indeksas	Vidutinis nuokrypis	Dispersija	RMSE	MAD	Tiesinė koreliacija	DTW	Tendencijų koreliacija
Dutot ir Carli	–0,00543	0,000169	0,01392	0,00497	0,895	0,395	0,944
Dutot ir harmoninis	0,01588	0,000263	0,02252	0,02087	0,783	0,476	0,854
Dutot ir Jevons	0,00533	0,000210	0,01526	0,01415	0,827	0,469	0,901
Carli ir harmoninis	0,02130	0,00009	0,02321	0,02062	0,939	0,563	0,943
Carli ir Jevons	0,01075	0,000024	0,01179	0,01036	0,974	0,413	0,983
Jevons ir harmoninis	–0,01055	0,00002	0,01146	0,01007	0,992	0,411	0,987

Analizuojant pieno imties produktų elementariųjų kainų indeksų sąryšių skaitines charakteristikas (10 lentelė), matyti, jog skirtingų kainų indeksų poros, vertinant jų tarpusavio vidutinį nuokrypį, dispersiją bei kitus nuokrypių rodiklius, skiriasi labai nežymiai. Remiantis kitimo priklausomumu, Jevons ir harmoninis kainų indeksai kinta beveik identišškai, tai patvirtina artima vienetui tiesinė koreliacija.

Taip pat verta pabrėžti, jog Carli ir harmoninis bei Carli ir Jevons indeksai turi aukštas tiek tiesinės, tiek tendencijų koreliacijos reikšmes, todėl naudojant šiuos kainų indeksus pieno imties produktų kainos būtų iš esmės teisingai įvertintos bet kurio iš šių indeksų.

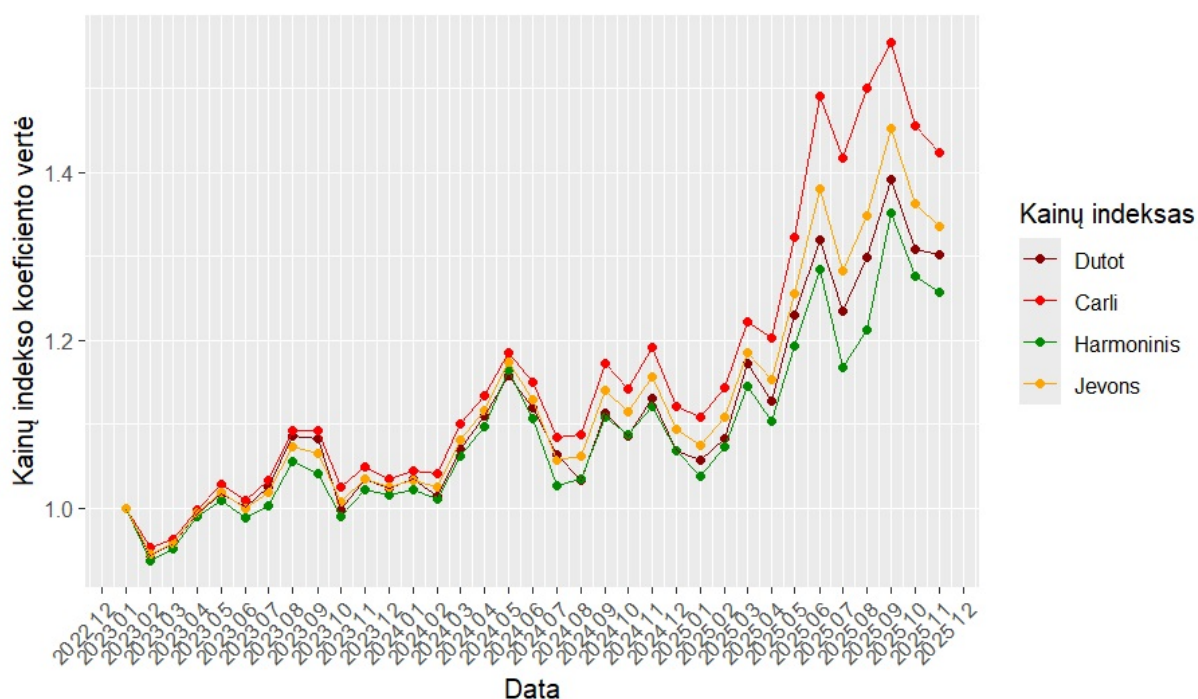
Remiantis suskaičiuotais rodikliais, mažiausiai panašūs yra Dutot ir harmoninis kainų indeksai. Šį rezultatą galima paaiškinti tuo, jog laikotarpio pabaigoje Dutot kainų indekso reikšmės tapo mažesnės nei harmoninio kainų indekso. Pagal DTW rodiklį, vertinant kainų indeksų laiko eilučių dinaminę trajektoriją panašumą, šiuo atveju matyti, jog visų kainų indeksų porų trajektorijos laike kinta panašiai, tačiau kiek artimesnės trajektorijos yra Dutot ir Carli kainų indeksų.

Toliau pateiktoje 11 lentelėje pateikiami pieno imties bei visų produktų elementariųjų kainų sąryšių statistiniai rodikliai. Remiantis jau nagrinėtų kainų indeksų statistinių nuokrypių charakteristikomis, šis atvejis neišsiskiria – stebimi sąlyginai maži kainų indeksų nuokrypiai. Tačiau šiuo atveju koreliacijų atžvilgiu rodikliai yra kiek mažesni nei lyginant skirtingus elementariusius kainų indeksus tarpusavyje, naudojant tik pieno imties produktus. Šiuo atveju mažiausiai tiesiškai priklausomas yra Carli kainų indeksas. Gauti kainų indeksų priklausomybės rezultatai taip pat patvirtina grafiškai nagrinėtus kainų indeksų kitimus: pieno imties produktų kainų kitimas turi mažiau panašią trajektoriją nei kainų indeksai, lyginant juos tarpusavyje naudojant tik imties produktų duomenų rinkinį.

11 lentelė. Pieno imties bei visų produktų elementariųjų kainų indeksų sąryšių charakteristikos.

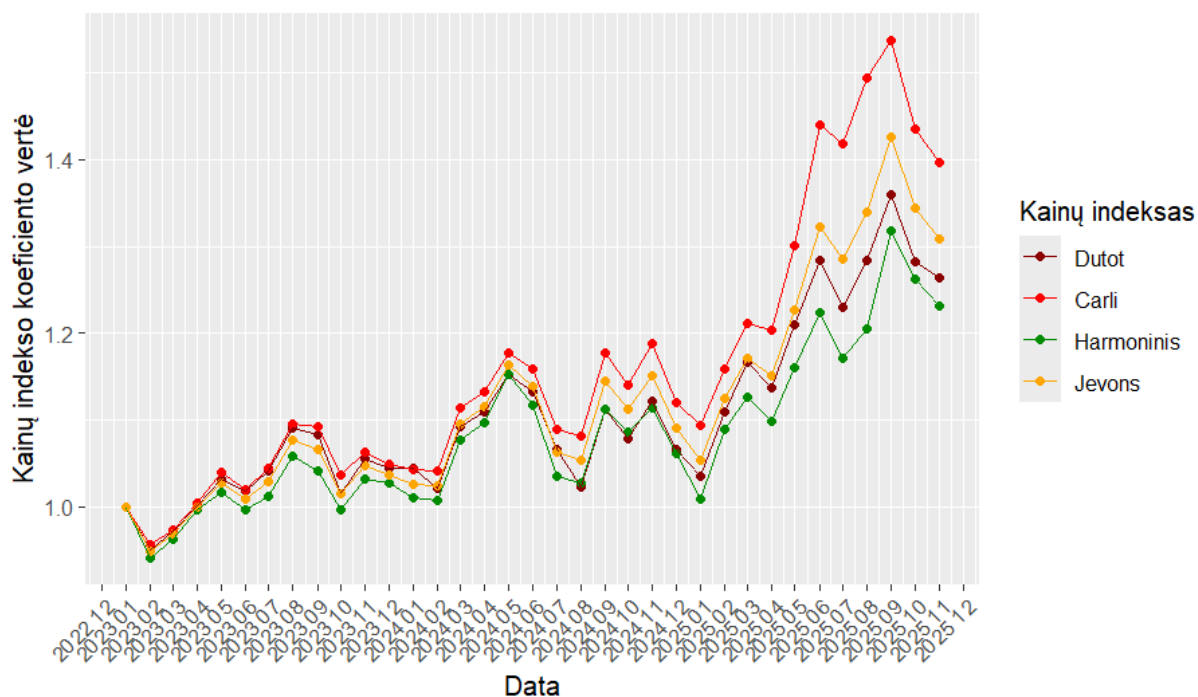
Kainų indeksas	Vidutinis nuokrypis	MAE	MAD	RMSE	Tiesinė koreliacija	DTW	Tendencijų koreliacija
Dutot	−0,00460	0,01334	0,01059	0,01733	0,773	0,449	0,754
Carli	−0,00949	0,01454	0,01233	0,01830	0,449	0,516	0,692
Harmoninis	−0,01003	0,01715	0,01688	0,02104	0,603	0,549	0,658
Jevons	−0,00999	0,01569	0,01521	0,01942	0,545	0,519	0,692

Toliau nagrinėjime elementariusius obuolių kainų indeksus, kurių kitimas pateikiamas grafikuose, esančiuose 20 ir 21 paveikslėliuose. Kaip buvo pastebėta ankstesniuose skyriuose, tiek imties, tiek visų pardavimų tendencijos bei duomenų apimtys yra labai panašios, todėl ir suskaičiuoti elementarieji kainų indeksai pasižymi panašiomis kitimo tendencijomis. Nors obuoliai yra sezoninė prekė, kainų indeksai sezoniskumo neparodo, o žvelgiant į rezultatus matoma aiški brangimo tendencija. Kuomet kainos svyruoja nedideliame intervale, elementariųjų kainų indeksų reikšmės skiriasi nedaug. Tačiau žvelgiant į pateiktus kitimo grafikus ir darant prielaidą, kad kainų standartinis nuokrypis stebimo laikotarpio pabaigoje yra didesnis nei laikotarpio pradžioje, išryškėja didesni elementariųjų kainų indeksų reikšmių skirtumai.



20 pav. Obuolių imties elementariųjų kainų indeksų koeficientų kitimas.

Nagrinėjant pieno produktų kainų indeksų kitimus, buvo pastebėta, jog Dutot kainų indeksas tam tikru laikotarpiu yra mažesnis už harmoninį bei kartu ir už Jevons kainų indeksą. Obuolių kainų indeksų atveju Dutot kainų indeksas įgyja didesnes reikšmes už harmoninį kainų indeksą, tačiau Dutot kainų indekso reikšmės vis tiek mažesnės už Jevons kainų indeksą. Aiškesni skirtumai matomi nuo 2024 metų liepos mėnesio. Vadinas, dėl duomenų ypatumų taip pat negalioja teorinė elementariųjų kainų indeksų nelygybė.



21 pav. Visų obuolių elementariųjų kainų indeksų koeficientų kitimas.

Lyginant skirtingų kainų indeksų rezultatus, galima teigti, jog gaunami skirtingi rezultatai: remiantis jais, 2025 metų lapkričio mėnesį, lyginant su 2023 metų sausio mėnesiu, obuoliai pabrango nuo 22 proc. iki net 40 proc. Be to, remiantis kainų indeksų kitimo grafikais, nuo 2025 metų balandžio mėnesio iki nagrinėjamo laikotarpio pabaigos kainų indeksai išsidėstė nuo mažiausios iki didžiausios reikšmės šia seka – harmoninis, Dutot, Jevons ir Carli.

12 lentelė. Obuolių imties elementariųjų kainų indeksų sąryšių charakteristikos.

Kainų indeksas	Vidutinis nuokrypis	Dispersija	RMSE	MAD	Tiesinė koreliacija	DTW	Tendencijų koreliacija
Dutot ir Carli	-0,05368	0,00321	0,07744	0,03085	0,988	1,678	0,945
Dutot ir harmoninis	0,01929	0,000409	0,02774	0,01220	0,989	1,173	0,956
Dutot ir Jevons	-0,01630	0,000419	0,02593	0,01302	0,996	1,078	0,975
Carli ir harmoninis	0,07297	0,00527	0,10220	0,05097	0,969	2,147	0,907
Carli ir Jevons	0,03737	0,00148	0,05324	0,02645	0,994	1,579	0,972
Jevons ir harmoninis	-0,03559	0,00117	0,04902	0,02443	0,989	1,359	0,980

Suskaičiuoti statistiniai kainų indeksų rodikliai, pateikti 12 ir 13 lentelėse, rodo, jog tiek skirtingi kainų indeksai tarpusavyje, tiek kainų indeksai, suskaičiuoti naudojant skirtingus duomenų rinkinius, pasižymi beveik tiesišku kitimu. Tai patvirtina tiesinė koreliacija, kuri visais atvejais yra didesnė nei 0,969. Akivaizdus kitimo sąryšis išlieka ir tendencijų koreliacijos rezultatuose, tačiau šiuo atveju kiek mažesnė koreliacija stebima tarp Carli ir harmoninio kainų indeksų, vis dėlto koreliacijos vertė 0,907 yra sąlyginai aukšta.

Remiantis nuokrypių rodikliais, kainų indeksų tarpusavio kitimai pasižymi nedideliais nuokrypiais. Tačiau, vertinant dinaminį kainų indeksų laiko eilučių tendencijų kitimu (DTW rodikliu), kainų indeksai lyginant

juos tarp skirtingų indeksų yra labiau netolygesni nei lyginant indeksus tarp skirtingų duomenų rinkinių. Šiuo atveju DTW rodikliai yra 2–3 kartus didesni, lyginant skirtingus kainų indeksus tarpusavyje.

13 lentelė. *Obuolių imties bei visų produktų elementariųjų kainų indeksų sąryšių charakteristikos.*

Kainų indeksas	Vidutinis nuokrypis	MAE	MAD	RMSE	Tiesinė koreliacija	DTW	Tendencijų koreliacija
Dutot	0,00025	0,01314	0,01161	0,01651	0,994	0,819	0,954
Carli	0,00124	0,00956	0,00828	0,01344	0,998	0,628	0,967
Harmoninis	0,00419	0,01166	0,00832	0,01663	0,991	0,721	0,937
Jevons	0,00291	0,01068	0,00824	0,01518	0,996	0,688	0,952

Apibendrinant elementariųjų kainų indeksų analizę, galima teigti, jog skaičiuojant šiuos indeksus ne visada teisinga teorinėje dalyje nagrinėta nelygybė, pagal kurią harmoninio kainų indekso reikšmės yra mažesnės už Jevons kainų indekso reikšmes, o šios – už Dutot kainų indekso.

Tam tikrais laikotarpiais, nagrinėjant pieno produktų kainų indeksus, Dutot kainų indeksas buvo mažesnis už harmoninį ir Jevons. Obuolių kainų indeksų atveju buvo galima stebėti laikotarpį, kuriame Dutot kainų indeksas buvo didesnis už harmoninį, tačiau mažesnis už Jevons. Šiuos nukrypimus nuo teorinės nelygybės galima paaiškinti tuo, jog praktiniams skaičiavimams naudojamas dinaminis produktų pardavimų rinkinys, o teorinė nelygybė galioja tik identišškai produktų aibei, kuri nekinta lyginant du laiko momentus.

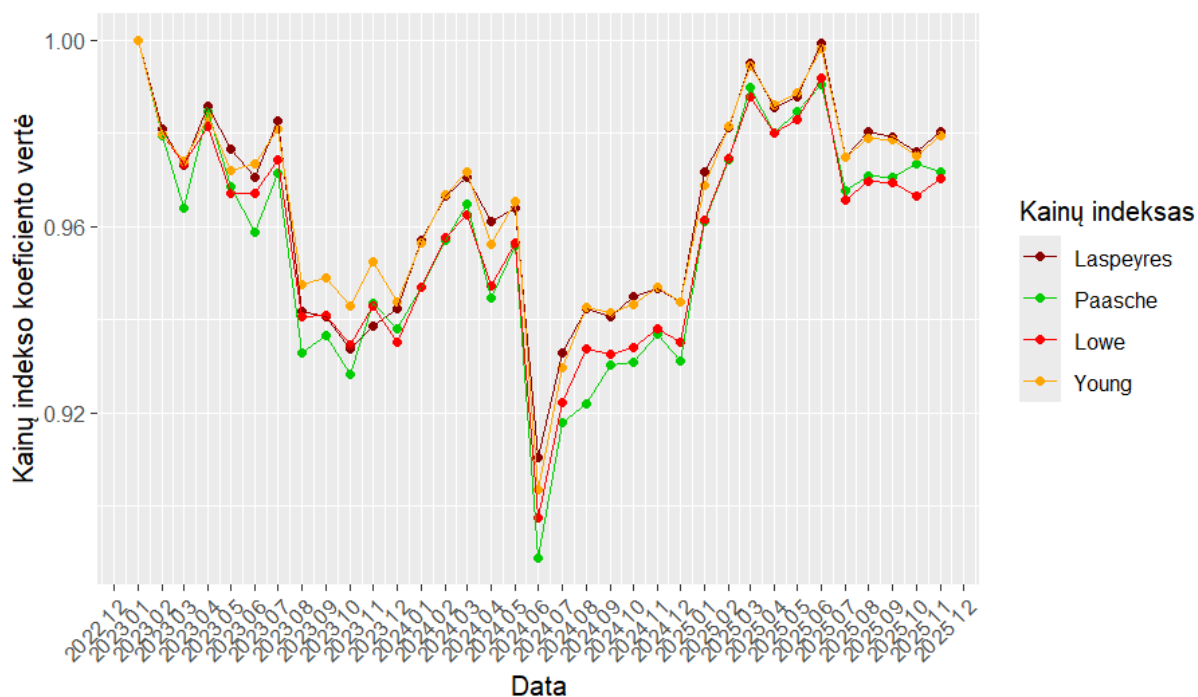
Be to, tam tikrais atvejais, kaip pieno produktų kainų indeksų atveju, išryškėja skirtumai skaičiuojant indeksus naudojant imties bei visų pardavimų duomenis. Duonos ir obuolių produktų kainų indeksai šiuo atveju buvo labiau panašūs, ką patvirtina aukšti koreliacijos rodikliai bei maži nuokrypių įverčiai.

Svarbu prisiminti, jog elementarieji kainų indeksai yra paprasčiausi kainų indeksai, į skaičiavimus įtraukiantys tik pardavimo kainas. Todėl yra svarbu toliau nagrinėti bazinius kainų indeksus, kurie labai panašūs į elementariusius: jie lygina nagrinėjamo laikotarpio kainas su bazinio laikotarpio kainomis, tačiau naudoja produktų svorių sistemas, leidžiančias suteikti didesnę įtaką produktams pagal jų vartojimo kiekius.

4.5. Baziniai kainų indeksai

Suskaičiavus ir išanalizavus elementariusius kainų indeksus, praktinėje darbo dalyje toliau atliekama bazinių kainų indeksų analizė. Kainų indeksų skaičiavimui naudojami pieno produktų bei obuolių pardavimų duomenys. Šiems duomenims skaičiuojami pagrindiniai baziniai kainų indeksai — Laspeyres, Paasche, Lowe bei Young. Kainų indeksams nustatomas 2023 metų sausio mėnesio bazinis laikotarpis, su kuriuo lyginami analizuojamo laikotarpio duomenys, tas pats laikotarpis naudojamas kaip bazinis Lowe ir Young kainų indeksų svoriams. Suskaičiavus standartinius bazinius kainų indeksus, jie lyginami su grandininio metodu susietais kainų indeksais. Be to, analizuojamas šių kainų indeksų grandininis nuokrypis.

Analizė pradeda skaičiuojant bazinius kainų indeksus pieno imties produktams. Bazinių kainų indeksų kitimas pateikiamas 22 paveikslėlyje, o pagrindinės tarpusavio kainų indeksų skaitinės charakteristikos — 14 lentelėje.



22 pav. Pieno imties produktų bazinių kainų indeksų koeficientų kitimas.

Žvelgiant į pieno imties produktų bazinių kainų indeksų kitimą, matyti, jog tiriamuoju laikotarpiu produktų kainos yra mažesnės, lyginant su 2023 metų sausio mėnesio kainų lygiu. Didžiausias kainų sumažėjimas stebimas 2024 metų birželio mėnesį, vėliau aiškiai matomas kainų didėjimas, o laikotarpio pabaigoje – kainų stabilizavimasis ties konkrečiu lygiu. Laikotarpio pabaigoje kainos, priklausomai nuo kainų indekso, yra sumažėjusios 2–3 procentais, lyginant su bazinio laikotarpio kainomis. Taip pat galima pastebėti, jog tenkinama teorinėje dalyje nagrinėta nelygybė, pagal kurią Paasche kainų indeksas yra griežtai mažesnis už Laspeyres kainų indeksą.

Analizuojant statistines charakteristikas bei sąryšius tarp skirtingų pieno produktų bazinių kainų indeksų (14 lentelė), matyti, jog vidutinis nuokrypis bei kiti nuokrypių rodikliai, RMSE ir MAD, yra labai maži, o dispersiją galima laikyti beveik nuline. Koreliacijos matai aiškiai pabrėžia, jog visi suskaičiuoti baziniai kainų indeksai kinta beveik identišškai, nes tiek tiesinės, tiek tendencijų koreliacija artima vienetui, o artimas vienetui rodiklis parodo, jog šių kainų indeksų ne tik tiesinė, bet ir kitimo tendencijos yra beveik identiškos.

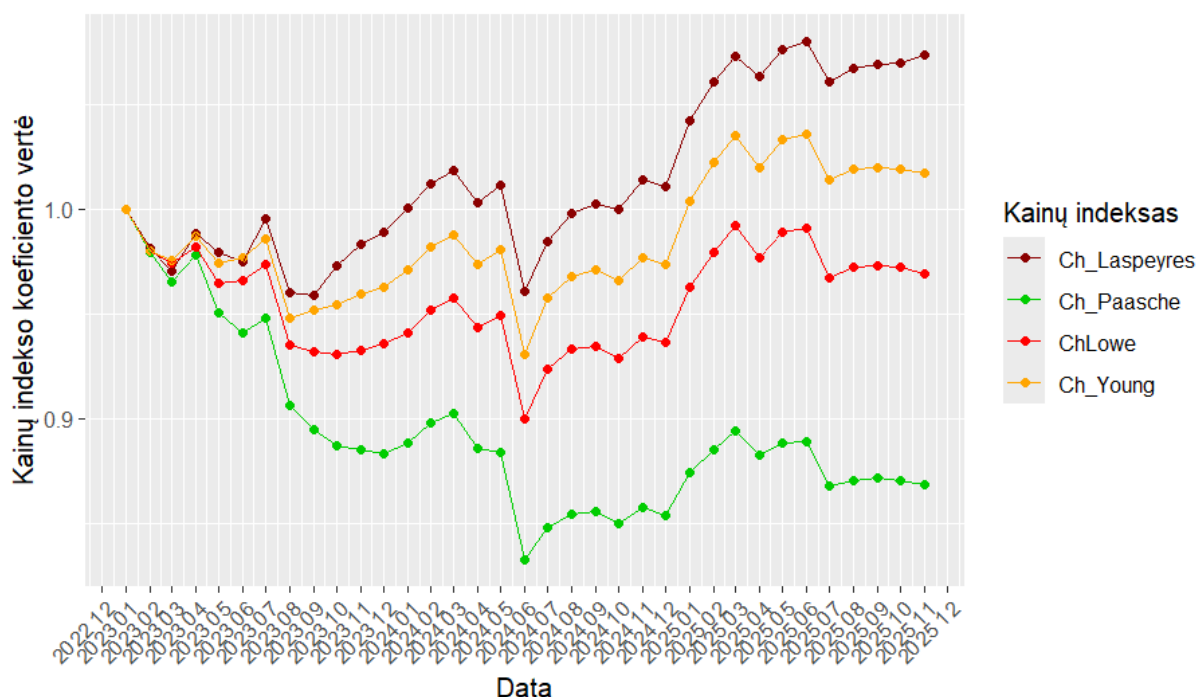
14 lentelė. Pieno imties produktų bazinių kainų indeksų sąryšių charakteristikos.

Kainų indeksas	Vidutinis nuokrypis	Dispersija	RMSE	MAD	Tiesinė koreliacija	DTW	Tendencijų koreliacija
Laspeyres ir Paasche	0,00833	0,000029	0,00989	0,00871	0,980	0,388	0,954
Laspeyres ir Lowe	0,00680	0,000019	0,00802	0,00811	0,982	0,328	0,972
Laspeyres ir Young	–0,00038	0,000015	0,00386	0,00110	0,984	0,133	0,969
Paasche ir Lowe	–0,00153	0,000017	0,00434	0,00209	0,989	0,169	0,967
Paasche ir Young	–0,00871	0,000022	0,00987	0,00905	0,990	0,403	0,966
Lowe ir Young	–0,00718	0,000007	0,00766	0,00840	0,994	0,340	0,998

Lyginant kainų indeksų dinamines laiko eilučių struktūras, Laspeyres ir Young kainų indeksų eilučių struktūra beveik identiška, nes šios kainų indeksų poros DTW rodiklis yra mažiausias ir lygus 0,133. Kitų kainų indeksų

porų DTW rodiklis kiek didesnis, tačiau rezultatai identifikuoja, jog laiko eilučių struktūriniai kitimai yra labai panašūs, tą galima įžvelgti ir nagrinėjant kainų indeksų kitimo grafikus.

Baziniai kainų indeksai gali būti jungiami grandininio kainų indeksų metodu. Pieno imties produktų grandinių bazinių kainų indeksų kitimai vaizduojami 23 paveikslėlyje.



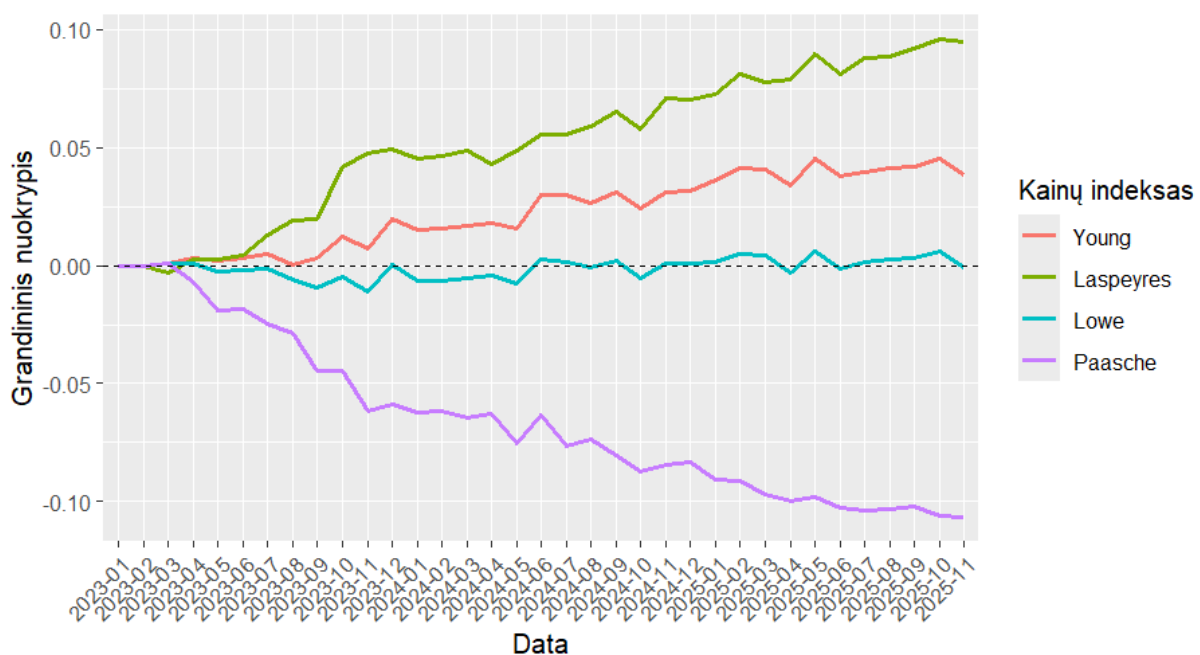
23 pav. Pieno imties produktų grandiniu metodu susietų bazinių kainų indeksų koeficientų kitimas.

Grandininio metodu sujungti kainų indeksai įtraukia viso laikotarpio kainų pokyčius, o įprastai skaičiuojami indeksai lygina nagrinėjamo laikotarpio bei bazinio laikotarpio kainas. Remiantis praktiniais skaičiavimais bei kainų indeksų skaičiavimo reglamentais, kainų indeksai turėtų turėti kuo mažesnį grandininį nuokrypį. Šis nuokrypis susidaro dėl to, jog praktikoje kainų indeksai dažnai skaičiuojami tam tikru periodiškumu, todėl gautus įverčius reikia sujungti su jau paskelbtais rezultatais.

Nagrinėjant pieno imties produktų grandinius bazinius kainų indeksus, matyti, jog pasitvirtina teorinis faktas, jog Paasche kainų indeksas smarkiai nuvertina kainų lygį, o Laspeyres kainų indeksas galimai pervertina. Nagrinėjant Lowe ir Young grandinių kainų indeksų kitimą, matyti, jog šių indeksų rezultatai yra tarp Paasche ir Laspeyres kainų indeksų. Lyginant tik 2025 metų lapkričio mėnesio kainas su 2023 metų sausio mėnesio kainomis, buvo matyti, jog pieno imties produktai atpigo 2–3 procentais, tačiau šiuo atveju, kai kainų lygių įvertinimui įtakos turi ir pokyčiai tarp šių dviejų laiko momentų, matomas ir kainų pabrangimas, ir kainų lygio sumažėjimas. Laspeyres kainų indeksas parodo, jog produktai pabrango daugiau nei 10 procentų, kai remiantis Paasche kainų indeksu matomas visiškai priešingas rezultatas – daugiau nei 10 procentų kainų sumažėjimas. Šiuo atveju grandininis Lowe kainų indeksas labiausiai grafiškai panašus į įprastų bazinių kainų indeksų kitimo tendencijas. Šį spėjimą patvirtina ir statistiniai rodikliai, pateikti 15 lentelėje, suskaičiuoti lyginant įprastus bei grandinius bazinius kainų indeksus. Remiantis vidutinio nuokrypio rezultatais, matyti, jog įprastas Laspeyres kainų indeksas, lyginant su grandiniu kainų indeksu, turi neigiamą vidutinį nuokrypį. Šis rezultatas pagrindžia, jog grandininis kainų indeksas yra ženkliai didesnis ir vidutiniškai tiriamuoju laikotarpiu viršija įprastą indeksą beveik 5 procentais. Priešingu atveju Paasche kainų indeksas yra vidutiniškai mažesnis 6,2 procento. Šiuos nuokrypius identifikuoja ir kiti nuokrypių rodikliai – MAE, MAD ir RMSE. Lowe ir Young kainų indeksų atvejais nuokrypiai yra sąlyginai mažesni nei Laspeyres ir Paasche indeksų.

15 lentelė. Pieno imties produktų bazinių kainų palyginimas su grandiniu metodu susietais baziniais kainų indeksais.

Kainų indeksas	Vidutinis nuokrypis	MAE	MAD	RMSE	Tiesinė koreliacija	DTW	Tendencijų koreliacija
Laspeyres	-0,04975	0,04991	0,05032	0,05824	0,627	1,541	0,942
Paasche	0,06236	0,06242	0,06789	0,07049	0,583	2,168	0,947
Lowe	0,00102	0,00324	0,00247	0,00415	0,986	0,159	0,958
Young	-0,02163	0,02163	0,02278	0,02632	0,837	0,786	0,953



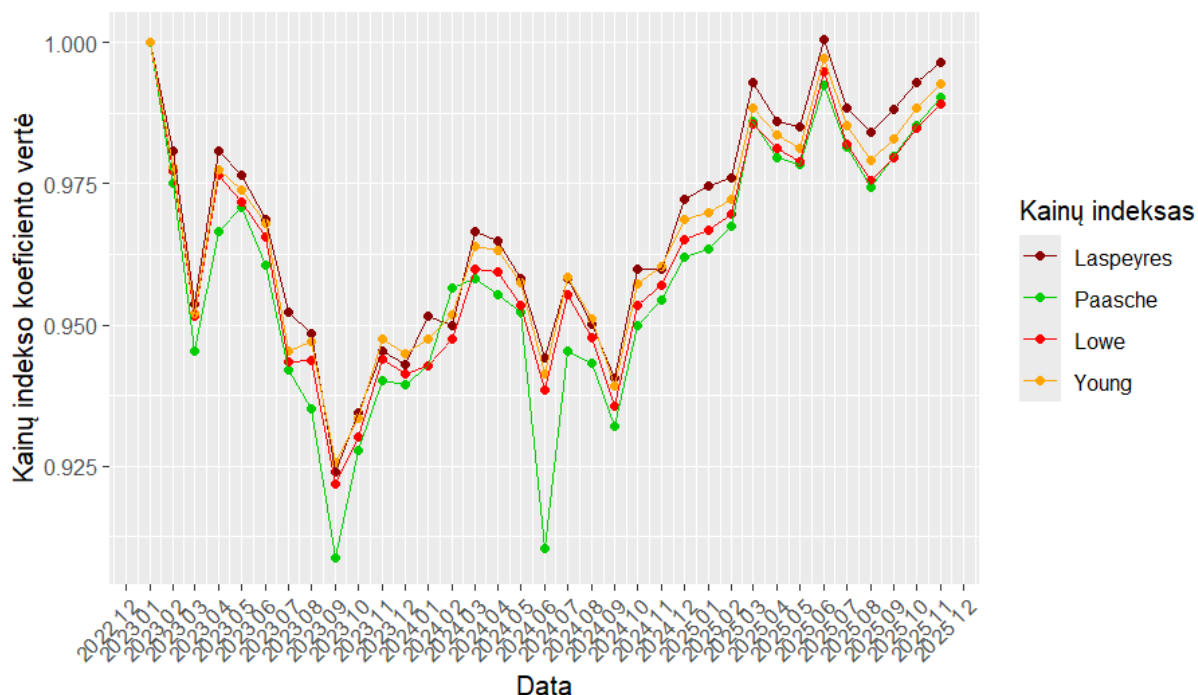
24 pav. Pieno imties produktų bazinių kainų indeksų grandininio nuokrypio kitimas.

Didžiausia tiesinė koreliacija, lyginant įprastą ir grandininį kainų indeksą, pasižymi Lowe kainų indeksas. Tiesinės koreliacijos įvertis yra 0,986, kitų kainų indeksų tiesinis priklausomumas kiek mažesnis. Nors tendencijų koreliacija yra pakankamai aukšta bei parodo, jog kitimo tendencijos yra gana panašios, remiantis dinaminio laiko eilučių struktūros vertinimu, tik Lowe indeksas turi mažiausią DTW rodiklį, todėl galima teigti, jog šio kainų indekso laiko eilučių struktūra yra beveik identiška. Ženkliai mažesnis DTW rodiklis, lyginant su kitais kainų indeksais, turėtų identifikuoti, jog grandininis nuokrypis yra sąlyginai mažas bei artimas nuliui ilguoju laikotarpiu. Kainų indeksų grandininis nuokrypius galima matyti 24 paveikslėlyje.

Remiantis grandininio nuokrypio kitimu skirtingiems kainų indeksams, pasitvirtina hipotezė, jog Laspeyres kainų indeksas linkęs pervertinti kainų lygį, o Paasche pakankamai neįvertina. Grandininio nuokrypio rezultatai patvirtina, jog šiuo atveju Lowe kainų indeksas yra tinkamiausias, nes jo grandininis nuokrypis artimas nuliui. Young kainų indeksas sukuria nuokrypį, kuris yra artimas Laspeyres ir Lowe nuokrypių vidurkiui. Toliau nagrinėsime visų pieno produktų bazinius kainų indeksus.

Remiantis kainų kitimu, pateiktu 25 paveikslėlyje, matyti, jog, lyginant tarpusavyje, kainų indeksai kinta labai panašiai, o šį kitimą pagrindžia ir šių indeksų tarpusavio skaitinės charakteristikos, pateiktos 16 lentelėje.

Visos bazinių kainų indeksų poros pasižymi mažais nuokrypių rodikliais, priklausomybės rodikliai yra aukšti, išskyrus šiek tiek mažesnę tendencijų koreliaciją (0,867) tarp Laspeyres ir Paasche kainų indeksų. Suskaičiuoti kainų indeksai parodo, jog ir visų pieno produktų kainos, kaip ir imties produktų atveju, lyginant su 2023 metų sausio mėnesio kainomis, visą laikotarpį yra mažesnės.

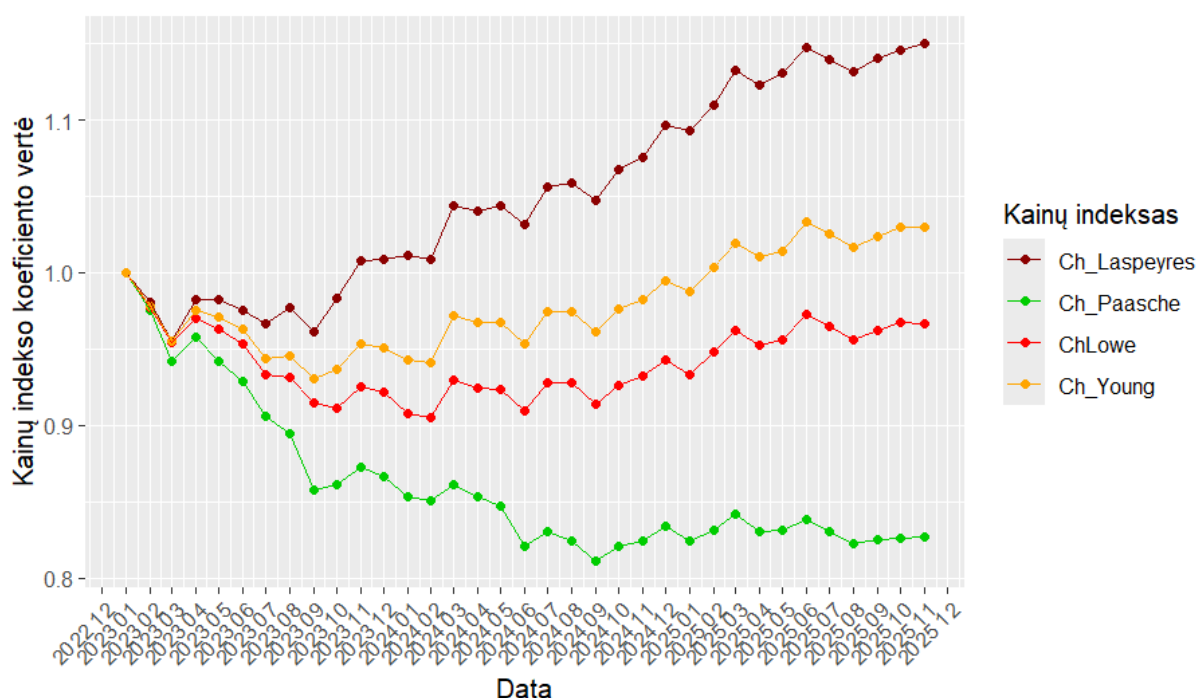


25 pav. Visų pieno produktų bazinių kainų indeksų koeficientų kitimas.

Kiek svarbiau yra nagrinėti grandininius kainų indeksus. Šių kainų indeksų kitimo tendencijos labai panašios kaip ir imties produktų atveju. Kitimo grafike (26 pav.) matyti, jog Laspeyres ir Paasche kainų indeksai kiek labiau įvertina kainų lygio pasikeitimą nei imties atveju. Remiantis Paasche grandininio kainų indeksu, pieno produktai 2025 metų lapkričio mėnesį buvo atpigę beveik 17 procentų, o Laspeyres kainų indeksas įvertina kainų lygį beveik 15 procentų aukštesniu nei 2023 metų sausio mėnesį. Grandininių Lowe ir Young kainų indeksų reikšmės visą laikotarpį yra tarp Laspeyres ir Paasche kainų indeksų, o Young indeksas įgyja didesnes reikšmes nei Lowe.

16 lentelė. Visų pieno produktų bazinių kainų indeksų sąryšių charakteristikos.

Kainų indeksas	Vidutinis nuokrypis	Dispersija	RMSE	MAD	Tiesinė koreliacija	DTW	Tendencijų koreliacija
Laspeyres ir Paasche	0,00846	0,0000345	0,01025	0,00808	0,967	0,391	0,867
Laspeyres ir Lowe	0,00510	0,0000006	0,00561	0,00488	0,993	0,265	0,975
Laspeyres ir Young	0,00213	0,0000005	0,00308	0,00257	0,995	0,140	0,975
Paasche ir Lowe	-0,00337	0,0000332	0,00661	0,00233	0,971	0,235	0,899
Paasche ir Young	-0,00634	0,0000328	0,00849	0,00539	0,974	0,313	0,902
Lowe ir Young	-0,00297	0,0000001	0,00316	0,00334	0,999	0,159	0,999



26 pav. Visų pieno produktų grandiniu metodu susietų bazinių kainų indeksų koeficientų kitimas.

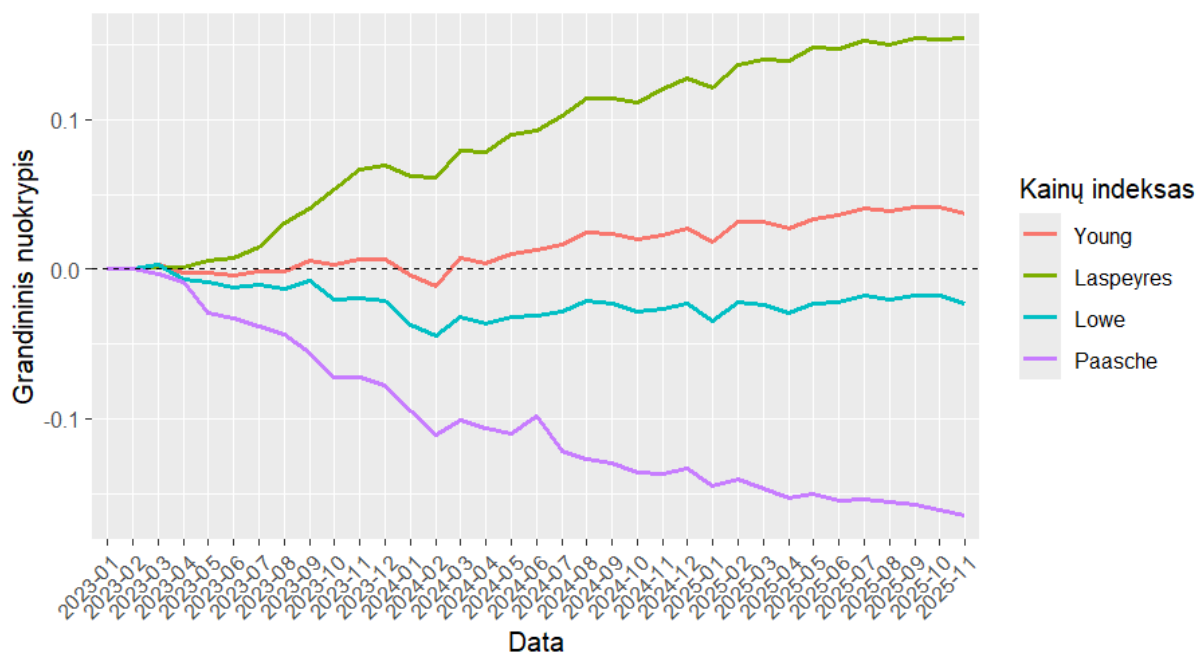
Statistiniai rodikliai, pateikti tolimesnėje lentelėje, identifikuoja, jog Laspeyres ir Young įprasti kainų indeksai įgyja mažesnes reikšmes nei jų grandininiai kainų indeksai, Laspeyres atveju skirtumas vidutiniškai lygus apie 8,5 procento, o Young kainų indeksui 1,5 procento. Priešingu atveju, Paasche bei Lowe kainų indeksai yra mažesni už grandininis šių kainų indeksų variantus, Paasche beveik 9,7 procento, o Lowe 2 procentais. Analogiškos tendencijos matomos remiantis ir kitais nuokrypių rodikliais. Nors tendencijų koreliacija parodo, jog kitimo tendencijos sąlyginai yra panašios abiem atvejais, tačiau tiesinė koreliacija bei dinaminis laiko eilučių panašumo rodiklis aiškiai identifikuoja, jog yra ryškesni skirtumai Laspeyres bei Paasche kainų indeksų atvejais. Paasche kainų indekso atveju, koreliacija lygi 0,122, kas signalizuoja, jog įprastas kainų indeksas bei grandininis kinta vos ne priešingai. Lowe ir Young kainų indeksų atveju, tiesinė koreliacija gan aukšta. Šiuo atveju galima būtų netgi nagrinėti Lowe ir Young kainų jungtinį svertinį kainų indeksą, norint gauti beveik nulinį vidutinį nuokrypį, nes šie sąlyginai daug mažesni už Laspeyres ar Paasche bei priešingų ženklų.

17 lentelė. Visų pieno produktų bazinių kainų indeksų palyginimas su grandiniu metodu susietais baziniais kainų indeksais.

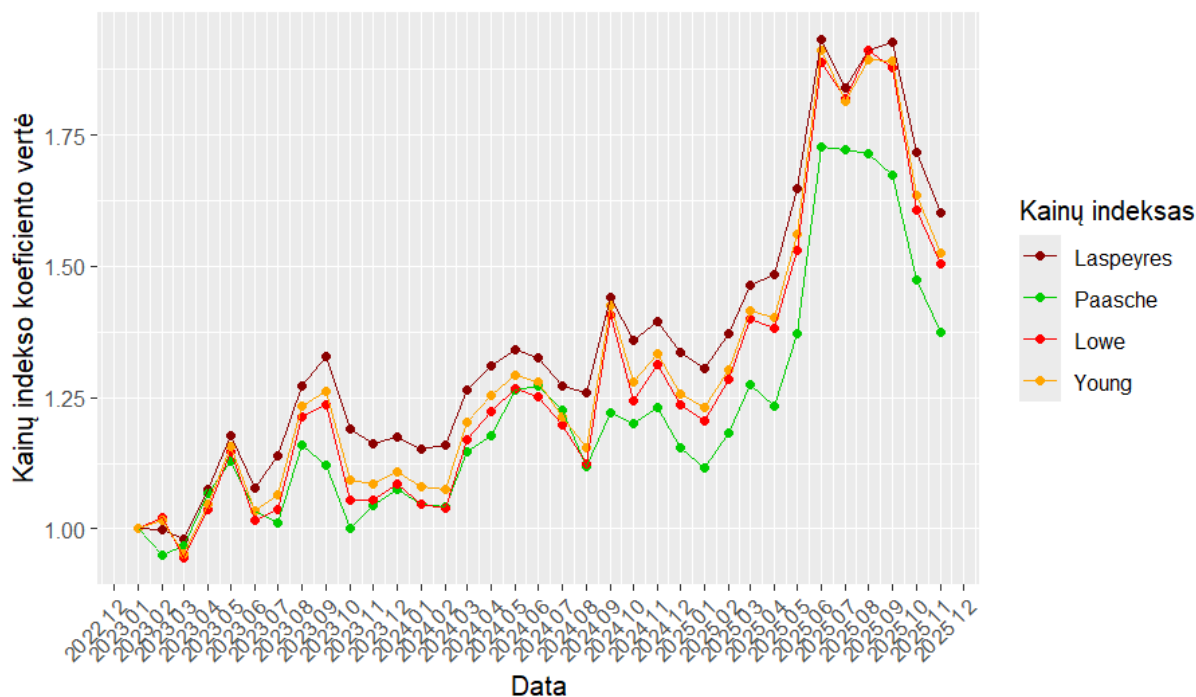
Kainų indeksas	Vidutinis nuokrypis	MAE	MAD	RMSE	Tiesinė koreliacija	DTW	Tendencijų koreliacija
Laspeyres	−0,08458	0,08458	0,08734	0,09979	0,648	2,464	0,907
Paasche	0,09689	0,09689	0,10589	0,10965	0,122	4,555	0,866
Lowe	0,02009	0,02027	0,02160	0,02260	0,897	0,442	0,880
Young	−0,01513	0,01671	0,01172	0,02176	0,899	0,521	0,906

Lyginant pieno produktų skirtingų bazinių kainų indeksų grandininio nuokrypio kitimus (27 pav.), matyti beveik analogiška situacija pieno imties produktų atveju. Beveik identiškai priešingomis kryptimis kinta Laspeyres ir Paasche grandininiai poslinkiai – Laspeyres kainų indeksas iki tiriamo laikotarpio pabaigos kainas

pervertina beveik 15 procentų, priešingu atveju Paasche beveik 16 procentų neįvertina iki tinkamo kainų lygio. Šiuo atveju grandininis nuokrypis gali būti pastebimas tik Young kainų indekso atžvilgiu ir tik iki 2024 metų balandžio mėnesio, vėliau šio kainų indekso grandininis nuokrypis pradeda didėti. Šiuo atveju, norint išvengti grandininio nuokrypio, reikėtų analizuoti Lowe ir Young kainų indeksų junginį. Ši prielaida jau buvo pastebėta analizuojant šių kainų indeksų statistinius rodiklius. Toliau atliekama obuolių bazinių kainų indeksų analizė, dėl to, jog būtų galima įsivertinti, kaip šie kainų indeksai, kai produktas yra sezoninis ir jo kainos kinta didesnėje amplitudėje, įvertina kainų lygio pasikeitimą ilgesniame laikotarpyje.



27 pav. Visų pieno produktų bazinių kainų indeksų grandininio nuokrypio kitimas.



28 pav. Obuolių imties bazinių kainų indeksų koeficientų kitimas.

Kadangi obuolių imties bei visų pardavimų duomenų rinkiniai beveik identiški, toliau skaičiavimams naudojami imties pardavimai. Remiantis bazinių kainų indeksų kitimais (28 pav.), matomas kiek agresyvesnis kainų lygio pasikeitimas lyginant su pieno produktų kainų lygio kaita. Labiausiai obuolių kainos buvo padidėjusios 2025 metų gegužės mėnesį, lyginant su 2023 metų sausio mėnesio kainomis, vėlesnių mėnesių kainų lygis mažėjo.

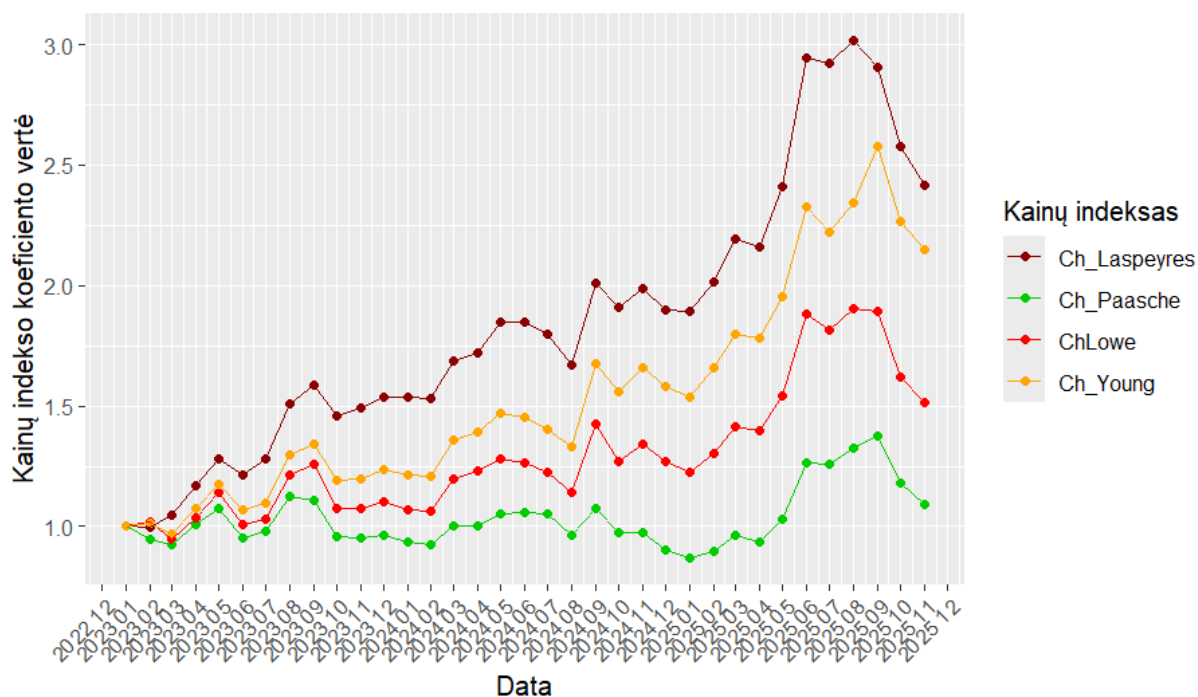
Obuolių atveju Lowe ir Young kainų indeksai kinta beveik identišškai, tai galima pastebėti ir pateiktame kitimo grafike bei analizuojant statistinius rodiklius – nuokrypių rodikliai patys mažiausi lyginant su kitų bazinių kainų indeksų poromis, o tiek tiesinės, tiek tendencijų koreliacija beveik lygi vienetui. Labiausiai nukrypsta Laspeyres ir Paasche kainų indeksai, kurių skirtumai buvo aptariami ir teorinėje bazinių kainų indeksų dalyje. Nors dispersija tarp šių kainų indeksų yra labai maža, vertinant nuokrypių prasme vidutinis nuokrypis apytiksliai siekia beveik 14 procentų, kiek mažiau – 7,5 procento – skiriasi Laspeyres bei Lowe kainų indeksai, bei 5,5 procento Laspeyres ir Young. Kadangi obuolių kainos priklauso nuo sezono ir kinta labiau nei, pavyzdžiui, pieno produktų, šiuo atveju DTW rodikliai, parodantys kainų indeksų laiko eilučių panašumą, yra žymiai didesni nei pieno produktų atžvilgiu. Kuo didesnę reikšmę šis rodiklis įgauna, tuo labiau laiko eilučių struktūra skiriasi, tad didesni kainų laiko eilučių pokyčiai gali būti paaiškinami didesne kainų kaita.

18 lentelė. *Obuolių imties bazinių kainų indeksų sąryšių charakteristikos.*

Kainų indeksas	Vidutinis nuokrypis	Dispersija	RMSE	MAD	Tiesinė koreliacija	DTW	Tendencijų koreliacija
Laspeyres ir Paasche	0,13925	0,005827	0,15827	0,13340	0,969	3,051	0,880
Laspeyres ir Lowe	0,07464	0,001558	0,08417	0,08599	0,989	2,559	0,969
Laspeyres ir Young	0,05454	0,000827	0,06147	0,06164	0,994	2,404	0,982
Paasche ir Lowe	–0,06460	0,004943	0,09474	0,05407	0,982	3,026	0,893
Paasche ir Young	–0,08470	0,004712	0,10840	0,07816	0,980	3,096	0,891
Lowe ir Young	–0,02010	0,000163	0,02371	0,02183	0,999	1,276	0,996

Analogiškai kaip ir pieno produktų atveju, nagrinėjime grandininius bazinius kainų indeksus (29 pav.). Šiuo atveju gauti rezultatai parodo, jog rezultatai stipriai skiriasi. Didžiausio kainų lygio momentu Laspeyres kainų indeksas parodo, jog kainos padidėjo net 200 procentų, kuomet Young kainų indekso atžvilgiu – apie 160 procentų, vertinant Lowe kainų indeksą – beveik 90 procentų, o Paasche kainų indeksas įvertina tik beveik 40 procentų kainų lygio padidėjimą.

Analizuojant grandininių bazinių kainų indeksų skaitines charakteristikas (žr. 19 lentelėje), vidutinio nuokrypio bei vidutinės absoliučiosios paklaidos absoliučiosios vertės yra beveik identiškos. Laspeyres kainų indeksas, susietas grandininiu būdu, yra vidutiniškai 49 procentiniais punktais didesnis, o Paasche – 18,3 procentinio punkto mažesnis. Tai tik dar kartą pagrindžia faktą, jog grandininis Laspeyres kainų indeksas linkęs pervertinti kainų lygio pasikeitimą, o Paasche – įvertinti nepakankamai. Mažiausiai nukrypta Lowe kainų indeksas, tai patvirtina mažiausi šio indekso nuokrypių rodikliai. Nors visų kainų indeksų koreliacijos sąlyginai aukštos, Paasche turi mažiausią tiesinės koreliacijos rodiklį. Lowe kainų indeksas bei jo grandinė modifikacija kinta beveik identišškai, nes koreliacijų rodikliai labai artimi vienetui. Galima kelti hipotezę, jog šio kainų indekso grandininis vidutinis nuokrypis gali būti artimas nuliui.



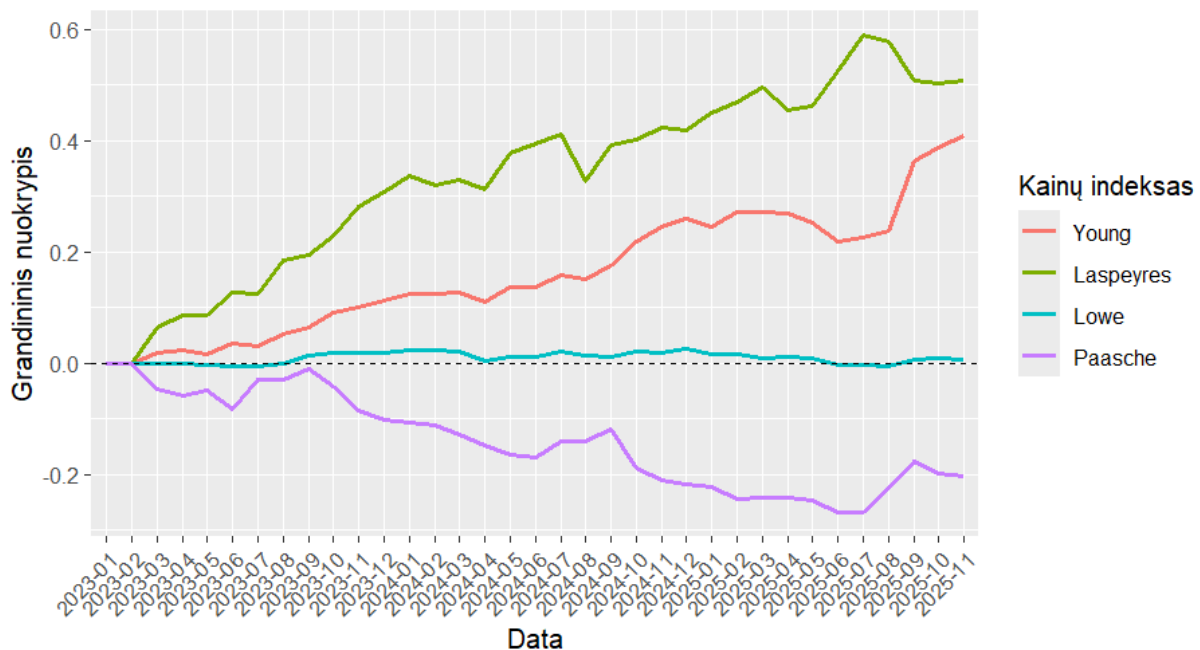
29 pav. obuolių imties grandiniu metodu susietų bazinių kainų indeksų koeficientų kitimas.

19 lentelė. obuoliai bazinių kainų indeksų palyginimas su grandininio metodo susietais baziniais kainų indeksais.

Kainų indeksas	Vidutinis nuokrypis	MAE	MAD	RMSE	Tiesinė koreliacija	DTW	Tendencijų koreliacija
Laspeyres	-0,48769	0,48769	0,50648	0,57340	0,985	10,293	0,937
Paasche	0,18320	0,18320	0,17150	0,22299	0,849	4,553	0,914
Lowe	-0,01160	0,01374	0,01355	0,01632	0,999	0,889	0,998
Young	-0,23183	0,23183	0,17568	0,29707	0,974	6,289	0,949

Analizuojant kainų indeksų laiko eilučių dinamiką bei struktūrą, DTW rodiklis įgauna bene didžiausias iki šio momento stebėtas reikšmes. Laspeyres kainų indekso atveju DTW lygus 10,293, kiek mažesnę reikšmę turi Young kainų indeksas – 6,289, o Paasche – 4,553. Lowe kainų indeksui DTW reikšmė panaši į anksčiau stebėtas reikšmes. Šių reikšmių skirtumai paaiškinami jau minėtais faktais dėl kainų indeksų teorinių savybių.

Beliko apžvelgti, kaip kinta grandininis nuokrypis obuolių bazinių kainų indeksų atveju. Remiantis toliau pateiktu grandininių nuokrypių kitimo grafiku (30 pav.), patvirtinama hipotezė, jog Lowe kainų indekso atveju grandininis nuokrypis artimas nuliui. Be to, jau ko ne įprastai, Laspeyres bei Young kainų indeksai turi teigiamą grandininį nuokrypį su didėjimo tendencija, o Paasche – neigiamą, kuri laikui bėgant mažėja arba kitaip tariant kinta priešinga linkme nei Laspeyres kainų indekso atveju. Šiuo atveju, kai kainos kinta labiau ir produktų kainos didesnės nei pieno produktų atveju, o tiriamojo laikotarpio pabaigoje stebimas smarkus kainų lygio padidėjimas, susidaro daug didesnis grandininis nuokrypis. Laspeyres kainų indekso atveju laikotarpio pabaigoje skirtumas siekia 50 procentų, Young – 40 procentų, o Paasche – 20 procentų.



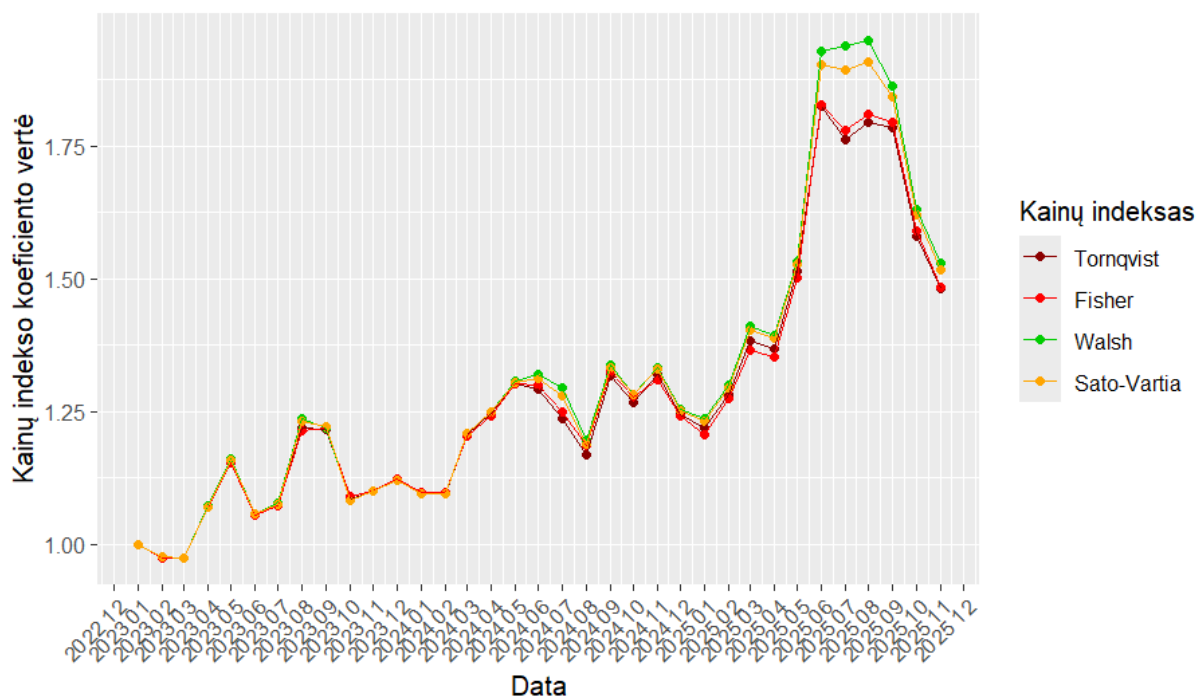
30 pav. Obuolių imties bazinių kainų indeksų grandininio nuokrypio kitimas.

Apibendrinant bazinių kainų indeksų analizę, galima daryti išvadą, jog grandininiai Laspeyres bei Paasche, lyginant juos su tiesiogiai skaičiuojamais kainų indeksais, linkę pakankamai pervertinti arba neįvertinti kainų lygio. Pieno bei obuolių produktų atžvilgiu mažiausią grandininį nuokrypį, beveik artimą nuliui, turėjo Lowe kainų indeksas, o visų pieno produktų atveju, norint gauti artimą nuliui nuokrypį, reikėtų nagrinėti Lowe ir Young kainų indeksų junginį. Vertinant kainų pokyčius tiriamuoju laikotarpiu, akivaizdu, jog pieno produktai brango sąlyginai mažiau nei obuoliai. Toliau atliekama superlatyvių kainų indeksų analizė.

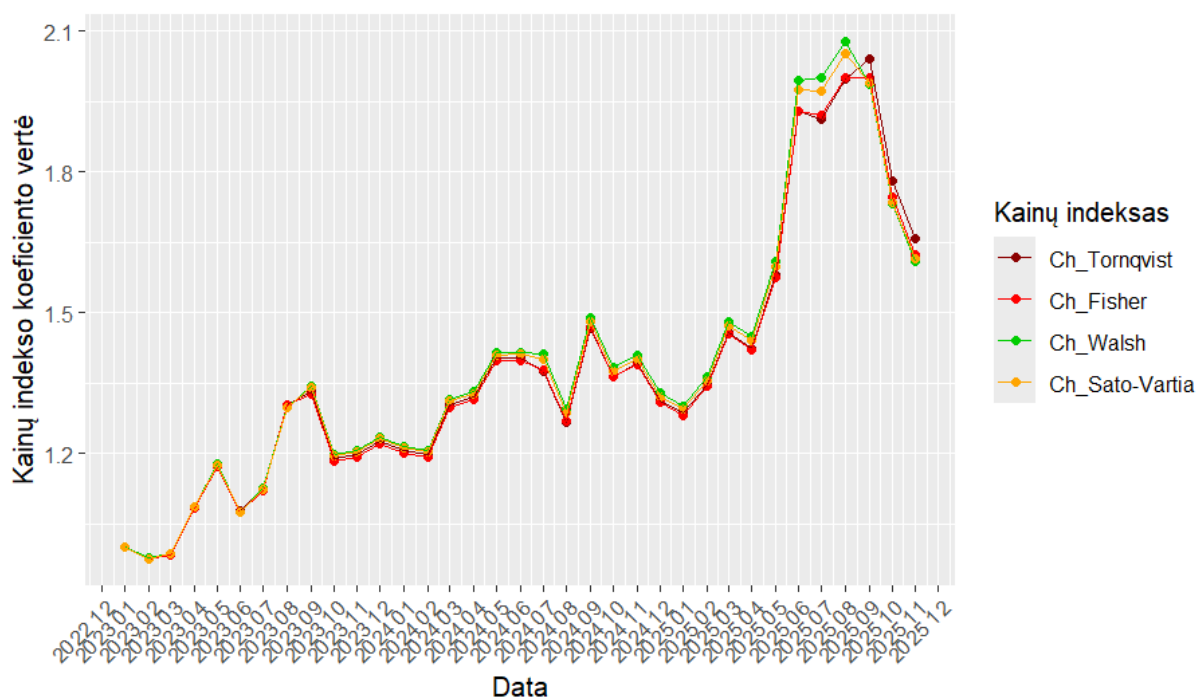
4.6. Superlatyvūs kainų indeksai

Siekiant įvertinti, kurie kainų indeksai savo rezultatais geriausiai įvertina kainų lygio pasikeitimą, svarbu atlikti skirtingų kainų indeksų analizę, tad toliau, išanalizavus elementariusius bei bazinius kainų indeksus, analizė tęsiama superlatyvių kainų indeksų skaičiavimu nagrinėjamų produktų grupėms. Superlatyvūs kainų indeksų pagrindinis skirtumas, lyginant juos su baziniais kainų indeksais, tas, jog šie kainų indeksai į kainų lygio nustatymą įtraukia kelių laikotarpių produktų kiekius ar išlaidų dalis, kurias sudaro tam tikras konkretus produktas. Superlatyvūs kainų indeksai, remiantis šių kainų indeksų sudarymo teorija, aproksimuoja vienas kitą, todėl teorijoje laikoma, jog superlatyvūs kainų indeksai yra antros ar aukštesnės eilės aproksimacijos. Remiantis šia prielaida, galima tikėtis, jog naudojant homogeniškus produktų pardavimų rinkinius, šie kainų indeksai turės labai panašias arba identiškas kitimo trajektorijas. Šias prielaidas aiškiai iliustruoja duonos bei pieno produktų superlatyvūs kainų indeksai. Šių kainų indeksų kitimo trajektorijos pateikiamos 4-ame priede (73 – 76 pav.). Gautos kainų indeksų reikšmės beveik identiškos, o grandininio būdu sujungti kainų indeksai didesnio skirtumo neparodo, išskyrus duonos produktams — Sato–Vartia bei Walsh kainų indeksams nuo 2024 metų spalio mėnesio iki 2025 metų lapkričio mėnesio išryškėja skirtumai tarp šių ir Törnqvist bei Fisher kainų indeksų, tačiau skirtumas neviršija pusės procentinio punkto.

Toliau nagrinėjime obuolių kainų indeksus. Superlatyvių kainų indeksų kitimas pateikiamas 31 ir 32 paveikslėliuose. Žvelgiant į pateiktus grafikus, akivaizdu, jog tiek kainų indeksai tarpusavyje, tiek lyginant įprastus su grandininio metodu susietais indeksais, kitimas beveik identiškas.



31 pav. Obuolių imties superlatyvių kainų indeksų koeficientų kitimas.



32 pav. Obuolių imties superlatyvių grandininiu metodu susietų kainų indeksų koeficientų kitimas.

Ryškesni skirtumai matyti aukščiausiame pakilimo intervale, kai kainų lygis reikšmingai padidėjęs, tuo atveju, Törnqvist ir Fisher kinta beveik identiškai, tačiau šių indeksų reikšmės mažesnės už Walsh ir Sato–Vartia kainų indeksus. Walsh ir Sato–Vartia indeksai labiau jautrūs parduotų kiekių pasikeitimams, o šiuo laikotarpiu, t. y. nuo 2025 metų gegužės iki tų pačių metų spalio mėnesio, remiantis nagrinėtais Bennet bei Montgomery kiekių indikatoriais, smarkiai sumažėja parduodamas kiekis, o kainų indikatoriai signalizuoja kainų lygio padidėjimą. Tiek įprasti superlatyvūs kainų indeksai, tiek grandininiu metodu susieti turi beveik identišką trajektoriją, tačiau skirtingai įvertina kainų lygio pasikeitimą. 2025 metų lapkričio mėnesį lyginant su 2023 metų sausio

mėnesio kainomis, stebimas 50 procentų kainų padidėjimas, o remiantis grandininio kainų indeksų rezultatu – padidėjimas kiek didesnis, t. y. 65 procentai.

Superlatyvių kainų indeksų kitimo tendencijos, remiantis grafiniu kitimu, yra beveik identiškos. Šiuos panašumus galima paaiškinti ir nuokrypių bei sąryšių charakteristikomis. Toliau 20-oje lentelėje pateikti nuokrypių rodikliai parodo, jog lyginant skirtingas superlatyvių kainų indeksų poras, nuokrypių rodikliai yra sąlyginai nedideli, o sąryšių rodikliai – tiesinės bei tendencijų koreliacijos, aiškiai identifikuoja stiprų tarpusavio kitimo sąryšį bei panašumus, nes rodikliai labai artimi vienetui.

20 lentelė. *Obuolių imties superlatyvių kainų indeksų statistinės charakteristikos bei tarpusavio sąryšio rodikliai.*

Kainų indeksas	Vidutinis nuokrypis	Dispersija	RMSE	MAD	Tiesinė koreliacija	DTW	Tendencijų koreliacija
Törnqvist ir Fisher	–0,00133	0,00007	0,00834	0,00423	0,9994	0,4092	0,9976
Törnqvist ir Walsh	–0,02657	0,00178	0,04936	0,01459	0,9966	1,4656	0,9746
Törnqvist ir Sato–Vartia	–0,02006	0,00098	0,03682	0,01103	0,9981	1,0989	0,9855
Fisher ir Walsh	–0,02524	0,00149	0,04569	0,00886	0,9976	1,4914	0,9800
Fisher ir Sato–Vartia	–0,01873	0,00078	0,03336	0,00744	0,9987	1,1283	0,9893
Walsh ir Sato–Vartia	0,00651	0,00012	0,01257	0,00226	0,9998	0,4162	0,9984

Lyginant tiesiogiai skaičiuojamų superlatyvių kainų indeksų rezultatus bei kitimo tendencijas su šių kainų indeksų grandininiais variantais, aiškiai matomos beveik identiškos kitimo tendencijos. Šį požymį pagrįsti galima remiantis gautais koreliacijų rezultatais (21 lentelėje) — nors tendencijų koreliacijos vidutiniškai vienos šimtosios dalimi yra mažesnės už tiesines koreliacijas, tačiau akivaizdžiai artimos vienetui, kas ir parodo stiprą identiško kitimo priklausomybę. Kitą vertus, nuokrypių rodikliai parodo, jog tarp tiesioginių ir grandinių kainų indeksų susidaro skirtumai nuo 8 iki 10 procentinių punktų, remiantis skirtingų rodiklių rezultatais. Tai akivaizdžiai matosi ir kitimo grafikuose, lyginant kainų indekso koeficientų vertės skales.

21 lentelė. *Superlatyvių kainų indeksų palyginimas su grandininiais kainų indeksais.*

Kainų indeksas	Vidutinis nuokrypis	MAE	MAD	RMSE	Tiesinė koreliacija	DTW	Tendencijų koreliacija
Törnqvist	–0,09285	0,09285	0,09638	0,10914	0,9894	2,9392	0,9770
Fisher	–0,08630	0,08630	0,08843	0,09878	0,9934	2,8280	0,9805
Walsh	–0,07851	0,07851	0,08074	0,08784	0,9913	2,5849	0,9792
Sato–Vartia	–0,07949	0,07949	0,07960	0,08912	0,9916	2,6970	0,9813

Palyginkime superlatyvių bei bazinių tiesioginių bei grandinių kainų indeksų susidariusius skirtumus. Superlatyvių kainų indeksų porų vidutiniai skirtumai (22 lentelė) neviršija 2,8 procentinio punkto, mažiausiai skiriasi Törnqvist ir Fisher kainų indeksai, tik 0,6 procentinio punkto, o daugiausiai Walsh ir Fisher. Tuo tarpu bazinių kainų indeksų skirtumai daug didesni (23 lentelė). Ryškus skirtumas matomas tarp Laspeyres ir Pasasche kainų indeksų, kuris vidutiniškai siekia 14,3 procentinio punkto, mažiausiu skirtumu pasižymi Lowe ir

Young kainų indeksai, tik 2,2 procentinio punkto, o šis rezultatas labiau panašesnis į superlatyvių kainų indeksų skirtumus.

22 lentelė. *Superlatyvių obuolių kainų indeksų vidutiniai skirtumai tarp tiesioginių bei grandininių kainų indeksų.*

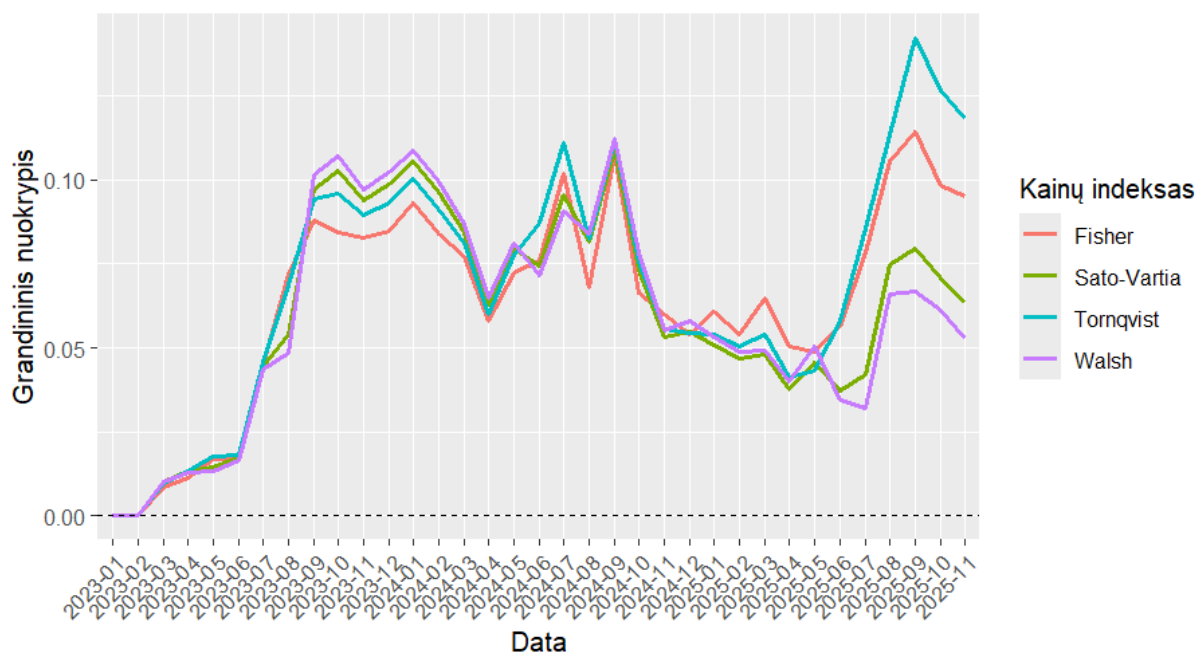
Kainų indeksas	Törnqvist	Fisher	Walsh	Sato-Vartia
Törnqvist	0,000	0,006	0,028	0,021
Fisher	0,006	0,000	0,027	0,020
Walsh	0,028	0,027	0,000	0,007
Sato-Vartia	0,021	0,020	0,007	0,000

23 lentelė. *Bazinių obuolių kainų indeksų vidutiniai skirtumai tarp tiesioginių bei grandininių kainų indeksų.*

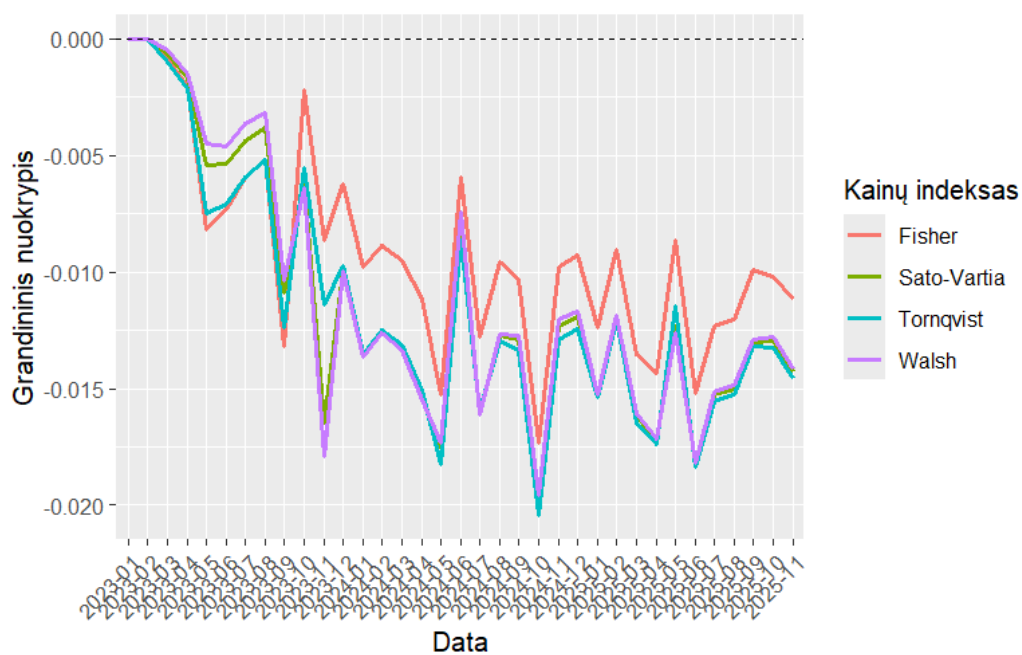
Kainų indeksas	Laspeyres	Paasche	Lowe	Young
Laspeyres	0,000	0,143	0,078	0,057
Paasche	0,143	0,000	0,074	0,090
Lowe	0,078	0,074	0,000	0,022
Young	0,057	0,090	0,022	0,000

Analogiškai, kaip ir bazinių kainų indeksų atveju, svarbu įvertinti grandininiu metodu sujungtų kainų indeksų nuokrypį nuo tiesioginiu palyginimu skaičiuojamų kainų indeksų. Toliau pateiktame grandininių nuokrypių kitimo grafike matyti, jog susidaro tik teigiamas nuokrypis, t. y. grandininiu metu sujungti kainų indeksai kainų lygį linkę pervertinti lyginant tiesiogiai skaičiuojant kainų indeksus. Svarbu pastebėti, jog susidaręs grandininis nuokrypis yra gan stipriai mažesnis nei Laspeyres ar Young kainų indeksų atvejais. Be to, superlatyvių kainų indeksų grandininio nuokrypio kitimo tendencijos neturi aiškos didėjimo ar mažėjimo tendencijos, kokią turi baziniai kainų indeksai. Galima teigti, jog superlatyvių kainų indeksų grandininis poslinkis yra mažesnis nei bazinių kainų indeksų. Dėl šios savybės praktikoje superlatyvūs kainų indeksai laikomi patikimesniais.

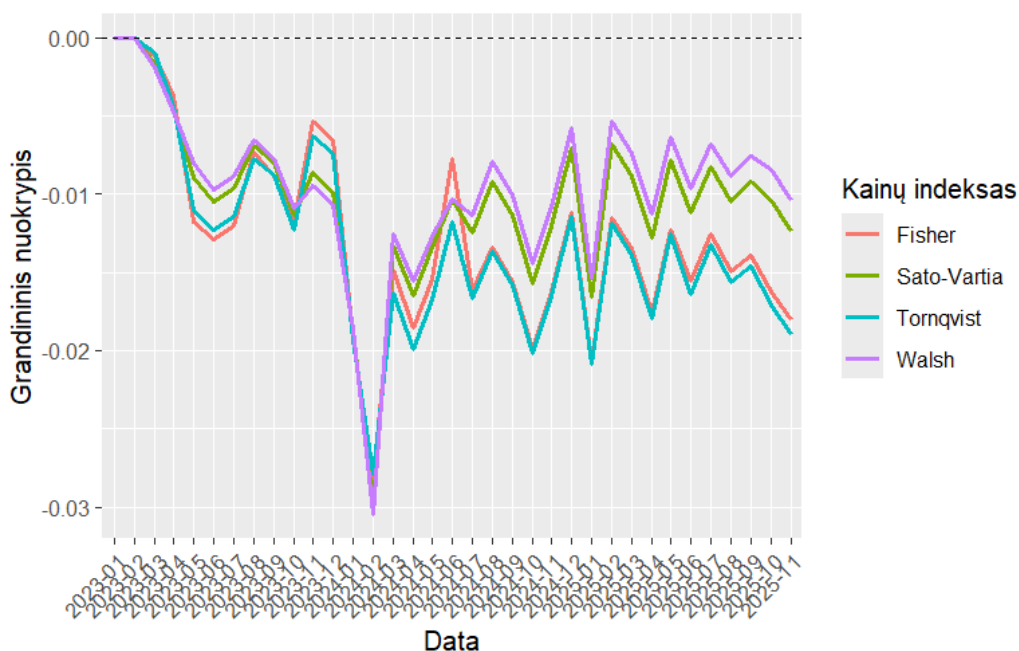
Taip pat palyginkime ir pieno produktų superlatyvių kainų indeksų grandinius nuokrypius (34 ir 35 pav.). Pieno tiek imties, tiek visų produktų atvejais grandininis nuokrypis yra neigiamas, o tai parodo, jog grandininiai kainų indeksai įgyja mažesnes reikšmes. Lyginant rezultatus buvo matyti, jog pieno produktų kainų lygis lyginant su 2023 metų sausio mėnesio kainomis visą tiriamąjį laikotarpį buvo mažesnis, todėl grandininiai kainų indeksai parodo didesnį kainų lygio kritimą. Analizuojant panašumus tarp superlatyvių bei bazinių kainų indeksų grandininių nuokrypių, išryškėja superlatyvių kainų indeksų pranašumas. Šių indeksų grandininis nuokrypis drastiškai skiriasi nuo bazinių kainų indeksų grandininių nuokrypių, kuomet absoliučiomis reikšmėmis Laspeyres bei Paasche kainų indeksai nukrypavo daugiau nei 10 procentų, superlatyvių kainų indeksų grandininis nuokrypis neviršija 3 procentų. Didžiausią panašumą turi Lowe kainų indeksas pieno imties produktų atveju, nes jo grandininis nuokrypis artimas nuliui, o visų pieno produktų atžvilgiu, artimiausiu rezultatu pasižymėtų Lowe ir Young kainų indeksų junginys.



33 pav. Obuolių imties superlatyvių kainų indeksų grandininį nuokrypių kitimas.

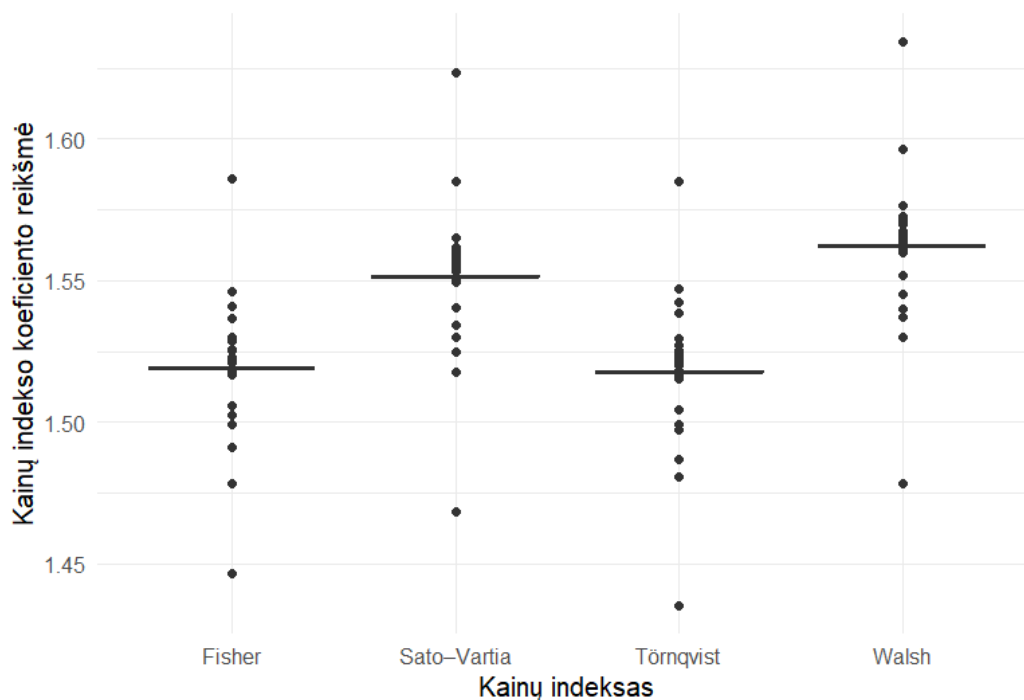


34 pav. Pieno imties produktų superlatyvių kainų indeksų grandininį nuokrypių kitimas.



35 pav. Visų pieno produktų superlatyvių kainų indeksų grandininių nuokrypių kitimas.

Pieno imties produktų atžvilgiu tiriamojo laikotarpio pradžioje superlatyvių kainų indeksų grandininis nuokrypis turi aiškią mažėjimo tendenciją, vėliau stabilizuojasi ir kinta intervale $(-0,02; -0,075)$. Fisher kainų indekso, lyginant absoliučias reikšmes, kiek mažesnis už kitų kainų indeksų. Visų pieno produktų superlatyvių kainų indeksų grandininio didžiausio nukrypimo momentų lygis lygus -3 procentiniams punktams 2024 metų vasario mėnesį, tačiau vėliau stabilizuojasi ir kinta intervale $(-0,02; -0,005)$. Grandininio nuokrypio kitimais panašūs Törnqvist ir Fisher kainų indeksų pora bei Sato–Vartia ir Walsh.



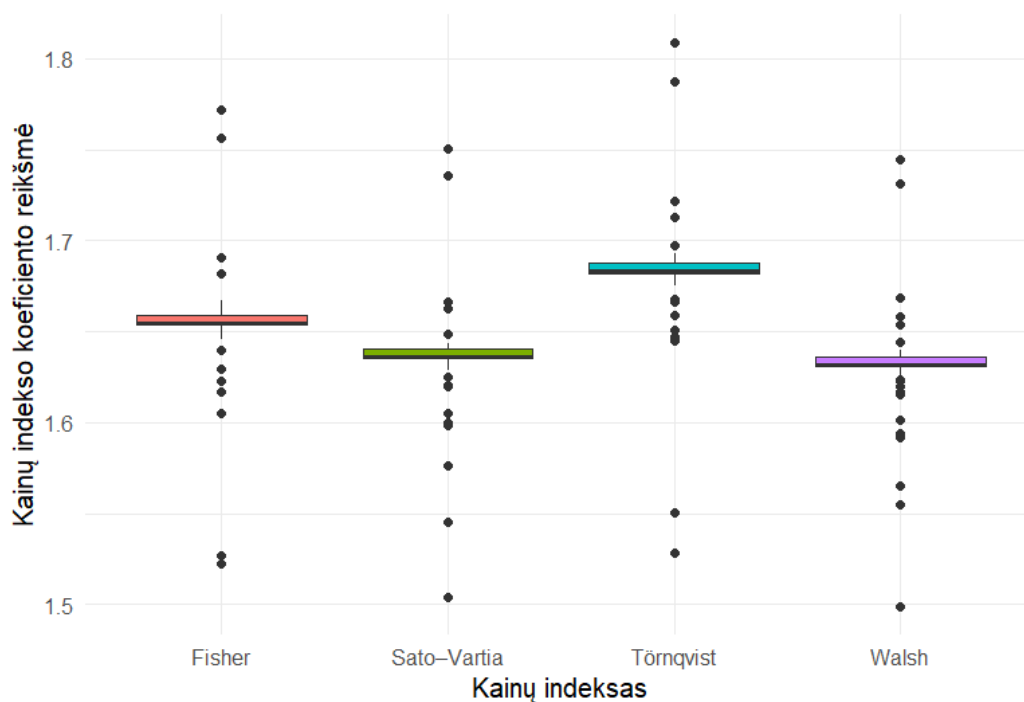
36 pav. Jackknife metodu apskaičiuotų obuolių imties superlatyvių kainų indeksų rezultatų diagrama.

Tolimesnėje analizėje testuosime superlatyvių kainų indeksų elastingumą, naudojant *Jackknife* metodą. Šio metodo esmė – iš duomenų imties pašalinus po vieną produktą perskaičiuoti kainų indeksą. Šis metodas leidžia įsivertinti, ar kainų indeksas jautrus naudojamų duomenų struktūrai. Šis statistinis metodas buvo pritaikytas obuolių imties duomenų rinkiniui, ir skaičiuojami tiesioginiai bei grandininiai superlatyvūs kainų indeksai. Modeliavimo rezultatai pateikiami 36 ir 37 paveikslėliuose.

Remiantis gautais rezultatais, pateiktais 24 ir 25 lentelėse, tiek skaičiuojant įprastus, tiek grandininus, superlatyvūs kainų indeksai neparodė didesnio kintamumo. Atsparumo duomenims testavimo metu iteracijų vidurkis sutapo su tikruoju atitinkamo kainų indeksų viso laikotarpio vidurkiu, o gauti standartinio nuokrypio bei variacijos rodikliai maži. Grandinių superlatyvių kainų indeksų atveju šie rodikliai beveik du kartus didesni, tai galima paaiškinti tuo, jog analizuojant kainų indeksų reikšmes buvo galima įžvelgti, jog gautos reikšmės buvo didesnės nei tiesiogiai skaičiuojamų kainų indeksų. Nors gauti rezultatai parodo, jog superlatyvūs kainų indeksai gan stabilūs duomenų atžvilgiu, visgi reiktų atkreipti dėmesį į išsiskiriančias reikšmes.

24 lentelė. Superlatyvių kainų indeksų iteracijų statistikos

Kainų indeksas ir parametras	Vidurkis	Standartinis nuokrypis	Variacijos koeficientas	Tikrasis vidurkis
Fisher	1,52	0,0163	0,0107	1,52
Sato-Vartia	1,55	0,0172	0,0111	1,55
Törnqvist	1,52	0,0173	0,0114	1,52
Walsh	1,56	0,0172	0,0110	1,56

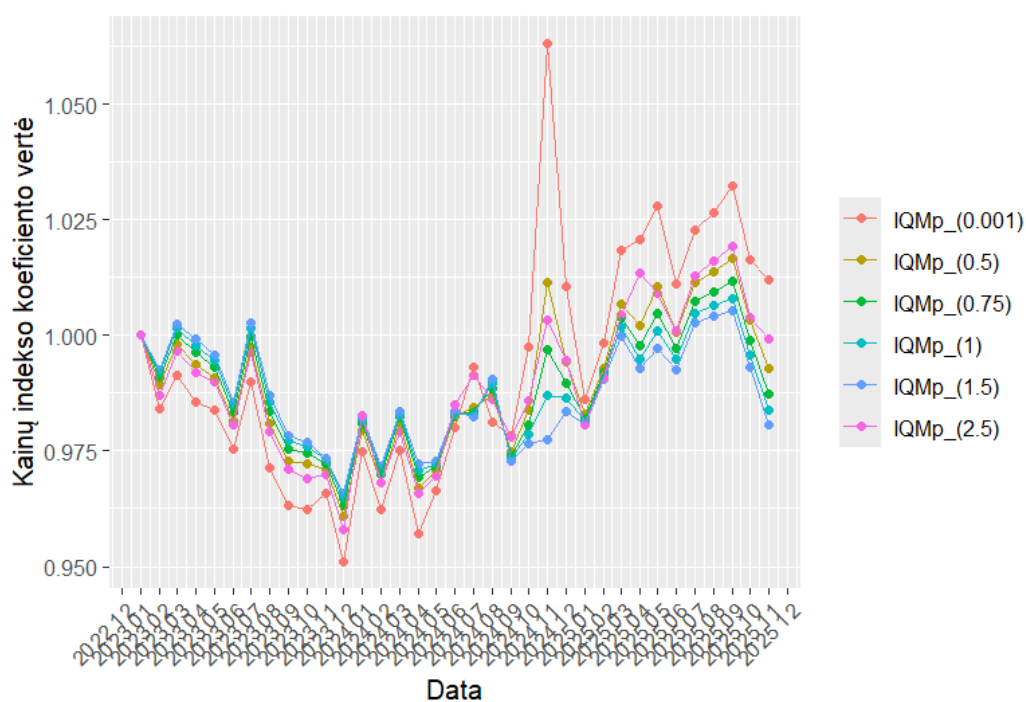


37 pav. Jackknife metodu apskaičiuotų obuolių imties grandinių superlatyvių kainų indeksų rezultatų diagrama.

25 lentelė. Grandinių superlatyvių kainų indeksų iteracijų statistikos.

Kainų indeksas ir parametras	Vidurkis	Standartinis nuokrypis	Variacijos koeficientas	Tikrasis vidurkis
Fisher	1,65	0,0346	0,0209	1,65
Sato–Vartia	1,63	0,0316	0,0199	1,63
Törnqvist	1,68	0,0370	0,0220	1,68
Walsh	1,63	0,0323	0,0198	1,63

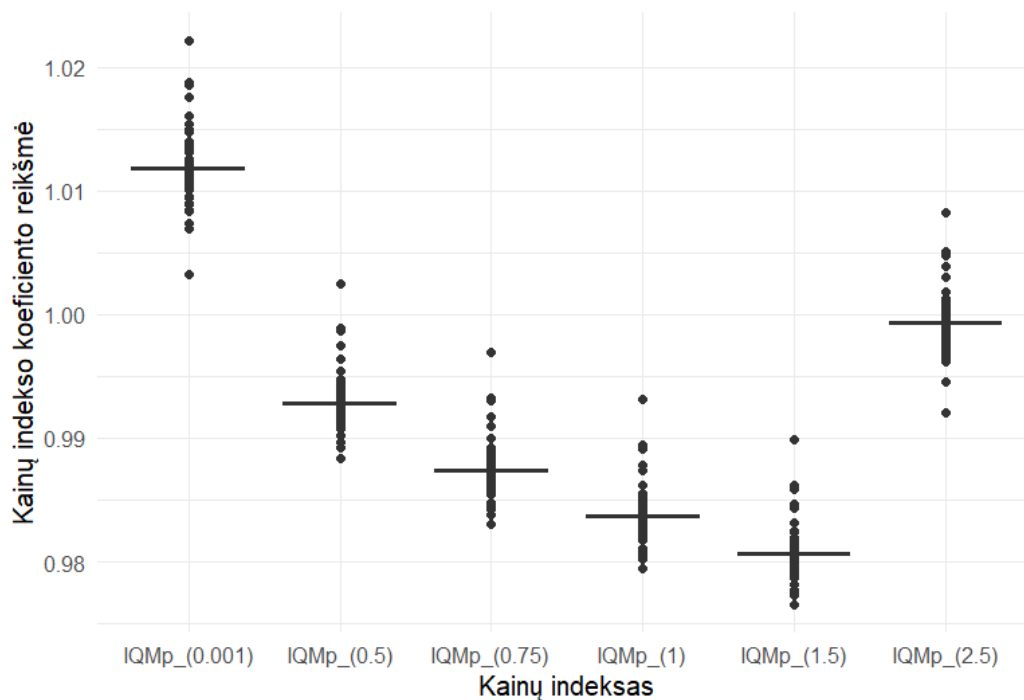
Nagrinėjant superlatyvius kainų indeksus bei analizuojant jų išraiškas, galima pastebėti, jog, lyginant su baziniais kainų indeksais, šie kainų indeksai turi kelių laikotarpių svorių sistemas. Be to, šie kainų indeksai gali ir turėti papildomus parametrus. Vienas tokių kainų indeksų yra r -ojo laipsnio kvadratinio vidurkio kainų indeksas, kuris išraiškoje turi parametą r . Naudojant skirtingas parametro r reikšmes galima gauti ir skirtingus šio kainų indekso rezultatus, tad šį kainų indeksą analizuojame atskirai. Pasirinkus kelias skirtingas parametro r reikšmes, kai $r \in \{0,001; 0,5; 0,75; 1; 1,5; 2,5\}$ ir suskaičiavus atitinkamo r -ojo laipsnio kvadratinio vidurkio kainų indeksą, gautus rezultatus galima matyti 38 paveikslėlyje.



38 pav. Superlatyvaus r -ojo laipsnio kvadratinio vidurkio duonos imties produktų kainų indeksų koeficientų kitimo grafikas pasirinktoms parametro r reikšmėms.

Kai parametras r artėja link nulio, r -ojo laipsnio kvadratinio vidurkio kainų indeksas savo išraiška artėja geometrinio Laspeyres kainų indekso link, kai $r = 1$, tampa Laspeyres kainų indeksu. Analizuojant gautus rezultatus, didesnius nuokrypius galima matyti, kai parametras r yra mažas, šiuo atveju $r \in \{0,0001; 0,5\}$, arba aukštas, t. y. $r = 2,5$. Naudojant tarpines reikšmes, gautos kainų indekso reikšmės kinta beveik identiška su nedideliais skirtumais tam tikrais laikotarpiais. Kai $r = 0,001$, susidarę nuokrypiai yra didžiausi. Iki stebimojo laikotarpio vidurio, šio kainų indekso reikšmės mažiausios, vėliau tampa didžiausiomis.

Kaip ir Törnqvist kainų indekso atveju, šio kainų indeksų parametro jautrumo testavimui naudojamas *Jackknifemetodas*. Šio metodo rezultatai pateikiami 39 paveikslėlyje bei 24 lentelėje. Kuomet parametras r didėja iki 1,5 imtinai, gauti rezultatai identifikuoja kainų indeksų vidurkio mažėjimą. Kai $r = 2,5$, kainų indekso vidurkis lygus beveik 1. Kiekvieno parametro atveju skaičiuojamų kainų indeksų vidurkiai kinta vieno procentinio punkto ribose abejomis kryptimis, o remiantis skaitinėmis charakteristikomis kiekvienam parametrui r tikrasis vidurkis sutapo su iteracijų vidurkiu. Be to, skirtingų parametrų iteracijos pasižymi mažais standartinio nuokrypio bei variacijos koeficientais, kas parodo šio kainų indekso stabilumą nepriklausomai nuo parametro pasirinkimo. Šio kainų indekso iteracijų nuokrypiai yra daug mažesni nei Törnqvist kainų indekso, skaičiuojamo pieno imties produktams, tad šiuo atveju r -ojo laipsnio kvadratinio vidurkio kainų indeksas yra kiek stabilesnis, tačiau lieka tinkamai įvertinti parametras r .



39 pav. Jackknife metodu apskaičiuotų duonos imties produktų r -ojo laipsnio kvadratinio vidurkio kainų indeksų rezultatų diagrama.

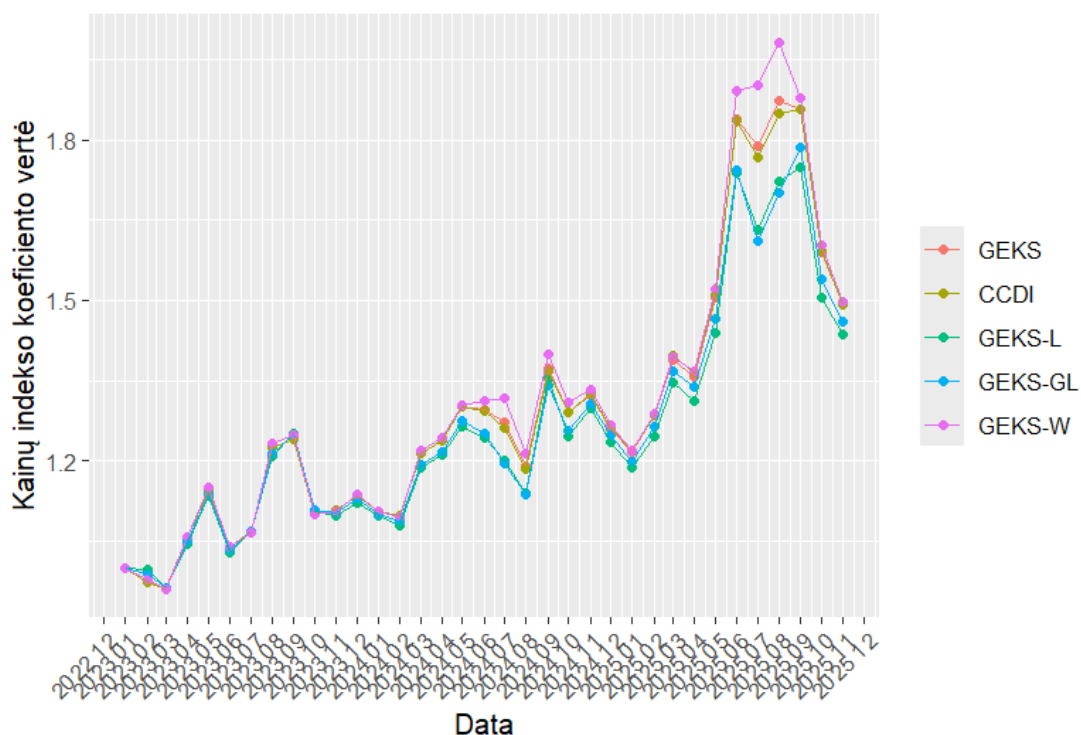
26 lentelė. Jackknife metodo r -ojo laipsnio kvadratinio vidurkio kainų indeksų iteracijų statistikos.

Kainų indeksas ir parametras	Vidurkis	Standartinis nuokrypis	Variacijos koeficientas	Tikrasis vidurkis
IQMp (0,001)	1,010	0,00119	0,00117	1,010
IQMp (0,5)	0,993	0,00094	0,00094	0,993
IQMp (0,75)	0,987	0,00090	0,00091	0,987
IQMp (1)	0,984	0,00088	0,00090	0,984
IQMp (1,5)	0,981	0,00087	0,00088	0,981
IQMp (2,5)	0,999	0,00098	0,00098	0,999

Apibendrinant superlatyvių kainų indeksų rezultatus, galima teigti, jog šie kainų indeksai sudaro mažesnį grandininį nuokrypį lyginant su bazinių kainų indeksų rezultatais. Be to, superlatyvūs kainų indeksai tarpusavyje aproksimuoja vienas kitą, tai parodė ir gauti labai panašūs arba kai kuriais laikotarpiais identiški kainų indeksų rezultatai. Testuojant šių kainų indeksų atsparumą *Jackknife* metodu, rezultatai parodė, jog tikrieji kainų indeksų vidurkiai sutampa su iteracijų vidurkiais, tad šie rezultatai patvirtina šių kainų indeksų teorines sudarymo savybes. Nors remiantis rezultatais matome, jog šie kainų indeksai kol kas yra geriausi lyginant skaitines charakteristikas, kvitų duomenims skaičiuoti labiausiai rekomenduojami daugialypiai kainų indeksai. Praktinė dalis tęsiama šių kainų indeksų analize.

4.7. Daugialypiai kainų indeksai

Šis skyrius skirtas atlikti daugialypių kainų indeksų bei jų parametrų analizę. Šie kainų indeksai yra labiausiai rekomenduojami skaičiuoti kainų lygių pasikeitimus naudojant prekybos tinklų kvitų duomenis. Daugialypiai kainų indeksai ne tik išsiskiria savo struktūrine sandara, bet ir parametrų gausa. Pagrindiniai parametrai, kurių įtaka bus tiriama toliau, yra laiko lango pasirinkimas bei kainų indeksų laiko eilučių sujungimo metodai. Toliau bus nagrinėjami GEKS, CCDI, GEKS–L, GEKS–GL bei GEKS–W kainų indeksai bei šių indeksų parametrų modifikacijos. Standartiškai praktikoje naudojami 13 ar 25 mėnesių laiko langai, nes šie laikotarpiai apima vieną ar du sezonus, tačiau toliau bus analizuojami 4, 7, 10 ir 13 mėnesių laiko langai. Šie pasirinkimai leidžia įvertinti ketvirčio, pusmečio, trijų ketvirčių bei metų laikotarpių įtaką kainų indeksams. Be to, toliau tirsime ne tik laiko lango įtaką, bet ir kainų indeksų laiko eilučių susiejimo metodus. Skaičiavimai atliekami naudojant obuolių pardavimų duomenų rinkinį. Kitų duomenų rinkinių atvejais gauti rezultatai panašūs, o gautos išvados analizuojant rezultatus identiškos, tačiau toliau skaičiavimui naudojamas tik obuolių pardavimų duomenų rinkinys, kuriam naudojant skirtingus parametrus rezultatų skirtumai pastebimi ryškiausiai.



40 pav. Obuolių daugialypių kainų indeksų kitimo grafikas.

Daugialypių kainų indeksų, suskaičiuotų naudojant obuolių pardavimų duomenis, kitimas pateikiamas 40 paveikslėlyje. Šiuo atveju kainų indeksams skaičiuoti naudojamas praktikoje standartiniu laikomu 13 mėnesių laiko langas bei paskutinio laikotarpio kainų indeksų laiko eilučių susiejimo metodas. Pirmaisiais 13 mėnesių, nepriklausomai nuo pasirinkto kainų indekso, kitimas yra identiškas su nuokrypiu artimu nuliui, vėliau išryškėja nežymūs skirtumai, kurie įgyja didžiausias reikšmes didžiausio pabrangimo laikotarpiu. GEKS–W kainų indeksas įgyja didžiausias reikšmes, mažiausias reikšmes – GEKS–L ir GEKS–GL kainų indeksai. GEKS ir CCDI kainų indeksai savo reikšmėmis atitinka paminėtų kainų indeksų vidurkį. Rezultatus galima paaiškinti šių kainų indeksų struktūra: GEKS–L ir GEKS–GL agregavimui naudoja bazinius Laspeyres tipo indeksus, šių kainų indeksų panaudojimas yra nestandartinis, nes praktikoje GEKS kainų indeksai agreguojami naudojant superlatyvius kainų indeksus. Gauti rezultatai aiškiai identifikuoja, kodėl bazinių kainų indeksų įtraukimas pakeičiant superlatyvius kainų indeksus – baziniai kainų indeksai gali neįvertinti kainų lygio, nes šie atsižvelgia tik į bazinio laikotarpio svorius, kuomet superlatyvus įtraukia kelių laikotarpių svorių sistemas, kas šiuo atveju yra arčiau GEKS skaičiavimo struktūros, t. y. kainų indeksui skaičiuoti naudojami visi pasirinkto laiko lango duomenys. GEKS–W kainų indekso reikšmės taip pat paaiškinamos struktūriniais skirtumais. Walsh kainų indeksas į skaičiavimus įtraukia kvadratinį kiekių vidurkį, o šis įprastai yra kiek didesnis už aritmetinį, tad šis kainų indeksas, lyginant su, pavyzdžiui, Laspeyres kainų indeksu, yra linkęs pervertinti kainų lygį.

Toliau pateiktoje 27 lentelėje suskaičiuoti vidutiniai nuokrypiai, susidarę tarp skirtingų daugialypių kainų indeksų. Mažiausias skirtumas yra tarp GEKS ir CCDI bei GEKS–L ir CCDI kainų indeksų, didžiausias – tarp GEKS–L ir GEKS–W. Rezultatai patvirtina, jog GEKS kainų indeksuose naudojami superlatyvūs kainų indeksai agregavimui yra beveik identiški, tad agregavimui gali būti naudojamas bet kuris standartinis superlatyvus kainų indeksas. Šiuo atveju Walsh kainų indeksas priskiriamas prie nestandartinių kainų indeksų, nes Walsh kainų indeksas svoriams naudoja kiekių geometrinį vidurkį.

27 lentelė. *Daugialypių kainų indeksų vidutiniai tarpusavio skirtumai.*

Kainų indeksas	GEKS	CCDI	GEKS–L	GEKS–GL	GEKS–W
GEKS	0,000	0,004	0,041	0,034	0,016
CCDI	0,004	0,000	0,040	0,033	0,017
GEKS–L	0,041	0,040	0,000	0,011	0,056
GEKS–GL	0,034	0,033	0,011	0,000	0,049
GEKS–W	0,016	0,017	0,056	0,049	0,000

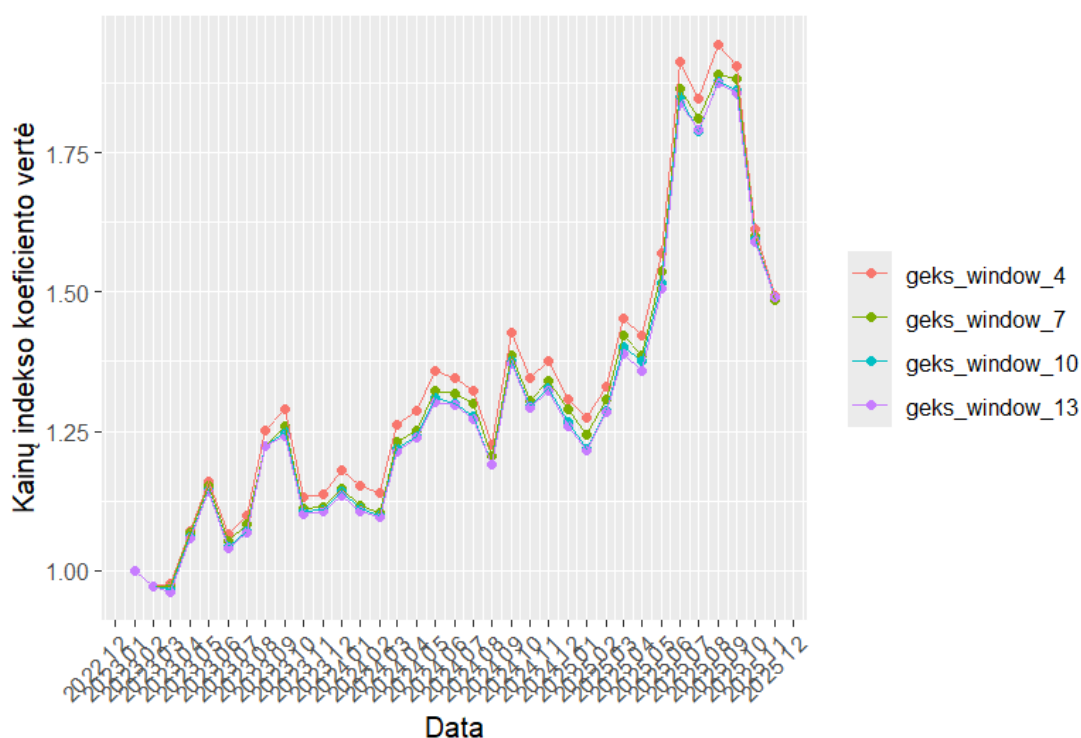
Pagrindinės daugialypių kainų indeksų tarpusavio statistinės charakteristikos pateikiamos 28 lentelėje. Gauti rezultatai parodo, jog GEKS ir CCDI kainų indeksai iš esmės yra identiški, nes jų nuokrypiai patys mažiausi, o koreliacija tiek tiesinė, tiek tendencijų didžiausia ir beveiki lygi vienetui. Kitų kainų indeksų tarpusavio poros turi kiek didesnius skirtumus. Šie labiausiai išryškėja GEKS tipo kainų indeksuose, kurie agregavimui naudoja superlatyvius, lyginant su indeksais, kurie savo struktūrose turi bazinių kainų indeksų agregatus. Neigiamą vidutinį nuokrypį turi GEKS–L ir GEKS–GL kainų indeksai, tai buvo galima identifikuoti remiantis kitimo grafiku, nes GEKS–GL įgija ne daug, bet didesnes reikšmes. Akivaizdu, lyginant kainų indeksus su didžiausias reikšmes įgijusi GEKS–W kainų indeksu, kitų kainų indeksų atžvilgiu, vidutinis nuokrypis yra neigiamas. Apibendrinant nuokrypių rodiklius, šie yra santykinai maži. Taip pat rodikliai gan panašūs superlatyvių kainų indeksų atveju, tačiau žymiai skiriasi lyginant juos su baziniais kainų indeksais. Lyginant tiesinės koreliacijas, akivaizdu, jog GEKS tipo kainų indeksai nepriklausomai nuo agregavimui naudojamų superlatyvių ar bazinių kainų indeksų

kinta beveik identišškai. Analogišką vaizdą parodo ir tendencijų koreliacijos rodikliai, išskyrus tendencijos kitimo atžvilgiu GEKS–GL ir GEKS–W kainų indeksus, kurių rodiklis mažiausias iš visų kainų indeksų porų. Šį rodiklį galima paaiškinti grafike matomais skirtumais didžiausio kainų lygio pakilimo laikotarpyje.

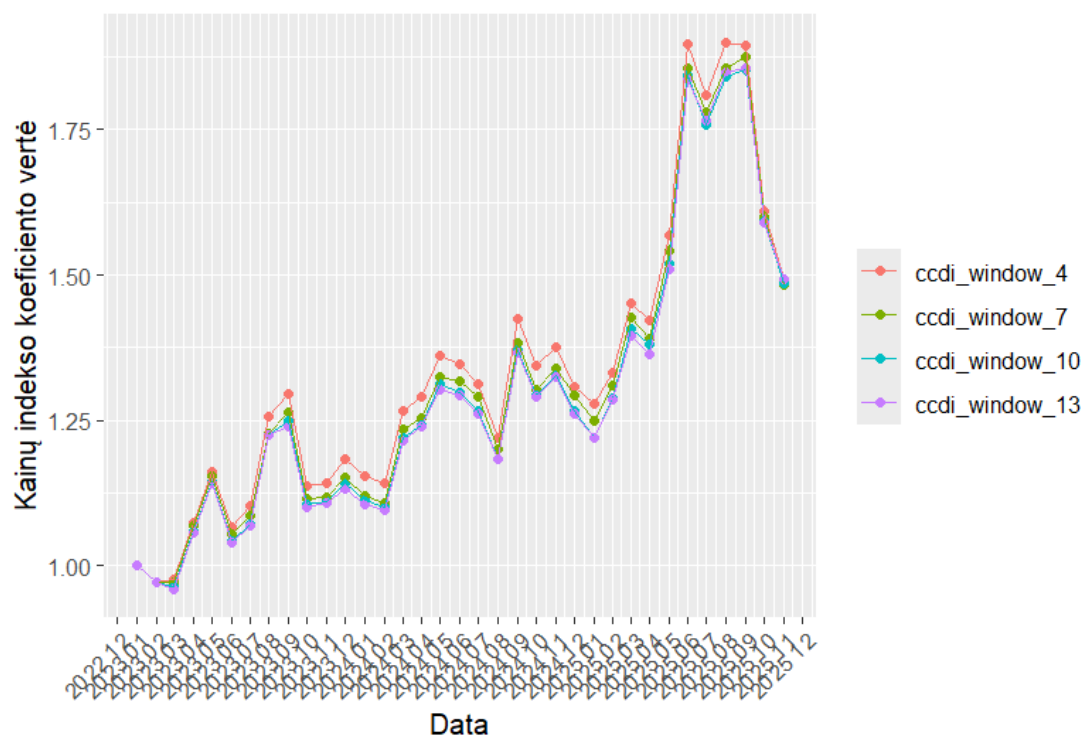
28 lentelė. Daugialypių kainų indeksų priklausomybės ir nuokrypių statistinės charakteristikos.

Kainų indeksai	Vidutinis nuokrypis	Dispersija	RMSE	MAD	Tiesinė koreliacija	DTW	Tendencijų koreliacija
GEKS ir CCDI	0,00167	0,00004	0,00667	0,00144	0,99971	0,2468	0,998
GEKS ir GEKS–L	0,03767	0,00177	0,05601	0,02749	0,99657	2,0896	0,981
GEKS ir GEKS–GL	0,03116	0,00193	0,05332	0,02011	0,99320	1,6390	0,965
GEKS ir GEKS–W	–0,01491	0,00072	0,03036	0,00632	0,99767	0,8520	0,984
CCDI ir GEKS–L	0,03600	0,00147	0,05217	0,02794	0,99754	1,9953	0,986
CCDI ir GEKS–GL	0,02949	0,00150	0,04826	0,02192	0,99545	1,5932	0,977
CCDI ir GEKS–W	–0,01658	0,00108	0,03632	0,00424	0,99585	0,9614	0,973
GEKS–L ir GEKS–GL	–0,00651	0,00017	0,01436	0,00695	0,99821	0,7295	0,992
GEKS–L ir GEKS–W	–0,05258	0,00440	0,08390	0,03258	0,99064	2,5576	0,943
GEKS–GL ir GEKS–W	–0,04608	0,00490	0,08298	0,02460	0,98360	2,3338	0,908

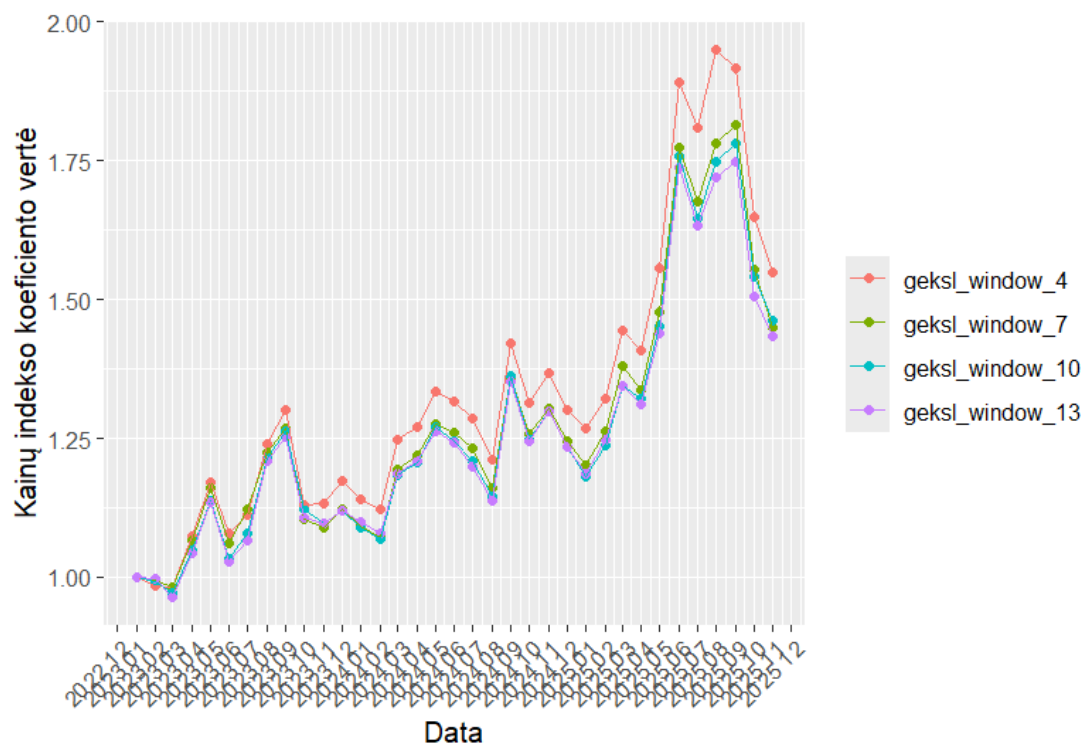
Apžvelgę daugialypių kainų indeksų bendrus statistinius rodiklius, toliau atlikime šių kainų indeksų parametų analizę. Pagrindiniai daugialypių GEKS tipo kainų indeksų parametrai yra skaičiavimui naudojamas laiko langas bei kainų indeksų laiko eilučių susiejimas. Pirmiausiai atliekama laiko lango įtakos analizė. Skaičiavimams pasirenkami 4, 7, 10 ir 13 mėnesių laiko langai, kuriuos naudojant kainų indeksams įtaką turi paskutinis ketvirtis, pusė, trys ketvirčiai arba pilni metai. Suskaičiuotų daugialypių kainų indeksų kitimai vaizduojami žemiau pateiktuose grafikuose.



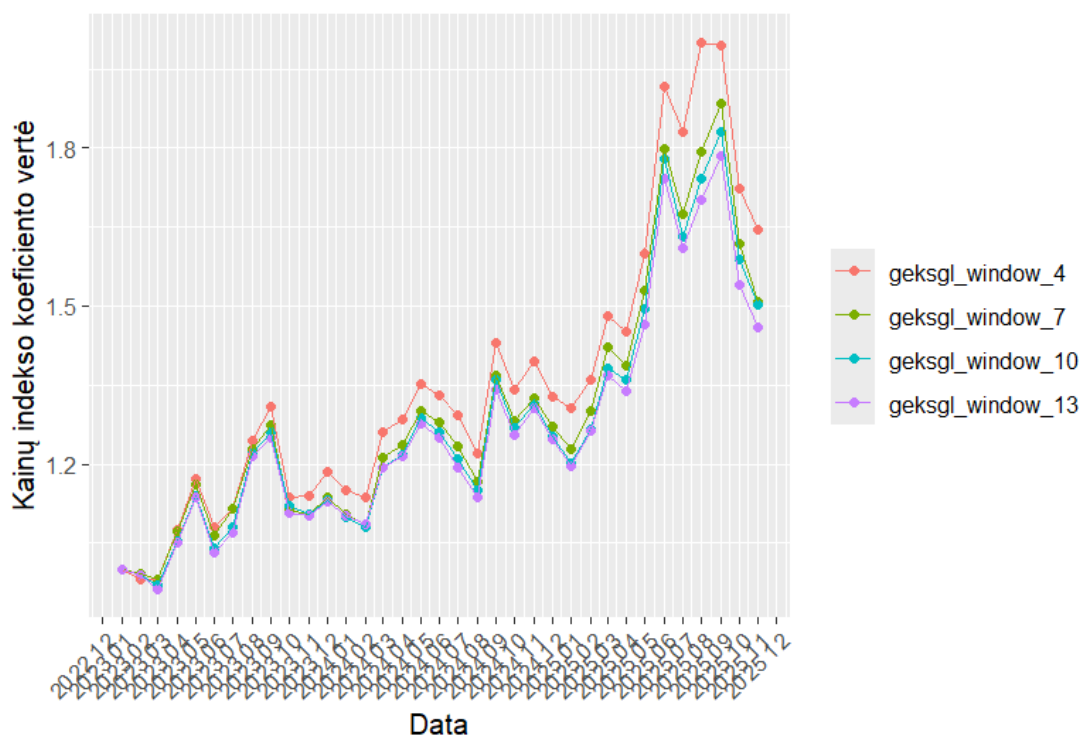
41 pav. GEKS obuolių kainų indeksas su 4, 7, 10 bei 13 mėnesių laiko lango trukmėmis.



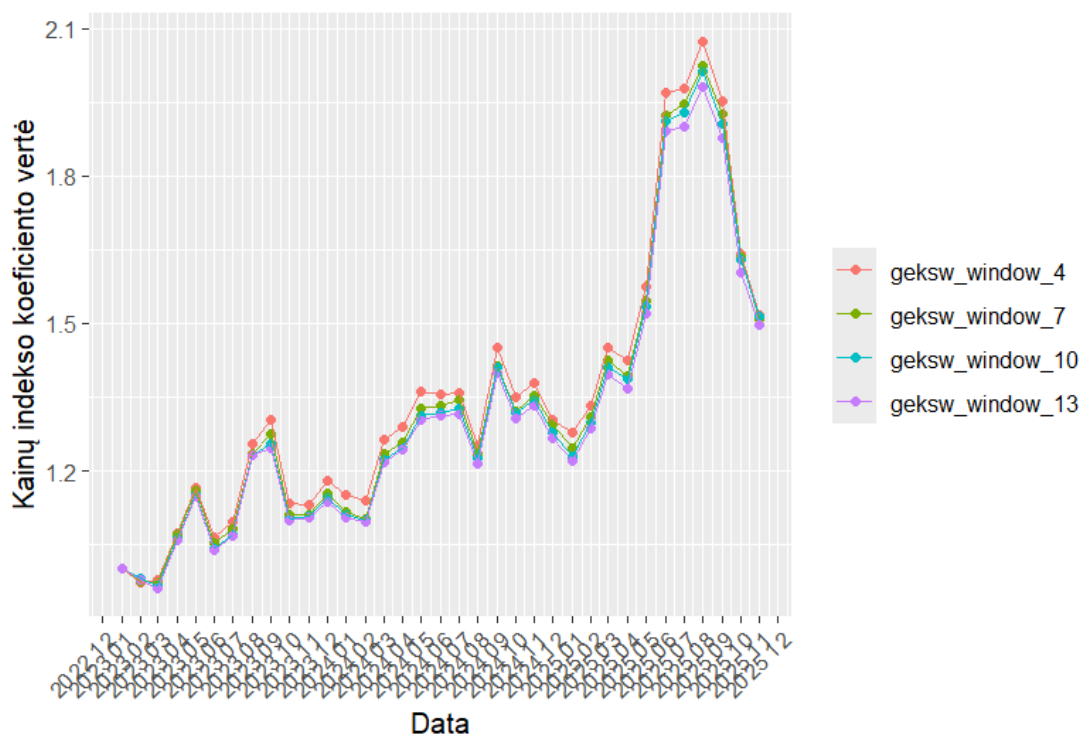
42 pav. CCDI obuolių kainų indeksas su 4, 7, 10 bei 13 mėnesių laiko lango trukmėmis.



43 pav. GEKS–L obuolių kainų indeksas su 4, 7, 10 bei 13 mėnesių laiko lango trukmėmis.



44 pav. GEKS–GL obuolių kainų indeksas su 4, 7, 10 bei 13 mėnesių laiko lango trukmėmis.

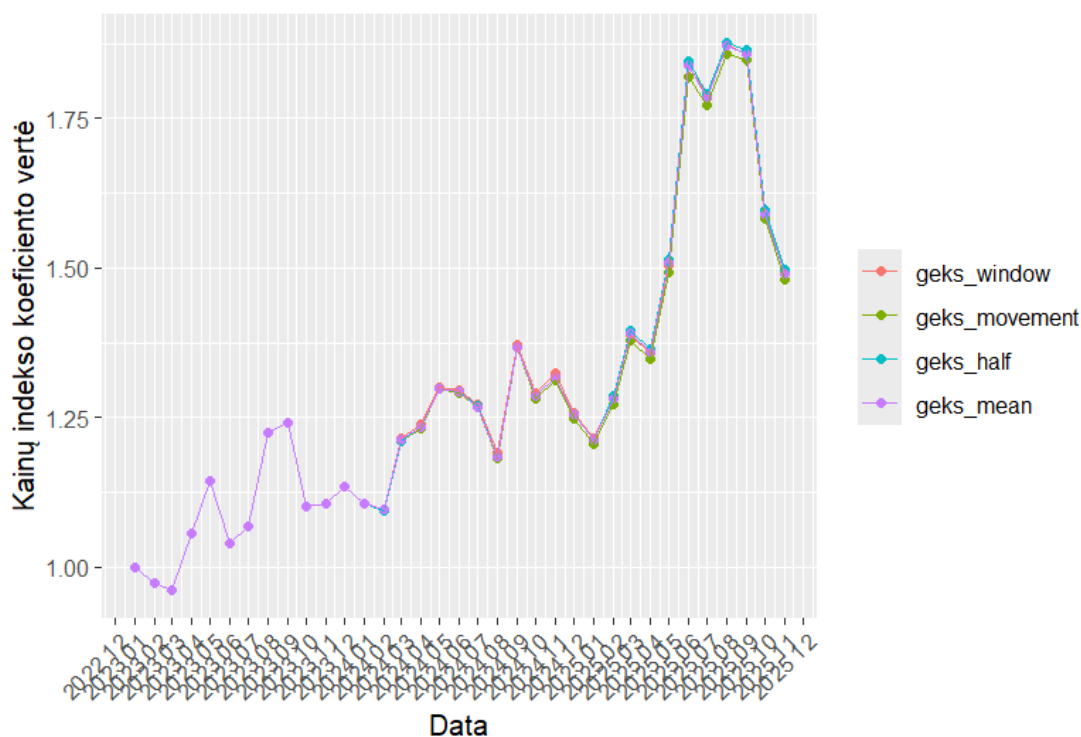


45 pav. GEKS–W obuolių kainų indeksas su 4, 7, 10 bei 13 mėnesių laiko lango trukmėmis.

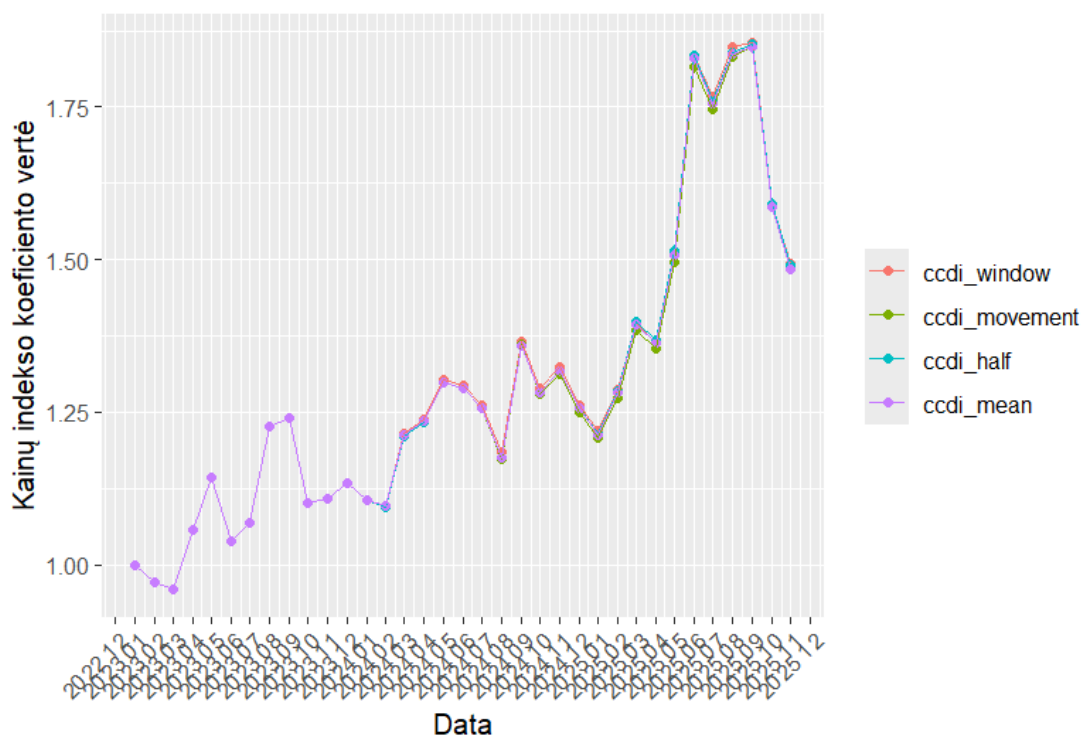
GEKS kainų indekso kitimas – 41 pav., CCDI – 42 pav., GEKS–L – 43 pav., GEKS–GL – 44 pav., o GEKS–W – 45 pav. Apibendrinant gautus rezultatus, daugiausiai įtakos turi trumpiausias laiko langas, kuris šiuo atveju yra 4 mėnesiai. Kiekvieno kainų indeksų atveju šiuos laikus suskaičiuoti kainų indeksai įgijo didžiausias reikšmes. Lyginant tarpusavyje, mažiausias reikšmes įgijo kainų indeksai su 13 mėnesių langu. Akivaizdu, jog laiko langui ilgėjant didesni įtakos turintys kainų pasikeitimai glodinami. Tarpusavyje lyginant pačias kainų indek-

sų reikšmės, o ne tik kitimo trajektorijas, galima matyti, jog GEKS–L, GEKS–GL ir GEKS–W kainų indeksai linkę kiek pervertinti kainų lygio padidėjimą. Didžiausio kainų padidėjimo laikotarpiu šių indeksų reikšmės viršija 2, GEKS–W kainų indeksas 2025 metų rugpjūtį įgija 2,08 reikšmę. Tą patį laikotarpį GEKS–GL įgija 1,98, o GEKS–L – 1,94. GEKS ir CCDI kainų indeksų didžiausios reikšmės 1,90. Gauti skaičiai akivaizdžiai parodo, jog naudojant bazinius kainų indeksus agregavimui gauti rodikliai gali būti pervertinti lyginant su superlatyvių kainų indeksų naudojimu agregavimui. Išimtis šiuo atveju yra GEKS–W kainų indeksas, kadangi Walsh kainų indeksas nėra taip pat rekomenduotinas naudoti kartu su GEKS tipo kainų indeksais dėl skaičiavimo struktūros. Be to, galima teigti, jog kainos kintant mažoje amplitudėje tarpusavio skirtumai neišryškėja, bet didesnius skirtumus galima matyti, kai duomenys identifikuoja aukštesnius kainų svyravimus. Šiuo atveju kainų lygiui padidėjus vos ne dvigubai, matomi skirtumai tarp indeksų gali svyruoti nuo kelių iki keliasdešimt procentinių punktų.

Toliau nagrinėjama kainų indeksų laiko eilučių susiejimo metodų įtaka. Kainų indeksų susiejimai naudojami pokyčio, laiko lango, vidurio bei vidutinio periodo sujungimo metodai. Nagrinėjamų kainų indeksų kitimų trajektorijos pateikiamos 46 – 50 paveikslėliuose. Skaičiavimams naudojamas 13 mėnesių langas. Gauti rezultatai parodo, jog GEKS ir CCDI kainų indeksams susiejimo metodai neturi įtakos. GEKS kainų indekso (46 pav.) reikšmės parodo identišką kainų lygio pasikeitimą lyginant su CCDI kainų indekso reikšmėmis (47 pav.). Susidarę skirtumai tarp skirtingų susiejimo metodų šių kainų indeksų atveju neviršija 0,004. Nors GEKS–W kainų indeksas (50 pav.) kainų lygį pervertina lyginant su GEKS ir CCDI kainų indeksų rezultatais, šiam kainų indeksui susiejimo metodų įtaka yra beveik nepastebima. Kiek kitokius rezultatus galima pastebėti GEKS–L (48 pav.) ir GEKS–GL (49 pav.) kainų indeksams. GEKS–GL kainų indeksui galima pastebėti kiek kitokią kitimo trajektoriją nuo 2025 metų gegužės mėnesio, kuomet kainų lygis bene didžiausias visame stebimame laikotarpyje.

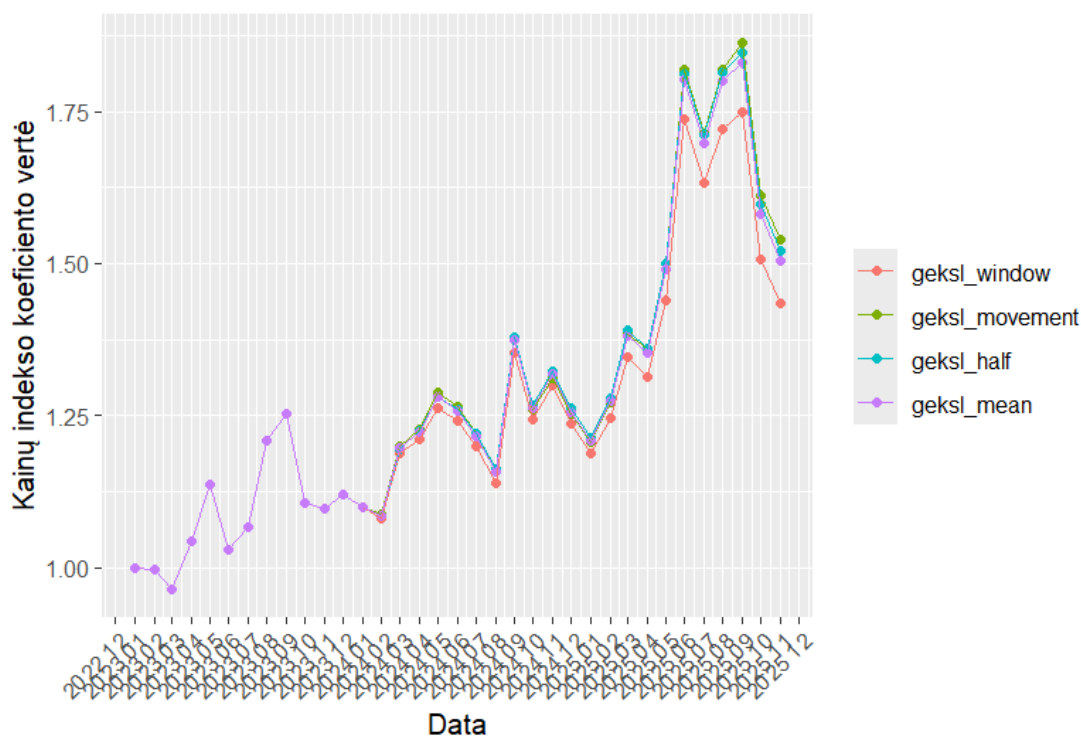


46 pav. GEKS obuolių kainų indeksas suskaičiuotas naudojant skirtingus kainų indeksų laiko eilučių susiejimo metodus.

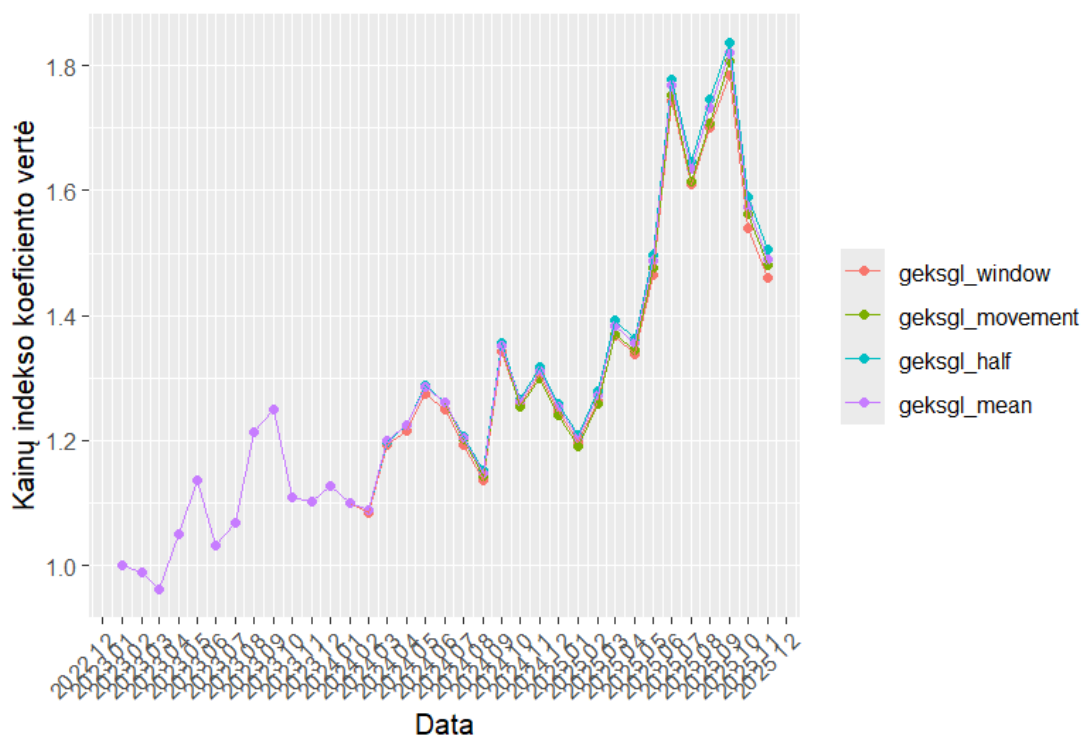


47 pav. CCDI obuolių kainų indeksas suskaičiuotas naudojant skirtingus kainų indeksų laiko eilučių susiejimo metodus.

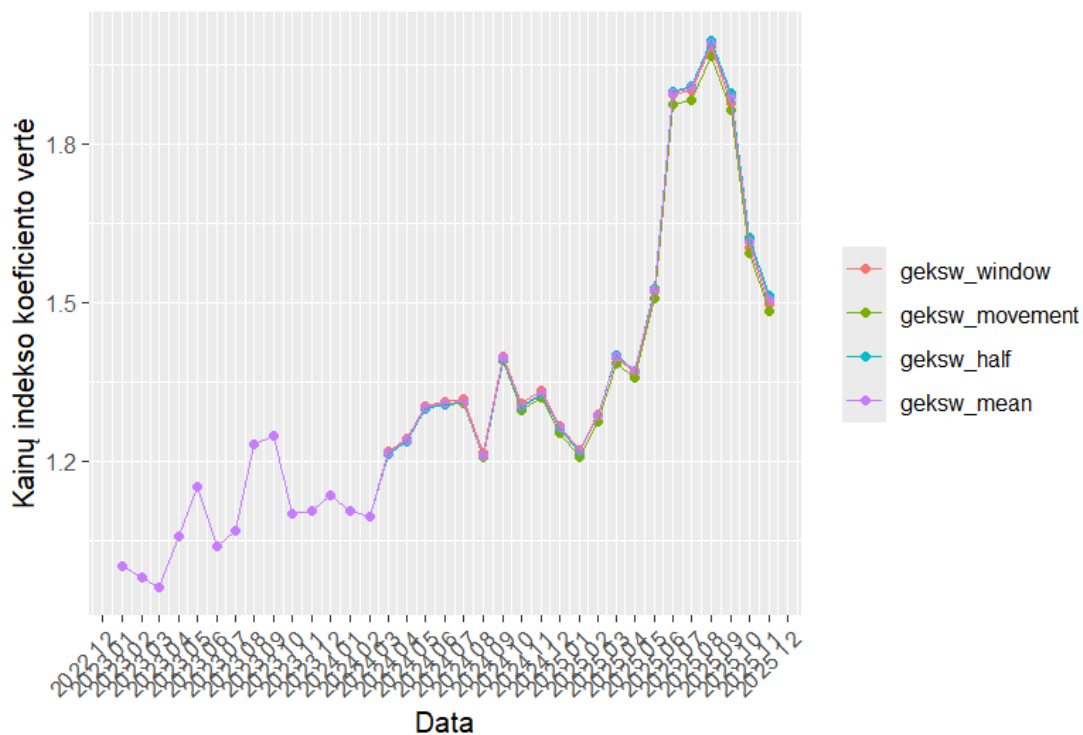
Lyginant 2025 metų liepos mėnesio rodiklį su tų pačių metų birželio mėnesiu, matyti staigesnis, vos ne 17–18 procentų nuosmūkis, kuris vėliau grįžta į dar didesnį kainų lygį nei buvo birželio mėnesį. Nors GEKS–GL kainų indeksui būdinga kiek kitokia kitimo trajektorija lyginant jo kitimą su kitais kainų indeksais, šiam kainų indeksui susiejimo metodų įtaka išlieka taip pat nedidelė, nes reikšmingų skirtumų kitimo grafike nepastebėta.



48 pav. GEKS–L obuolių kainų indeksas suskaičiuotas naudojant skirtingus kainų indeksų laiko eilučių susiejimo metodus.



49 pav. GEKS–GL obuolių kainų indeksas suskaičiuotas naudojant skirtingus kainų indeksų laiko eilučių susiejimo metodus.



50 pav. GEKS–W obuolių kainų indeksas suskaičiuotas naudojant skirtingus kainų indeksų laiko eilučių susiejimo metodus.

Didžiausia skirtingų susiejimų įtaka stebima GEKS–L kainų indeksui (48 pav.). GEKS–L kainų indekso kintimo trajektorijose matyti aiškus šio indekso nuokrypis naudojant laiko lango susiejimo metodą, šiuo atveju

GEKS–L įgijamos reikšmės tampa mažesnės lyginant su kitais susiejimo metodais gautais šio kainų indekso rezultatais.

Apibendrinant daugialypių kainų indeksų analizę, galima teigti, jog šių kainų indeksų kitimo trajektorijos panašios į superlatyvių kainų indeksų kitimus. Be to, susidarę tarpusavio skirtumai daug mažesni lyginant baziinių ar superlatyvių kainų indeksų atveju, o nuokrypių bei dispersijos rodikliai santykinai mažai. Taip pat galima teigti, jog didesnės įtakos daugialypių kainų skaičiavimuose dėl skirtingų susiejimo metodų nebuvo pastebėta, o nagrinėjant skirtingus laiko langus, kainų indeksų rezultatuose pastebėta tendencija, jog kuo trumpesnis laiko langas, tuo galima tikėtis didesnių kainų indeksų svyravimų.

Taigi, apžvelgiame pagrindinius daugialypius kainų indeksus, tačiau kaip ir superlatyvių kainų indeksų atveju kainų indeksai gali turėti ir papildomų parametrų, o tada analizė tampa sudėtingesnė, nes reikia įvertinti ne tik standartinių daugialypių kainų indeksų parametrus, bet ir papildomų parametrų įtaką rodikliams. Kitame skyriuje nagrinėjamas dar vienas daugialypis kainų indeksas GEKS–LM bei atliekama produktų elastingumo įtakos analizė šio kainų indekso reikšmėms.

4.8. GEKS–LM kainų indeksas

Šio dalyje nagrinėjamas GEKS–LM kainų indeksas, kuriam darbe skiriamas ypatingas dėmesys, ne tik dėl pateikiamo savybių įrodymo, bet ir kaip vieno iš nedaugelio kainų indeksų, kuris turi papildomą parametą – produktų elastingumą σ . GEKS–LM kainų indekso skaičiavimo dažniausiai parametras σ laikomas pastoviu ir įvertinamas ekspertiškai. Šio parametro vertinimui toliau naudojami du metodai. Pirmasis metodas apima elastingumą įvertinimą naudojantis Lloyd–Moulton metodu, kuris yra integruotas šiam darbui naudojamame R pakete *PriceIndices*. Antrasis metodas remiasi paneline regresija, kurią apžvelgia minėto R paketo autorius [8] savo straipsnyje apie GEKS–LM kainų indekso skaičiavimo subtilybes.

Produktų elastingumas ekonomikoje suvokiamas kaip pirkėjų reakcija į prekių kainų pokyčius. Praktikoje išskiriami trys atvejai:

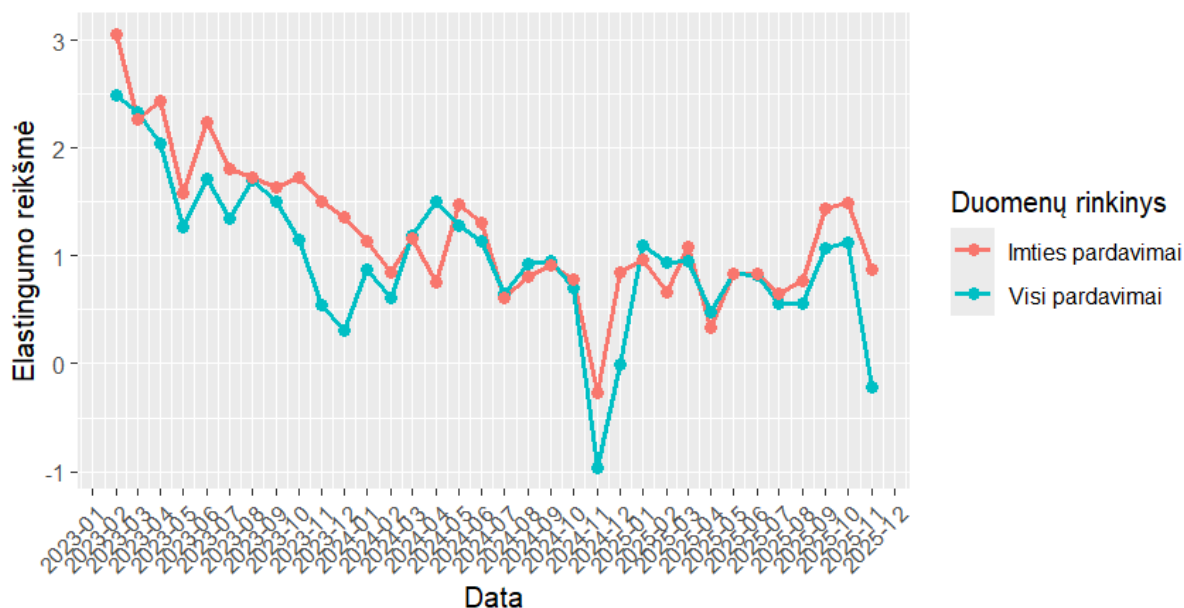
- jeigu absoliutus elastingumas lygus 1, tuomet pirkėjai nekeičia savo pirkimo įpročių proporcingai, nes kainų pasikeitimas lygus kiekio pasikeitimui, o tokiu atveju prekės vadinamos tarpinėmis prekėmis;
- jeigu absoliutus elastingumas yra mažesnis už 1, tokios prekės vadinamos pirmo būtinumo prekėmis, šių prekių vartotojai neturi kuom pakeisti, todėl pabrangus šioms prekėms neįjuntamas kiekio sumažėjimas proporcingas kainos pokyčiui, dažniausiai kiekis sumažėja nežymiai;
- jeigu absoliutus elastingumas yra didesnis už 1, tokios prekės vadinamos prabangos prekėmis, šiuo atveju prekėms pabrangus, parduodamų prekių kiekis sumažėja daugiau nei kainų pokytis.

Elastingumo įvertinimui naudojama panelinė regresija geriausiai atspindi naudojamų duomenų struktūrą, kadangi kvitų duomenys apima pagrindinius elastingumo vertinimui reikalingus kintamuosius [8]. Ši regresija išreiškiama toliau pateikta lygtimi:

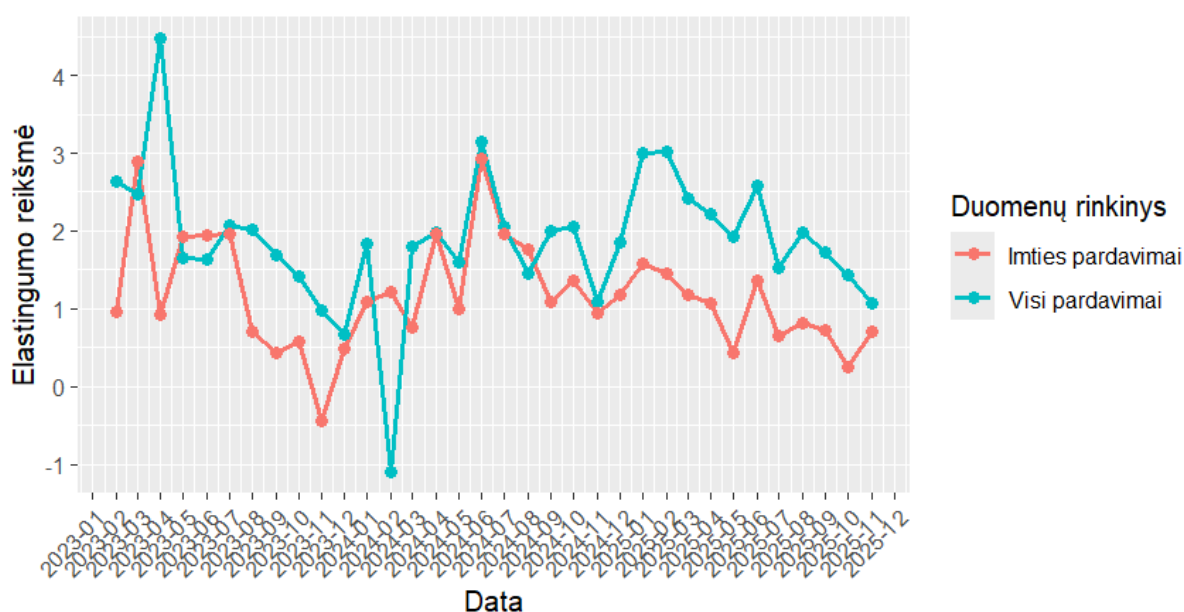
$$\ln(p_{it}) = \beta_0 - \sigma \ln(q_{it}) + \varepsilon_{it},$$

čia β_0 pastovus parametras, o ε_{it} žymi modelio paklaidas, σ – vertinamas elastingumo kintamasis. Elastingumo įverčiams skaičiuoti naudojama dviejų rūšių regresija, kuri skiriama į vienfaktorinę regresiją – šiuo atveju priklausomas kintamasis apibrėžiamas tik tarp agreguotų kainų bei kiekių sąryšių, bet dvifaktorinė – įtraukiamas ir laiko aspektas. Gauti rezultatai naudojantis Lloyd–Moulton metodu pateikiami 51 – 53 paveikslėliuose, o šio metodo vidutinės reikšmės bei statiški panelinės regresijos metu gauti elastingumo įverčiai – 29 lentelėje.

Duonos produktų elastingumas (51 pav.) tiek imties, tiek visų produktų pardavimų atvejais kinta panašiai. Laikotarpio pradžioje, dėl mažesnio stebėjimų kiekio, elastingumo rodiklis kiek didesnis, tačiau laikui bėgant stabilizuojasi. Vidutinė imties pardavimų elastingumo reikšmė yra 1,223447, o visų produktų atžvilgiu – 0,9840573. Remiantis vidutinėmis laikotarpio elastingumo reikšmėmis, galima teigti, jog kainoms kintant pirkėjai nelinkę drastiškai keisti savo pirkimo įpročių. Nagrinėjant elastingumo kitimą, išsiskiria 2024 metų lapkričio mėnėsis, kai elastingumas yra neigiamas. Tai parodo, jog kainos padidėjimas vienu procentiniu punktu sumažina parduodamą kiekį vienu procentu – visų produktų atžvilgiu, bei kiek mažiau nei pusė procentinio punkto imties produktų atveju.



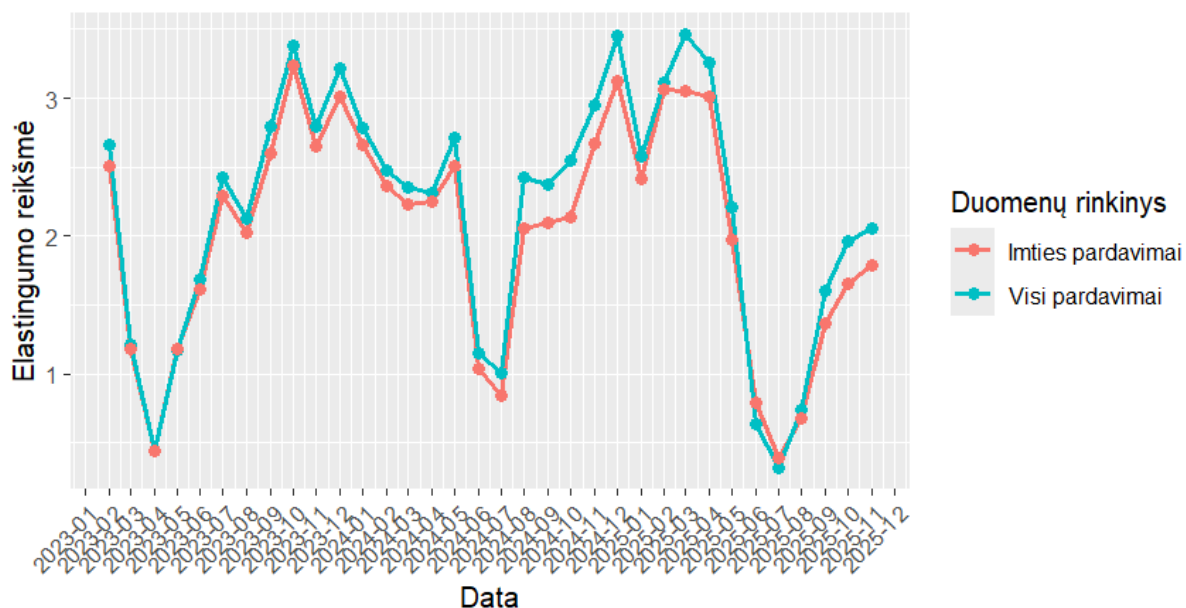
51 pav. Duonos produktų elastingumo kitimas, remiantis Lloyd–Moulton modelio rezultatais.



52 pav. Pieno produktų elastingumo kitimas, remiantis Lloyd–Moulton modelio rezultatais.

Pieno produktų elastingumas (52 pav.) imties atveju kiek pastovesnis, lyginant su visų produktų elastingumo kitimu, kuriame matyti stipriau išsiskiriantys laikotarpiai – 2023 metų balandžio mėnesis bei 2024 metų vasaris. Vidutiniai elastingumo rodikliai imties atveju yra 1,17183, o visų produktų – 1,89502. Remiantis gautais įverčiais, galima teigti, jog vartotojai jautresni kainų pasikeitimams, nes pasikeitus produktų kainoms, jaučiamas didesnis parduodamo kiekio pokytis, lyginant su kainos pasikeitimu. Pieno produktų atžvilgiu duonos produktus galima laikyti pirmo būtinumo prekėmis, nors ir duonos elastingumas nėra žymiai mažesnis už 1.

Obuolių elastingumas kinta labai panašiai arba identišškai abiem atvejais (53 pav.). Kitimas pasižymi sezoniskumu, o elastingumo reikšmės svyruoja nuo 0 iki 4, kas parodo, jog vartotojai gan aiškiai keičia savo vartojimo įpročius dėl kainų pasikeitimo. Beje, šiems pokyčiams turi įtakos ir tai, jog obuoliai yra sezoninė prekė. Vidutinis tiriamojo laikotarpio elastingumas yra kiek aukštesnis nei 2.



53 pav. Obuolių elastingumo kitimas, remiantis Lloyd–Moulton modelio rezultatais.

Vidutinės elastingumo reikšmės kartu su panelinės regresijos metu gautais elastingumo įverčiais pateikiamos 29 lentelėje. Gauti elastingumo įverčiai panelinės regresijos metu kai kuriais atvejais skiriasi kardinaliai. Šiuos skirtumus galima pagrįsti naudojamų skirtingų metodų skaičiavimo technikomis. Lloyd–Moulton metodu vertinamas elastingumas grindžiamas kainų ir kiekių indeksų skaičiavimu naudojant agreguotus duomenis, sprendžiama lygtis, kurioje Lloyd–Moulton ir CES²⁴ kainų indeksų skirtumas lygus nuliui, tuomet gaunamas elastingumo parametras. Panelinės regresijos metu naudojami kiekvieno laikotarpio pardavimų duomenys tiesiogiai, kuriuose į elastingumo įvertį įtraukiami regresijos kintamieji. Nors gauti rodikliai akivaizdžiai skiriasi lyginant šių dviejų modelių rezultatus, tolimesnis tikslas – ištirti, kokią įtaką sudaro naudojimas šių skirtingų elastingumo įverčių skaičiuojant GEKS–LM kainų indeksą. Šiuo atveju Lloyd–Moulton metodu gauti įverčiai yra kintami laike, todėl kiekvieno laikotarpio GEKS–LM kainų indekso skaičiavimui yra naudojamas atitinkamo laikotarpio elastingumo koeficientas, o panelinės regresijos metu gauti koeficientai naudojami kaip statiški ir laike nekintantys elastingumo įverčiai.

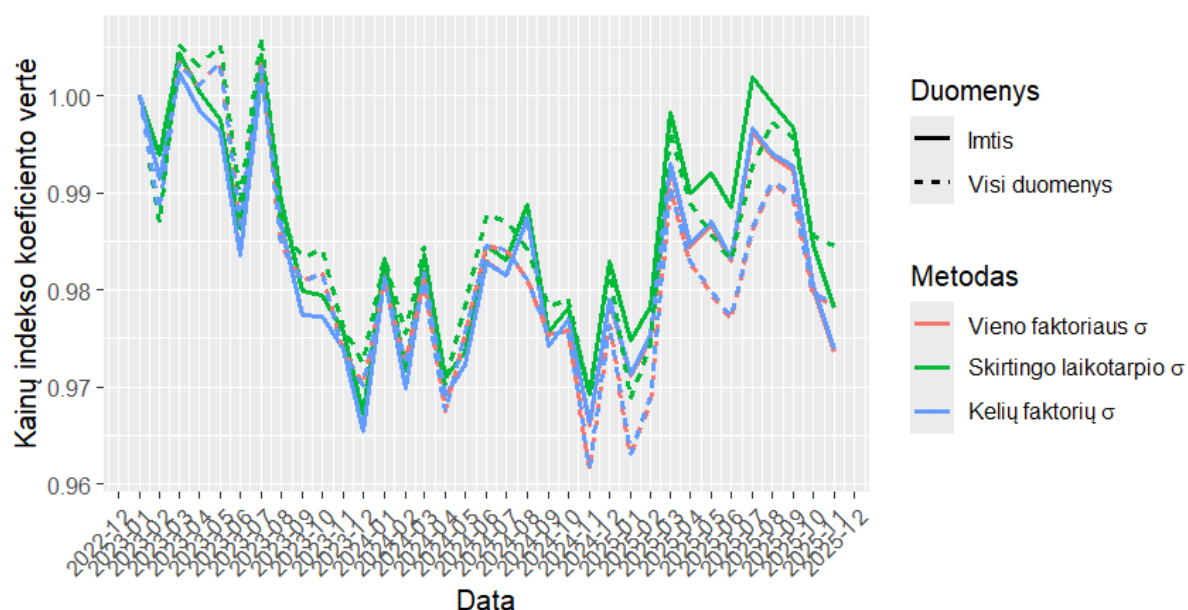
²⁴CES (angl. *Constant Elasticity of Substitution*) — pastovaus produktų elastingumo kainų indeksas. Šis kainų indeksas remiasi CES tipo naudingumo funkcija.

29 lentelė. Produktų elastingumo vertinimo metodų rezultatai.

	Lloyd-Moulton metodas		Panelinė regresija (vienfaktorinė)		Panelinė regresija (dvifaktorinė)	
	Imtis	Visi pardavimai	Imtis	Visi pardavimai	Imtis	Visi pardavimai
Pienas	1,17183	1,89502	0,01921	–0,44210	–0,21732	–0,50047
Duona	1,22345	0,98406	0,48345	0,94752	0,40115	0,88876
Obuoliai	2,02669	2,18691	0,21230	0,15208	0,87989	0,71973

Toliau pateiktuose grafikuose pateikiami GEKS–LM kainų indekso kitimai skirtingoms produktų grupėms, naudojant skirtingus elastingumo parametro įverčius. GEKS–LM kainų indeksas skaičiuojamas naudojant 13 mėnesių skaičiavimo langą bei ankstesnio laikotarpio susiejimo metodą.

Žvelgiant į duonos produktų GEKS–LM kainų indekso kitimus (54 pav.), matyti, jog vieno ar kelių faktorių panelinės regresijos metu gauti elastingumo įverčiai neturi įtakos GEKS–LM kainų indekso skaičiavimui, nes gaunami identiški rezultatai. Lyginant visų duonos produktų kainų indekso kitimą, matyti, jog skaičiuojant GEKS–LM su skirtingais elastingumo koeficientais gaunami kiek didesnės kainų indekso koeficiento reikšmės, tačiau didžiausias skirtumas neviršija pusės procentinio punkto. Imties atžvilgiu rezultatai analogiški.



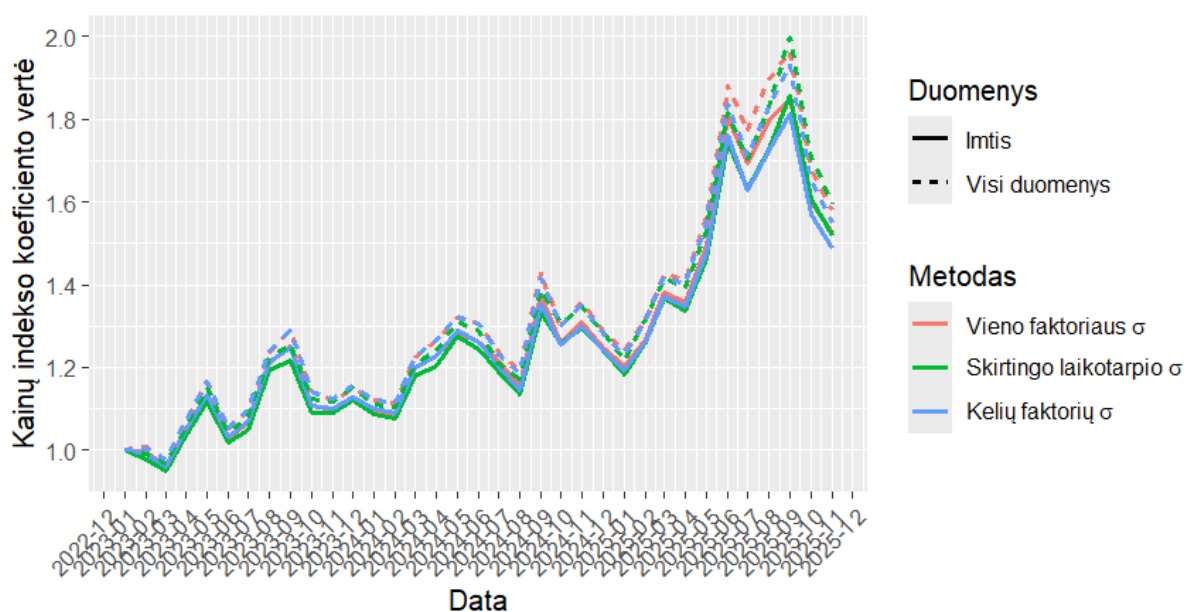
54 pav. Duonos produktų GEKS–LM kainų indekso kitimas naudojant skirtingas elastingumo reikšmes.

Pieno produktų GEKS–LM kainų indekso kitimas (55 pav.) visų pardavimų atveju beveik identiškas naudojant skirtingus elastingumo įverčius, tačiau nuo didesnio kainų sumažėjimo 2024 metų birželio mėnesį matomas susidaręs nedidelis skirtumas iki laikotarpio pabaigos. Analogiški pastebėjimai teisingi ir pieno imties produktų atveju. Kaip ir duonos produktų kainų indeksų kitime, vieno faktoriaus ar kelių faktorių modeliu gauti elastingumo įverčiai neturi įtakos GEKS–LM kainų indeksui.



55 pav. Pieno produktų GEKS–LM kainų indekso kitimas naudojant skirtingas elastingumo reikšmes.

Obuolių GEKS–LM kainų indeksai (56 pav.) skirtingiems duomenų rinkiniams bei skirtingiems elastingumo parametrų kinta beveik identiški, o kiek didesni skirtumai išryškėja tiriama laikotarpio pabaigoje, kuomet stebimas aukščiausias kainų lygio padidėjimas. Galima teigti, jog naudojamų elastingumo parametrų įtaka išryškėja tik laikotarpiuose, kuriose stebimas stipresnis kainų svyravimas.



56 pav. Obuolių GEKS–LM kainų indekso kitimas naudojant skirtingas elastingumo reikšmes.

Apibendrinant, GEKS–LM kainų indekso kitimo įtakos priklausomybę nuo skirtingų elastingumo parametrų matyti, jog didesni skirtumai neišryškėja, nors Lloyd–Moulton bei panelinės regresijos metu gautų elastingumo įverčių reikšmės skyrėsi reikšmingai. Imties bei visų pardavimų GEKS–LM kainų indeksų kitimai atitin-

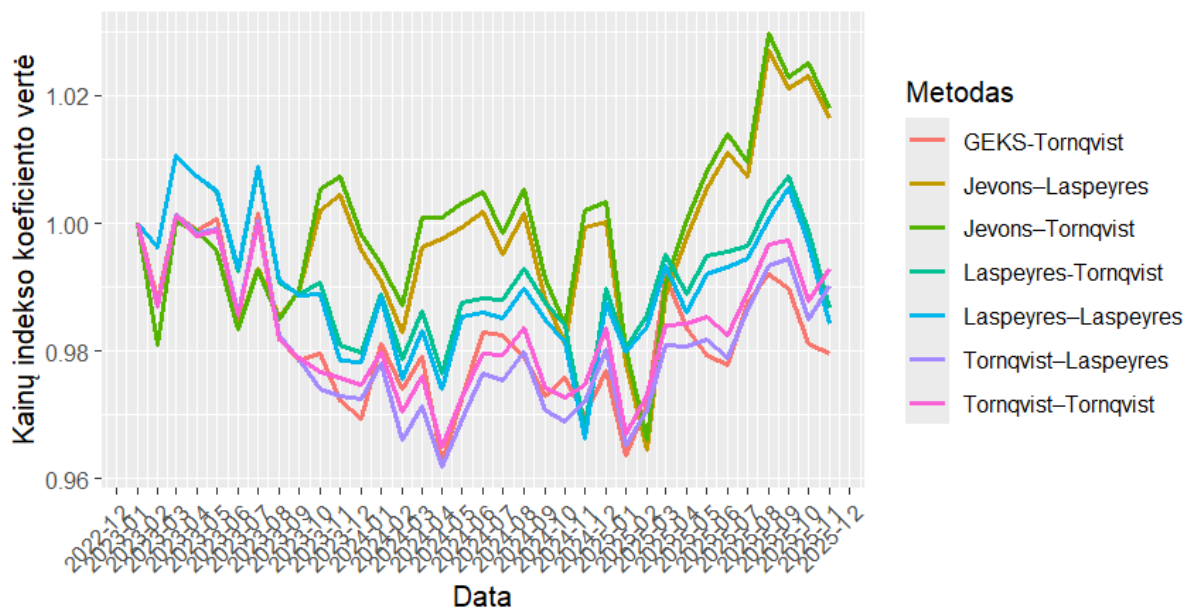
kamais laikotarpiais buvo identiški ir nepriklausė nuo parametro reikšmės, o išryškėję skirtumai nebuvo žymūs bei neviršijo pusės procentinio punkto.

Kainų indeksų rezultatai ne tik priklauso nuo skirtingų parametų, kurių skirtingi kainų indeksai gali turėti skirtingą skaičių, bet ir nuo taikomų kainų indeksų agregavimo metodų. Kainų indeksų agregavimo įtaka aptariama kitame skyriuje.

4.9. Kainų indeksų agregavimas

Ši darbo dalis skirta ištirti, kokią įtaką rezultatams turi skirtingi kainų indeksų agregavimo metodai. Analizei atlikti naudojami skirtingų kainų indeksų agregavimo būdai, kurie buvo pritaikyti nagrinėjamų duonos, pieno bei obuolių pardavimų duomenims. Agregavimui naudojami skirtingų klasių kainų indeksai, o agregavimas atliekamas prekybos tinklų lygmeniu, t. y. suskaičiuotas kainų indeksas konkrečiam prekybos tinklui agreguojamas į bendrą kainų indeksą pagal kito indekso agregavimo taisyklę. Šioje analizėje skaičiuojami Jevons, Laspeyres, Törnqvist, GEKS kainų indeksai, kurie į bendrą kainų indeksą agreguojami naudojant Laspeyres arba Törnqvist kainų indeksų agregavimo taisykles. GEKS kainų indekso atveju agregavimas atliekamas naudojant tik Törnqvist kainų indekso agregavimo taisyklę, nes Laspeyres atveju keli prekybos tinklai neturi bazinio laikotarpio pardavimų, jog būtų galima įvertinti bazinio laikotarpio svorius.

Nagrinėjant visų duonos produktų kainų indeksus (57 pav.) galima pastebėti, jog naudojant skirtingus agregavimo metodus gaunami skirtingi rezultatai. Skaičiuojant Jevons kainų indeksą bet kuriuo agregavimo metodu, tam tikrais laikotarpiais išsiskiria šio kainų indekso vertės – gauti rezultatai didesni už kitų kainų indeksų reikšmes. Laikotarpio pradžioje, iki 2023 metų rugsėjo mėnesio, Jevons kainų indeksų agregavimo naudojant Laspeyres bei Törnqvist kainų indeksus rezultatai identiški, vėliau išryškėja tendencija, kuri identifikuoja, jog Törnqvist agregavimo metu gaunamas rezultatas kiek didesnis už Laspeyres agregavimą. Identišką tendenciją galima pastebėti ir Laspeyres bei Törnqvist kainų indeksų agregavimo metu.

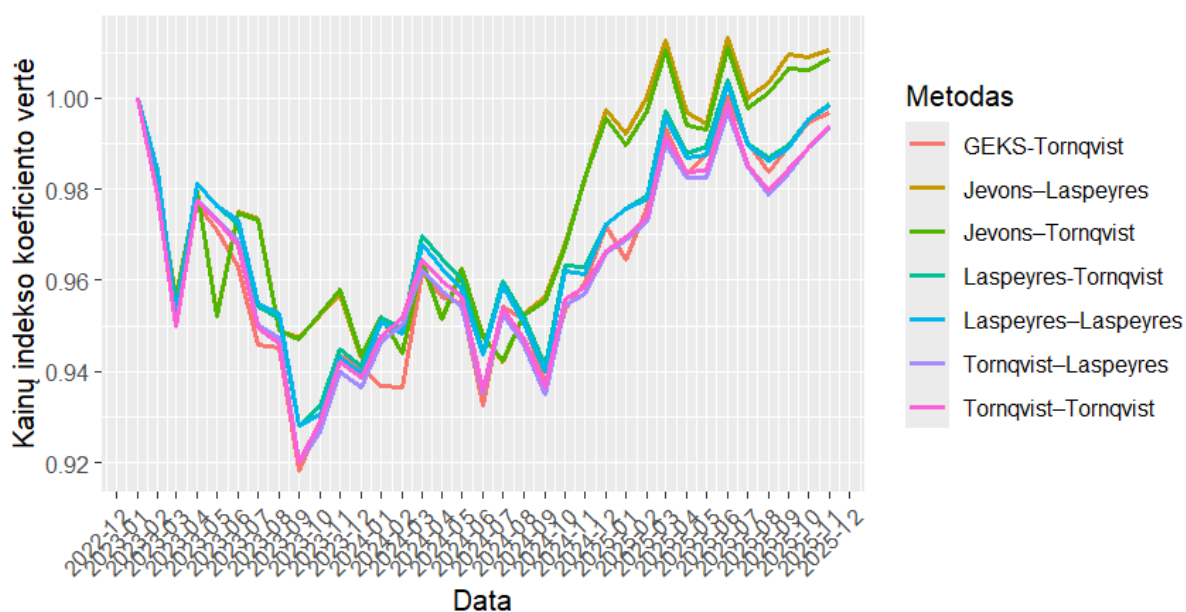


57 pav. Visų duonos produktų skirtingų kainų indeksų ir agregavimo metodų rezultatai.

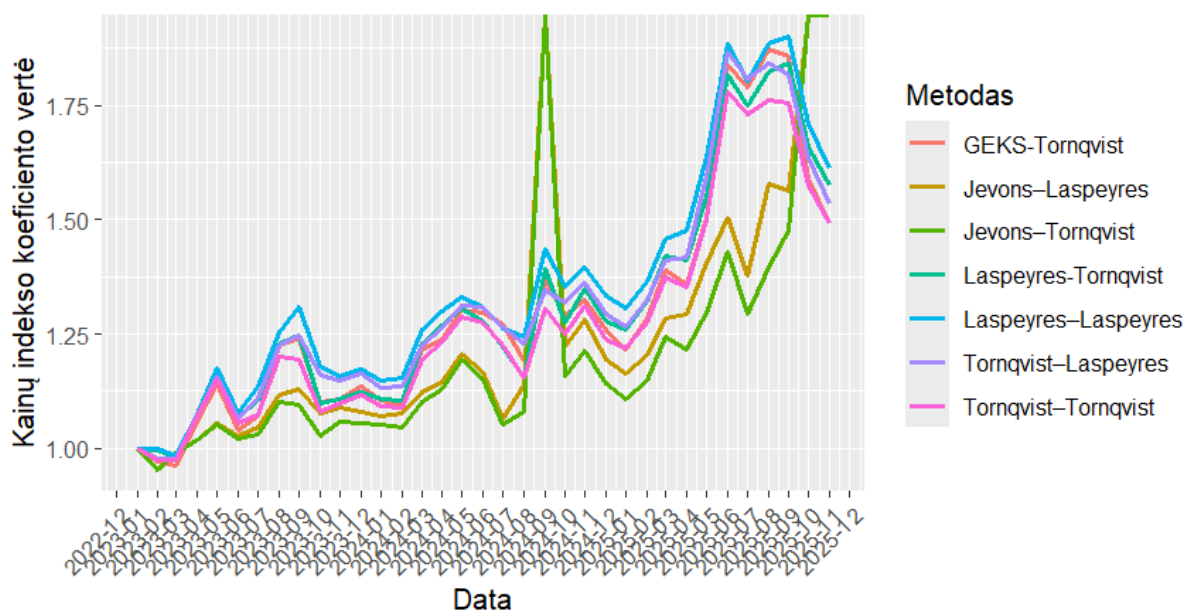
Šis skirtumas paaiškinamas Laspeyres ir Törnqvist kainų indeksų struktūra. Laspeyres kainų indeksas atsižvelgia į bazinį laikotarpį svorius, t. y. produktui tenkančią dalį visų produktų atžvilgiu, o Törnqvist įtraukia dviejų laikotarpių svorius, tad kol individualių produktų, o šiuo atveju prekybos tinklų pasiskirstymas nekito,

gauti agreguoti kainų indeksai buvo identiški, o kai pasiskirstymas ėmė keistis — išryškėjo agreguotų kainų indeksų skirtumai. GEKS–Törnqvist kainų indeksų agregato reikšmės savo kitimu panašios į Törnqvist tipo kainų indeksų kitimus.

Pieno produktų skirtingų kainų agregavimai kinta pagal panašias tendencijas (58 pav.). Nuo 2024 metų rugpjūčio kiek didesnes vertes įgauna Jevons skirtingų agregatų vertės, tačiau tarp Laspeyres ir Törnqvist agregavimo būdu skirtumas labai mažas. Taip pat skirtingi Laspeyres agregavimo metodai skirtumo neparodo, kinta beveik identišškai. Analogiškai ir Törnqvist kainų indekso agregavimo metu. Tai parodo, jog visuose prekybos tinkluose kainų lygis kito identišškai, nes atlikus agregavimą pagal skirtingus prekybos tinklus skirtumų nebuvo pastebėta.



58 pav. Visų pieno produktų skirtingų kainų indeksų ir agregavimo metodų rezultatai.



59 pav. Visų obuolių skirtingų kainų indeksų ir agregavimo metodų rezultatai.

Skirtingų kainų indeksų agregavimo metodų rezultatai obuolių kainų indeksams pateikti 59 paveikslėlyje. Apžvelgiant rezultatus, išsiskiria Jevons kainų indeksų agregatai. Kiti kainų indeksai kinta panašia tendencija, nepriklausomai nuo agregavimui naudojamų kainų indeksų. Jevons kainų indeksas tiriamuoju laikotarpiu įgija kiek mažesnes reikšmes nei likę kainų indeksai, tačiau stipriai išsiskiria 2024 metų rugsėjo mėnesį bei laikotarpio pabaigoje. Jevons kainų indeksas yra kiek jautresnis kainų pokyčiams, nes kainų lygiui įvertinti įtraukia tik stebimas kainas. Šiuo laikotarpiu stebimas kainų padidėjimas, kurį identifikuoja ir kiti kainų indeksai, tačiau dėl Jevons skaičiavimo formulės struktūros prekybos tinklai yra lygiaverčiai, tad atlikus išsamesnę duomenų analizę buvo pastebėta, jog viename prekybos tinkle buvo aukštas kainų padidėjimas, o šio prekybos tinklo dalis pardavimuose yra išskirtinai maža, tad kuomet Jevons kainų indekso atveju prekybos tinklai įgauna vienodus svorius, šis padidėjimas tapo aiškiai išsiskiriantis, o atsižvelgiant į prekybos tinklų svorius pagal jų pardavimų dalį, toks padidėjimas nebuvo stebimas. Kitais laikotarpiais išsiskiriančio prekybos tinklo kainų kitimas buvo panašus į likusių prekybos tinklų kainų kitimą, tad didesnių svyravimų dėl šio prekybos tinklo kainų pasikeitimo pastebėti nepavyko.

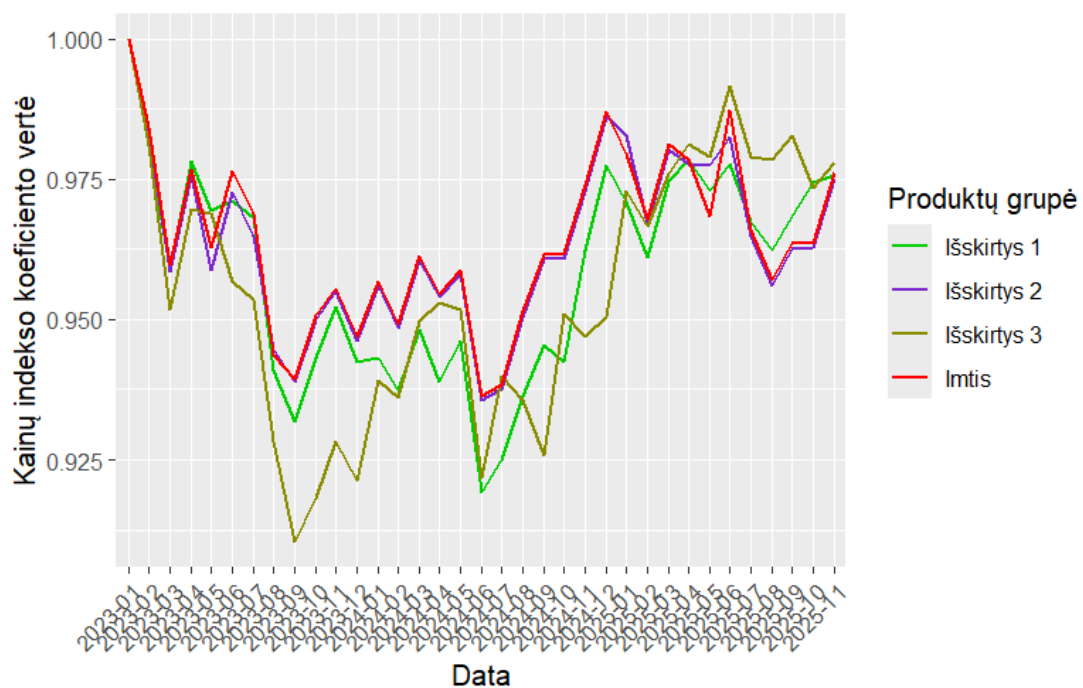
Apibendrinant gautus skirtingų kainų indeksų agregavimo metodų rezultatus, galima teigti, jog matoma aiški priklausomybė nuo kainų indeksų skaičiavimo struktūrų bei duomenų kokybės. Jevons kainų indeksu atveju pastebėtas kiek skirtingas kitimas, lyginant su kitų indeksų agregatų kitimais. Kainų indeksų agregavimui naudojant Laspeyres ar Törnqvist agregavimo taisykles, skirtumas tarp šių agregatų išryškėdavo tuomet, kai pradėdavo kisti prekybos tinklų pasiskirstymas. Kai kurios kritinės reikšmės, aiškiai išsiskirdamos iš kitimo tendencijos, buvo identifikuotos kaip priklausomybės nuo atitinkamo laikotarpio duomenų. Neatmestina hipotezė, jog šių laikotarpių kitimus galėjo lemti duomenys, kuriuos reiktų laikyti išskirtiniais. Būtent kitame skyriuje atliekama kainų indeksų skaičiavimo analizė skirtingiems duomenų išskirčių variantams.

4.10. Kainų indeksų jautrumas duomenų filtrams

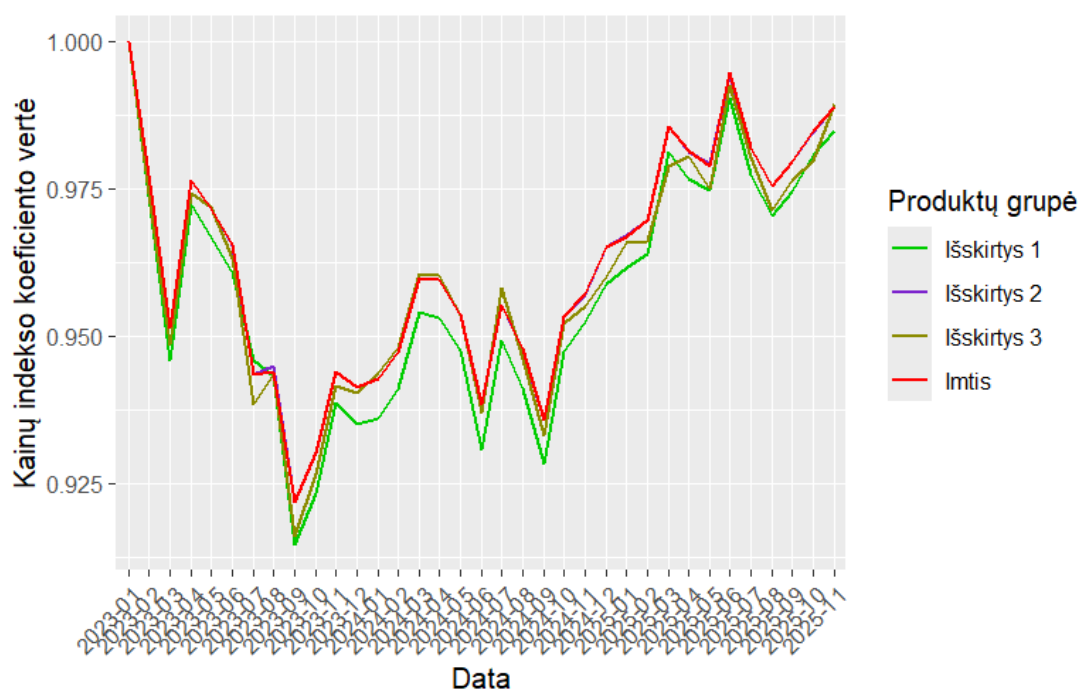
Šio skyriaus analizė skirta patikrinti ar identifikuotos pardavimų išskirtys turi įtakos kainų indeksų rezultatams. Šiai analizei atlikti naudojami pieno produktų imties pardavimų duomenys²⁵. Naudojant skirtingus išskirčių filtrus skaičiuojami kainų indeksai priklausantys skirtingoms kainų indeksų klasėms. Elementariųjų indeksų atstovui – Jevons kainų indeksui, bazinių – Lowe, superlatyvių – Törnqvist, o daugialypių – GEKS kainų indeksui. Žymėsime *Išskirtys 1* – išskirčių algoritmą, kuris pašalina produktų pardavimus, kurie atitinka ekstremalių kainų apibrėžimą, t. y. išskirtimis laikomos po 1 procentą mažiausių bei didžiausių pardavimo kainų; *Išskirtys 2* – ekstremalių kainų filtrą, kuris pašalina produktų pardavimus, kurių kainos 50 procentų mažesnės už vidutinę pasirinkto laikotarpio kainą arba didesnės du kartus ir *Išskirtys 3* – pirmo išskirčių algoritmo bei mažų pardavimų filtro junginį. Gauti rezultatai pateikti 60 – 63 pav.

Ryškesni skirtumai tarp išskirčių algoritmų pastebimi skaičiuojant Jevons kainų indeksą. Nagrinėjant kitimų kreives (60 pav.) matyti, jog didžiausius nuokrypius nuo pieno imties produktų Jevons kainų indeksų turi Jevons kainų indeksas skaičiuojamas pašalinus po vieną procentą mažiausių bei didžiausių kainų ir mažus pardavimus. Šiuo atveju skirtumai kinta netgi iki 4 procentinių punktų 2023 metų rugsėjį, 2024 metų rugsėjį ir gruodį. Kiek mažesnius, tačiau reikšmingus skirtumus galima matyti naudojant tik išskirčių algoritmą be mažų pardavimų filtro. Pašalinus pardavimus, kurių kainos yra 50 procentų mažesnės arba 2 kartus didesnės už vidutinę atitinkamo laikotarpio kainą, Jevons kainų indekso rezultatams įtaka beveiki nestebima, kitimas beveik identiškai kainų indeksą skaičiuojant naudojant visus duomenis nepritaikius išskirčių šalinimo algoritmų.

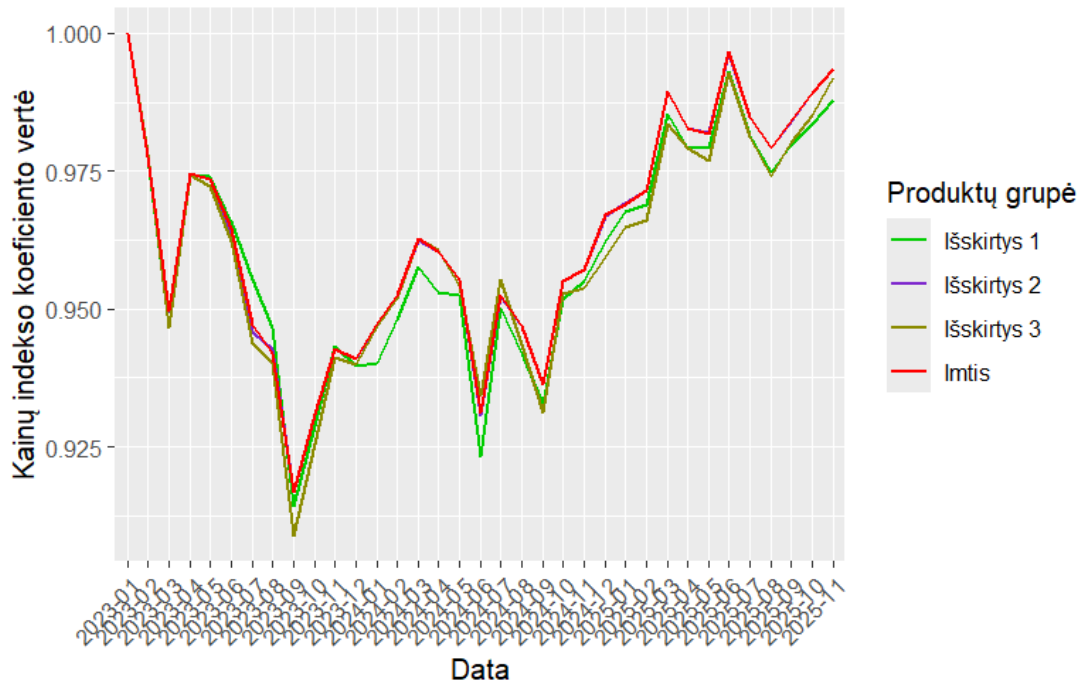
²⁵ Kitų produktų skaičiavimo rezultatai neparodė skirtingų tendencijų, tad toliau kainų indeksų kitimų grafikai nėra pateikiami.



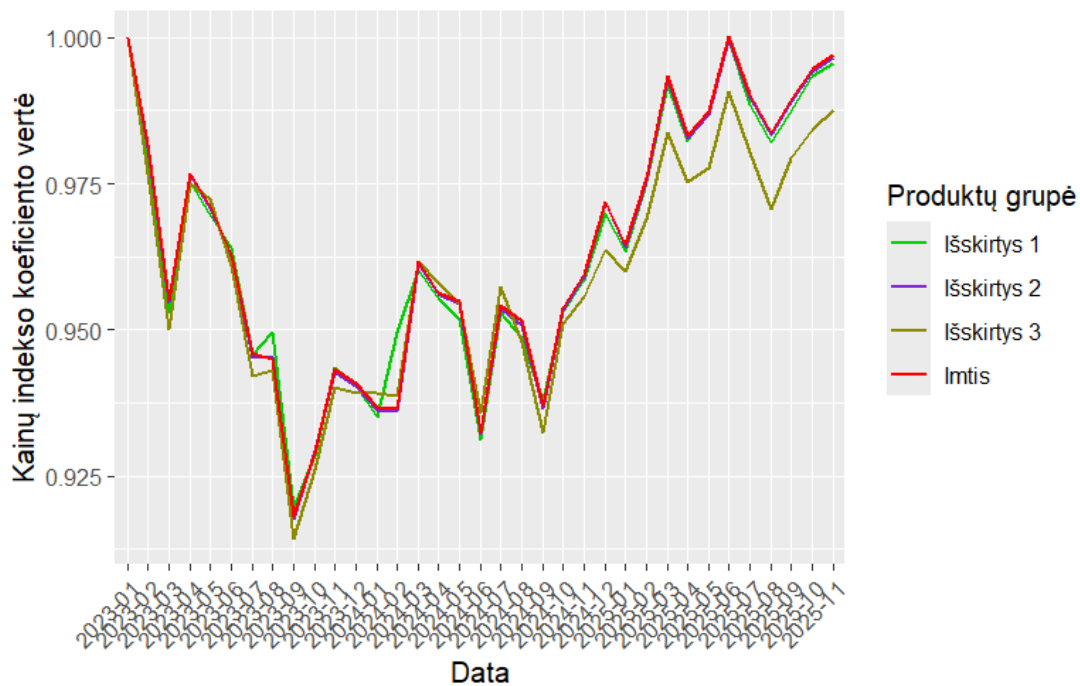
60 pav. Pieno imties produktų Jevons kainų indekso kitimai naudojant skirtingus išskirčių filtrus.



61 pav. Pieno imties produktų Lowe kainų indekso kitimai naudojant skirtingus išskirčių filtrus.



62 pav. Pieno imties produktų Törnqvist kainų indekso kitimai naudojant skirtingus išskirčių filtrus.



63 pav. Pieno imties produktų GEKS kainų indekso kitimai naudojant skirtingus išskirčių filtrus.

Analizuojant Lowe kainų indekso kitimus (61 pav.), stebima analogiška tendencija kaip ir Jevons kainų indekso atveju. Lowe kainų indeksas yra mažiau jautrus išskirčių algoritmams, nes susidaręs skirtumas nėra toks reikšmingas kaip Jevons kainų indekso atveju. Susidarę skirtumai neviršija pusės procentinio punkto. Identišką tendenciją galima matyti ir Törnqvist kainų indekso atveju (62 pav.). Pastarojo kainų indekso atveju susidarę skirtumai vidutiniškai mažesni nei Lowe kainų indekso atveju. Kainų indeksų kitimo kreivės yra glotnesnės, o

tai galima paaiškinti tuo, jog Törnqvist kainų indeksas naudoja ne tik bazinio laikotarpio, bet ir skaičiuojamo laikotarpio svorius, tad kainų pokyčių kitimo amplitudė yra mažesnė.

GEKS kainų indekso atveju (žr. 63 pav.) iki 2024 metų spalio mėnesio skirtingų išskirčių kainų indeksų kitimai beveik identiški. Nuo šio laikotarpio išryškėja GEKS kainų indeksų kitimas naudojant trečiąjį išskirčių algoritmą, t. y. išskirtys matomos tam pačiam algoritmui kaip ir kitų indeksų atveju. Iki stebėjimo laikotarpio pabaigos skirtumas didėja. Šio skirtumo didėjimą galima pagrįsti GEKS kainų indekso atveju naudojamais kainų indeksų eilučių sujungimo metodais bei duomenų skaičiavimo laiko langu.

Remiantis gautais rezultatais, galima teigti, jog išskirčių algoritmai neturi didelės įtakos kainų indeksų rezultatams: didesnė įtaka stebima Jevons kainų indekso atveju, o kitų indeksų atveju įtaka identiška ir neviršija pusės procentinio punkto. Susidariusius skirtumus galima pagrįsti skaičiuojamų kainų indeksų struktūra, o gautus kainų indeksų kitimus – nagrinėjamų kvitų duomenų pavyzdžiais.

Šis skyrius užbaigia praktinę kainų indeksų analizę. Nors praktinėje dalyje buvo gausu nagrinėjamų aspektų, kitame skyriuje apžvelgiami pagrindiniai praktinės dalies rezultatai.

4.11. Kainų indeksų rezultatų apibendrinimas

Šiame skyriuje apžvelkime pagrindinius praktinių kainų indeksų skaičiavimų rezultatų akcentus.

- **Duomenys** — kainų indeksų skaičiavimams naudojami Lietuvos prekybos tinklų kvitų duomenys. Duomenų rinkinius sudaro duonos, pieno bei obuolių pardavimai nuo 2023 metų sausio mėnesio iki 2025 metų lapkričio mėnesio imtinai. Kiekvienas produktų rinkinys turi visų pardavimų duomenų rinkinį bei duomenų poaibį, kurį sudaro tik imties produktų pardavimai. Nagrinėjant produktų kainų ir kiekių priklausomybę, paaiškėjo, jog Lietuvos vartotojai yra racionalūs, t. y. produktų vartojimas priklauso nuo kainų kaitos – kainoms mažėjant, sparčiai auga vartojamų produktų kiekiai, o kainoms didėjant — produktų kiekiai mažėja.
- **Kainų ir kiekio indikatoriai** — produktų pardavimų vertės kitimams analizuoti buvo skaičiuojami Bennet ir Montgomery kainų, kiekio bei vertės indikatoriai. Visų produktų atžvilgiu pagrindinė pardavimų vertės sumažėjimo priežastis buvo parduodamo kiekio sumažėjimas; šį pasikeitimą aiškiai identifikavo Bennet ir Montgomery kiekio indikatoriai. Obuolių kiekio indikatoriai parodė aiškią sezoniškumo tendenciją, o kitoms prekėms — kiekių mažėjimo tendenciją. Kita vertus, kainų indikatoriai visiems produktams išskyrė aiškią kainų didėjimo tendenciją.
- **Išskirčių metodai** – duomenų kokybei užtikrinti buvo pritaikyti kelių rūšių išskirčių algoritmai. Mažiausiai pardavimų išskirtims priskyrė algoritmas, kuris išskirtimis laiko pardavimus, kurių kaina yra mažesnė daugiau nei 50 procentų arba didesnė daugiau nei du kartus lyginant su produkto vidutine kaina. Daugiausiai stebėjimų išskirtims priskyrė algoritmo, kuris išskirtimis laiko po vieną procentą mažiausių ir didžiausių kainų bei mažų pardavimų filtro junginys.
- **Elementarieji kainų indeksai** – šių kainų indeksų rezultatai parodė, jog jautriausias kainų pokyčiams yra harmoninis kainų indeksas. Remiantis gautais rezultatais, galima teigti, jog geriausias yra Jevons kainų indeksas, remiantis šio kainų indekso statistiniais rodikliais. Analizuojant elementariusius kainų indeksus buvo paneigta teorinė šių kainų indeksų nelygybė, t. y. Carli indeksas įgijo mažesnes reikšmes nei harmoninis kainų indeksas, nors teorijoje nagrinėjamoje nelygybėje yra atvirkščiai. Pagrindinės priežastys – skirtingas produktų skaičius skaičiuojant kainų indeksus tarp dviejų laikotarpių, duomenų išskirtys bei struktūriniai šių kainų indeksų aspektai.

- **Baziniai kainų indeksai** — skaičiuojant bazinius kainų indeksus buvo nagrinėjamos ir šių kainų indeksų grandininės versijos bei skaičiuojami grandininiai nuokrypiai. Remiantis gautais rezultatais, pagrįsti teoriniai šių kainų indeksų aspektai: Laspeyres kainų indekso reikšmės visuomet didesnės nei Paasche kainų indekso, o šių kainų indeksų grandininis nuokrypis išsiskiria iš kitų bazinių kainų indeksų kelis kartus. Be to, buvo įsitikinta, jog Laspeyres sukelia teigiamą grandininį nuokrypį, kas reiškia, jog Laspeyres kainų indeksas linkęs pervertinti kainų lygį, o Paasche kainų indeksas sudaro neigiamą grandininį nuokrypį — šis kainų indeksas neįvertina kainų iki tikro kainų pasikeitimo lygio.
- **Superlatyvūs kainų indeksai** — analizuojant šiuos kainų indeksus pastebėtas gan stiprus tarpusavio priklausomumas bei maži skirtumai. Be to, šių kainų indeksų grandininis nuokrypis yra mažesnis nei bazinių kainų indeksų, o *Jackknife* iteracijų metodu gautų kainų indeksų vidurkliai lygūs tikriesiems kainų indeksų vidurkiams, tad šie kainų indeksai yra elastingi duomenų atžvilgiu.
- **Daugialypiai kainų indeksai** — šių kainų indeksų statistiniai rodikliai panašūs į superlatyvių kainų indeksų rodiklius. Šių kainų indeksų skaičiavimui galima įtraukti ne tik dviejų laikotarpių kainų stebėjimus, bet ir įvertinti sezoninę ar kitų faktorių įtaką naudojant skaičiavimo langą. Šie kainų indeksai kiek komplikuo-tesni kitų kainų indeksų atžvilgiu, nes reikalauja papildomų parametrų tinkamumo analizės. Skirtingų laiko langų testavimo rezultatai parodė, jog kuo trumpesnis skaičiavimui naudojamas laiko langas, tuo kainų indeksų svyravimai didesni, o ilgesnis skaičiavimo langas linkęs rodiklius glodinti laiko atžvilgiu. Nors šiems kainų indeksams reikalingas didesnis analizių skaičius, daugialypiai kainų indeksai laikomi patikimiausiu variantu naudojant kvitų duomenis.
- **GEKS–LM kainų indeksas** — šiam kainų indeksui skaičiuoti naudojamas papildomas parametras σ , kuris įvertina produktų elastingumą. Šiam parametru įvertinti buvo naudojami du metodai — Lloyd–Moulton ir CES kainų indeksų lygybės sprendimas bei panelinė regresija. Remiantis gautais rezultatais, tarp GEKS–LM kainų indekso su kintamu produktų elastingumu ir pastoviu visam laikotarpiui išryškėjo neženklius skirtumai, nors skirtingais metodais įvertintų produktų elastingumo rodikliai buvo kardinaliai skirtingi.
- **Kainų indeksų agregavimas** — naudojant skirtingus agregavimo metodus, kuomet kainų indeksas agreguojamas pagal kito kainų indekso skaičiavimo taisyklę, didesni skirtumai buvo pastebėti tik Jevons kainų indeksui, agreguojant pagal Laspeyres bei Törnqvist kainų indeksų taisykles. Kiti kainų indeksai nepasižymėjo didesniais skirtumais tarp skirtingų agregavimo taisyklių, o išryškėję skirtumai tarp skirtingų kainų indeksų agregatų nebuvo reikšmingi.
- **Kainų indeksų išskirčių analizė** — ši analizė buvo skirta įvertinti, ar išskirtimis laikomi pardavimai turi įtakos kainų indeksų skaičiavimams. Atlikus duomenų išskirčių aptikimą, naudojant teorinėje dalyje aprašytus algoritmus, paaiškėjo, jog daugiausiai įtakos turi algoritmas, kurio filtras išskirtimis laiko po vieną procentą mažiausių ir didžiausių kainų bei mažų pardavimų filtrų junginį. Mažiausiai įtakos turėjęs išskirčių filtras pašalina pardavimus, kurių kaina yra mažesnė daugiau nei 50 procentų arba didesnė nei 2 kartus lyginant su vidutine atitinkamo laikotarpio kaina.

Taigi, apibendrinus praktinės kainų indeksų analizės rezultatus, kitoje darbo dalyje apžvelgiami Lietuvos SVKI skaičiavimo aspektai bei pateikiamos rekomendacijos šio rodiklio tobulinimui.

5. Metodologiniai aspektai skaičiuojant SVKI

Šiame skyriuje apžvelgiama SVKI skaičiuoti Lietuvoje naudojama sudarymo metodologija, bei, remiantis gautais praktinės kainų indeksų analizės rezultatais, kitų šalių patirtimi ir SVKI sudarymo reglamentais, pateikiamos rekomendacijos Lietuvos SVKI skaičiavimo tobulinimui, įtraukiant tinkamiausius kainų indeksų skaičiavimo principus, naudojant prekybos tinklų kvitų duomenis.

5.1. Lietuvos SVKI sudarymo aspektai

Šioje darbo dalyje apžvelgiami pagrindiniai Lietuvos SVKI sudarymo aspektai bei skaičiavimo formulės. Šio darbo pradžioje buvo pristatyta, jog Lietuvoje SVKI skaičiuoja Valstybės duomenų agentūros Kainų statistikos skyrius, o šio rodiklio skaičiavimai yra reglamentuoti pagal Europos Sąjungoje suderintą metodologiją. Remiantis SVKI sudarymo metodika bei šio rodiklio reglamentais, vartojimo prekės bei paslaugos yra klasifikuojamos naudojant COICOP 2018 klasifikatorių. Remiantis klasifikatoriaus struktūra, kainų indeksai apskaičiuojami kiekvienam lygiui, pradedant elementariaisiais agregatais, kurie, naudojant svorių sistemas, agreguojami į aukštesnių lygių kainų indeksus. Elementariojo agregato skaičiavimas nėra reglamentuotas, tačiau, remiantis taisyklėmis, elementarieji agregatai į aukštesnius klasifikatoriaus lygius gali būti agreguojami tik pagal Laspeyres kainų indeksų agregavimo taisyklę.

Lietuvoje skaičiuojamo SVKI elementarusis agregatas yra žemesnio lygmens nei rekomenduojamas, t. y. žemesnis nei 5-asis klasifikatoriaus lygmuo. Be to, rekomenduojamas lygmuo nėra privalomas, jeigu įmanoma įvertinti vartotojų išlaidas žemesniuose lygmenyse, o būtent tai Lietuvoje galima įvertinti pasinaudojant kitais statistiniais šaltiniais. Šiuo atveju elementarieji agregatai į 5-ojo lygmens kainų indeksus agreguojami naudojant Laspeyres kainų indeksą. Toliau pateiktoje 30-oje lentelėje pateikiamas klasifikatoriaus agregatų pavyzdys²⁶.

COICOP 2018 kodas	Kodo lygmuo	Pavadinimas
01	1	MAISTAS IR NEALKOHOLINIAI GĖRIMAI
01.1	2	MAISTAS
01.1.1	3	Varpinių javų grūdai ir grūdų produktai
01.1.1.3	4	Duonos ir pyrago kepiniai
01.1.1.3.1	5	Duona
01.1.1.3.1.01	EA	Ruginė duona
01.1.1.3.1.02	EA	Juoda duona
01.1.1.3.1.03	EA	Batonas
01.1.1.3.1.04	EA	Prancūziškas batonas
01.1.1.3.1.05	EA	Čiabata

30 lentelė. COICOP 2018 klasifikatoriaus agregatų pavyzdys.

Toliau pateikiamos bendros kainų indeksų skaičiavimo formulės, kurios neatsižvelgia į kokybės pakeitimus ir trūkstamų prekių kainų vertinimo metodus, kurie atliekami skaičiuojant šį rodiklį. Be to, pateiktos formulės skaičiuoja tiesioginį kainų indeksą, kuris lygina m -ąjį t metų mėnesį su baziniu laikotarpiu, kuris SVKI skaičiavime yra $t - 1$ metų gruodžio mėnuo. Šie supaprastinimai nepakeičia SVKI skaičiavimo principų ir atspindi ilgalaikių kainų indeksų skaičiavimą. Taip pat laikoma, jog stebimų produktų aibė nekinta, kuri leidžia supaprastinti užrašomų kainų indeksų formules. Praktiniuose skaičiavimuose produktų aibė gali kisti, tačiau

²⁶Žemiausi klasifikatoriaus lygmenys – elementarieji agregatai (EA) gali nesutapti arba nesutampa su Lietuvoje SVKI skaičiavimui naudojamų EA aprašymais dėl agregatų aprašymų konfidencialumo. Pateikti pavadinimai sugalvoti darbo autoriaus.

kiekvienas produktas turi būti pakeistas arba jo kainos privalo būti įvertintos, tad produktų skaičius kiekvieną mėnesį nekinta.

Elementaraus agregato skaičiavimui įtraukiamas teritorinis pasiskirstymas. SVKI skaičiavimui kainos Lietuvoje surenkamos 18-oje miestų, toliau miestų skaičių žymėsime n_j . Kiekviename mieste surenkamos kainos turi apimti visus COICOP 2018 klasifikatoriaus elementariusius agregatus. Priklausomai nuo miesto dydžio, elementarusis agregatas gali turėti nuo 4 iki 10 kainų kiekviename mieste. Elementaraus agregato kainų indekso skaičiavimas pradedamas skaičiuoti miesto lygmeniu, o jam apskaičiuoti naudojamas elementarusis Dutot kainų indeksas. Tuomet miesto lygmens kainų indeksas lygus:

$$I_j^{t-1(12),t(m)} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_{ij}^{t(m)}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_{ij}^{t-1(12)}} = \frac{\sum_{i=1}^n p_{ij}^{t(m)}}{\sum_{i=1}^n p_{ij}^{t-1(12)}},$$

čia

$I_j^{t-1(12),t(m)}$ – j -ojo miesto t -ųjų metų m -ojo mėnesio kainų indeksas, kurio bazinis laikotarpis $t - 1$ metų gruodžio mėnesis;

$p_{ij}^{t(m)}$ – t -ųjų metų m -ojo mėnesio i -osios prekės ar paslaugos kaina j -ajame mieste;

$p_{ij}^{t-1(12)}$ – $t - 1$ metų gruodžio mėnesio i -osios prekės ar paslaugos kaina j -ajame mieste.

Suskaiciavus kainų indeksus miestų lygmeniu, atliekamas jų agregavimą į atitinkamo elementariojo agregato šalies lygmenį naudojant miestų svorius. Šis agregavimas atliekamas pagal toliau pateiktą formulę –

$$I_{\text{šalies}}^{t-1(12),t(m)} = \sum_{j=1}^{n_j} s_j^t I_j^{t-1(12),t(m)},$$

čia

$I_{\text{šalies}}^{t-1(12),t(m)}$ – šalies t -ųjų metų m -ojo mėnesio kainų indeksas, kurio bazinis laikotarpis $t - 1$ metų gruodžio mėnesis;

s_j^t – t -ųjų metų j -ojo miesto lyginamoji dalis visų miestų atžvilgiu;

n_j – miestų skaičius.

Šio lygmens kainų indeksas atitinka Lietuvoje skaičiuojamo SVKI elementaraus agregato lygmenį, tačiau laikantis šio rodiklio skaičiavimo rekomendacijų, užrašysime formulę 5-ojo klasifikatoriaus lygmens elementariojo agregato kainų indeksų skaičiavimui. Tuomet

$$I_{\text{EA}}^{t-1(12),t(m)} = \sum_{k=1}^{n_k} s_k^t I_{\text{šalies}}^{t-1(12),t(m)},$$

čia

s_k^t – k -ojo elementariojo agregato t -ųjų metų lyginamoji dalis visų to paties 5-ojo lygmens elementariųjų agregatų visumos atžvilgiu;

n_k – elementariųjų agregatų, sudarančių 5-ąją klasifikatoriaus lygmenį, skaičius.

Pilna išraiška klasifikatoriaus 5-ojo lygmens elementariojo agregato skaičiavimui yra

$$I_{\text{EA}}^{t-1(12),t(m)} = \sum_k s_k^t \sum_{j=1}^{n_j} s_j^t \left(\frac{\sum_{i=1}^n p_{ij}^{t(m)}}{\sum_{i=1}^n p_{ij}^{t-1(12)}} \right).$$

Taigi, suskaičiavus elementariusius agregatus, jie, remiantis COICOP 2018 klasifikatoriaus struktūra, agreguojami į aukštesnius lygmenis, kol gaunamas bendras visų prekių ir paslaugų kainų indeksas. Agregavimas, laikantis SVKI skaičiavimo reglamentų, atliekamas taikant Laspeyres kainų indeksų agregavimo taisyklę. Apskaičiavus bendro visų prekių ir paslaugų kainų indekso pokytį, gaunamas infliacijos įvertis, kuris naudojamas kaip vienas pagrindinių šalies ekonominės situacijos vertinimo rodiklių.

Siekiant užtikrinti didesnį SVKI tikslumą, Lietuvoje pradedama naudoti prekybos tinklų kvitų duomenys, kurie keičia iki šiol naudotą duomenų struktūrą, todėl atsiranda poreikis naujiems skaičiavimo sprendimams. Atsižvelgiant į tai, kitame skyrelyje pateikiamos SVKI skaičiavimo formulų modifikacijos, leidžiančios į rodiklio skaičiavimus įtraukti duomenis iš kelių šaltinių.

5.2. SVKI tobulinimo rekomendacijos

Šios darbo dalies tikslas – pateikti naują SVKI elementaraus agregato skaičiavimo metodą, atsižvelgiant į gautus rezultatus, įskaitant naują agregavimo struktūrą bei bendrą indekso skaičiavimo išraišką. Remiantis SVKI sudarymo Lietuvoje metodika ir išlaikant identiškus agregavimo lygmenis — prekybos tinklą, miestą bei produktų grupę, agreguojant į penktojo lygmens elementariusius agregatus, toliau pateikiamos galimos skaičiavimo schemas. Naujos skaičiavimo schemas pateikiamos remiantis gautais analitiniais kainų indeksų skaičiavimo rezultatais, kitų šalių taikomomis praktikomis, Eurostato rekomendacijomis bei SVKI sudarymo reglamentais. Nors dabartiniame SVKI skaičiavime elementarusis agregatas yra žemesnio lygmens, nei rekomenduojama Eurostato, toliau pateiktos formulės yra skirtos penktojo klasifikatoriaus lygmens elementariųjų agregatų kainų indeksų įvertiams gauti.

SVKI skaičiavimui naudojant kvitų duomenis išlieka ir tradicinis kainų surinkimo metodas, todėl elementarusis agregatas turi būti skaičiuojamas iš dviejų skirtingų duomenų šaltinių. Tolimesnis darbo tikslas – pateikti skaičiavimo formules, kurios apimtų šiuos duomenų šaltinius ir kartu išlaikytų dabartinį skaičiavimo metodą tradiciniu būdu gautiems duomenims, o kvitų duomenims būtų taikomi praktikoje naudojami daugialypiai kainų indeksai. Remiantis kitų šalių patirtimi bei metodologinėmis rekomendacijomis, pateiktomis kainų indeksų agregavimo skyriuje, priklausomai nuo į skaičiavimus įtraukiamų produktų duomenų kiekio galima išskirti kelis variantus. Į skaičiavimus galima įtraukti produktų imtį arba visus turimus duomenis. Priklausomai nuo duomenų kiekio rekomenduojami skirtingi agregavimo metodai.

Kvitų duomenų atžvilgiu viename prekybos tinkle galima stebėti kelis skirtingus produktus, kitaip nei tradiciniu būdu, kai stebima vieno produkto kaina kiekvienai produktų grupei. Agregavimo schema šiuo atveju yra tokia: produktai → prekybos tinklas → miestas → šalis → produktų grupės (elementarieji agregatai) → klasifikatoriaus penktasis lygmuo. Toliau pateikiami trys skirtingi skaičiavimo variantai.

Skaičiavimams naudojant produktų imtį rekomenduojama naudoti Jevons kainų indeksą, todėl toliau pateikiamos skaičiavimo ir agregavimo formulės, skirtos klasifikatoriaus penktojo lygmens agregatui skaičiuoti. Tuomet prekybos tinklo lygmens kainų indeksas yra lygus:

$$I_h^{t-1(12),t(m)} = \prod_{i=1}^n \left(\frac{p_{ih}^{t(m)}}{p_{ih}^{t-1(12)}} \right)^{\frac{1}{n}},$$

čia

$I_h^{t-1(12),t(m)}$ – h -ojo prekybos tinklo t -ųjų metų m -ojo mėnesio kainų indeksas, kurio bazinis laikotarpis $t - 1$ metų gruodžio mėnesis;

$p_{ih}^{t(m)}$ – t -ųjų metų m -ojo mėnesio i -osios prekės ar paslaugos kaina h -ajame prekybos tinkle;

$p_{ih}^{t-1(12)}$ – $t - 1$ metų gruodžio mėnesio i -osios prekės ar paslaugos kaina h -ajame prekybos tinkle.

Gauti prekybos tinklų kainų indeksai Laspeyres kainų indeksų agregavimo metodu agreguojami į miesto lygmenį pagal toliau pateiktą formulę.

$$I_j^{t-1(12),t(m)} = \sum_h^{n_h} s_h^t I_h^{t-1(12),t(m)},$$

čia

$I_j^{t-1(12),t(m)}$ – j -ojo miesto t -ųjų metų m -ojo mėnesio kainų indeksas, kurio bazinis laikotarpis $t - 1$ metų gruodžio mėnesis;

s_h^t – t -ųjų metų h -ojo prekybos tinklo lyginamoji dalis visų to miestų prekybos tinklų atžvilgiu;

n_h – prekybos tinklų skaičius.

Miestų kainų indeksai agreguojami į šalies kainų indeksą.

$$I_{\text{šalies}}^{t-1(12),t(m)} = \sum_{j=1}^{n_j} s_j^t I_j^{t-1(12),t(m)}$$

s_j^t – t -ųjų metų j -ojo miesto lyginamoji dalis visų miestų atžvilgiu;

n_j – miestų skaičius.

Kelių dabartinių elementariųjų agregatų agregavimas į penktojo klasifikatoriaus lygmens kainų indeksą atliekamas pagal šią formulę:

$$I_{\text{EA}}^{t-1(12),t(m)} = \sum_k^{n_k} s_k^t I_{\text{šalies}}^{t-1(12),t(m)}$$

čia

s_k^t – k -ojo elementariojo agregato t -ųjų metų lyginamoji dalis visų to paties penktojo lygmens elementariųjų agregatų visumos atžvilgiu;

n_k – elementariųjų agregatų, sudarančių penktąjį klasifikatoriaus lygmenį, kuriam priklauso, skaičius.

Bendras penktojo klasifikatoriaus lygmens kainų indeksas gaunamas

$$I_{\text{EA}}^{t-1(12),t(m)} = \sum_k^{n_k} s_k^t \sum_j^{n_j} s_j^t \sum_h^{n_h} s_h^t \prod_{i=1}^n \left(\frac{p_{ih}^{t(m)}}{p_{ih}^{t-1(12)}} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Tuomet galutinė klasifikatoriaus penktojo lygmens kainų indekso skaičiavimo formulė, sudaryta iš tradicinių bei kvitų duomenų kainų indeksų, yra

$$I_{\text{EA}}^{t-1(12),t(m)} = \hat{s}_a^t \sum_k^{n_k} s_k^t \sum_j^{n_j} s_j^t \sum_h^{n_h} s_h^t \prod_{i=1}^n \left(\frac{p_{ih}^{t(m)}}{p_{ih}^{t-1(12)}} \right)^{\frac{1}{n}} + (1 - \hat{s}_a^t) \sum_k^{n_k} s_k^t \sum_{j=1}^{n_j} s_j^t \left(\frac{\sum_{i=1}^n p_{ij}^{t(m)}}{\sum_{i=1}^n p_{ij}^{t-1(12)}} \right), \quad (91)$$

čia

$\hat{s}_a^t$ – pajamų pasiskirstymo įvertis, parodantis kokią dalį vartotojai išleidžia prekybos tinkluose lyginant su visomis t metų vartotojų išlaidomis mažmeninėje prekyboje. Taigi, (91) formulė apibrėžia klasifikatoriaus penktojo lygmens kainų indekso skaičiavimo algoritmą, kai skaičiavimui naudojami tradiciniu būdu surinkti duomenys bei produktų imtis išrinkta remiantis kvitų duomenimis.

Skaičiavimui naudojant visus produktus, kuriuos galima identifikuoti iš prekybos tinklų kvitų duomenų, taikomas daugialypis kainų indeksas. Praktikoje dažniausiai naudojamas ir pasižymintis palankiomis statistinių rodiklių reikšmėmis yra GEKS—Törnqvist (CCDI) kainų indeksas su standartiniu 13 mėnesių skaičiavimo langu ir

bazinio laikotarpio susiejimu. Šis susiejimo metodas pasirenkamas todėl, kad yra paprasčiausias būdas siejant daugialypių kainų indeksų laiko eilutes, taip pat todėl, kad bus reikalinga susieti tradiciniu metodu skaičiuojamo kainų indekso dalį su baziniu laikotarpiu. Skaičiuojant CCDI kainų indeksą kiekvienam skaičiuojamajam mėnesiui gaunamas rezultatas apima skirtingą laiko langą, todėl reikalingas šio kainų indekso susiejimas su vieno laikotarpio baze. Skaičiuojant t metų m -ąjį mėnesį, naudojamas laiko langas nuo $t - 1$ metų m -ojo mėnesio iki skaičiuojamo laikotarpio, imtinai. Daugialypio kainų indekso prekybos tinklo lygmens skaičiavimui, naudojant pasirinktą 13 mėnesių laiko langą, taikoma formulė:

$$I_{\text{CCDI},h}^{t-1(m),t(m)} = \prod_{\tau=0}^{12} \left(\frac{I_{T,h}^{\tau,t(m)}}{I_{T,h}^{\tau,t-1(m)}} \right)^{\frac{1}{13}}, \quad (92)$$

čia

$I_{T,h}^{\tau,t(m)}$ – Törnqvist kainų indeksas h -ojo miesto lygmeniu, kuris skaičiuojamas laikotarpyje nuo momento τ iki t metų m -ojo mėnesio;

$I_{T,h}^{\tau,t-1(m)}$ – Törnqvist kainų indeksas h -ojo miesto lygmeniu, kuris skaičiuojamas laikotarpyje nuo momento τ iki $t - 1$ metų m -ojo mėnesio

bei Törnqvist kainų indekso išraiška

$$I_{T,h}^{\tau_0,\tau_1} = \prod_{i \in G_{\tau_0,\tau_1}} \left(\frac{p_{ih}^{\tau_1}}{p_{ih}^{\tau_0}} \right)^{\frac{s_{\tau_0,h} + s_{\tau_1,h}}{2}}. \quad (93)$$

Formulėje (92) suskaičiuoto kainų indekso bazinis laikotarpis yra $t - 1$ metų m -asis mėnuo, tačiau praktikoje skaičiuojamas SVKI turi $t - 1$ metų gruodžio mėnesio bazinį laikotarpį. Nors pasirinktam kainų indeksui skirtingų paslinktų laiko langų kainų indeksams susieti yra naudojamas bazinio laikotarpio metodas, susiejimo formules skaičiavimui galima supaprastinti ir taikyti toliau pateiktą algoritmą.

Skaičiuojant CCDI kainų indeksą t metų m -ąjį mėnesį, suskaičiuojami visų mėnesių pasirinkto laiko lango kainų indeksai nuo $t - 1$ metų m -ojo mėnesio iki skaičiuojamo laikotarpio. Norint gauti reikalingą rezultatą, t. y. t metų m -ojo mėnesio kainų indeksą, palyginti su $t - 1$ metų gruodžio mėnesiu, reikia t metų m -ojo mėnesio kainų indekso reikšmę padalinti iš tame pačiame laiko lange suskaičiuoto $t - 1$ metų gruodžio mėnesio CCDI kainų indekso, tuomet gautas rezultatas bus tas, kurio reikia SVKI skaičiavimui.

Iš to išplaukia, jog $I_{\text{CCDI},h}^{t-1(m),t(m)}$ laikysime pasirinkto lango tarp $t - 1$ ir t metų m mėnesių kainų indeksų laiko eilute, kurią sudaro trylikos mėnesių kainų indeksų reikšmės. Tuomet t metų m -ojo mėnesio kainų indeksą, palyginti su $t - 1$ metų gruodžio mėnesiu, bus galima apskaičiuoti pagal šią formulę:

$$I_{\text{CCDI},h}^{t-1(12),t(m)} = \frac{I_{\text{CCDI},h}^{t-1(m),t(m)}(t(m))}{I_{\text{CCDI},h}^{t-1(m),t(m)}(t-1(12))}, \quad (94)$$

o galutinė formulė klasifikatoriaus penktojo lygmens kainų indeksui skaičiuoti yra

$$I_{\text{EA}}^{t-1(12),t(m)} = \hat{s}_a^t \sum_k^{n_k} s_k^t \sum_j^{n_j} s_j^t \sum_h^{n_h} s_h^t I_{\text{CCDI},h}^{t-1(12),t(m)} + (1 - \hat{s}_a^t) \sum_k^{n_k} s_k^t \sum_{j=1}^{n_j} s_j^t \left(\frac{\sum_{i=1}^n p_{ij}^{t(m)}}{\sum_{i=1}^n p_{ij}^{t-1(12)}} \right). \quad (95)$$

Kiek kitoks skaičiavimo metodas galėtų būti taikomas, pakeičiant agregavimo struktūrą į šią: produktai → produktų grupės → prekybos tinklai → miestai → klasifikatoriaus penktasis lygmuo – šalies lygmuo. Šiuo atveju rekomenduojamas kelių skirtingų kainų indeksų agregavimas. Individualių produktų aibei skaičiuojamas daugialypis kainų indeksas, kuris gaunamas produktų grupės lygmeniui. Vėliau produktų grupės agreguojamos, naudojant Törnqvist kainų indeksą, o gauti kainų indeksai prekybos tinklų lygmeniu į aukštesnius lygmenis agreguojami naudojant Laspeyres kainų indekso agregavimo taisyklę. Šiuo atveju, naudojant jau apibrėžtus žymėjimus, klasifikatoriaus penktojo lygmens kainų indeksui suskaičiuoti naudojama toliau pateikta formulė:

$$I_{EA}^{t-1(12),t(m)} = \sum_j^{n_j} s_j^t \sum_h^{n_h} s_h^t \prod_k^{n_k} \left(I_{CCDI,k}^{t-1(12),t(m)} \right)^{\frac{s_k^{t-1(12)} + s_k^{t(m)}}{2}}, \quad (96)$$

čia

$s_k^{t-1(12)}$ – k -ojo dabartinio elementariojo agregato $t - 1$ metų gruodžio mėnesio lyginamoji dalis visų to paties penktojo lygmens elementariųjų agregatų visumoje;

$s_k^{t(m)}$ – k -ojo dabartinio elementariojo agregato t metų m -ojo mėnesio lyginamoji dalis visų to paties penktojo lygmens elementariųjų agregatų visumoje.

Šiuo atveju rekomenduojama skaičiuoti, naudojant tik kvitų duomenis, nes dėl pakeistos agregavimo schemos nebėra suderinamumo su dabartiniu skaičiavimo metodu. Taip pat formulėje (91) rekomenduojama Dutot kainų indeksą pakeisti Jevons kainų indeksu, siekiant geresnio suderinamumo, o formulėje (95) Dutot kainų indekso pakeitimas Jevons kainų indeksu yra privalomas.

Vadinasi, priklausomai nuo duomenų struktūros įtraukimo į skaičiavimus, galima skaičiuoti trimis skirtingais būdais:

- Naudojant dabartinį skaičiavimo metodą, miestų lygmenis apskaičiuoti taikant Dutot kainų indeksą, o prekybos tinklų, naudojant kvitų duomenis, lygmenims taikyti Jevons kainų indeksą, o agreguojant į aukštesnius lygmenis taikyti Laspeyres kainų indekso agregavimo taisyklę.
- Naudojant dabartinį skaičiavimo metodą, miestų lygmenis apskaičiuoti taikant Dutot kainų indeksą, o prekybos tinklų, naudojant kvitų duomenis, lygmenims taikyti daugialypį CCDI kainų indeksą, o agreguojant į aukštesnius lygmenis taikyti Laspeyres kainų indekso agregavimo taisyklę.
- Atnaujinti agregavimo struktūrą ir naudoti tik kvitų duomenis: skaičiuoti daugialypį CCDI kainų indeksą produktų grupių lygmenyje, o produktų grupes agreguoti naudojant Törnqvist kainų indeksą, kuris į aukštesnius lygmenis agreguojamas pagal Laspeyres agregavimo taisyklę.

Rezultatai ir išvados

Šiame magistro darbe dėmesys skiriamas kainų indeksų sudarymo metodų ir skirtingų kainų indeksų klasių savybėms bei tarpusavio sąryšiams. Apžvelgus pagrindinius kainų indeksų teorijos elementus, buvo skirtas akcentas prisidėti prie daugialypių kainų indeksų teorijos tobulinimo, tad buvo pateikiamas GEKS–LM kainų indekso aksiomatinių savybių įrodymas. Vėliau darbas buvo tęsiamas praktiniais kainų indeksų skaičiavimais naudojant Valstybės duomenų agentūros pateiktus Lietuvos prekybos tinklų kvitų duomenis, o darbo pabaigoje pristatytos rekomendacijos Lietuvoje skaičiuojamo SVKI rodiklio tobulinimui.

Teorinėje dalyje buvo pristatyti pagrindiniai kainų indeksų sudarymo metodai – stochastinis, aksiomatinis bei ekonominis. Nors šie metodai iš esmės skirtingi, visi jie yra metodologiškai pagrįsti ir atlieka svarbų vaidmenį kainų indeksų teorijoje. Teorinė dalis tęsiama skirtingų kainų indeksų – elementariųjų, bazinių, superlatyvių, daugialypių bei tolydžių, apžvalga, tarpusavio sąryšių nagrinėjimu bei matematinių charakteristikų analize. Taip pat apžvelgti ir kiti kainų indeksų skaičiavimui reikalingi aspektai, tokie kaip kainų indeksų agregavimas bei poslinkio vertinimas. Susipažinus su kainų indeksų teorijos elementais, toliau pristatytas GEKS–LM kainų indekso aksiomatinių savybių įrodymas, kuris praplėtė Jacek Białek straipsnį, kuriame nagrinėjamos daugialypių GEKS tipo kainų indeksų savybės [5]. Pagrindinių GEKS–LM tenkinamų savybių teoremos įrodymas pateikiamas remiantis apibrėžtomis daugialypių kainų indeksų aksiomomis bei straipsnio autoriaus metodologinėmis rekomendacijomis.

Kitoje darbo dalyje buvo atliekama gana plačios apimties, skirtingų kainų indeksų praktinių skaičiavimų analizė. Skirtingų klasių kainų indeksų skaičiavimai, naudojant prekybos tinklų duomenis, atlikti *RStudio* aplinkoje naudojantis *PriceIndices* pakete pateiktomis kainų indeksų skaičiavimo funkcijomis. Taip pat pasinaudojant ir kitais R programavimo kalboje naudojamais paketais, skirtais duomenų transformacijoms bei vizualizavimui. Skaičiavimams atlikti buvo naudojami duonos, pieno bei obuolių pardavimai gauti analizuojant Lietuvos prekybos tinklų kvitų duomenis. Gauti rezultatai parodė tam tikrus kainų indeksų skaičiavimo išskirtinumo aspektus. Analizuojant elementariusius kainų indeksus pastebėta, jog kainų pokyčiams jautriausias harmoninis kainų indeksas, o praktiškai skaičiuojant kainų indeksus gali nevisada būti teisinga šių kainų indeksų nelygybė, kuri teigia, jog harmoninis kainų indeksas visada yra mažesnis už Carli kainų indeksą. Baziniai kainų indeksai identifiko ir teorijoje nagrinėtus šiems kainų indeksams būdingus išskirtinumus – grandinis Laspeyres kainų indeksas gali pervertinti kainų lygio pasikeitimą, o grandininis Paasche – atvirkščiai, kainų lygio pasikeitimo gali ir neparodyti. Nagrinėjant superlatyvius kainų indeksus pastebėta, jog susidaręs grandininis nuokrypis mažesnis nei bazinių kainų indeksų, gauti rezultatai leidžia šiuos kainų indeksus laikyti patikimesniais. Daugialypių kainų indeksų analizė parodė, jog šie išsiskiria parametru gausa, šiems kainų indeksams reikia vertinti ne tik pasirinkto laiko lango įtaką skaičiavimui, bet ir kainų indeksų laiko eilučių susiejimo problemą. Atlikus skirtingų parametru analizę, pastebėta, jog trumpesnis laiko langas turi įtakos didesniems kainų indekso reikšmių svyravimams, o skirtingi laiko eilučių susiejimo būdai, nagrinėjamų duomenų atveju, įtakos neturi. Analizuojant skirtingas kainų indeksų agregavimo technikas, išsiskyrė tik Jevons kainų indeksas, kuris, remiantis šio indekso struktūrinėmis charakteristikomis, skaičiavime nenaudoja svorių sistemų. Kitų kainų indeksų rezultatai buvo be didesnių nuokrypių. Įprastai, bet kuris duomenų rinkinys turi išskirčių, tad šiam tikslui buvo atlikta išskirčių įtakos analizė kainų indeksų rodikliams. Gauti rezultatai parodė, jog renkantis išskirčių algoritmą, kuris išskirtims priskiria pardavimus, kurų kainą yra 50 procentų mažesnė ar 2 kartus didesnė lyginant su vidutine pasirinkto laikotarpio produkto kaina, bei naudojant mažų pardavimų filtrą, stebimi reikšmingi kainų indeksų skirtumai lyginant kitų algoritmų atžvilgiu.

Darbo pabaigoje, remiantis gautais praktinės dalies rezultatais, SVKI skaičiavimo reglamentais bei kitų šalių gerąja praktika, buvo pristatyti Lietuvos SVKI skaičiavimo tobulinimo aspektai bei pateikiamos naujos skai-

čiavimo formulės. Priklausomai nuo kvitų duomenų struktūros ir produktų imties buvo pateikti trys skaičiavimo algoritmai, kurie leidžia į skaičiavimą įtraukti ne tik šiuo metu skaičiavimui taikomą algoritmą, bet ir skaičiavimo metodus rekomenduojamus kvitų duomenims. Pateikti siūlymai apima Jevons kainų indekso panaudojimą produktų imties atveju arba CCDI kainų indekso – naudojant visų produktų duomenis. Taip pat pateikiamas siūlymas Dutot kainų indeksą keisti Jevons kainų indeksu bei pritaikyti naują agregavimo schemą.

Atsižvelgiant į gautus rezultatus, reikalinga tolimesnė analizė naujai pateiktų skaičiavimo formulių testavimui bei rezultatų analizei bei skaičiavimo pakeitimo įtakai vertinti. Taip pat reikalingi tolimesni darbai ir CCDI kainų indekso skaičiavimo laiko lango bei susiejimo metodų aspektams analizuoti.

Apibendrinant, šis darbas ne tik leidžia susipažinti su kainų indeksų teorijos elementais, bet ir praktiškai įsitikinti skirtingų kainų indeksų rezultatais. Be to, nors ir nedideliu indėliu, bet šiuo metu reikšmingų daugialypių kainų indeksų teorija papildoma GEKS–LM kainų indeksų savybių įrodymu. Taip pat, atlikus papildomus analitinius ir metodologinius tyrimus, tikėtina, jog ateityje Lietuvos SVKI skaičiavimui bus taikomos šiame darbe pasiūlytos skaičiavimo ir agregavimo formulės.

Literatūra ir šaltiniai

- [1] B. Balk. *Lowe and Cobb-Douglas CPIs and their Substitution Bias*. Rotterdam School of Management, Erasmus University, Rotterdam: Statistic Netherlands, The Hague, 2009.
- [2] J. Białek. *PriceIndices – a New R Package for Bilateral and Multilateral Price Index Calculations*. University of Lodz: Lodz, Poland, 2018.
- [3] J. Białek. „The general class of multilateral indices and its two special cases”. Iš: *17th Meeting of the Ottawa Group*. Ottawa, Canada: Department of Statistical Methods, University of Lodz Department of Trade Services, Statistics Poland, 2022.
- [4] J. Białek. „Evolution of the GEKS index”. Iš: *18th Meeting of the Ottawa Group*. Ottawa, Canada: Department of Statistical Methods, University of Lodz Department of Trade Services, Statistics Poland, 2024.
- [5] J. Białek. *General Classes of GEKS-Type Price Indices With Application to Scanner Data*. University of Lodz, Poland: International Association for Research in Income, Wealth, Review of Income and Wealth, 2025; 71:e12726, 2024.
- [6] J. Białek, M. Beręsewicz. „Scanner data in inflation measurement: from raw data to price indices”. Iš: Lodz, Poznan, Poland: Department of Statistical Methods, University of Lodz Department of Trade Services, Statistics Poland, Poznan University of Economics Business, Statistical Office in Poznan, Centre for Small Area Estimation, 2020.
- [7] J. Bialek, N. Pawelec. *The use of transitive Montgomery indicators for scanner data analysis*. University of Lodz, Poland: Argumenta Oeconomica, Vol.53, No. 2, 2024, puslapiai 1–13.
- [8] J. Białek, N. Pawelec, S. Roszkowska. „Estimating the elasticity of substitution when compiling the CES cost of living index on scanner data”. Iš: *Quality Quantity (2024) 58:5997–6021 (2024)*.
- [9] E. Commission. *Harmonised Index of Consumer Prices (HICP) METHODOLOGICAL MANUAL November 2018*. Luxembourg: Publications Office of the European Union, 2018.
- [10] W. E. Diewert. *Comparison of Transitive Bennet and Montgomery Indicators on the Basis of Scanner Data Sets*. University of Lodz, Poland: European Research Studies Journal, Volume XXVII, Issue 4, 2024, puslapiai 472–485.
- [11] E. Diewert. „Exact and Superlative Index Numbers”. Iš: *Journal of Econometrics*, 4, 115-145 (1976).
- [12] E. Diewert. „The Early History of Price Index Research”. Iš: *National Bureau of Economic Research working paper series, Working Paper No. 2713 (1988)*.
- [13] E. Diewert. „Chapter 11: On the Stochastic Approach to Index Numbers”. Iš: *Price and Productivity Measurement, Volume 6 - Index Number Theory (2010)*, puslapiai 235–262.
- [14] E. Diewert. „Chapter 5: The Economic Approach to Index Number Theory”. Iš: *The Consumer Price Index Manual: Theory and Practice (2021)*.
- [15] E. Diewert. *Chapter 11: Scanner Data, Elementary Price Indexes and the Chain Drift Problem*. University of British Columbia, Vancouver, BC, Canada: Advances in Economic Measurement, A Volume in Honour of D.S. Prasada Rao, 2022, puslapiai 445–606.
- [16] EU, EC. *Guide on Multilateral Methods in the Harmonised Index of Consumer Prices*. Luxembourg: Publications Office of the European Union, 2022.

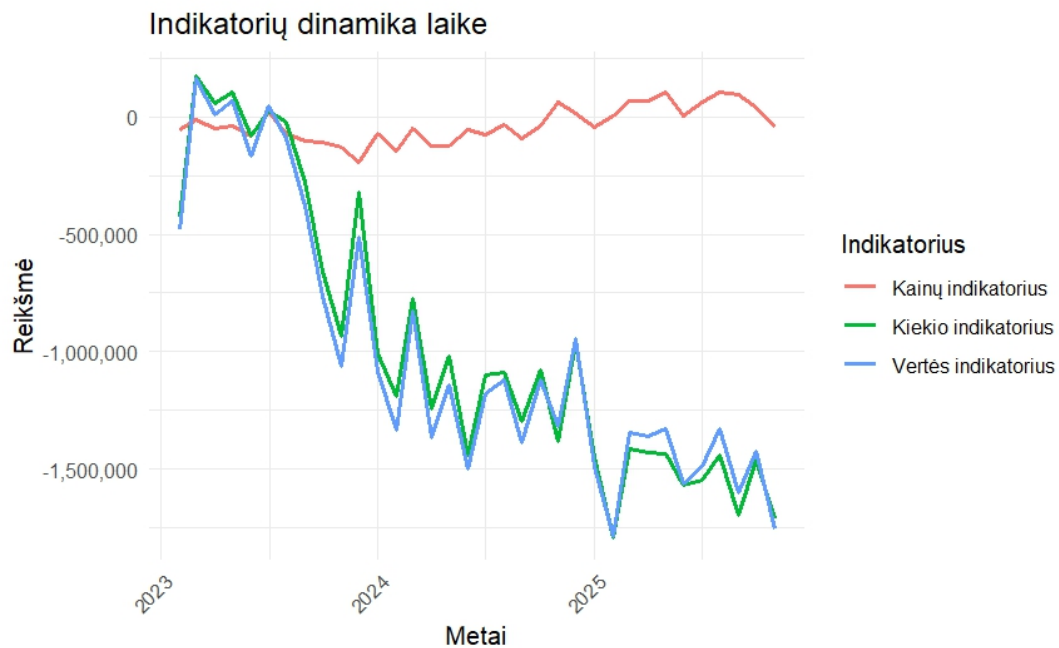
- [17] V. Guerreiro, S. Weinand, P. Konijn. „Methodological choices when using multilateral methods: window length, seasonality and aggregation structure“. Iš: *Group of Experts on Consumer Price Indices*. Geneva, Switzerland: European Commission, Eurostat, Unit C-4: Price statistics. Purchasing power parities. Housing statistics., 2023 June 7-9.
- [18] T. Hodson. „Root-mean-square error (RMSE) or mean absolute error (MAE): when to use them or not“. Iš: *Geoscientific Model Development* (2022).
- [19] ILO, IMF, OECD, UNECE, Eurostat, WB. *Consumer price index manual: Theory and practice*. Geneva, Switzerland: International Labour Office, 2004.
- [20] ILO, OECD, EU, UN, WB, IMF. *Consumer price index manual : theory 2025*. Washington, DC, USA: International Monetary Fund, Publication Services, 2025.
- [21] L. Ivancic, E. Diewert, K. J. Fox. „Scanner Data, Time Aggregation and the Construction of Price Indexes“. Iš: *National Bureau of Economic Research* (2009).
- [22] P. von der Lippe. *Chain Indices: A Study in Price Index Theory*. Statistisches Bundesamt, Wiesbaden: Vol. 16 of the Publication Series Spectrum of Federal Statistics, 2001, puslapiai 246–256.
- [23] M. Müller. „Dynamic time warping“. Iš: *Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg* (2007).
- [24] K. Ramachandran, C. Tsokos. *Mathematical Statistics with Applications*. USA: Elsevier Academic Press, 2009.
- [25] VDA. *Lietuvos statistikos departamento kainų statistikos skyriaus nuostatai*. Vilnius: Kainų statistikos skyrius, 2021.
- [26] VDA. *Vartotojų kainų indekso sudarymo metodika*. Vilnius: Kainų statistikos skyrius, 2022.
- [27] VDA. *Suderinto vartotojų kainų indekso sudarymo metodika*. Vilnius: Kainų statistikos skyrius, 2023.

1 priedas.**Prekybos tinklų kvitų duomenų struktūra****31 lentelė.** *Prekybos tinklų kvitų duomenų struktūra.*

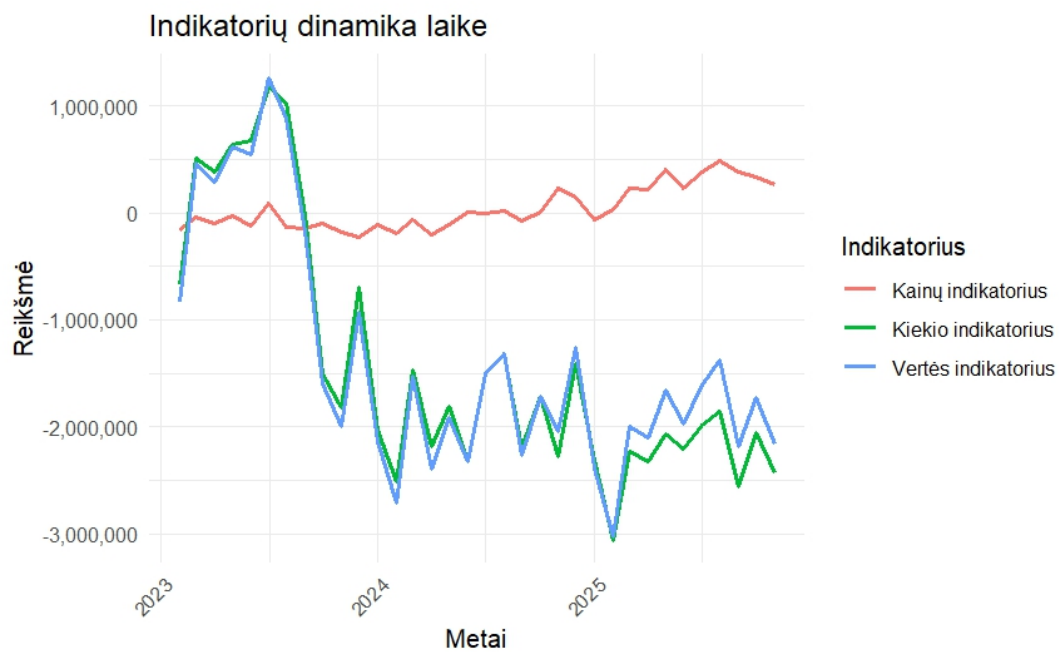
Eil. nr.	Rodiklis
1	Įmonės registro kodas
2	Parduotuvės adresas
3	Kvito identifikavimo numeris
4	Kvito informacija
5	Pardavimo data
6	Prekės kodas
7	Prekės aprašymas
8	Pagrindinis matavimo vnt. (skaitinė išraiška)
9	Pagrindinis matavimo vnt. (pavadinimas)
10	Pagrindinio matavimo vnt. kaina
11	Stebimas matavimo vnt. (skaitinė išraiška)
12	Stebimas matavimo vnt. (pavadinimas)
13	Kaina už stebimą matavimo vnt. su PVM
14	PVM
15	Kilmės šalis
16	Gamintojas
17	Prekės ženklas
18	Parametrai
19	Akcijos, nuolaidos tipas
20	Akcijos, nuolaidos dydis (skaitinė išraiška)
21	Mokėta
22	Atsiskaitymo suma

2 priedas.

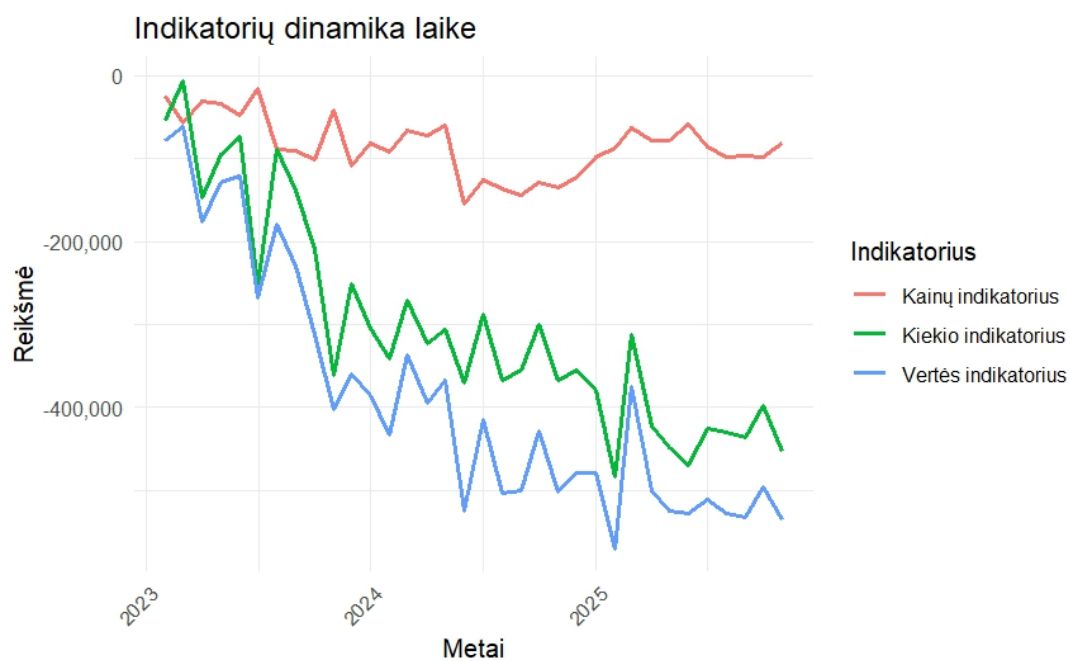
Bennet kainų ir kiekių indikatorių grafikai



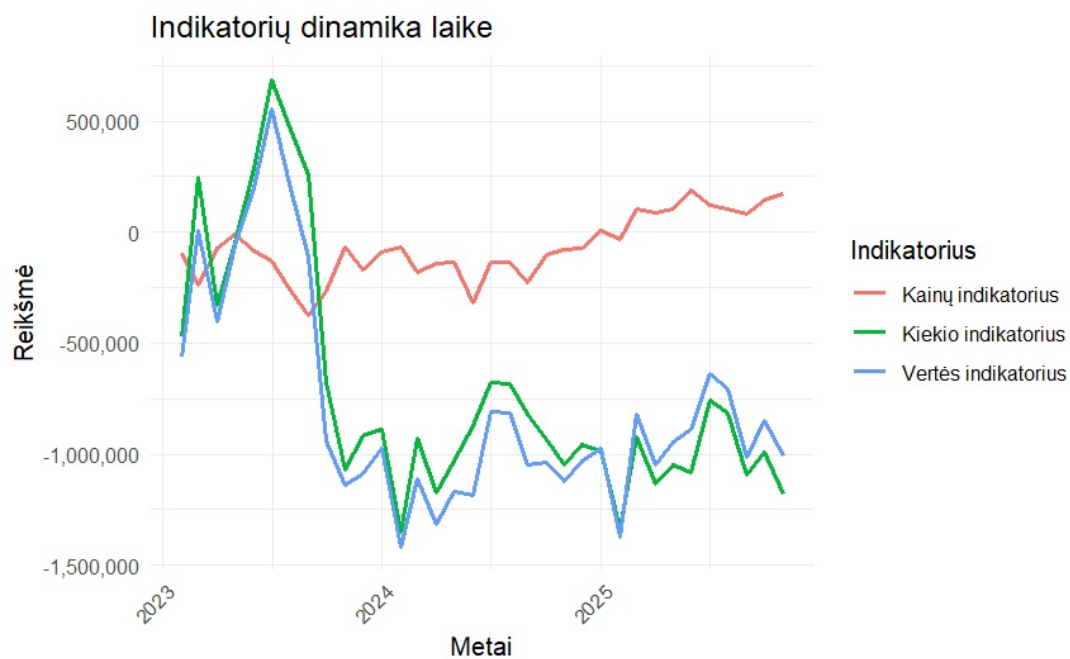
64 pav. Duonos imties produktų Bennet indikatorių kitimas.



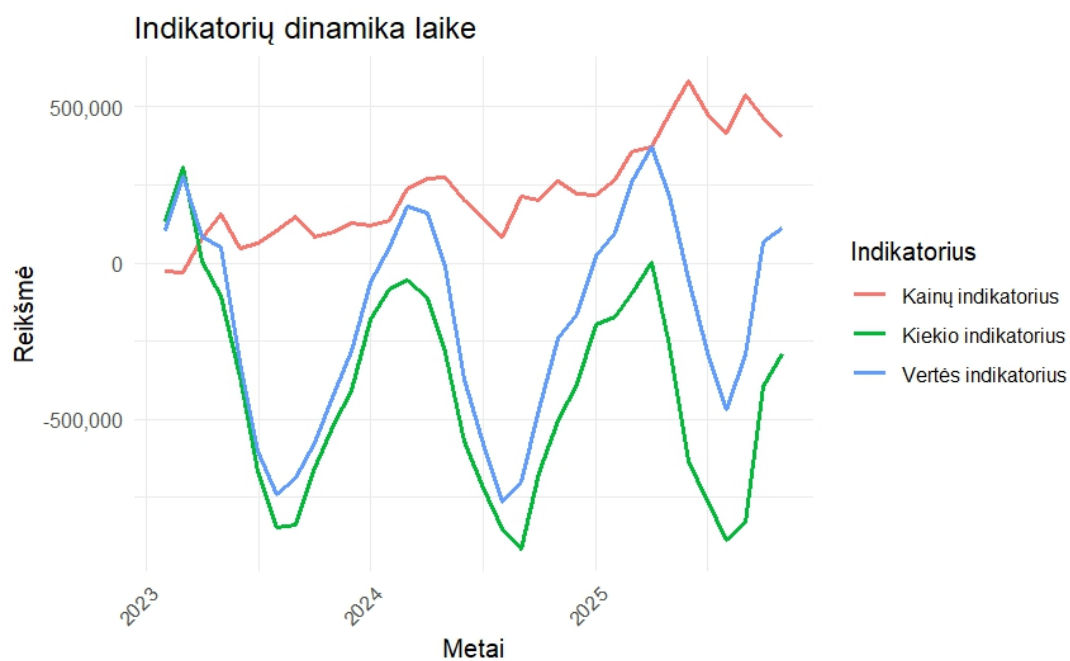
65 pav. Visų duonos produktų Bennet indikatorių kitimas.



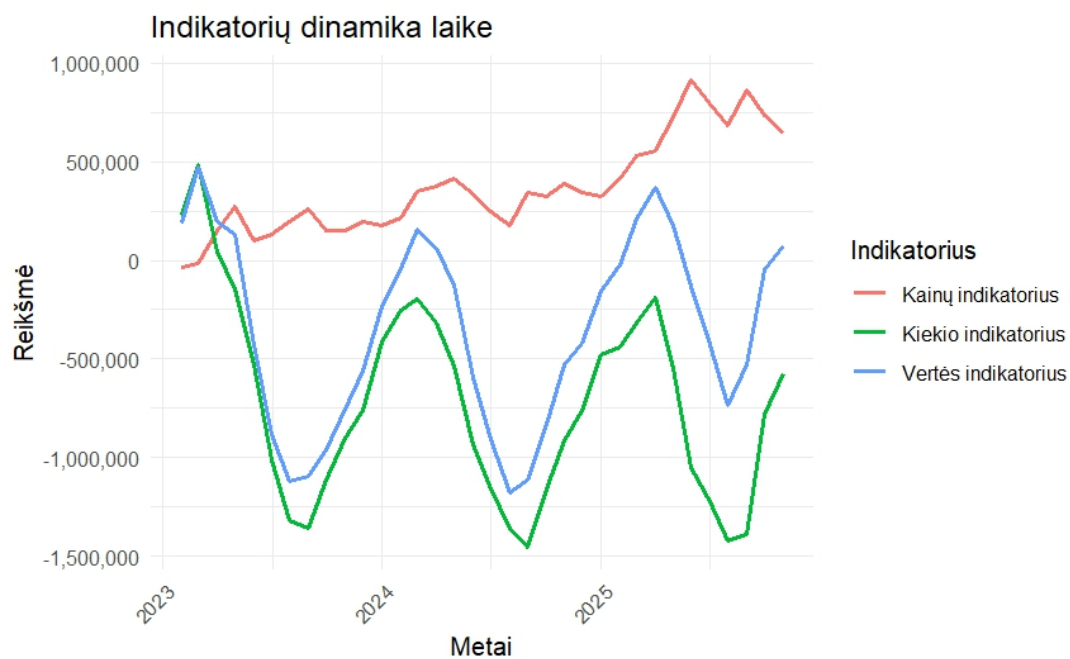
66 pav. Pieno imties produktų Bennet indikatorių kitimas.



67 pav. Visų pieno produktų Bennet indikatorių kitimas.



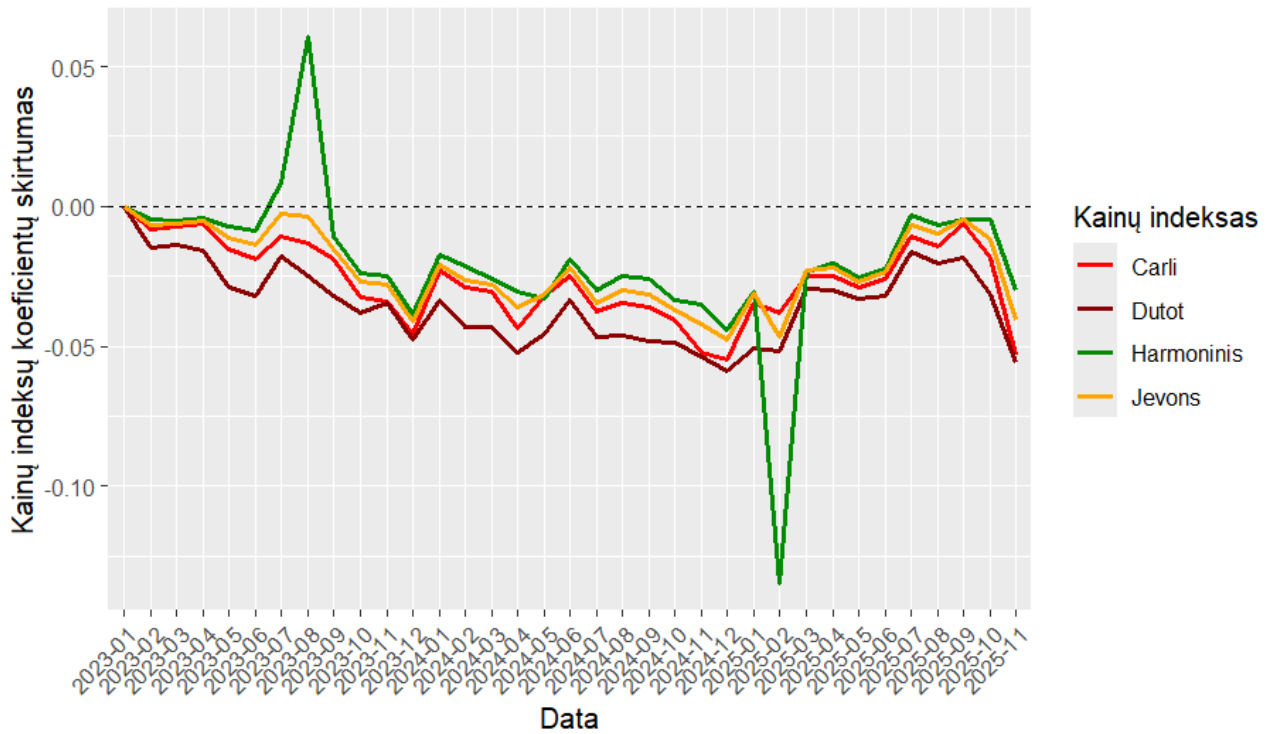
68 pav. Obuolių imties Bennet indikatorių kitimas.



69 pav. Visų obuolių Bennet indikatorių kitimas.

3 priedas.

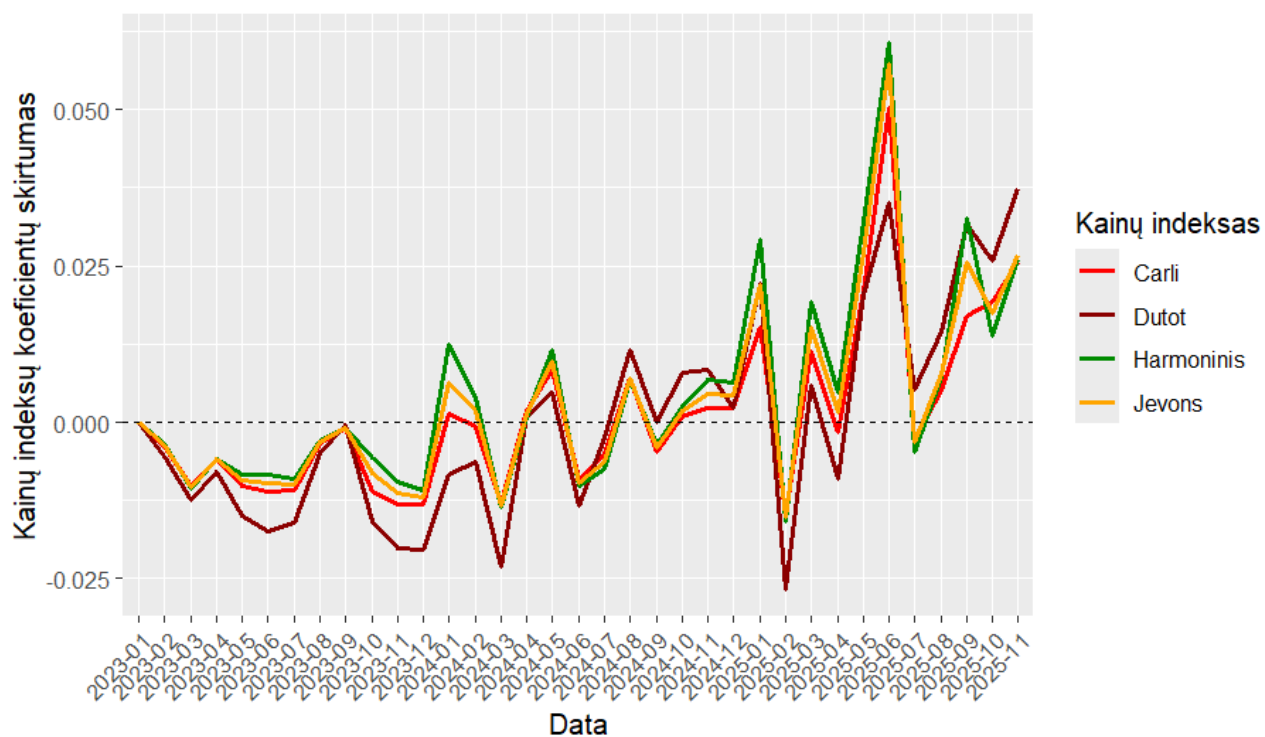
Elementariųjų kainų indeksų skirtumų grafikai



70 pav. Duonos imties produktų bei visų pardavimų elementariųjų kainų indeksų skirtumų kitimas.



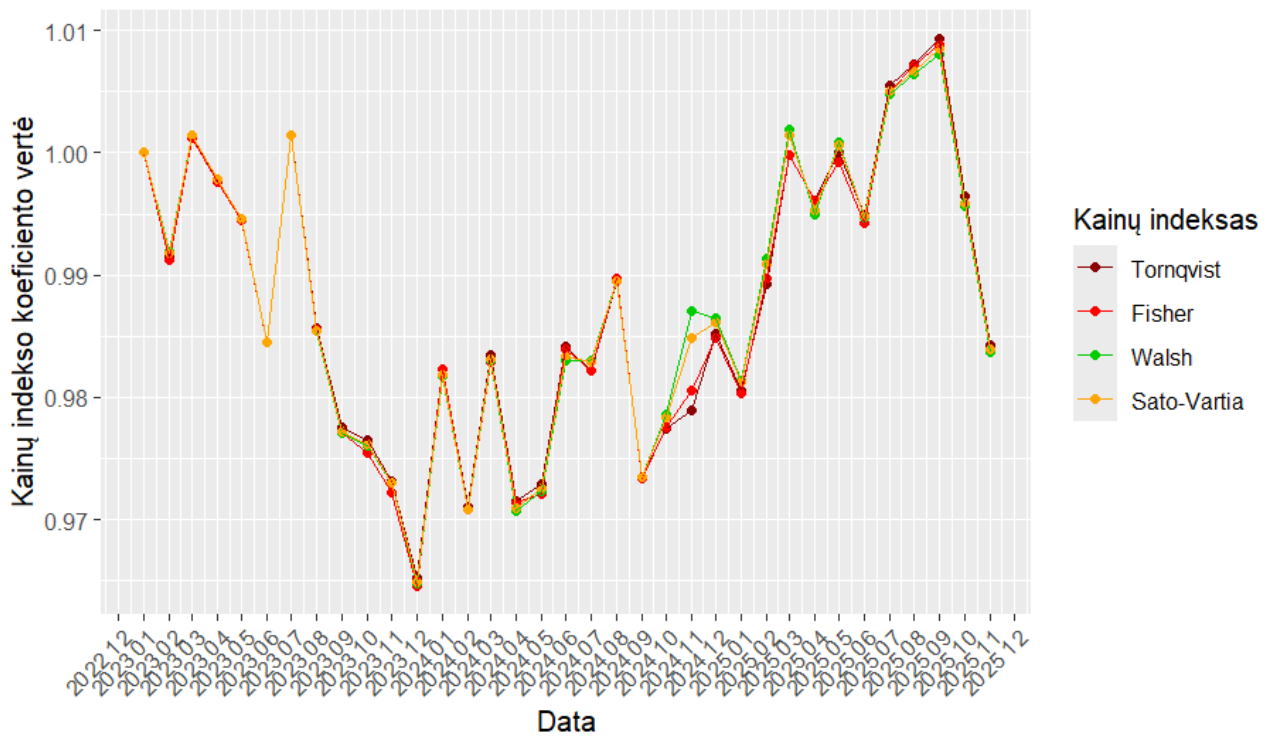
71 pav. Pieno imties produktų bei visų pardavimų elementariųjų kainų indeksų skirtumų kitimas.



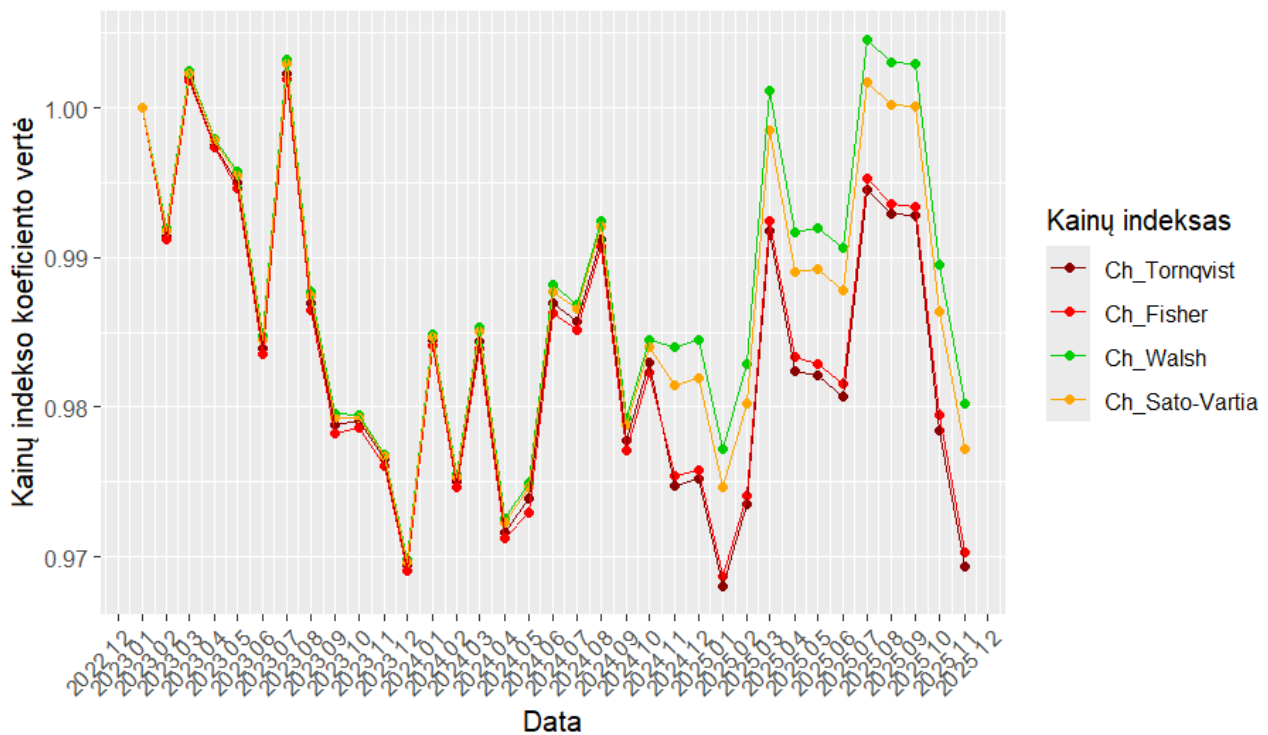
72 pav. obuolių imties bei visų pardavimų elementariųjų kainų indeksų skirtumų kitimas.

4 priedas.

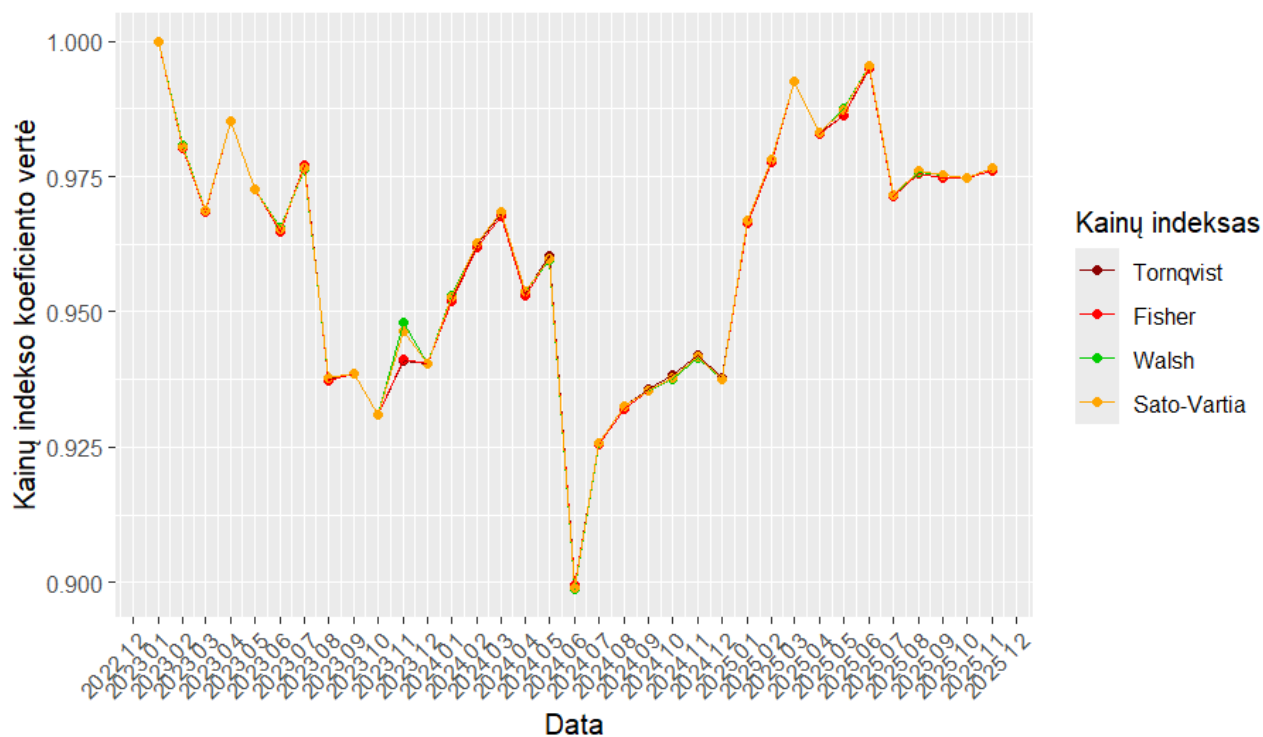
Superlatyvių kainų indeksų koeficientų kitimo grafikai



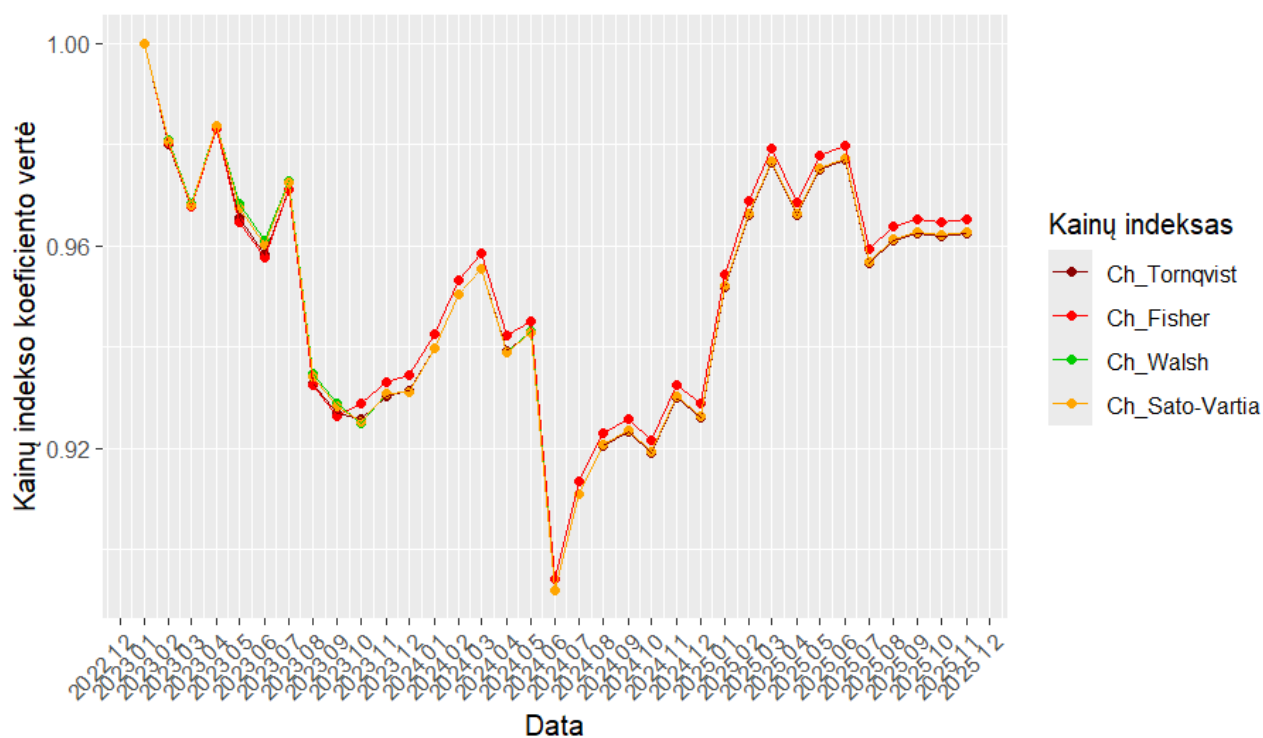
73 pav. Duonos imties produktų superlatyvių kainų indeksų koeficientų kitimas.



74 pav. Duonos imties produktų grandininio metodu susietų superlatyvių kainų indeksų koeficientų kitimas.



75 pav. Pieno imties produktų superlatyvių kainų indeksų koeficientų kitimas.



76 pav. Pieno imties produktų grandininio metodu susietų superlatyvių kainų indeksų koeficientų kitimas.

5 priedas. Europos šalių SVKI skaičiavimo naudojant kvitų duomenis metodai

32 lentelė. Europos šalių SVKI skaičiavimo naudojant kvitų duomenis metodų lentelė.

Šalis	Svoriai	Kainų indeksas	Atnaujinimas ir laiko eilučių jungimas	Duomenų struktūra
Šveicarija	Fiksuoti	Jevons	Tiesioginis indeksas, imties išrinkimas kartą metuose	Visi duomenys arba imtis
Danija	Fiksuoti	svertinis Jevons	Grandininis indeksas, imties išrinkimas kartą metuose	Produktų imtis
Prancūzija	Fiksuoti	geometrinis Laspeyres	Tiesioginis indeksas, imties išrinkimas kartą metuose	Visi duomenys
Islandija	Fiksuoti	svertinis Jevons	Tiesioginis indeksas, imtis renkama kartą metuose	Produktų imtis
Švedija	Fiksuoti	svertinis Jevons	Tiesioginis indeksas, imtis renkama kartą metuose	Produktų imtis
Belgija	Kintami	GEKS–Törnqvist (CCDI)	25 mėnesių laiko langas su vidurinio mėnesio sujungimu	Visi duomenys arba imtis
Suomija	Kintami	Törnqvist	Tiesioginis indeksas, imtis renkama kartą metuose	Visi duomenys
Italija	Kintami	Jevons	Grandininis indeksas, imtis renkama kas mėnesį	Nupjautinė imtis
Liuksemburgas	Kintami	GEKS–Törnqvist (CCDI)	25 mėnesių laiko langas su vidurinio mėnesio sujungimu	Visi duomenys
Norvegija	Kintami	GEKS–Törnqvist (CCDI)	25 mėnesių laiko langas su vidurinio mėnesio sujungimu	Visi duomenys
Nyderlandai	Kintami	Geary–Khamis	Fiksuotos bazės besiplečiantis laiko langas	Visi duomenys
Slovėnija	Kintami	Jevons	Grandininis indeksas, imtis renkama kas mėnesį	Nupjautinė imtis
Ispanija	Kintami	Jevons	Grandininis indeksas, imtis renkama kas mėnesį	Nupjautinė imtis