



**Matematikos ir
informatikos
fakultetas**

VILNIAUS UNIVERSITETAS

**MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
FINANSŲ IR DRAUDIMO MATEMATIKOS
MAGISTRO STUDIJŲ PROGRAMA**

**Vaizdingosios sąsūkos tipo rekurentinės sekos
Picturesque Convolution-Like Recurrences**

Magistro baigiamasis darbas

Autorius: Benas Taroza

VU el. p.: Benas.Taroza@mif.stud.vu.lt

Darbo vadovas: doc. dr. Andrius Grigutis

Vilnius
2026

Vaizdingosios sąsūkos tipo rekurentinės sekos

Santrauka

Šiame magistro baigiamajame darbe nagrinėjamos sąsūkos tipo rekurentinės sekos $\mathbf{a}$, apibrėžtos per žinomą seką $\mathbf{b}$. Pagrindinis darbo tikslas - išanalizuoti tokių sekų struktūrą, gauti jų narių išraiškas ir nustatyti sąlygas, kada egzistuoja sekų ribos. Teorinėje dalyje įvedamos pagalbinės sekos, leidžiančios kiekvieną nagrinėjamos sekos narį išreikšti kaip tiesinę pradinių reikšmių kombinaciją, bei pasitelkiami generuojančių funkcijų metodai sekų elgsenai tirti. Pateikiami konkretūs pavyzdžiai parodo, kaip teoriniai rezultatai taikomi skirtingoms sekoms $\mathbf{b}$, ir atskleidžia įvairių nagrinėjamų rekursinių sekų elgseną.

Raktiniai žodžiai: Rekurentinės sekos, tolydžiosios trupmenos, generuojančios funkcijos, Makloreno eilutės.

Picturesque Convolution-Like Recurrences

Abstract

In this Master's thesis, convolution-type recursive sequences $\mathbf{a}$ defined by a given sequence $\mathbf{b}$ are investigated. The main objective of the thesis is to analyze the structure of such sequences, derive explicit expressions for their terms, and determine conditions under which the limits of the sequences exist. In the theoretical part, auxiliary sequences are introduced, allowing each term of the studied sequence to be expressed as a linear combination of the initial values, and generating function methods are employed to examine the behavior of the sequences. Concrete examples are provided to demonstrate how the theoretical results apply to different choices of the sequence $\mathbf{b}$ and to reveal the diverse behavior of the considered recursive sequences.

Key words: Recurrence sequences, continuous fractions, generating functions, Maclaurin series.

Turiny

1 Įvadas	4
2 Teorinė dalis	4
3 Pavyzdžiai	14
3.1 Daugiau grafinių pavyzdžių	22
4 Išvados	24
Literatūra	25
Priedai	26

1 Įvadas

Rekursinės priklausomybės yra svarbus reiškinys įvairiose mokslo ir technologijų srityse. Jos aprašo procesus, kuriuose kiekviena nauja reikšmė priklauso nuo ankstesnių reikšmių pagal tam tikrą taisyklę.

Kompiuterių moksle rekursinės struktūros leidžia aprašyti algoritmus ir duomenų struktūras, kurių veikimas remiasi ankstesniais skaičiavimais ar paprastesnėmis struktūromis. Tokie metodai taikomi algoritmų analizėje ir padeda sistemiškai nagrinėti sudėtingų uždavinių sprendimus (pavyzdžiui, skaityti [2]).

Ypatingas rekursinių priklausomybių atvejis yra rekursinės sekos, turinčios sąsukos tipo struktūrą. Tokiose sekose kiekviena reikšmė apskaičiuojama kaip ankstesnių sekos narių svertinė suma. Dėl šios savybės jos yra susijusios su sąsukos sąvoka ir dažnai pasirodo diskrečių tiesinių sistemų teorijoje [3].

Signalų apdorojime tokio tipo rekursinės sekos naudojamos signalams glodinti, triukšmui mažinti ar naujingai informacijai išryškinti. Tokie metodai leidžia apdoroti duomenis palaipsniui, pasitelkiant ankstesnes reikšmes, todėl yra tinkami praktinėms sistemoms, kur svarbus paprastumas ir skaičiavimo efektyvumas [13].

Panašios rekursinės struktūros pasirodo ir laiko eilučių analizėje, kur dabartinės reikšmės aiškinamos remiantis ankstesniais stebėjimais. Autoregresiniai modeliai aprašo situacijas, kai stebimas procesas tam tikru momentu priklauso nuo savo ankstesnių reikšmių. Tokie modeliai plačiai taikomi ekonominių, inžinerinių ir gamtos procesų analizei bei prognozavimui [1].

Dėl savo paprastumo ir lankstumo sąsukos tipo rekursinės sekos sudaro svarbų matematinį įrankį diskrečių procesų analizei. Jų tyrimas leidžia nagrinėti sekų elgseną, stabilumą ir ilgalaikes savybes, kurios yra reikšmingos tiek teoriniuose, tiek taikomuosiuose kontekstuose.

Remdamies [4] straipsniu, šiame darbe nagrinėsime žemiau aprašytas rekurentines sekas. Tarkime, kad žinome seką $\mathbf{b} = \{b_0, b_1, \dots\}$. Taip pat tarkime, kad $b_0 \neq 0$ ir $m \in \mathbb{N}$. Nagrinėkime rekurentinę seką

$$a_n = \sum_{j=0}^{n+m} b_{n+m-j} a_j, \quad n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (1)$$

Kadangi $b_0 \neq 0$, galime (1) perrašyti

$$a_n = \frac{1}{b_0} \left(a_{n-m} - \sum_{j=0}^{n-1} b_{n-j} a_j \right), \quad n = m, m+1, \dots, m \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Verta paminėti, kad šios sekos jau nagrinėtos tikimybiniam kontekste, t. y. tariant, kad $\mathbf{b}$ apibrėžia sveikareikšmio atsitiktinio dydžio X skirstinį $b_n = \mathbb{P}(X = n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, o

$$a_n = \mathbb{P}(\max\{X_1, X_1 + X_2, \dots\} < n),$$

kur $X_1, X_2, \dots$ yra nepriklausomos atsitiktinio dydžio X kopijos. Plačiau skaityti [6], [8] ar [7].

Toliau bus suformuluojamos teoremos bei įrodymai, reikalingi gauti sekos $\mathbf{a}$ reikšmes bei ribą, žinant sekos $\mathbf{b}$ reikšmes. Taip pat bus pateikiami pavyzdžiai, kaip konkretesniais atvejais gaunamos sekų reikšmės.

2 Teorinė dalis

Šiame skyriuje pereikime prie formalaus nagrinėjamų rekursinių sekų tyrimo. Pirmiausia bus įvesti pagalbiniai objektai ir apibrėžimai, kurie leis patogiau analizuoti nagrinėjamą rekursinę priklausomybę bei jos sprendinius.

Nagrinėjamas algoritmas sekos $\mathbf{a}$ reikšmių paieškai remiasi papildomų sekų pagalba, dėl šios priežasties

panašiai, kaip ir (2), apibrėžkime tokias sekas

$$\begin{cases} \alpha_0(n) = \frac{1}{b_0} \left(\alpha_0(n-m) - \sum_{j=0}^{n-1} b_{n-j} \alpha_0(j) \right) \\ \alpha_1(n) = \frac{1}{b_0} \left(\alpha_1(n-m) - \sum_{j=0}^{n-1} b_{n-j} \alpha_1(j) \right) \\ \vdots \\ \alpha_{m-1}(n) = \frac{1}{b_0} \left(\alpha_{m-1}(n-m) - \sum_{j=0}^{n-1} b_{n-j} \alpha_{m-1}(j) \right) \end{cases}, \quad n = m+1, m+2, \dots, \quad (3)$$

kurių pradinės reikšmės pateiktos 1 lentelėje.

n	$\alpha_0(n)$	$\alpha_1(n)$	$\alpha_2(n)$	$\dots$	$\alpha_{m-2}(n)$	$\alpha_{m-1}(n)$
0	1	0	0	$\dots$	0	0
1	0	1	0	$\dots$	0	0
2	0	0	1	$\dots$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$m-1$	0	0	0	$\dots$	0	1
m	$\frac{1-b_m}{b_0}$	$-\frac{b_{m-1}}{b_0}$	$-\frac{b_{m-2}}{b_0}$	$\dots$	$-\frac{b_2}{b_0}$	$-\frac{b_1}{b_0}$

1 lentelė: Pradinės (3) sekų $\alpha_0(n)$, $\alpha_1(n)$, $\dots$, $\alpha_{m-1}(n)$ reikšmės.

Toliau 2.1 teiginyje nurodome, kaip a_n , $n \in \mathbb{N}_0$ galima išreikšti per $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$.

Teiginys 2.1. Tarkime $m \in \mathbb{N}$. Apibrėžtomis sekoms $\alpha_0(n), \alpha_1(n), \dots, \alpha_{m-1}(n)$ teisinga lygybė

$$a_n = \alpha_0(n)a_0 + \alpha_1(n)a_1 + \dots + \alpha_{m-1}(n)a_{m-1}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (4)$$

Irodymas. Įrodymą grįsime matematine indukcija. Kai $n = 0, 1, \dots, m-1$, įstatę pradines reikšmes iš lentelės 1, gauname

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \cdot a_0 + 0 \cdot a_1 + \dots + 0 \cdot a_{m-1} = a_0, \\ a_1 &= 0 \cdot a_0 + 1 \cdot a_1 + \dots + 0 \cdot a_{m-1} = a_1, \\ &\dots \\ a_{m-1} &= 0 \cdot a_0 + 0 \cdot a_1 + \dots + 1 \cdot a_{m-1} = a_{m-1}. \end{aligned}$$

Kai $n = m$, gauname

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1-b_m}{b_0} \cdot a_0 + -\frac{b_{m-1}}{b_0} \cdot a_1 + \dots + -\frac{b_1}{b_0} \cdot a_{m-1} \\ &= \frac{1}{b_0} (a_0 - b_{m-1}a_1 - b_{m-2}a_2 - \dots - b_1a_{m-1}), \\ &= \frac{1}{b_0} \left(a_0 - \sum_{j=0}^{m-1} b_{m-j}a_j \right), \end{aligned}$$

o tai atitinka (2) lygybę. Kai $n = m+1, m+2, \dots$, remdamiesi apibrėžimu (2) ir pritaikydami indukcinę

hipotezę, gauname

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{b_0} \left(a_{n-m} - \sum_{j=0}^{n-1} b_{n-j} a_j \right) = \frac{1}{b_0} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k(n-m) a_k - \sum_{j=0}^{n-1} b_{n-j} \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k(j) a_k \right) \\
&= \frac{1}{b_0} \left(\alpha_0(n-m) - \sum_{j=0}^{n-1} b_{n-j} \alpha_0(j) \right) a_0 + \frac{1}{b_0} \left(\alpha_1(n-m) - \sum_{j=0}^{n-1} b_{n-j} \alpha_1(j) \right) a_1 \\
&\quad + \dots + \frac{1}{b_0} \left(\alpha_{m-1}(n-m) - \sum_{j=0}^{n-1} b_{n-j} \alpha_{m-1}(j) \right) a_{m-1} = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k(n) a_k.
\end{aligned}$$

□

Tarkime $s \in \mathbb{C}$. Apibrėžkime formalias laipsnines eilutes prieš tai nurodytoms sekoms $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, ir $\alpha_0(n)$, $\alpha_1(n)$, $\dots$, $\alpha_{m-1}(n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
A(s) &:= \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n, \quad B(s) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n s^n, \\
G\alpha_0(s) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_0(n) s^n, \quad G\alpha_1(s) := \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_1(n) s^n, \dots, \quad G\alpha_{m-1}(s) := \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{m-1}(n) s^n.
\end{aligned} \tag{5}$$

Suformuluokime teoremą nurodytoms eilutėms (5).

Teorema 2.1. Tarkime $\mathbf{b}$ yra žinoma seka, $b_0 \neq 0$. Jei sekos $\mathbf{a}$ ir $\mathbf{b}$ yra apibrėžtos kaip (1), tada $m \in \mathbb{N}$ ir kai kuriems $s \in \mathbb{C}$ galioja nurodyti sąryšiai:

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_k \sum_{n=k}^{m-1} b_{n-k} s^n = A(s)(B(s) - s^m), \tag{6}$$

$$A(s) = \sum_{j=0}^{m-1} a_j G\alpha_j(s), \tag{7}$$

$$G\alpha_k(s)(B(s) - s^m) = \sum_{n=k}^{m-1} b_{n-k} s^n, \quad \text{kiekvienam } k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{8}$$

$$a_n - a_{n-1} = \sum_{k=0}^{m-1} a_k (\alpha_k(n) - \alpha_k(n-1)), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

$$\alpha_k(n) - \alpha_k(n-1) = \frac{1}{n!} \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{\partial^n}{\partial s^n} (1-s) G\alpha_k(s) \right), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

$$\alpha_k(n) = \frac{1}{n!} \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{\partial^n}{\partial s^n} G\alpha_k(s) \right), \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{11}$$

Irodymas. Iš (1) gauname

$$\begin{aligned}
a_{n-m} = \sum_{j=0}^n b_{n-j} a_j &\Rightarrow \sum_{n=m}^{\infty} a_{n-m} s^{n-m} = \sum_{n=m}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n b_{n-j} a_j \right) s^{n-m} \\
&\Rightarrow \sum_{j=0}^{m-1} a_j \sum_{n=j}^{m-1} b_{n-j} s^n = A(s)(B(s) - s^m), \quad m \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Gavome (6). Lygybę (7) gauname pasinaudodami teiginiu 2.1:

$$\begin{aligned}
A(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_0(n)a_0 + \alpha_1(n)a_1 + \dots + \alpha_{m-1}(n)a_{m-1}) s^n \\
&= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_0(n)s^n + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_1(n)s^n + \dots + a_{m-1} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{m-1}(n)s^n \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} a_j G\alpha_j(s).
\end{aligned}$$

Toliau bandome įrodyti (8). Analogiškai, kaip (6), sekoms $\alpha_k(j)$, kai $k = 0, 1, \dots, m-1$, gauname

$$\begin{aligned}
\alpha_k(n-m) = \sum_{j=0}^n b_{n-j}\alpha_k(j) &\Rightarrow \sum_{n=m}^{\infty} \alpha_k(n-m) s^{n-m} = \sum_{n=m}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n b_{n-j}\alpha_k(j) \right) s^{n-m} \\
&\Rightarrow \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_k(j) \sum_{n=j}^{m-1} b_{n-j}s^n = G\alpha_k(s)(B(s) - s^m), \quad m \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Istatę sekų $\alpha_k(j)$, kai $k = 0, 1, \dots, m-1$, pradines reikšmes, gauname

$$\sum_{n=k}^{m-1} b_{n-k}s^n = G\alpha_k(s)(B(s) - s^m), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Skirtumą (9) gauname pasinaudodami 2.1 teiginiu:

$$\begin{aligned}
a_n - a_{n-1} &= (\alpha_0(n)a_0 + \alpha_1(n)a_1 + \dots + \alpha_{m-1}(n)a_{m-1}) \\
&\quad - (\alpha_0(n-1)a_0 + \alpha_1(n-1)a_1 + \dots + \alpha_{m-1}(n-1)a_{m-1}) \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} a_k(\alpha_k(n) - \alpha_k(n-1)), \quad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Toliau imdami $s \in \mathbb{C}$, kai $B(s) \neq s^m$, iš (8) gauname

$$(1-s) \cdot \frac{\sum_{n=k}^{m-1} b_{n-k}s^n}{B(s) - s^m} = (1-s)G\alpha_k(s) = \alpha_k(0) + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_k(n) - \alpha_k(n-1))s^n, \quad (12)$$

kiekvienam $k = 0, 1, \dots, m-1$. Prilygindami koeficientus prie s^n ir gauname (10). Paskutinė (11) lygybė gaunama taip pat prilyginant koeficientus (5). $\square$

Išvada 2.1. Galiojant 2.1 teoremos sąlygoms, teisinga lygybė

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\alpha_k(n) - \alpha_k(n-1)|^{1/n} = \frac{1}{R_k} \quad \text{kiekvienam } k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (13)$$

kur $R_k > 0$ atitinkamai yra supremumai tokių teigiamų skaičių r_k , kad kiekviena funkcija $(1-s)G\alpha_k(s)$ yra analizinė srityje $|s| < r_k$. Taip pat,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\alpha_k(n)|^{1/n} = \frac{1}{\tilde{R}_k} \quad \text{kiekvienam } k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (14)$$

kur $\tilde{R}_k > 0$ atitinkamai yra supremumai tokių teigiamų skaičių $\tilde{r}_k$, kad kiekviena funkcija $G\alpha_k(s)$ yra analizinė $|s| < \tilde{r}_k$.

PASTABA: Ribos 2.1 išvadoje yra ekvivalenčios

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha_k(n+1) - \alpha_k(n)}{\alpha_k(n) - \alpha_k(n-1)} \right|, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha_k(n)}{\alpha_k(n-1)} \right|,$$

jei egzistuoja. $R_k, \tilde{R}_k$ žymi funkcijų $(1-s)G\alpha_k(s)$ ir $G\alpha_k(s)$ Makloreno eilučių (Teiloro eilutės taške 0) konvergavimo spindulius.

Grijtame prie ribos $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Iš lygybės (8), kai $s \in \mathbb{C}$ ir $B(s) - s^m \neq 0$, $m \in \mathbb{N}$, gauname

$$(1-s)G\alpha_k(s) = \frac{1-s}{B(s)-s^m} \sum_{n=k}^{m-1} b_{n-k}s^n, \text{ kiekvienam } k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (15)$$

Dėl lygybės

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1^-} (1-s)G\alpha_k(s) &= \lim_{s \rightarrow 1^-} \left(\alpha_k(0) + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_k(n) - \alpha_k(n-1))s^n \right) \\ &= \alpha_k(0) + \alpha_k(1) - \alpha_k(0) + \alpha_k(2) - \alpha_k(1) + \dots, \end{aligned}$$

kuri teisinga kiekvienam $k = 0, 1, \dots, m-1$, ir lygybės (15), galime spręsti apie sąlygas, kada egzistuoja baigtinė riba $\alpha_k(n)$, kai $n \rightarrow \infty$. Iš kitos pusės, dėl (4) baigtinė a_n riba, kai $n \rightarrow \infty$ ir $m \geq 2$, gali egzistuoti net kai $\alpha_k(n)$ ribos yra begalinės arba neegzistuoja. Suformuluojame teoremą apie sekų $\alpha_0(n), \alpha_1(n), \dots, \alpha_k(n), n \in \mathbb{N}_0$ ribų egzistavimą.

Teorema 2.2. *Jei kiekviena Makloreno eilutė $M_k(s)$ sekai $(1-s)G\alpha_k(s)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$ konverguoja kai $s \rightarrow 1^-$, tada*

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} M_k(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_k(n), \text{ visiems } k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (16)$$

Taip pat, jei $b_0 + b_1 + \dots = 1$ ir $m \neq \sum_{j=1}^{\infty} j b_j$, tada

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_k(n) = \frac{\sum_{j=k}^{m-1} b_{j-k}}{m - \sum_{j=1}^{\infty} j b_j}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (17)$$

Irodymas. Kai $s \rightarrow 1^-$, dešinioji (12) lygybės pusė tampa $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_k(n)$, kiekvienam $k = 0, 1, \dots, m-1$. Lieka nustatyti sąlygas kairei lygybės pusei (12), su kuriomis baigtinė riba $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_k(n)$ egzistuoja. Tai įrodo (16).

Kai $b_0 + b_1 + \dots = 1$, tada

$$\begin{aligned} B(s) - s^m &= b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n s^n - s^m = 1 - s^m - \sum_{n=1}^{\infty} b_n (1 - s^n) \\ &= (1-s) \sum_{j=0}^{m-1} s^j - (1-s) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sum_{j=0}^{n-1} s^j = (1-s) \left(\sum_{j=0}^{m-1} s^j - \sum_{j=0}^{\infty} s^j \sum_{n=j+1}^{\infty} b_n \right). \end{aligned}$$

Įstatydami gautą išraišką į (8), kiekvienam $k = 0, 1, \dots, m-1$ gauname

$$\frac{\sum_{n=k}^{m-1} b_{n-k} s^n}{\sum_{j=0}^{m-1} s^j - \sum_{j=0}^{\infty} s^j \sum_{n=j+1}^{\infty} b_n} = (1-s)G\alpha_k(s). \quad (18)$$

Todėl, (17) lygybę gauname skaičiuodami ribą $s \rightarrow 1^-$ abiejose (18) lygybėse pusėse reikalaujant, kad baigtinė riba

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} (1-s)G\alpha_k(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_k(n).$$

egzistuoti.

□

Jei kiekviena seka $\alpha_0(n), \alpha_1(n), \dots, \alpha_{m-1}(n)$ turi baigtinę ribą, kai $n \rightarrow \infty$, tada pagal (4),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_0(n) + a_1 \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_1(n) + \dots + a_{m-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{m-1}(n). \quad (19)$$

Lygybė (19) sujungia $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ su tiesine $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$ kombinacija. Jei lygybė (19) yra teisinga, galime laisvai parinkti $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$ ir, užfiksavę sekos $\mathbf{b}$ reikšmes, sužinoti a_n ribą rekurentinėje sekoje (2), kai $n \rightarrow \infty$. Iš kitos pusės, jei lygybė (19) teisinga, galime parinkti $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ir iš to rasti tokias pradines reikšmes $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$, kad $\mathbf{a}$ iš (2) artėtų į norimą reikšmę. Todėl, taip pat analizuosime, kaip galima gauti reikšmes $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$ per ribą $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Bendru atveju, nėra unikalių $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$ reikšmių, kurios apibrėžtų $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Tarkime, kad $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ yra $B(s) - s^m$ šaknys, $m \in \mathbb{N}$. Remdamiesi pagrindine algebros teorema galima sakyti, kad egzistuoja bent m šaknų, skaičiuojant kartu su kartotinumais. Paskutinė 2.3 teorema ir jos išvada išreiškia sekos reikšmes $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$ per $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Kai $m = 1$, tada $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_0(n)$.

Teorema 2.3. Tarkime $m \geq 2$. Taip pat sakykime, kad seka $\mathbf{b}$ tokia, kad $b_0 \neq 0$, $b_0 + b_1 + \dots = 1$ ir $m \neq \sum_{j=1}^{\infty} j b_j$. Tarkime, kad $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1} \neq 1$ yra $B(s) - s^m$ paprastosios šaknys ir $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$ yra tokie, kad baigtinė riba $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ egzistuoja. Pažymėkime

$$\lim_{s \rightarrow \alpha_j} \frac{B(s) - s^m}{1-s} \sum_{k=0}^{m-1} a_k M_k(s) =: L_j, \quad j = 1, 2, \dots, m-1,$$

$$\left(m - \sum_{j=1}^{\infty} j b_j \right) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n =: L.$$

$M_k(s)$ yra $(1-s)G\alpha_k(s)$ Makloreno eilutė, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Tada

$$\begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{m-1} b_n \alpha_1^n & \sum_{n=1}^{m-1} b_{n-1} \alpha_1^n & \dots & b_0 \alpha_1^{m-2} + b_1 \alpha_1^{m-1} & b_0 \alpha_1^{m-1} \\ \sum_{n=0}^{m-1} b_n \alpha_2^n & \sum_{n=1}^{m-1} b_{n-1} \alpha_2^n & \dots & b_0 \alpha_2^{m-2} + b_1 \alpha_2^{m-1} & b_0 \alpha_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sum_{n=0}^{m-1} b_n \alpha_{m-1}^n & \sum_{n=1}^{m-1} b_{n-1} \alpha_{m-1}^n & \dots & b_0 \alpha_{m-1}^{m-2} + b_1 \alpha_{m-1}^{m-1} & b_0 \alpha_{m-1}^{m-1} \\ \sum_{n=0}^{m-1} b_n & \sum_{n=1}^{m-1} b_{n-1} & \dots & b_0 + b_1 & b_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{m-2} \\ a_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_{m-1} \\ L \end{pmatrix} \quad (20)$$

ir sistema (20) turi unikalų sprendinį $(a_0, a_1, \dots, a_{m-1})$.

Irodymas. (20) sistema konstruojama iš (6) lygybės. Jei $m \in \{2, 3, \dots\}$ ir $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1} \neq 1$ yra paprastosios $B(s) - s^m$ šaknys, tada pirmosios $m-1$ iš m sistemos (20) lygčių gaunamos $s \rightarrow \alpha_k$, $k = 1, 2, \dots, m-1$ abiejose (6) pusėse. Pastebėkime, kad $(1-s)A(s)$ Makloreno eilutė yra $\sum_{k=0}^{m-1} a_k M_k(s)$, kur $M_k(s)$ yra $(1-s)G\alpha_k(s)$ Makloreno eilutė. Paskutinė (20) sistemos lygtis gaunama taip pat iš (6) skaičiuojant ribą $s \rightarrow 1^-$ abiejose pusėse

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_k \sum_{n=k}^{m-1} b_{n-k} = \lim_{s \rightarrow 1^-} (1-s)A(s) \frac{B(s) - s^m}{1-s} = \left(m - \sum_{j=1}^{\infty} j b_j \right) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Sistema (20) turi unikalų sprendinį, kadangi matricos determinantas, remiantis 2.1 lema, yra

$$\frac{b_0^m}{(-1)^{m+1}} \prod_{j=1}^{m-1} (\alpha_j - 1) \prod_{1 \leq i < j \leq m-1} (\alpha_j - \alpha_i), \quad m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \quad (21)$$

□

Remdamiesi [6], suformuluojame bei įrodome pagalbinę lemą apie (20) matricos determinantą, kuri padėjo įrodyti 2.3 teoremą.

Lema 2.1. *Tarkime, kad $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1} \neq 1$ yra $B(s) - s^m$ paprastosios šankys, $s \in \mathbb{C}$, $b_0 \neq 0$ ir $b_0 + b_1 + \dots = 1$. Tada matricos (20) determinantas lygus*

$$\frac{b_0^m}{(-1)^{m+1}} \prod_{j=1}^{m-1} (\alpha_j - 1) \prod_{1 \leq i < j \leq m-1} (\alpha_j - \alpha_i), \quad m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \quad (22)$$

Įrodymas. Skaičiuojame matricos $|A|$ determinantą:

$$|A| := \begin{vmatrix} \sum_{n=0}^{m-1} b_n \alpha_1^n & \sum_{n=1}^{m-1} b_{n-1} \alpha_1^n & \dots & b_0 \alpha_1^{m-2} + b_1 \alpha_1^{m-1} & b_0 \alpha_1^{m-1} \\ \sum_{n=0}^{m-1} b_n \alpha_2^n & \sum_{n=1}^{m-1} b_{n-1} \alpha_2^n & \dots & b_0 \alpha_2^{m-2} + b_1 \alpha_2^{m-1} & b_0 \alpha_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sum_{n=0}^{m-1} b_n \alpha_{m-1}^n & \sum_{n=1}^{m-1} b_{n-1} \alpha_{m-1}^n & \dots & b_0 \alpha_{m-1}^{m-2} + b_1 \alpha_{m-1}^{m-1} & b_0 \alpha_{m-1}^{m-1} \\ \sum_{n=0}^{m-1} b_n & \sum_{n=1}^{m-1} b_{n-1} & \dots & b_0 + b_1 & b_0 \end{vmatrix}$$

Pirma iškeliamė b_0 . Toliau dauginame paskutinį stulpelį iš $b_{m-1}, b_{m-1}, \dots, b_1$ ir atitinkamai atimdami iš pirmo, antro, ..., priešpaskutinio stulpelio, gauname

$$|A| = b_0 \begin{vmatrix} \sum_{n=0}^{m-2} b_n \alpha_1^n & \sum_{n=1}^{m-2} b_{n-1} \alpha_1^n & \dots & b_0 \alpha_1^{m-2} & \alpha_1^{m-1} \\ \sum_{n=0}^{m-2} b_n \alpha_2^n & \sum_{n=1}^{m-2} b_{n-1} \alpha_2^n & \dots & b_0 \alpha_2^{m-2} & \alpha_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sum_{n=0}^{m-2} b_n \alpha_{m-1}^n & \sum_{n=1}^{m-2} b_{n-1} \alpha_{m-1}^n & \dots & b_0 \alpha_{m-1}^{m-2} & \alpha_{m-1}^{m-1} \\ \sum_{n=0}^{m-2} b_n & \sum_{n=1}^{m-2} b_{n-1} & \dots & b_0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Kartodami panašias operacijas su priešpaskutiniu stulpeliu (iškeliamas b_0 ir sandaugos atimamos iš prieš tai einančių stulpelių) ir toliau kitais, gauname determinantą

$$\begin{aligned} |A| &= b_0^m \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^{m-2} & \alpha_1^{m-1} \\ 1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_2^{m-2} & \alpha_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_{m-1} & \dots & \alpha_{m-1}^{m-2} & \alpha_{m-1}^{m-1} \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{b_0^m}{(-1)^{m+1}} \begin{vmatrix} \alpha_1 - 1 & \alpha_1^2 - 1 & \dots & \alpha_1^{m-2} - 1 & \alpha_1^{m-1} - 1 \\ \alpha_2 - 1 & \alpha_2^2 - 1 & \dots & \alpha_2^{m-2} - 1 & \alpha_2^{m-1} - 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m-1} - 1 & \alpha_{m-1}^2 - 1 & \dots & \alpha_{m-1}^{m-2} - 1 & \alpha_{m-1}^{m-1} - 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{b_0^m}{(-1)^{m+1}} \prod_{j=1}^{m-1} (\alpha_j - 1) \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^{m-3} & \alpha_1^{m-2} \\ 1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_2^{m-2} & \alpha_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_{m-1} & \dots & \alpha_{m-1}^{m-3} & \alpha_{m-1}^{m-2} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

O paskutinė matrica yra Vandermondo matrica (žiūrėti [9, 6.1 skyrius]), kurios determinantą suskaičiavę gauname

$$|A| = \frac{b_0^m}{(-1)^{m+1}} \prod_{j=1}^{m-1} (\alpha_j - 1) \prod_{1 \leq i < j \leq m-1} (\alpha_j - \alpha_i).$$

□

Iš teoremos 2.3 gauname išvadą.

Išvada 2.2. *Jei 2.3 teoremos sąlygos yra tenkinamos ir $L_1 = L_2 = \dots = L_{m-1} = 0$, tada*

$$a_0 = \frac{L}{b_0} \prod_{j=1}^{m-1} \frac{\alpha_j}{\alpha_j - 1}, \quad (23)$$

$$a_1 = -\frac{b_0 + b_1}{b_0} a_0 + \frac{L}{b_0} \prod_{j=1}^{m-1} \frac{1}{\alpha_j - 1} \left(\prod_{j=1}^{m-1} \alpha_j - \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{m-2} \leq m-1} \alpha_{j_1} \cdots \alpha_{j_{m-2}} \right), \quad (24)$$

$$a_2 = -\frac{b_0 + b_1}{b_0} a_1 - \frac{b_0 + b_1 + b_2}{b_0} a_0 + \frac{L}{b_0} \prod_{j=1}^{m-1} \frac{1}{\alpha_j - 1} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\prod_{j=1}^{m-1} \alpha_j - \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{m-2} \leq m-1} \alpha_{j_1} \cdots \alpha_{j_{m-2}} + \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{m-3} \leq m-1} \alpha_{j_1} \cdots \alpha_{j_{m-3}} \right), \\ & \vdots \\ & a_{m-1} = -\frac{1}{b_0} \sum_{i=0}^{m-2} \left(\sum_{k=0}^{m-1-i} b_k \right) a_i + \frac{L}{b_0} \prod_{j=1}^{m-1} \frac{1}{\alpha_j - 1} \times \left(\prod_{j=1}^{m-1} \alpha_j - \right. \\ & \left. \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{m-2} \leq m-1} \alpha_{j_1} \cdots \alpha_{j_{m-2}} + \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{m-3} \leq m-1} \alpha_{j_1} \cdots \alpha_{j_{m-3}} + \dots + (-1)^{m+1} \right), \end{aligned} \quad (26)$$

Irodymas. Paprastumo dėlei sistemą (20) pažymėkime $\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{L}$. Tada $\mathbf{a} = A^{-1}\mathbf{L} = \frac{1}{|A|}\mathbf{C}^T\mathbf{L}$, kur $\mathbf{C}$ yra matricos A kofaktorių matrica. Pastebėkime, kad $L_1 = L_2 = \dots = L_{m-1} = 0$, todėl užtenka paskaičiuoti matricos $\mathbf{C}$ paskutinę eilutę, t. y. matricos A minorus $M_{m,1}, M_{m,2}, \dots, M_{m,m}$. Pradedame nuo $M_{m,1}$:

$$A := \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{m-1} b_n \alpha_1^n & \sum_{n=1}^{m-1} b_{n-1} \alpha_1^n & \dots & b_0 \alpha_1^{m-2} + b_1 \alpha_1^{m-1} & b_0 \alpha_1^{m-1} \\ \sum_{n=0}^{m-1} b_n \alpha_2^n & \sum_{n=1}^{m-1} b_{n-1} \alpha_2^n & \dots & b_0 \alpha_2^{m-2} + b_1 \alpha_2^{m-1} & b_0 \alpha_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sum_{n=0}^{m-1} b_n \alpha_{m-1}^n & \sum_{n=1}^{m-1} b_{n-1} \alpha_{m-1}^n & \dots & b_0 \alpha_{m-1}^{m-2} + b_1 \alpha_{m-1}^{m-1} & b_0 \alpha_{m-1}^{m-1} \\ \sum_{n=0}^{m-1} b_n & \sum_{n=1}^{m-1} b_{n-1} & \dots & b_0 + b_1 & b_0 \end{pmatrix}$$

Skaičiuodami analogiškai, kaip ir 2.1 lemos įrodyme, gauname

$$\begin{aligned}
M_{m,1} &:= \begin{vmatrix} \sum_{n=1}^{m-1} b_{n-1} \alpha_1^n & \sum_{n=2}^{m-1} b_{n-2} \alpha_1^n & \dots & b_0 \alpha_1^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{n=1}^{m-1} b_{n-1} \alpha_{m-1}^n & \sum_{n=2}^{m-1} b_{n-2} \alpha_{m-1}^n & \dots & b_0 \alpha_{m-1}^{m-1} \end{vmatrix} \\
&= b_0^{m-1} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m-1} & \alpha_{m-1}^2 & \dots & \alpha_{m-1}^{m-1} \end{vmatrix} = b_0^{m-1} \prod_{j=1}^{m-1} \alpha_j \prod_{1 \leq i < j \leq m-1} (\alpha_j - \alpha_i).
\end{aligned}$$

Pastebėkime, kad minoras $M_{m,1}$ yra apibrėžtas, kai $m \geq 1$ ir $M_{1,1} = 1$, kai $m = 1$. Skaičiuojame toliau

$$\begin{aligned}
M_{m,2} &:= \begin{vmatrix} \sum_{n=0}^{m-1} b_n \alpha_1^n & \sum_{n=2}^{m-1} b_{n-2} \alpha_1^n & \dots & b_0 \alpha_1^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{n=0}^{m-1} b_n \alpha_{m-1}^n & \sum_{n=2}^{m-1} b_{n-2} \alpha_{m-1}^n & \dots & b_0 \alpha_{m-1}^{m-1} \end{vmatrix} \\
&= b_0^{m-2} \begin{vmatrix} b_0 + b_1 \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_0 + b_1 \alpha_{m-1} & \alpha_{m-1}^2 & \dots & \alpha_{m-1}^{m-1} \end{vmatrix} \\
&= b_0^{m-1} \prod_{1 \leq i < j \leq m-1} (\alpha_j - \alpha_i) \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{m-2} \leq m-1} \alpha_{j_1} \dots \alpha_{j_{m-2}} + \frac{b_1}{b_0} M_{k,1}.
\end{aligned}$$

Kaip ir prieš tai, $M_{m,2}$ yra apibrėžtas, kai $m \geq 2$. Tęsiame toliau

$$\begin{aligned}
M_{m,3} &:= \begin{vmatrix} \sum_{n=0}^{m-1} b_n \alpha_1^n & \sum_{n=1}^{m-1} b_{n-1} \alpha_1^n & \sum_{n=3}^{m-1} b_{n-3} \alpha_1^n & \dots & b_0 \alpha_1^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{n=0}^{m-1} b_n \alpha_{m-1}^n & \sum_{n=1}^{m-1} b_{n-1} \alpha_{m-1}^n & \sum_{n=3}^{m-1} b_{n-3} \alpha_{m-1}^n & \dots & b_0 \alpha_{m-1}^{m-1} \end{vmatrix} \\
&= b_0^{m-2} \begin{vmatrix} b_0 + b_2 \alpha_1^2 & \alpha_1 & \alpha_1^3 & \dots & \alpha_1^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_0 + b_2 \alpha_{m-1}^2 & \alpha_{m-1} & \alpha_{m-1}^3 & \dots & \alpha_{m-1}^{m-1} \end{vmatrix} + \frac{b_1}{b_0} M_{k,2} \\
&= b_0^{m-1} \prod_{1 \leq i < j \leq m-1} (\alpha_j - \alpha_i) \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{m-3} \leq m-1} \alpha_{j_1} \dots \alpha_{j_{m-3}} - \frac{b_2}{b_0} M_{k,1} + \frac{b_1}{b_0} M_{k,2}, \quad m \geq 3.
\end{aligned}$$

Galiausiai

$$\begin{aligned}
M_{m,m} &:= \begin{vmatrix} \sum_{n=0}^{m-1} b_n \alpha_1^n & \sum_{n=1}^{m-1} b_{n-1} \alpha_1^n & \dots & b_0 \alpha_1^{m-2} + b_1 \alpha_1^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{n=0}^{m-1} b_n \alpha_{m-1}^n & \sum_{n=1}^{m-1} b_{n-1} \alpha_{m-1}^n & \dots & b_0 \alpha_{m-1}^{m-2} + b_1 \alpha_{m-1}^{m-1} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \sum_{n=0}^{m-1} b_n \alpha_1^n & \sum_{n=1}^{m-1} b_{n-1} \alpha_1^n & \dots & b_0 \alpha_1^{m-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{n=0}^{m-1} b_n \alpha_{m-1}^n & \sum_{n=1}^{m-1} b_{n-1} \alpha_{m-1}^n & \dots & b_0 \alpha_{m-1}^{m-2} \end{vmatrix} + \frac{b_1}{b_0} M_{m,m-1} \\
&= b_0^{m-1} \prod_{1 \leq i < j \leq m-1} (\alpha_j - \alpha_i) + (-1)^m \frac{b_{m-1}}{b_0} M_{m,1} + (-1)^{m+1} \frac{b_{m-2}}{b_0} M_{m,2} \\
&\quad + \dots + (-1)^{2m-1} \frac{b_2}{b_0} M_{m,m-2} + \frac{b_1}{b_0} M_{m,m-1}.
\end{aligned}$$

Vektoriaus $\mathbf{a}$ reikšmės gauname atitinkamus minorus padalinę iš matricos A determinanto, gauto 2.1 lemoje. $\square$

3 Pavyzdžiai

Šiame skyriuje analizuosime įvairias **b** sekas prieš tai nagrinėtame kontekste. Skaičiavimai atlikti su Wolfram Mathematica programine įranga [16], grafikai nubraižyti naudojantis R statistiniais paketais [14].

Pavyzdys 3.1. Imkime seką $\mathbf{b} = \{-3, 2, -1, 3, 0, \dots, 0, \dots\}$ ir $m = 1$. Gausime sekos $\mathbf{a}$ reikšmes.

Šiame pavyzdyje

$$\begin{aligned} B(s) &= -3 + 2s - s^2 + 3s^3, \\ (1-s)G\alpha_0(s) &= \frac{b_0(1-s)}{B(s)-s} = \frac{-3(1-s)}{-3+s-s^2+3s^3} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}s+s^3}, \\ M_0(s) &= 1 - \frac{2}{3}s - \frac{5}{9}s^2 + \frac{28}{27}s^3 - \frac{11}{81}s^4 - \frac{230}{243}s^5 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n, \end{aligned}$$

kur

$$c_0 = 1, c_1 = -\frac{2}{3}, c_n = -\frac{2}{3}c_{n-1} - c_{n-2}, n = 2, 3, \dots$$

Konvergavimo spindulys $M_0(s)$ yra $R_M \approx 0.78218$ ($1/(1-s)/G\alpha_0(s)$ šaknies -0.78218 modulis). Todėl eilutė $M_0(s)$ nekonverguoja, kai $s \rightarrow 1^-$. Pagal (10) ir (13)

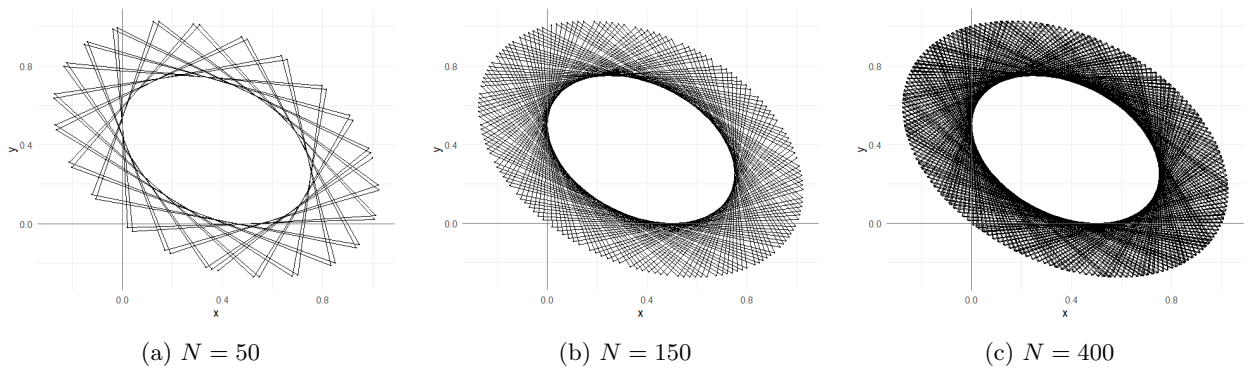
$$\begin{aligned} \alpha_0(0) &= 1, \alpha_0(n) = \alpha_0(n-1) + c_n, n = 1, 2, \dots, \\ \boldsymbol{\alpha}_0 &= \left\{1, \frac{1}{3}, -\frac{2}{9}, \frac{22}{27}, \dots\right\}, \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} |\alpha_0(n+1) - \alpha_0(n)|^{1/n} &= \frac{1}{R_M} = 1.2785. \end{aligned}$$

Tada, pagal (4), $a_n = \alpha_0(n)a_0$, $n \in \mathbb{N}_0$, gauname

$$a_n = a_0(\alpha_0(n-1) + c_n).$$

Imdami $a_0 = 1$ gauname seką $\mathbf{a} = \{1, \frac{1}{3}, -\frac{2}{9}, \frac{22}{27}, \dots\}$.

Kaip ir [4] buvo pastebėta, šiame pavyzdyje $\alpha_0(n)$ sekos reikšmių poros $(\alpha_0(n), \alpha_0(n-1))$, sujungtos plokštumoje, sukuria vaizdingą struktūrą. Tai galima pamatyti 1 grafike.



1 pav.: Poros $(\alpha_0(n), \alpha_0(n-1))$, plokštumoje sujungtos atkarpomis, kai n kinta nuo 0 iki N

Pavyzdys 3.2. Imkime seką $b_n = \frac{1}{(e-1)(n+1)!}$. Suma $b_1 + b_2 + b_3 + \dots = 1$. Apskaičiuosime sekos α_0 reikšmes.

Atitinkamai

$$B(s) = \frac{e^s - 1}{(e - 1)s},$$

$$(1 - s)G\alpha_0(s) = \frac{b_0(1 - s)}{B(s) - s} = \frac{(1 - s)s}{e^s - 1 + (1 - e)s^2},$$

$$M_0(s) = 1 + \left(-\frac{5}{2} + e\right)s + \left(-\frac{43}{12} - 4e + e^2\right)s^2 + \left(-5 + \frac{113e}{12} - \frac{11e^2}{2} + e^3\right)s^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n,$$

kur

$$c_0 = 1, c_1 = e - \frac{5}{2}, c_n = \left(e - \frac{3}{2}\right)c_{n-1} - \sum_{k=3}^{n+1} \frac{a_{n+1-k}}{k!}, n = 2, 3, \dots$$

Konvergavimo spindulys $M_0(s)$ yra $R_M \approx 2.3515$ ($1/(1 - s)/G\alpha_0(s)$ šaknies 2.3515 modulis). Tada, pagal (16),

$$\lim_{s \rightarrow -1} M_0(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_0(n) = \frac{1}{e - 2}.$$

Pagal (10) ir (13)

$$\alpha_0(0) = 1, \alpha_0(n) = \alpha_0(n - 1) + c_n, n = 1, 2, \dots,$$

$$\alpha_0 = \left\{1, e - \frac{3}{2}, e^2 - 3e - \frac{61}{12}, \dots\right\},$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\alpha_0(n + 1) - \alpha_0(n)|^{1/n} = \frac{1}{R_M} = 0.425.$$

Pavyzdys 3.3. Šiame pavyzdyje imkime

$$b_n = \frac{(-1)^n}{n + 1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad B(s) = \frac{\ln(1 + s)}{s},$$

kai $m = 3$.

Tada atitinkamai

$$(1 - s)G\alpha_0(s) = \frac{(b_0 + b_1s + b_2s^2)(1 - s)}{B(s) - s^3} = \frac{(s - 1)s(6 - 3s + 2s^2)}{6(s^4 - \ln(s + 1))}, \quad M_0(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{0,n} s^n,$$

$$(1 - s)G\alpha_1(s) = \frac{(b_0s + b_1s^2)(1 - s)}{B(s) - s^3} = \frac{(s - 2)(s - 1)s^2}{2(\ln(s + 1) - s^4)}, \quad M_1(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{1,n} s^n,$$

$$(1 - s)G\alpha_2(s) = \frac{b_0s^2(1 - s)}{B(s) - s^3} = \frac{(s - 1)s^3}{s^4 - \ln(s + 1)}, \quad M_2(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2,n} s^n,$$

kur kiekvienam $k = \{0, 1, 2\}$

$$c_{0,0} = 1, c_{0,1} = -1, c_{0,2} = 0, c_{0,3} = \frac{5}{4},$$

$$c_{1,0} = 0, c_{1,1} = 1, c_{1,2} = -1, c_{1,3} = -\frac{1}{3},$$

$$c_{2,0} = 0, c_{2,1} = 0, c_{2,2} = 1, c_{2,3} = -\frac{1}{2},$$

$$c_{k,n} = \frac{1}{2}c_{k,n-1} - \frac{1}{3}c_{k,n-2} + \frac{5}{4}c_{k,n-3} + \sum_{k=5}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k} a_{n+1-k}, \quad n \geq 4.$$

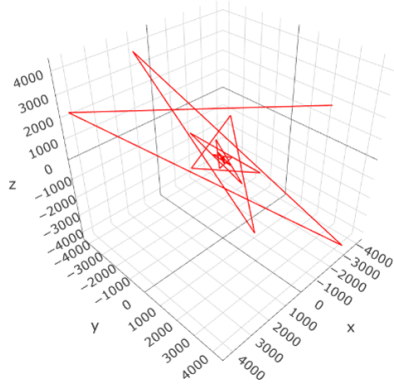
$M_k(s)$ konvergavimo spinduliai $R_M \approx 0.894$, todėl eilutės $M_k(s)$ nekonverguoja, kai $s \rightarrow 1^-$ kiekvienam $k = \{0, 1, 2\}$. Surandame sekų $\alpha_k(n)$ reikšmes:

$$\begin{aligned}\alpha_0(0) &= 1, \alpha_0(1) = 0, \alpha_0(2) = 0, \\ \alpha_1(0) &= 0, \alpha_1(1) = 1, \alpha_1(2) = 0, \\ \alpha_2(0) &= 0, \alpha_2(1) = 0, \alpha_2(2) = 1, \\ \alpha_k(n) &= \alpha_k(n-1) + c_{k,n}, \quad n \geq 3.\end{aligned}$$

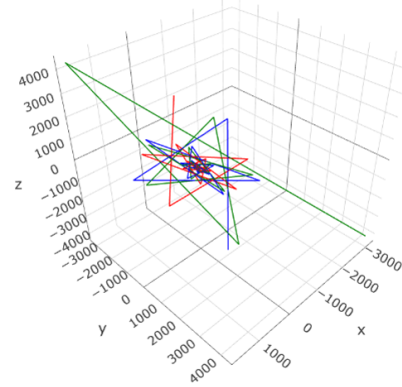
Pagal 2.1, kiekvienam $k = \{0, 1, 2\}$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\alpha_k(n) - \alpha_k(n-1)|^{1/n} = \frac{1}{R_k} = \frac{1}{0.894} \approx 1.119.$$

Taip pat pastebėkime, kad pavaizdavę trejetus $(\alpha_k(n), \alpha_k(n-1), \alpha_k(n-2))$ erdvėje, galima gauti įdomią struktūrą. 2 paveikslėlyje pavaizduoti šie trejetai $m = 1$ ir $m = 3$ atvejais.



(a) $N = 40, m = 1$



(b) $N = 40, m = 3$

2 pav.: Trejetai $(\alpha_k(n), \alpha_k(n-1), \alpha_k(n-2))$, erdvėje sujungti atkarpomis, kai n kinta nuo 0 iki N ir $m = 1$ ir $m = 3$

Pavyzdys 3.4. Imkime seką $\mathbf{b} = \{1, 1, 2, 4, 9, 21, 51, \dots\}$, kur b_n yra Motzkin skaičiai ([12, A001006]) ir $m = 1$. Rasime sekos α_0 reikšmes.

Motzkin skaičiai generuojami naudojantis rekurentiniu sąryšiu

$$M_0 = M_1 = 1, \quad M_n = \frac{2n+1}{n+2}M_{n-1} + \frac{3n-3}{n+2}M_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Šiame pavyzdyje

$$\begin{aligned}B(s) &= \frac{1-s-\sqrt{1-2s-3s^2}}{2s^2}, \\ (1-s)G\alpha_0(s) &= \frac{b_0(1-s)}{B(s)-s} = \frac{2(s-1)s^2}{-1+s+2s^3+\sqrt{(1+s)(1-3s)}}, \\ M_0(s) &= 1-s-2s^2-2s^3-s^4-2s^6+\dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n,\end{aligned}$$

kur

$$\begin{aligned} c_0 &= 1, c_1 = -1, c_2 = -2, c_3 = -2, c_4 = -1, \\ c_n &= -\sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-2} c_k c_{n-2-k} - \sum_{k=0}^{n-4} c_k c_{n-4-k} - 2c_{n-1} + c_{n-2} - 2c_{n-3} + 2c_{n-4}, \\ n &= 5, 6, \dots \end{aligned}$$

Konvergavimo spindulys $M_0(s)$ yra $R_M = 1/3$, todėl eilutė $M_0(s)$ nekonverguoja, kai $s \rightarrow 1^-$. Sekos $\alpha_0(n)$ reikšmės atitinkamai bus

$$\alpha_0(0) = 1, \quad \alpha_0(n) = \alpha_0(n-1) + c_n, \quad n \geq 2.$$

Galime paskaičiuoti pirmąsias reikšmes $\alpha_0 = \{1, 0, -2, -4, -5, -5, -7, -19, -58, -161, \dots\}$. Pagal 2.1

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\alpha_0(n) - \alpha_0(n-1)|^{1/n} = \frac{1}{R_k} = \frac{1}{1/3} = 3.$$

Pavyzdys 3.5. Nagrinėjime tolydžiąją trupmeną

$$x = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \ddots}}}. \quad (27)$$

Pagal [15]

$$x_n = \frac{A_n}{B_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (28)$$

kur

$$\begin{aligned} A_{-1} &= 1, A_0 = b_0, A_n = b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ B_{-1} &= 0, B_0 = 1, B_n = b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Jei riba egzistuoja, ji lygi $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Tarkime $a_n = b_n = 1$ kiekvienam $n \in \mathbb{N}_0$. Tada atitinkamai

$$\begin{aligned} A_{-1} &= 1, A_0 = 1, A_n = A_{n-1} + A_{n-2}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ B_{-1} &= 0, B_0 = 1, B_n = B_{n-1} + B_{n-2}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Nagrinėjime seką $x_n = \frac{A_n}{B_n} = \{\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \dots\} = \frac{F_{n+1}}{F_n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, o F_n yra Fibonacci skaičių seka. Kaip pastebėta [11, 2 skyrius], $x_n \rightarrow \phi \approx 1.618$, kai $n \rightarrow \infty$, t. y. x_n artėja į aukso pjūvį. Pasinaudodami Binet formule Fibonacci sekos nariui [5, 6.6 skyrius], galime tiesiogiai išreikšti x_n reikšmes:

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}, \quad \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Pažymėkime $r := \psi/\varphi = -1/\varphi^2$. Gauname

$$x_n = \varphi \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r^n} = \varphi + \varphi(1 - r) \frac{r^n}{1 - r^n}.$$

Tada

$$\begin{aligned} (1-s)G\alpha_0(s) &= \frac{1-s}{B(s)-s}, \\ M_0(s) &= 1 - 2s + \frac{1}{2}s^2 + \frac{5}{6}s^3 + \frac{3}{20}s^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n, \end{aligned}$$

kur

$$c_0 = 1, c_1 = -2,$$

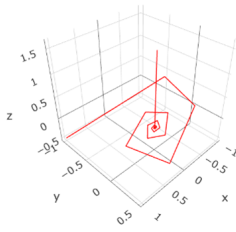
$$c_n = -\sum_{k=1}^{n-1} d_k c_{n-k}, \quad n \geq 2, \quad d_1 = 1, \quad d_k = \frac{F_{k+2}}{F_{k+1}}, \quad k \geq 2.$$

Atitinkamai

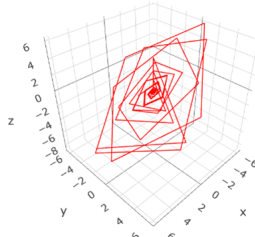
$$\alpha_0(0) = 1, \quad \alpha_0(n) = \alpha_0(n-1) + c_n, \quad n \geq 2.$$

Paskaičiuokime pirmąsias reikšmes $\alpha_0 = \{1, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{29}{60}, -\frac{7}{40}, -\frac{277}{936}, \frac{31}{1092}, \dots\}$.

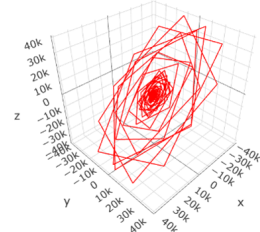
Galima pavaizduoti trejetus $(\alpha_k(n), \alpha_k(n-1), \alpha_k(n-2))$, sujungtus atkarpomis, erdvėje. 3 paveikslėliuose pavaizduoti šie trejetai keliems N .



(a) N=50



(b) N=300



(c) N=1000

3 pav.: Trejetai $(\alpha_k(n), \alpha_k(n-1), \alpha_k(n-2))$, erdvėje sujungti atkarpomis, kai n kinta nuo 0 iki N

Pavyzdys 3.6. Šiame pavyzdyje imkime $\mathbf{b} = \{10, -9, 8, -4, -4, 0, \dots, 0, \dots\}$, kai $m = 5$.

Tada atitinkamai

$$B(s) = 10 - 9s + 8s^2 - 4s^3 - 4s^4,$$

$$(1-s)G\alpha_0(s) = \frac{(b_0 + b_1s + b_2s^2 + b_3s^3 + b_4s^4)(1-s)}{B(s) - s^5} = \frac{10 - 9s + 8s^2 - 4s^3 - 4s^4}{10 + s + 9s^2 + 5s^3 + s^4}, \quad M_0(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{0,n}s^n,$$

$$(1-s)G\alpha_1(s) = \frac{(b_0s + b_1s^2 + b_2s^3 + b_3s^4)(1-s)}{B(s) - s^5} = \frac{10s - 9s^2 + 8s^3 - 4s^4}{10 + s + 9s^2 + 5s^3 + s^4}, \quad M_1(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{1,n}s^n,$$

$$(1-s)G\alpha_2(s) = \frac{(b_0s^2 + b_1s^3 + b_2s^4)(1-s)}{B(s) - s^5} = \frac{10s^2 - 9s^3 + 8s^4}{10 + s + 9s^2 + 5s^3 + s^4}, \quad M_2(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2,n}s^n,$$

$$(1-s)G\alpha_3(s) = \frac{(b_0s^3 + b_1s^4)(1-s)}{B(s) - s^5} = \frac{10s^3 - 9s^4}{10 + s + 9s^2 + 5s^3 + s^4}, \quad M_3(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{3,n}s^n,$$

$$(1-s)G\alpha_4(s) = \frac{b_0s^4(1-s)}{B(s) - s^5} = \frac{10s^4}{10 + s + 9s^2 + 5s^3 + s^4}, \quad M_4(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{4,n}s^n,$$

kur kiekvienam $k = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$$\begin{aligned} c_{0,0} &= 1, c_{0,1} = -1, c_{0,2} = 0, c_{0,3} = 0, c_{0,4} = 0, \\ c_{1,0} &= 0, c_{1,1} = 1, c_{1,2} = -1, c_{1,3} = 0, c_{1,4} = 0, \\ c_{2,0} &= 0, c_{2,1} = 0, c_{2,2} = 1, c_{2,3} = -1, c_{2,4} = 0, \\ c_{3,0} &= 0, c_{3,1} = 0, c_{3,2} = 0, c_{3,3} = 1, c_{3,4} = -1, \\ c_{4,0} &= 0, c_{4,1} = 0, c_{4,2} = 0, c_{4,3} = 0, c_{4,4} = 1, \\ c_{k,n} &= -\frac{1}{10} (c_{k,n-1} + 9c_{k,n-2} + 5c_{k,n-3} + c_{k,n-4}), \quad n \geq 5. \end{aligned}$$

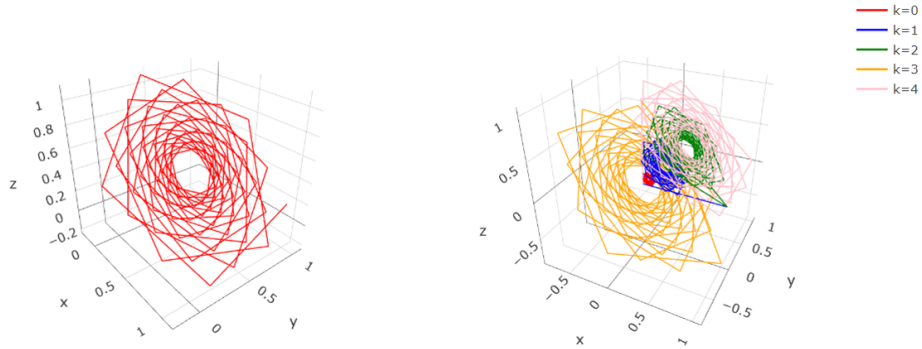
$M_k(s)$ konvergavimo spinduliai $R_M \approx 0.98644$, todėl eilutės $M_k(s)$ nekonverguoja, kai $s \rightarrow 1^-$ kiekvienam $k = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Surandame sekų $\alpha_k(n)$ reikšmes:

$$\begin{aligned} \alpha_0(0) &= 1, \alpha_0(1) = 0, \alpha_0(2) = 0, \alpha_0(3) = 0, \alpha_0(4) = 0, \alpha_0(5) = \frac{1}{10}, \\ \alpha_1(0) &= 0, \alpha_1(1) = 1, \alpha_1(2) = 0, \alpha_1(3) = 0, \alpha_1(4) = 0, \alpha_1(5) = \frac{2}{5}, \\ \alpha_2(0) &= 0, \alpha_2(1) = 0, \alpha_2(2) = 1, \alpha_2(3) = 0, \alpha_2(4) = 0, \alpha_2(5) = \frac{2}{5}, \\ \alpha_3(0) &= 0, \alpha_3(1) = 0, \alpha_3(2) = 0, \alpha_3(3) = 1, \alpha_3(4) = 0, \alpha_3(5) = -\frac{4}{5}, \\ \alpha_4(0) &= 0, \alpha_4(1) = 0, \alpha_4(2) = 0, \alpha_4(3) = 0, \alpha_4(4) = 1, \alpha_4(5) = \frac{9}{10}, \\ \alpha_k(n) &= \alpha_k(n-1) + c_{k,n}, \quad n \geq 6. \end{aligned}$$

Pagal 2.1, kiekvienam $k = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\alpha_k(n) - \alpha_k(n-1)|^{1/n} = \frac{1}{R_k} = \frac{1}{0.98644} \approx 1.0137.$$

Taip pat pastebėjime, kad pavaizdavę trejetus $(\alpha_k(n), \alpha_k(n-1), \alpha_k(n-2))$ erdvėje, galima gauti įdomią struktūrą. 4 paveikslėliuose pavaizduoti šie trejetai $m = 1$ ir $m = 5$ atvejais.



(a) $N = 100, m = 1$

(b) $N = 100, m = 5$

4 pav.: Trejetai $(\alpha_k(n), \alpha_k(n-1), \alpha_k(n-2))$, erdvėje sujungti atkarpomis, kai n kinta nuo 0 iki N ir $m = 1$ ir $m = 5$

Pavyzdys 3.7. Tarkime, kad

$$b_n = e^{-3} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{2^j}{(n-2j)!j!}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Galima sakyti, kad $b_n = \mathbb{P}(Y = n)$, o Y yra pasiskirstęs kaip Hermite skirstinys su parametrais $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, t. y. $Y \sim \text{Herm}(1, 2)$ [10].

Natūralu, kad $b_1 + b_2 + b_3 + \dots = 1$. Ieškome generuojančių funkcijų

$$\begin{aligned} B(s) &= e^{(s-1)+2(s^2-1)} = e^{2s^2+s-3}, \\ (1-s)G\alpha_0(s) &= \frac{(b_0 + b_1s + b_2s^2)(1-s)}{B(s) - s^3} = \frac{2 + 3s^2 - 5s^3}{2e^{s+2s^2} - 2e^3s^3}, \quad M_0(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{0,n}s^n, \\ (1-s)G\alpha_1(s) &= \frac{(b_0s + b_1s^2)(1-s)}{B(s) - s^3} = \frac{s - s^3}{e^{s+2s^2} - e^3s^3}, \quad M_1(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{1,n}s^n, \\ (1-s)G\alpha_2(s) &= \frac{b_0s^2(1-s)}{B(s) - s^3} = \frac{(s-1)s^2}{e^{s+2s^2} - e^3s^3}, \quad M_2(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2,n}s^n, \end{aligned}$$

kur kiekvienam $k = \{0, 1, 2\}$

$$\begin{aligned} c_{0,0} &= 1, \quad c_{0,1} = -1, \quad c_{0,2} = 0, \quad c_{0,3} = e^3 - \frac{13}{6}, \\ c_{1,0} &= 0, \quad c_{1,1} = 1, \quad c_{1,2} = -1, \quad c_{1,3} = -\frac{5}{2}, \\ c_{2,0} &= 0, \quad c_{2,1} = 0, \quad c_{2,2} = 1, \quad c_{2,3} = -2, \\ c_{k,n} &= e^3 c_{k,n-3} - \sum_{i=1}^n c_{k,n-i} d_k, \quad n \geq 4, \quad d_0 = d_1 = 1, \quad d_{n+1} = \frac{d_n + 4d_{n-1}}{n+1}. \end{aligned}$$

$M_k(s)$, $k = \{0, 1, 2\}$ konvergavimo spinduliai $R_M \approx 0.5286$, todėl eilutės $M_k(s)$ nekonverguoja, kai $s \rightarrow 1^-$ kiekvienam $k = \{0, 1, 2\}$. Surandame sekų $\alpha_k(n)$ reikšmes:

$$\begin{aligned} \alpha_0(0) &= 1, \quad \alpha_0(1) = 0, \quad \alpha_0(2) = 0, \quad \alpha_0(3) = e^3 - \frac{13}{6}, \\ \alpha_1(0) &= 0, \quad \alpha_1(1) = 1, \quad \alpha_1(2) = 0, \quad \alpha_1(3) = -\frac{5}{2}, \\ \alpha_2(0) &= 0, \quad \alpha_2(1) = 0, \quad \alpha_2(2) = 1, \quad \alpha_2(3) = -1, \\ \alpha_k(n) &= \alpha_k(n-1) + c_{k,n}, \quad n \geq 3. \end{aligned}$$

Pagal 2.1, kiekvienam $k = \{0, 1, 2\}$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\alpha_k(n) - \alpha_k(n-1)|^{1/n} = \frac{1}{R_k} = \frac{1}{0.5286} \approx 1.8918.$$

Pavyzdys 3.8. Šįkart bus nagrinėjama seka

$$b_n = \alpha^n (3 \cos(n\theta) - 11 \sin(n\theta)), \quad \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \theta = \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Nors narių išraiškos nėra itin gražios, tačiau generuojanti funkcija patogi tolimesnėms manipuliacijoms:

$$B(s) = \frac{15 - 5s}{s^2 + 4s + 5}.$$

Taip pat pastebėkime, kad $b_1 + b_2 + b_3 + \dots = 1$. Imkime $m = 3$. Tada

$$\begin{aligned}(1-s)G\alpha_0(s) &= \frac{(b_0 + b_1s + b_2s^2)(1-s)}{B(s) - s^3} = \frac{(5 + 4s + s^2)(75 - 85s + 53s^2)}{25(15 + 10s + 10s^2 + 5s^3 + s^4)}, \quad M_0(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{0,n}s^n, \\(1-s)G\alpha_1(s) &= -\frac{(b_0s + b_1s^2)(1-s)}{B(s) - s^3} = \frac{s(5 + 4s + s^2)(17s - 15)}{5(15 + 10s + 10s^2 + 5s^3 + s^4)}, \quad M_1(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{1,n}s^n, \\(1-s)G\alpha_2(s) &= \frac{b_0s^2(1-s)}{B(s) - s^3} = \frac{3s^2(5 + 4s + s^2)}{15 + 10s + 10s^2 + 5s^3 + s^4}, \quad M_2(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2,n}s^n,\end{aligned}$$

kur kiekvienam $k = \{0, 1, 2\}$

$$\begin{aligned}c_{0,0} &= 1, \quad c_{0,1} = -1, \quad c_{0,2} = 0, \quad c_{0,3} = \frac{84}{125}, \quad c_{0,4} = -\frac{1}{25}, \\c_{1,0} &= 0, \quad c_{1,1} = 1, \quad c_{1,2} = -1, \quad c_{1,3} = -\frac{53}{75}, \quad c_{1,4} = \frac{26}{45}, \\c_{2,0} &= 0, \quad c_{2,1} = 0, \quad c_{2,2} = 1, \quad c_{2,3} = \frac{2}{15}, \quad c_{2,4} = -\frac{5}{9}, \\c_{k,n} &= -\frac{1}{15} (10c_{k,n-1} + 10c_{k,n-2} + 5c_{k,n-3} + c_{k,n-4}), \quad n \geq 5.\end{aligned}$$

$M_k(s)$, $k = \{0, 1, 2\}$ konvergavimo spinduliai $R_M \approx 1.3891$, todėl eilutės $M_k(s)$ konverguoja, kai $s \rightarrow 1^-$ kiekvienam $k = \{0, 1, 2\}$. Surandame sekų $\alpha_k(n)$ reikšmes:

$$\begin{aligned}\alpha_0(0) &= 1, \quad \alpha_0(1) = 0, \quad \alpha_0(2) = 0, \quad \alpha_0(3) = \frac{84}{125}, \\ \alpha_1(0) &= 0, \quad \alpha_1(1) = 1, \quad \alpha_1(2) = 0, \quad \alpha_1(3) = -\frac{53}{75}, \\ \alpha_2(0) &= 0, \quad \alpha_2(1) = 0, \quad \alpha_2(2) = 1, \quad \alpha_2(3) = \frac{17}{15}, \\ \alpha_k(n) &= \alpha_k(n-1) + c_{k,n}, \quad n \geq 3.\end{aligned}$$

Pagal 2.1, kiekvienam $k = \{0, 1, 2\}$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\alpha_k(n) - \alpha_k(n-1)|^{1/n} = \frac{1}{R_k} = \frac{1}{1.3891} \approx 0.7199.$$

Kadangi $M_k(s)$ eilutės konverguoja, gauname ribas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_0(n) = \frac{86}{205}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_1(n) = -\frac{4}{41}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_2(n) = \frac{30}{41}.$$

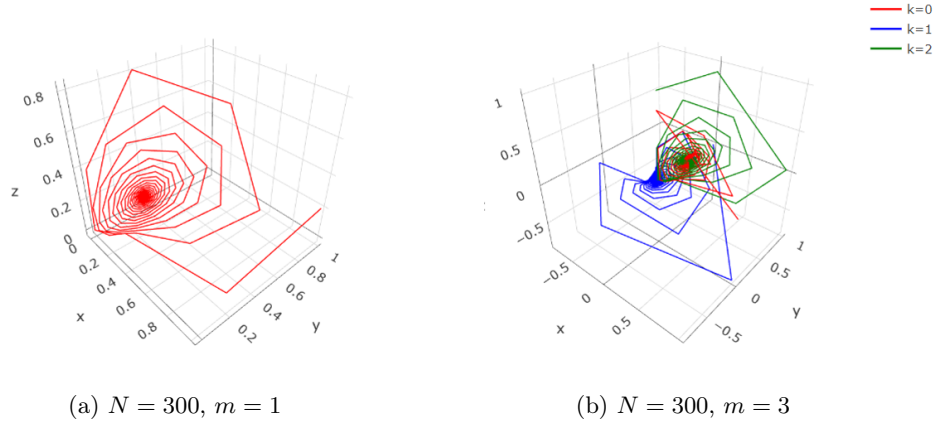
Šiuo atveju tenkinamos 2.3 teoremos sąlygos, todėl ja remdamiesi paskaičiuosime pradines sekos $\mathbf{a}$ reikšmes. $B(s) - s^3$ turi dvi šaknis konvergavimo srityje $\alpha_{1,2} = -0.0301 \pm 1.3888i$. Tada $L_1 = L_2 = 0$ ir, nustatę $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{10}{41}$, gauname $L = \frac{41}{10} \cdot \frac{10}{41} = 1$. Todėl

$$\begin{pmatrix} b_0 + b_1\alpha_1 + b_2\alpha_1^2 & b_0\alpha_1 + b_1\alpha_1^2 & b_0\alpha_1^2 \\ b_0 + b_1\alpha_2 + b_2\alpha_2^2 & b_0\alpha_2 + b_1\alpha_2^2 & b_0\alpha_2^2 \\ b_0 + b_1 + b_2 & b_0 + b_1 & b_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

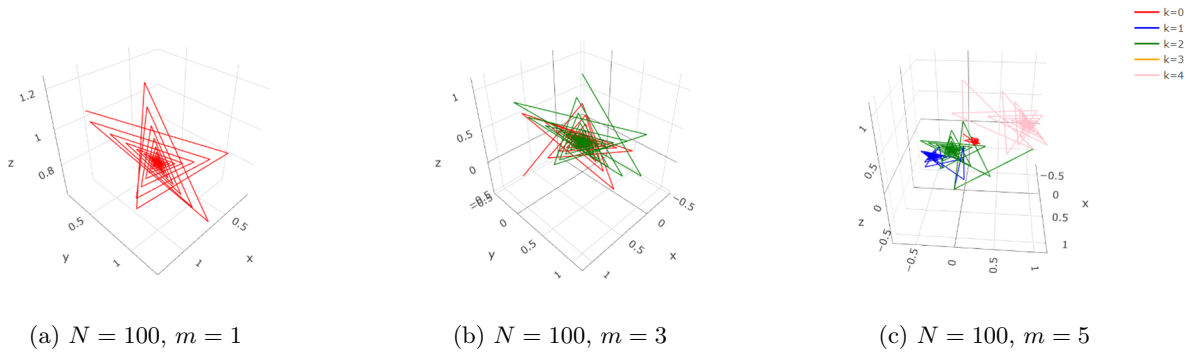
Gauname pradines reikšmes $a_0 = 0.2151$, $a_1 = 0.2505$ ir $a_2 = 0.2434$.

3.1 Daugiau grafinių pavyzdžių

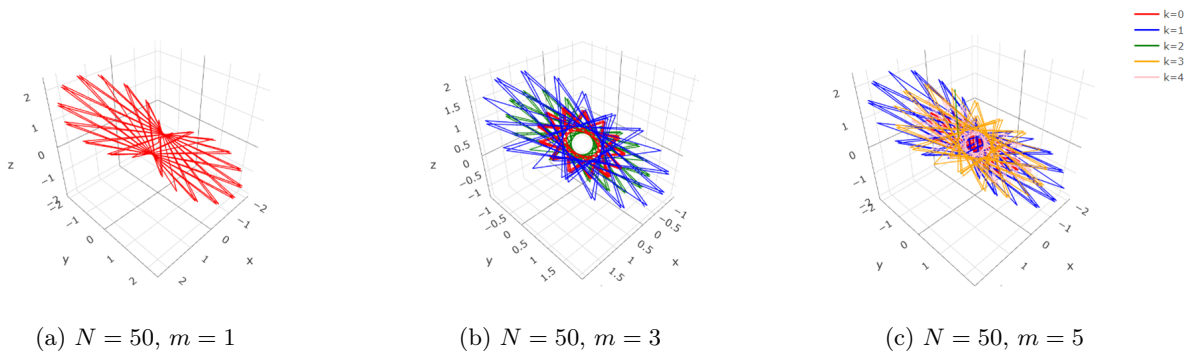
Šiame skyrelyje pateikta daugiau grafinių pavyzdžių, nubraižytų su [14], įvairioms $\mathbf{b}$ sekoms.



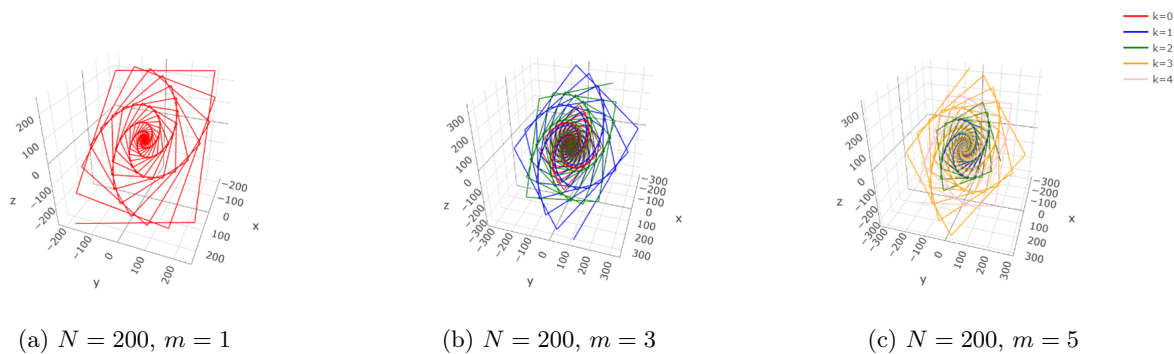
5 pav.: Trejetai $(\alpha_k(n), \alpha_k(n-1), \alpha_k(n-2))$ sekai $\mathbf{b} = \{10, -9, 8, -7, 6, -5, 4, -3, 2, -1, 0, \dots, 0, \dots\}$, erdvėje sujungti atkarpomis, kai n kinta nuo 0 iki N bei $m = 1$ ir $m = 5$



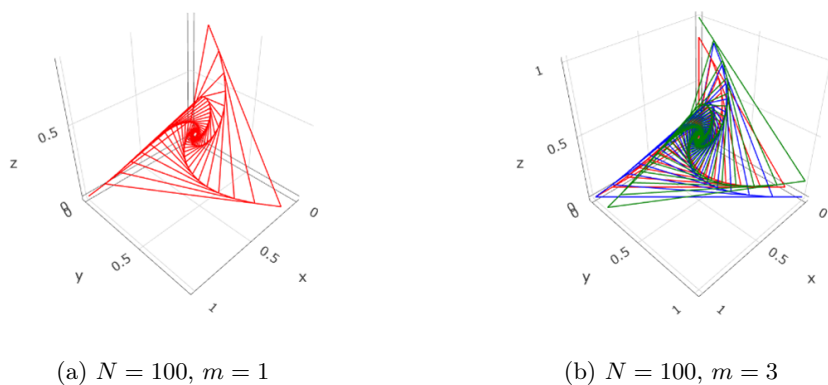
6 pav.: Trejetai $(\alpha_k(n), \alpha_k(n-1), \alpha_k(n-2))$ sekai $\mathbf{b} = \{5, 0, -5, -2, 3, 0, \dots, 0, \dots\}$, erdvėje sujungti atkarpomis, kai n kinta nuo 0 iki N bei $m = 1, m = 3$ ir $m = 5$



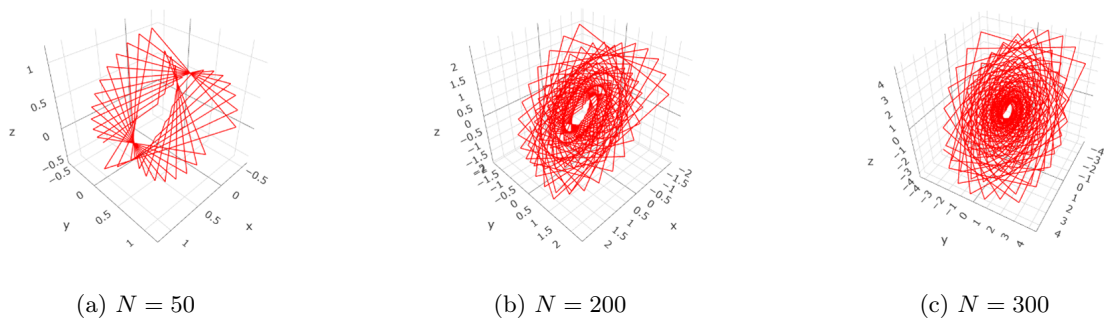
7 pav.: Trejetai $(\alpha_k(n), \alpha_k(n-1), \alpha_k(n-2))$ sekai $\mathbf{b} = \{-2, -2, 0, 3, 2, 0, \dots, 0, \dots\}$, erdvėje sujungti atkarpomis, kai n kinta nuo 0 iki N bei $m = 1, m = 3$ ir $m = 5$



8 pav.: Trejetai $(\alpha_k(n), \alpha_k(n-1), \alpha_k(n-2))$ sekai $\mathbf{b} = \{-6, 5, -4, 3, 3, 0, \dots, 0, \dots\}$, erdvėje sujungti atkarpomis, kai n kinta nuo 0 iki N bei $m = 1, m = 3$ ir $m = 5$



9 pav.: Trejetai $(\alpha_k(n), \alpha_k(n-1), \alpha_k(n-2))$ sekai $\mathbf{b} = \{-7, 1, 0, 1, 6, 0, \dots, 0, \dots\}$, erdvėje sujungti atkarpomis, kai n kinta nuo 0 iki N bei $m = 1, m = 3$



10 pav.: Trejetai $(\alpha_k(n), \alpha_k(n-1), \alpha_k(n-2))$ sekai $\mathbf{b} = \{8, 1, 0, -1, -8, 1, 0, \dots, 0, \dots\}$, erdvėje sujungti atkarpomis, kai n kinta nuo 0 iki N bei $m = 1$

4 Išvados

Šiame darbe išnagrinėtos sąsūkos tipo rekurentinės sekos, apibrėžtos per žinomą seką $\mathbf{b}$ ir baigtinį pradinių reikšmių skaičių. Parodyta, kad tokios sekos gali būti nagrinėjamos pasitelkiant pagalbines sekas ir generuojančių funkcijų metodus, leidžiančius kiekvieną sekos narį išreikšti kaip tiesinę pradinių reikšmių kombinaciją.

Nustatyti ryšiai tarp nagrinėjamų sekų generuojančių funkcijų ir sekos sudaro pagrindą sekų elgsenos analizei. Gautos pakankamos sąlygos, kurioms esant egzistuoja pagalbinių sekų ribos, o kartu ir pradinės rekurentinės sekos riba. Parodyta, kad sekos riba, jei ji egzistuoja, yra tiesiogiai susijusi su pradinių reikšmių parinkimu ir gali būti apskaičiuojama naudojant gautas išraiškas.

Pateikti pavyzdžiai iliustruoja teorinių rezultatų taikymą skirtingoms koeficientų sekoms ir parodo, kad net paprastos rekurentinės struktūros gali lemti sudėtingą sekų elgseną. Darbe gauti rezultatai gali būti taikomi tolesniems diskrečių rekursinių sistemų tyrimams ir sudaro pagrindą platesnei sąsūkos tipo rekurentinių sekų analizei.

Literatūra

- [1] Box, G. E. P., Jenkins, G. M., Reinsel, G. C., Ljung, G. M., 2015. Time Series Analysis: Forecasting and Control. Wiley.
- [2] Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., Stein, C, 2009. Introduction to Algorithms. MIT Press.
- [3] Elaydi, S., 2005. An Introduction to Difference Equations. Springer.
- [4] Gasparavičius, I., Grigutis, A. and Petkelis, J., 2025. Picturesque convolution-like recurrences and partial sums' generation. arXiv preprint arXiv:2507.23619.
- [5] Graham, R. L., Knuth, D. E., Patashnik, O., 1994. Concrete mathematics: A foundation for computer science (2nd ed.). Addison-Wesley Professional.
- [6] Grigutis, A., 2023. Exact expression of ultimate time survival probability in homogeneous discrete-time risk model. AIMS Mathematics, 8(3): 5181-5199. doi: 10.3934/math.2023260.
- [7] Grigutis, A., Jankauskas, J., Šiaulyš, J., 2023. Multiseasonal discrete-time risk model revisited. Lith Math J 63, 466–486. <https://doi.org/10.1007/s10986-023-09613-z>.
- [8] Grigutis, A., Nakliuda, A., 2024. The limit law of certain discrete multivariate distributions. <https://arxiv.org/pdf/2402.14470>.
- [9] Horn, R. A., Johnson, C. R., 1991. Topics in matrix analysis. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511840371>.
- [10] Kemp, C. D., Kemp, Adrienne W., 1965. Some properties of the ‘Hermite’ distribution, Biometrika, Volume 52, Issue 3-4, Pages 381–394, <https://doi.org/10.1093/biomet/52.3-4.381>.
- [11] Koshy, T., 2001. Fundamentals. In Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, T. Koshy (Ed.). <https://doi.org/10.1002/9781118033067.app1>.
- [12] OEIS Foundation Inc, 2025. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, Published electronically at <https://oeis.org>.
- [13] Oppenheim, A. V., Schafer, R. W., 2010. Discrete-Time Signal Processing. Pearson.
- [14] R Core Team, 2022. R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <https://www.R-project.org/>.
- [15] William B. Jones and W. J. Thron, 1980. Continued Fractions: Analytic Theory and Applications. Encyclopedia of Mathematics and its Applications (Vol. 11). Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA.
- [16] Wolfram Research, Inc, 2025. (www.wolfram.com), Mathematica Online, Champaign, IL.

Priedai

Čia pateikti kai kurie skaičiavimo pavyzdžiai atskirais atvejais su programine įranga R [14].
Konvergavimo spindulio skaičiavimas:

```
library(nleqslv)

make_sys <- function(f) {
  function(x) {
    z <- x[1] + 1i * x[2]
    y <- f(z)
    c(Re(y), Im(y))
  }
}

# Pagrindinė funkcija
radius_of_convergence <- function(D, N = NULL,
                                   n_starts = 50,
                                   xrange = c(-4,4),
                                   yrange = c(-4,4),
                                   remove_roots = c(0+0i)) {

  sys <- make_sys(D)
  roots <- c()

  for (k in 1:n_starts) {
    start <- runif(1, xrange[1], xrange[2]) +
      1i * runif(1, yrange[1], yrange[2])

    sol <- nleqslv(c(Re(start), Im(start)), sys)
    z <- sol$x[1] + 1i * sol$x[2]

    if (sol$termcd == 1) {
      roots <- c(roots, z)
    }
  }

  roots <- unique(round(roots, 6))

  good <- roots
  if (!is.null(N)) {
    good <- good[ abs(N(good)) > 1e-6 ] # keep only non-removable
  }

  for (r in remove_roots) {
    good <- good[ abs(good - r) > 1e-6 ]
  }

  R <- min(Mod(good))
  list(radius = R, roots = good)
}

#Pavyzdys 3.2. N yra skaitiklis, D yra vardiklis:
N <- function(s) (1-s)*s
D <- function(s) exp(s)-1+(1-exp(1))*s^2
```

```
radius_of_convergence(D, N,
                      n_starts = 80,
                      remove_roots = c(0+0i, 1+0i))
```

α reikšmių skaičiavimas ir grafikų braižymas $m = 1$ atveju:

```
N <- 300

b <- c(8, 1, 0, -1, -8, 1, rep(0, N-length(b)))

alpha_0 <- numeric(N)
alpha_0[1] <- 1

for (i in 2:N){
  sum_term <- sum(sapply(0:(i-1), function(j) b[i - j] * alpha_0[j + 1]) , na.rm = TRUE)
  alpha_0[i] <- 1/b[1] * (alpha_0[i-1] - sum_term)
}

df <- data.frame(
  x = alpha_0[1:(length(alpha_0) - 2)],
  y = alpha_0[2:(length(alpha_0) - 1)],
  z = alpha_0[3:length(alpha_0)]
)

plot_ly() %>%
  add_trace(
    data = df,
    x = ~x, y = ~y, z = ~z,
    type = "scatter3d", mode = "lines",
    line = list(color = "red")
  ) %>%
  layout(
    showlegend = FALSE, # hide legend
    scene = list(
      xaxis = list(showline = TRUE, showgrid = TRUE),
      yaxis = list(showline = TRUE, showgrid = TRUE),
      zaxis = list(showline = TRUE, showgrid = TRUE),
      aspectmode = "cube"
    )
  )
```

α reikšmių skaičiavimas ir grafikų braižymas $m = 3$ atveju:

```
N <- 100

b <- c(8, 1, 0, -1, -8, 1, rep(0, N-length(b)))

alpha_0 <- c(1,0,0, (1-b[4])/b[1], rep(0, N-4))
alpha_1 <- c(0,1,0, -b[3]/b[1], rep(0, N-4))
alpha_2 <- c(0,0,1, -b[1]/b[1], rep(0, N-4))
```

```

for (i in 5:N){
  sum_term <- sum(sapply(0:(i-1), function(j) b[i - j] * alpha_0[j + 1]) , na.rm = TRUE)
  alpha_0[i] <- 1/b[1] * (alpha_0[i-1] - sum_term)
}

for (i in 5:N){
  sum_term <- sum(sapply(0:(i-1), function(j) b[i - j] * alpha_1[j + 1]) , na.rm = TRUE)
  alpha_1[i] <- 1/b[1] * (alpha_1[i-1] - sum_term)
}

for (i in 5:N){
  sum_term <- sum(sapply(0:(i-1), function(j) b[i - j] * alpha_2[j + 1]) , na.rm = TRUE)
  alpha_2[i] <- 1/b[1] * (alpha_2[i-1] - sum_term)
}

df0 <- data.frame(
  x = alpha_0[1:(length(alpha_0) - 2)],
  y = alpha_0[2:(length(alpha_0) - 1)],
  z = alpha_0[3:length(alpha_0)]
)
df1 <- data.frame(
  x = alpha_1[1:(length(alpha_1) - 2)],
  y = alpha_1[2:(length(alpha_1) - 1)],
  z = alpha_1[3:length(alpha_1)]
)
df2 <- data.frame(
  x = alpha_2[1:(length(alpha_2) - 2)],
  y = alpha_2[2:(length(alpha_2) - 1)],
  z = alpha_2[3:length(alpha_2)]
)

library(dplyr)

df0$source <- "df0"
df1$source <- "df1"
df2$source <- "df2"

all_df <- bind_rows(df0, df1, df2)

library(plotly)

plot_ly() %>%
  add_trace(
    data = df0,
    x = ~x, y = ~y, z = ~z,
    type = "scatter3d", mode = "lines",
    line = list(color = "red"),
    name="k=0"
  ) %>%
  add_trace(

```

```

data = df1,
x = ~x, y = ~y, z = ~z,
type = "scatter3d", mode = "lines",
line = list(color = "blue"),
name="k=1"
) %>%
add_trace(
data = df2,
x = ~x, y = ~y, z = ~z,
type = "scatter3d", mode = "lines",
line = list(color = "green"),
name="k=2"
) %>%
layout(
showlegend = FALSE, # hide legend
scene = list(
axis = list(showline = TRUE, showgrid = TRUE),
yaxis = list(showline = TRUE, showgrid = TRUE),
zaxis = list(showline = TRUE, showgrid = TRUE),
aspectmode = "cube"
)
)

```

α reikšmių skaičiavimas ir grafikų braižymas $m = 5$ atveju:

```
N <- 100
```

```
b <- c(-7, 1, 0, 1, 6, rep(0, N-length(b)))
```

```

alpha_0 <- c(1,0,0,0,0,(1-b[6])/b[1], rep(0, N-6))
alpha_1 <- c(0,1,0,0,0,-b[5]/b[1], rep(0, N-6))
alpha_2 <- c(0,0,1,0,0,-b[4]/b[1], rep(0, N-6))
alpha_3 <- c(0,0,0,1,0,-b[3]/b[1], rep(0, N-6))
alpha_4 <- c(0,0,0,0,1,-b[2]/b[1], rep(0, N-6))

```

```

for (i in 7:N){
sum_term <- sum(sapply(0:(i-1), function(j) b[i - j] * alpha_0[j + 1]) , na.rm = TRUE)
alpha_0[i] <- 1/b[1] * (alpha_0[i-1] - sum_term)
}

```

```

for (i in 7:N){
sum_term <- sum(sapply(0:(i-1), function(j) b[i - j] * alpha_1[j + 1]) , na.rm = TRUE)
alpha_1[i] <- 1/b[1] * (alpha_1[i-1] - sum_term)
}

```

```

for (i in 7:N){
sum_term <- sum(sapply(0:(i-1), function(j) b[i - j] * alpha_2[j + 1]) , na.rm = TRUE)
alpha_2[i] <- 1/b[1] * (alpha_2[i-1] - sum_term)
}

```

```

for (i in 7:N){
sum_term <- sum(sapply(0:(i-1), function(j) b[i - j] * alpha_3[j + 1]) , na.rm = TRUE)
alpha_3[i] <- 1/b[1] * (alpha_3[i-1] - sum_term)
}

```

```
for (i in 7:N){
```

```

    sum_term <- sum(sapply(0:(i-1), function(j) b[i - j] * alpha_4[j + 1]) , na.rm = TRUE)
    alpha_4[i] <- 1/b[1] * (alpha_4[i-1] - sum_term)
}

```

```

df0 <- data.frame(
  x = alpha_0[1:(length(alpha_0) - 2)],
  y = alpha_0[2:(length(alpha_0) - 1)],
  z = alpha_0[3:length(alpha_0)]
)
df1 <- data.frame(
  x = alpha_1[1:(length(alpha_1) - 2)],
  y = alpha_1[2:(length(alpha_1) - 1)],
  z = alpha_1[3:length(alpha_1)]
)
df2 <- data.frame(
  x = alpha_2[1:(length(alpha_2) - 2)],
  y = alpha_2[2:(length(alpha_2) - 1)],
  z = alpha_2[3:length(alpha_2)]
)
df3 <- data.frame(
  x = alpha_3[1:(length(alpha_3) - 2)],
  y = alpha_3[2:(length(alpha_3) - 1)],
  z = alpha_3[3:length(alpha_3)]
)
df4 <- data.frame(
  x = alpha_4[1:(length(alpha_4) - 2)],
  y = alpha_4[2:(length(alpha_4) - 1)],
  z = alpha_4[3:length(alpha_4)]
)

```

```

# library(plotly)

```

```

plot_ly() %>%
  add_trace(
    data = df0,
    x = ~x, y = ~y, z = ~z,
    type = "scatter3d", mode = "lines",
    line = list(color = "red"),
    name="k=0"
  ) %>%
  add_trace(
    data = df1,
    x = ~x, y = ~y, z = ~z,
    type = "scatter3d", mode = "lines",
    line = list(color = "blue"),
    name="k=1"
  ) %>%
  add_trace(
    data = df2,
    x = ~x, y = ~y, z = ~z,
    type = "scatter3d", mode = "lines",
    line = list(color = "green"),

```

```

    name="k=2"
) %>%
add_trace(
  data = df3,
  x = ~x, y = ~y, z = ~z,
  type = "scatter3d", mode = "lines",
  line = list(color = "orange"),
  name="k=3"
) %>%
add_trace(
  data = df4,
  x = ~x, y = ~y, z = ~z,
  type = "scatter3d", mode = "lines",
  line = list(color = "pink"),
  name="k=4"
) %>%
layout(
  showlegend = TRUE,    # hide legend
  scene = list(
    xaxis = list(showline = TRUE, showgrid = TRUE),
    yaxis = list(showline = TRUE, showgrid = TRUE),
    zaxis = list(showline = TRUE, showgrid = TRUE),
    aspectmode = "cube"
  )
)

```