



**Matematikos ir
informatikos
fakultetas**

VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

MAGISTRO STUDIJŲ PROGRAMA

FINANSŲ IR DRAUDIMO MATEMATIKA

**Portfelio sudarymas ir optimizavimas
naudojantis Šarpo, standartinio nuokrypio ir
maksimalaus nuosmukio rizikos matais**

**Portfolio construction and Optimization
Using Sharpe, Standard deviation and
Maximum Drawdown Risk Measures**

Magistrinis darbas

Autorius: Aigiris Vaitkevičius

VU el. pašto adresas: aigiris.vaitkevicius@mif.stud.vu.lt

Vadovas: doc. dr. Andrius Grigutis

Vilnius
2026

Turinys

1	Įvadas	3
1.1	Apžvalga	3
1.2	Darbo tikslai	4
2	Teorinė dalis	4
2.1	Standartinis nuokrypis	4
2.1.1	Standartinio nuokrypio apibrėžimas	4
2.1.2	Standartinis nuokrypis portfelio teorijoje	5
2.2	Šarpo rodiklis	5
2.2.1	Šarpo rodiklio sąvoka	5
2.2.2	Šarpo rodiklis portfelyje	6
2.3	Koreliacija	7
2.3.1	Koreliacija: apibrėžimas ir formuluotės	7
2.3.2	Koreliacijos matrica portfelio kontekste	8
2.4	Didžiausio nuosmukio rodiklis	8
2.5	Monte Karlo simuliacija	10
3	Praktinė dalis	10
3.1	Duomenys	10
3.2	Koreliacija	13
3.3	Gražos	14
3.4	Standartinio nuokrypio optimizavimas	15
3.5	Šarpo rodiklio optimizavimas	17
3.6	Didžiausio nuosmukio rodiklio optimizavimas	19
3.7	Išvados	22
4	Priedai	26

Portfelio sudarymas ir optimizavimas naudojantis Šarpo, standartinio nuokrypio ir maksimalaus nuosmukio rizikos matais

Santrauka

Šiame darbe praktiškai nagrinėjamas portfelio sudarymas taikant skirtingus rizikos matavimo rodiklius, naudojant diversifikuotą aktyvų portfelį. Empirinė analizė atliekama remiantis 2008 m. sausio 1 d. – 2024 m. gruodžio 31 d. dieniniais duomenimis dešimčiai aktyvų, atspindinčių pagrindines pasaulio turto klases: JAV ir tarptautines akcijas, besivystančių rinkų bei mažos kapitalizacijos akcijas, investicines ir didelės rizikos obligacijas, nekilnojamąjį turtą, žaliavas ir auksą. Pagrindinis darbo tikslas – ištirti, kaip skirtingi rizikos matai veikia portfelio svorius ir gautas rizikos–grąžos charakteristikas. Darbo metu analizuojami trys rizikos matavimo rodikliai: grąžų standartinis nuokrypis, Šarpo rodiklis ir didžiausias nuosmukis. Standartinis nuokrypis naudojamas sudaryti minimalios dispersijos portfelį, Šarpo rodiklis maksimizuojamas siekiant gauti portfelį su didžiausia grąža vienam rizikos vienetui, o didžiausias nuosmukis minimizuojamas siekiant akcentuoti kapitalo išsaugojimą. Visi optimizuoti portfeliai lyginami su paprastu vienodų svorių portfelium. Metodika įgyvendinama naudojant „Python“ programavimo kalbą, taikant SLSQP algoritmą apribotai netiesinei optimizacijai (tik pirkimo pozicijos ir pilnai investuotas portfelis) ir Monte Karlo simuliacijas su didele atsitiktinių portfelių aibe rezultatams patikrinti.

Raktiniai žodžiai: Portfelio optimizavimas; Rizikos matai; Standartinis nuokrypis; Šarpo rodiklis; Didžiausias nuosmukis; Biržoje prekiaujami fondai; Turto paskirstymas; Monte Karlo simuliacija, rizikos vertinimas.

Portfolio construction and Optimization Using Sharpe, Standard deviation and Maximum Drawdown Risk Measures

Abstract

This thesis examines portfolio construction based on alternative risk measures using a universe of exchange-traded funds (ETFs) representing major global asset classes. The empirical analysis is conducted on daily data from 1 January 2008 to 31 December 2024 for ten ETFs spanning U.S. and international equities, emerging markets, small-cap equities, investment-grade and high-yield bonds, real estate, commodities, and gold. The objective is to compare how different definitions of risk affect portfolio weights and the resulting risk–return trade-off. Three risk measures are analysed: the standard deviation of returns, the Sharpe ratio, and maximum drawdown. Standard deviation is used to construct a minimum-variance portfolio, the Sharpe ratio is maximized to obtain a portfolio with the highest return per unit of volatility, and maximum drawdown is minimized to emphasize capital preservation. All optimized portfolios are compared to equal-weight benchmark. The methodology is implemented in Python, using the SLSQP algorithm for constrained nonlinear optimization (long-only, fully invested portfolios) and Monte Carlo simulations over a large set of randomly generated portfolios as a robustness check.

Keywords: Portfolio optimization; Risk measures; Standard deviation; Sharpe ratio; Maximum drawdown; Exchange-traded funds (ETFs); Asset allocation; Monte Carlo simulation; Risk management.

1 Įvadas

1.1 Apžvalga

Pastaraisiais dešimtmečiais finansų rinkos pasižymėjo dideliu nepastovumu, staigiomis krizėmis ir greitu atsigavimu. Tokiomis sąlygomis portfelio konstravimas ir rizikos valdymas tampa ganėtinai aktualia tema, kuomet rizikos suvaldymas ir kapitalo stabilumas yra ne mažiau svarbūs nei siekis uždirbti patrauklią grąžą. Praktikoje investuotojai ir rizikos vertintojai retai apsiriboja vienu rizikos supratimu. Tas pats portfelis vienam gali pasirodyti patrauklus, tačiau kitam per daug rizikingas, priklausomai nuo to, ar rizika vertinama pagal nepastovumą, nuostolius, ar kapitalo prieaugį ir pan., tad gerai alokuotas portfelis ne tik turi generuoti patrauklią grąžą, bet ir turi būti pakankamai stabilus tam, kad būtų sėkmingai pasiekti užsibrėžti tikslai.

Šiame darbe yra fokusuojamasi į tris plačiai naudojamus rizikos matus: standartinį nuokrypį, Šarpo rodiklį bei didžiausią nuosmukį. Standartinis nuokrypis yra klasikinis bendros rizikos matas modernioje portfelio paskirstymo teorijoje ir yra naudojamas minimalios dispersijos portfelio sudarymui. Šio mato privalumas - paprastumas, tačiau šis matas visus nuokrypius nuo vidurkio vertina simetriškai, dėl to ekstremalių situacijų poveikis portfeliui gali likti įvertintas nepakankamai.

Šarpo rodiklis praplečia rizikos vertinimo idėją, siejant tikėtiną perteklinę grąžą su standartiniu nuokrypiu pateikiant rezultata, kuriuo remiantis galima vertinti portfelius pagal rizikos ir grąžos santykį. Šarpo rodiklis yra patogus įrankis skirtingoms strategijoms lyginti, tačiau „paveldi“ standartinio nuokrypio trūkumus: rizikos mato patikimumas yra didžiausias, kuomet grąžos yra pasiskirsčiusios maždaug normaliai ir gali būti iškreiptas esant retiams, tačiau dideliems nuostoliams.

Didžiausio nuosmukio rodiklis matuoja didžiausią portfelio vertės kritimą nuo piko iki dugno per nagrinėjamą laikotarpį ir atspindi blogiausią investuotojo istorinę patirtį laikant portfelį. Todėl šis rodiklis ir yra aktualus praktikoje, kuomet svarbus kapitalo išsaugojimas ir investuotojų elgsena. Pagrindiniai jo trūkumai - orientacija tik į praeities duomenis bei jautrumas pasirinktai laiko atkarpai, tad jis tiesiogiai neparodo būsimų nuostolių tikimybės.

Analizuojant portfelius, optimizuotus naudojant šiuos tris rizikos matavimo rodiklius, siekiama parodyti, kaip skirtingi rizikos apibrėžimai lemia skirtingų portfelių konstrukciją ir santykius tarp grąžos bei nuostolių.

1.2 Darbo tikslai

Darbe siekiama, sudarant diversifikuotą portfeli, išanalizuoti pagrindines jo rizikos ir gražos charakteristikas, naudojantis dieniniais 2008–2024 metų gražų duomenimis. Taip pat darbe kuriami ir lyginami portfelių rinkiniai, įskaitant vienodų svorių, minimalios dispersijos, maksimalaus Šarpo rodiklio bei minimizuoto didžiausio nuostolio portfelius. Portfeliai yra lyginami pagal metinę gražą bei nepastovumą (volatilumą). Optimizavimo užduoties tikslas yra iliustruoti ir įvertinti gautus rezultatus, taikant skirtingus optimizavimo metodus, tokius kaip SLSQP algoritimą ir Monte Karlo simuliaciją.

2 Teorinė dalis

2.1 Standartinis nuokrypis

2.1.1 Standartinio nuokrypio apibrėžimas

Standartinis nuokrypis yra atsitiktinio dydžio reikšmių išsibarstymo aplink jo vidurkį matas.

Apibrėžimas 1. Standartinis nuokrypis statistikoje. Atsitiktiniam dydžiui X su baigtiniu vidurkiu $\mu = \mathbb{E}[X]$, standartinis nuokrypis apibrėžiamas kaip kvadratinė šaknis iš dispersijos:

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{\mathbb{E}[(X - \mu)^2]}, \quad (1)$$

čia dispersija $\text{Var}(X)$ matuoja tikėtiną kvadratinį nuokrypį nuo vidurkio. Baigtinei populiacijai ar pilnam duomenų rinkiniui $\{x_1, \dots, x_N\}$, populiacijos standartinis nuokrypis yra

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}, \quad \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i.$$

Kuomet stebima tik konkreti imtis iš didesnės populiacijos, dažnu atveju, dispersija vertinama naudojantis Beselio korekcija N pakeičiant į $N - 1$:

$$s^2 = \frac{1}{N - 1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2, \quad s = \sqrt{s^2},$$

čia s yra imties standartinis nuokrypis, dažnai naudojamas kaip nežinomos populiacijos standartinio nuokrypio įvertis [2].

Standartinis nuokrypis turi tokias matematines savybes: jis visuomet neneigiamas; prie bet kokio stebėjimo pridėjama konstanta nekeičia standartinio nuokrypio; dauginant bet kokią stebėseną iš konstantos c , standartinį nuokrypį didiname $|c|$ kartų:

$$\sigma(X + c) = \sigma(X), \quad \sigma(cX) = |c|\sigma(X).$$

2.1.2 Standartinis nuokrypis portfelio teorijoje

Pradžioje apibrėšime portfelį remiantis [7].

Apibrėžimas 2. Portfelis. Portfelium vadinsime vektorių $(w_1, w_2, \dots, w_n)$. Čia $w_i, i = 1, \dots, n$ su $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ suprantami kaip kokių nors vertybinių popierių rinkinio $V_1, V_2, \dots, V_n$ svoriai. Taigi, $V = w_1 V_1 + w_2 V_2 + \dots + w_n V_n$. Darbe naudojamas apribojimas $0 \leq w_i \leq 1$. Toks apribojimas reiškia, kad negalimas pasiskolintų vertybinių popierių pardavimas.

Šiuolaikinė portfelio teorija, kilusi iš Markowitz (1952), portfelio dispersiją (atitinkamai ir standartinį nuokrypį) laiko pagrindiniu kiekybiniu rizikos matu [5].

Apibrėžimas 3. Standartinis nuokrypis portfelyje. Tarkime R_p yra portfelio grąža, o $\mu_p = \mathbb{E}[R_p]$ grąžos tikėtina vertė. Tuomet turto svorių vektoriui w ir turto grąžų kovariacijų matricai Σ , dispersija yra

$$\sigma_p^2 = \text{Var}(R_p) = \mathbf{w}^\top \Sigma \mathbf{w},$$

o portfelio standartinis nuokrypis (nepastovumas) yra

$$\sigma_p = \sqrt{\mathbf{w}^\top \Sigma \mathbf{w}}. \quad (2)$$

H. Markowitz vidurkio - dispersijos sistemoje investuotojai siekia:

- **minimizuoti** σ_p už tam tikrą numatomą grąžą, arba
- **maksimizuoti** tikėtiną grąžą už tam tikrą σ_p .

2.2 Šarpo rodiklis

2.2.1 Šarpo rodiklio sąvoka

Apibrėžimas 4. Šarpo rodiklis. Šarpo rodiklis, dar vadinamas atlygio-kintamumo rodikliu, matuoja perteklinę investicijos grąžą vienam rizikos vienetui. Portfelio grąžai R_p ir lyginamajai ar nerizikingai grąžai R_f apibrėžimas yra toks:

$$\text{SR}(R_p) = \frac{\mathbb{E}[R_p - R_f]}{\sqrt{\text{Var}(R_p - R_f)}}, \quad (3)$$

čia $\mathbb{E}[R_p - R_f]$ yra tikėtina perteklinė grąža, o $\sqrt{\text{Var}(R_p - R_f)}$ yra perteklinių grąžų standartinis nuokrypis, kuris interpretuojamas kaip bendra rizika [3].

Baigtinei T grąžų imčiai $\{r_{p,t}\}_{t=1}^T$ ir nerizikingiems tarifams $\{r_{f,t}\}$, paprastai perteklinės grąžos skaičiuojamos $x_t = r_{p,t} - r_{f,t}$. Tuomet imties Šarpo rodiklis yra

$$\widehat{\text{SR}} = \frac{\bar{x}}{s_x}, \quad \bar{x} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t, \quad s_x^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})^2, \quad (4)$$

kur s_x yra imties perteklinių grąžų standartinis nuokrypis [9].

Praktikoje grąžos dažnu atveju yra skaičiuojamos dieniniu arba mėnesiniu dažniu, tokiu atveju Šarpo rodiklis yra perskaičiuojamas į metinį taikant kvadratinės laiko šaknies prielaidą. Jei $\hat{\mu}_d$ ir $\hat{\sigma}_d$ yra imties perteklinių dieninių grąžų vidurkis ir standartinis nuokrypis atitinkamai, tada metinis Šarpo rodiklis yra

$$\widehat{\text{SR}}_{\text{ann}} = \frac{252\hat{\mu}_d}{\sqrt{252}\hat{\sigma}_d} = \sqrt{252} \frac{\hat{\mu}_d}{\hat{\sigma}_d}, \quad (5)$$

čia yra daroma prielaida, jog prekiaujama yra 252 dienas per metus.

2.2.2 Šarpo rodiklis portfelyje

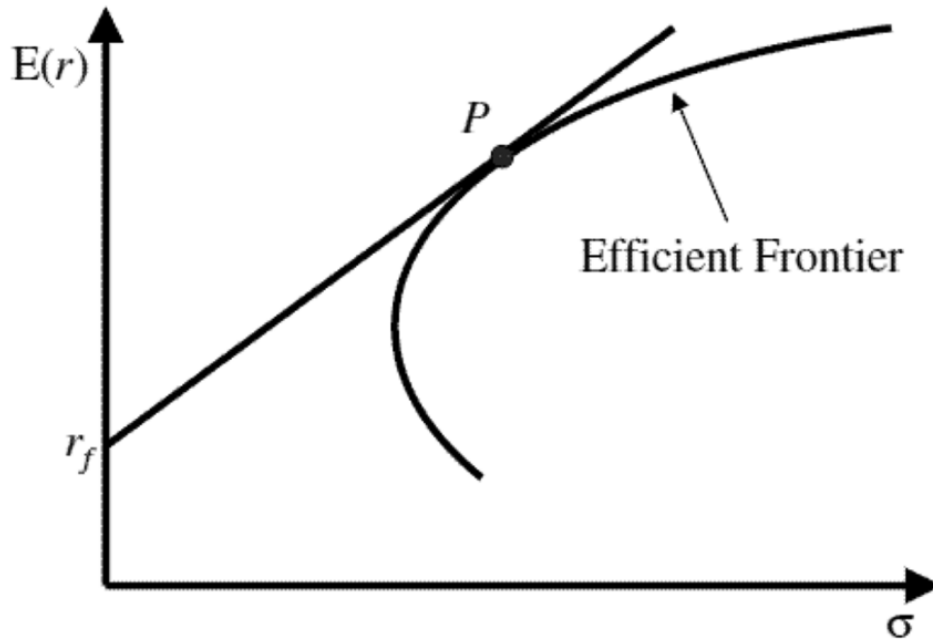
Apibrėžimas 5. Šarpo rodiklis portfelyje. Tarkime turime turto grąžų vektorių $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_n)^\top$, portfelio svorius $\mathbf{w}$ su apribojimu $\sum_i w_i = 1$ ir akcijų grąžų kovariacijų matricą Σ . Tokiu atveju portfelio grąža yra

$$R_p = \mathbf{w}^\top \mathbf{R},$$

su tikėtina pertekline grąža $\mathbb{E}[R_p - R_f] = \mathbf{w}^\top (\mu - R_f \mathbf{1})$ ir dispersija $\text{Var}(R_p) = \mathbf{w}^\top \Sigma \mathbf{w}$. Tuomet portfelio Šarpo rodiklis yra

$$\text{SR}(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{w}^\top (\mu - R_f \mathbf{1})}{\sqrt{\mathbf{w}^\top \Sigma \mathbf{w}}}. \quad (6)$$

H. Markowitz vidurkio - dispersijos sistemoje portfelis, kuris maksimizuoja šį santyki yra vadinamas lietimosi portfeliu (angl. *tangency portfolio*) efektyvumo fronte, kuomet yra prieinamas nerizikingas turtas. Šis lietimosi portfelis yra Šarpo požiūriu optimalus ir apibrėžia kapitalo rinkos tiesę vidurkio - standartinio nuokrypio diagramoje [1].



1 pav.: lietimosi portfelis P.

2.3 Koreliacija

2.3.1 Koreliacija: apibrėžimas ir formuluotės

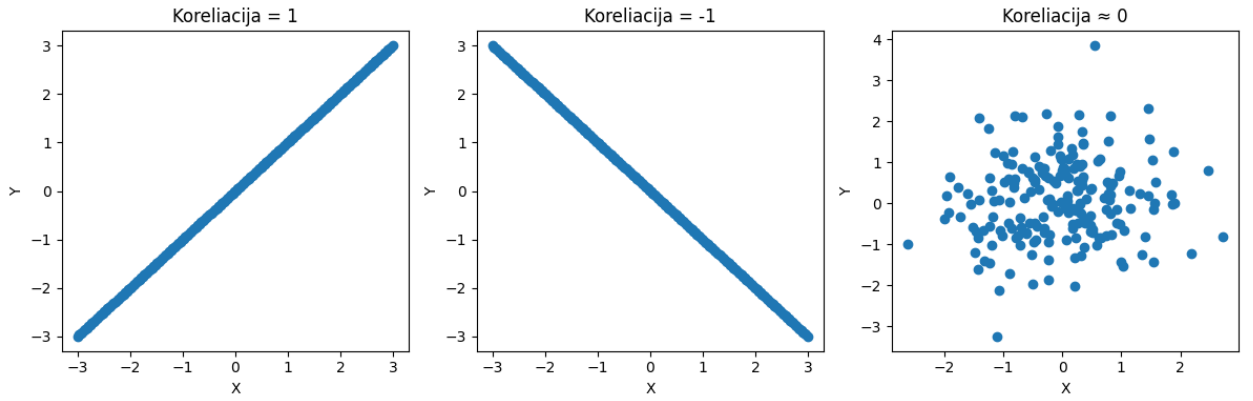
Koreliacija matuoja dviejų atsitiktinių dydžių tiesinės priklausomybės stiprumą ir kryptį [12].

Apibrėžimas 6. Koreliacija. Atsitiktiniams gražų dydžiams X ir Y su baigtiniais vidurkais $\mu_X = \mathbb{E}[X]$, $\mu_Y = \mathbb{E}[Y]$ ir standartiniais nuokrypiais $\sigma_X > 0$, $\sigma_Y > 0$, koreliacijos koeficientas yra

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\mathbb{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]}{\sqrt{\mathbb{E}[(X - \mu_X)^2]} \sqrt{\mathbb{E}[(Y - \mu_Y)^2]}}. \quad (7)$$

Koreliacija gali įgyti reikšmes iš intervalo $[-1, 1]$.

- $\rho_{X,Y} = 1$ parodo tobulą teigiamą tiesinį ryšį.
- $\rho_{X,Y} = -1$ parodo tobulą neigiamą tiesinį ryšį.
- $\rho_{X,Y} = 0$ neparodo jokio tiesinio ryšio, tačiau gali egzistuoti netiesinis ryšys.



2 pav.: koreliacijos pavyzdys.

Stebėjimų $\{(x_t, y_t)\}_{t=1}^T$ imčiai T , imties kovariacija ir koreliacija yra

$$\widehat{\text{Cov}}(X, Y) = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y}),$$

$$\hat{\rho}_{X,Y} = \frac{\widehat{\text{Cov}}(X, Y)}{s_X s_Y},$$

čia $\bar{x}$ ir $\bar{y}$ yra imties vidurkiai, o s_X ir s_Y yra imties standartiniai nuokrypiai.

2.3.2 Koreliacijos matrica portfelio kontekste

Turto grąžų vektoriaus $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_n)^\top$ kovariacijų matrica Σ yra $\Sigma_{ij} = \text{Cov}(R_i, R_j)$. Tuomet koreliacijų matrica P gaunama kiekvieną kovariaciją padalinus iš standartinių nuokrypių sandaugos:

$$P_{ij} = \rho_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}, \quad \sigma_i = \sqrt{\Sigma_{ii}}.$$

Matricos forma:

$$P = D^{-1} \Sigma D^{-1},$$

kur $D = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ yra standartinių nuokrypių įstrižainė matrica [8]. Koreliacijos matrica yra simetriška ir pusiau teigiamai apibrėžta, o įstrižainėje vienetai. Portfelio teorijoje portfelio dispersija su svorių vektoriumi $\mathbf{w}$ ir kovariacijų matrica Σ yra

$$\sigma_p^2 = \mathbf{w}^\top \Sigma \mathbf{w} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \Sigma_{ij} = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i < j} w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}. \quad (8)$$

2.4 Didžiausio nuosmukio rodiklis

Portfelio teorijoje ir rizikos valdyme nuosmukio rodiklis matuoja portfelio vertės sumažėjimą nuo ankstesnio piko taško [11].

Apibrėžimas 7. Didžiausias nuosmukis. Tarkime $\{V_t\}_{t \geq 0}$ yra portfelio vertė (turto

dinamika) bėgant laikui. Tuomet einamasis maksimumas iki momento t yra

$$M_t = \max_{0 \leq s \leq t} V_s. \quad (9)$$

Nuosmukis laiko momentu t tuomet yra apibrėžiamas kaip santykinis (arba absoliutus) kritimas nuo šio momento:

- **Santykinis nuosmukis (paplitęs finansų srityje):**

$$D_t = 1 - \frac{V_t}{M_t},$$

čia $D_t \in [0, 1]$ parodo procentinį kritimą nuo istorinio maksimumo.

- **Absoliutus nuosmukis:**

$$\tilde{D}_t = M_t - V_t.$$

Maksimalus nuosmukis (MDD) per laiko horizontą $[0, T]$ yra blogiausias (didžiausias) pastebėtas nuosmukis tame periode:

$$\text{MaxDD}(0, T) = \max_{0 \leq t \leq T} D_t = \max_{0 \leq t \leq T} \left(1 - \frac{V_t}{M_t} \right). \quad (10)$$

Praktikoje šis rodiklis paprastai išreiškiamas procentais pvz.: $MDD = 0.35$ reiškia 35% nuostolį nuo piko. Magdon-Ismail ir Atiya (2004) pateikia maksimalaus nuostolio formalius apibrėžimus ir statistines savybes stochastiniuose procesuose, tokiuose kaip Brauno judėjimas ar atsitiktinis klajojimas [10].

Jei portfelio vertė yra išreikšta per kaupiamąją gražą (pradedant nuo $V_0 = 1$), tada

$$V_t = \prod_{s=1}^t (1 + R_s), \quad (11)$$

čia R_s yra periodinės gražos, tuomet MDD galima apskaičiuoti pagal turto kelią, naudojant anksčiau pateiktus apibrėžimus.

Priešingai nei dispersija ar standartinis nuokrypis, kurie priklauso vien nuo vieno periodo gražų pasiskirstymo, maksimalus nuostolis priklauso nuo kelio: jis priklauso nuo gražų sekos, ne tik nuo jų vidurkio ir dispersijos. Du portfeliai gali turėti vienodą gražų vidurkį ir standartinį nuokrypį, tačiau visiškai skirtingus maksimalius nuostolius.

Ši kelio priklausomybė praktikoje yra svarbi, nes:

- Investuotojai patiria nuostolius laikui bėgant, o ne kaip nepriklausomus vieno laikotarpio rezultatus.
- Dideli sukaupiti nuostoliai gali sukelti reguliacinių reikalavimų pažeidimus ar elgsenos pokyčius (priverstinį likvidavimą ar panišką pardavimą).

- Draudimo ir pensijų kontekste dideli nuosmukiai gali kelti pavojų gebėjimui vykdyti ilgalaikius įsipareigojimus.

2.5 Monte Karlo simuliacija

Apibrėžimas 8. Monte Karlo simuliacija. Monte Karlo simuliacija, tai yra skaitmeninių metodų klasė, kuri įvertina dominančius dydžius atsitiktine imtimi iš atitinkamų tikimybių skirstinių. Pagrindinė metodo idėja yra apytiksliai įvertinti lūkestį (integralą) pagal daugelio imituotų scenarijų empirinį vidurkį [6].

Tarkime X yra atsitiktinis dydis su pasiskirstymu F ir tarkime $g(X)$ yra mus dominanti (išmokos, rizikos mato, portfelio vertės ir pan.) funkcija. Tokiais atvejais norime skaičiuoti

$$\theta = \mathbb{E}[g(X)] = \int g(x) dF(x),$$

kuri dažnai gali neturėti išreikštinės formos sprendinio. Monte Karlo simuliacijoje mes:

1. Generuojame N nepriklausomų imčių $X^{(1)}, \dots, X^{(N)} \sim F$.
2. Apskaičiuojame modeliuojamą įvertį

$$\hat{\theta}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(X^{(i)}).$$

Pagal didžiųjų skaičių dėsnį b. v. $\hat{\theta}_N \rightarrow \theta$, kai $N \rightarrow \infty$. Pagal centrinę ribinę teoremą Monte Karlo paklaida yra maždaug normali:

$$\sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_g^2), \quad \sigma_g^2 = \text{Var}(g(X)),$$

taigi įvertio standartinė paklaida mažėja $O(N^{-1/2})$ greičiu. Tokį rezultatą gauname tiesiai iš centrinės ribinės teoremos dalies, abi puses padalinę iš $\sqrt{N}$, tad turime $\hat{\theta}_N - \theta \approx \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_g^2}{N}\right)$, o standartinė paklaida yra įvertio standartinis nuokrypis: $\text{SP}(\hat{\theta}_N) = \sqrt{\text{Var}(\hat{\theta}_N)} \approx \sqrt{\frac{\sigma_g^2}{N}} = \frac{\sigma_g}{\sqrt{N}}$, o tai ir yra $N^{-1/2}$ norma.

Šis paprastas principas taikomas ir vektorinėms funkcijoms, ir nuo trajektorijos priklausomiems dydžiams imituojant visas stochastinio proceso trajektorijas $X_0, X_1, \dots, X_T$ (pvz., geometrinį Brauno judėjimą turto kainoms) ir skaičiuojant funkcionalus $g(X_0, \dots, X_T)$, tokius kaip opcionų išmokos, portfelio nuosmukiai ar galutinė turto vertė.

3 Praktinė dalis

3.1 Duomenys

Empirinė analizė buvo atliekama remiantis dešimčia JAV listinguojamų biržoje prekiaujamų fondų atitinkančių pagrindines pasaulio turto klases:

1. Akcijų:

- SPY - JAV didelės kapitalizacijos bendrovių akcijos (S&P 500 indeksas),
- EFA - išsivysčiusių šalių akcijos (be JAV),
- EEM - besivystančių rinkų akcijos,
- IWM - JAV mažos kapitalizacijos bendrovių akcijos.

2. Obligacijų:

- AGG - JAV investicinio reitingo obligacijų indeksas,
- LQD - JAV investicinio reitingo įmonių obligacijos,
- HYG - JAV didesnės rizikos įmonių obligacijos.

3. Nekilnojamojo turto ir žaliavų:

- VNQ - JAV nekilnojamojo turto investiciniai fondai,
- DBC - platus žaliavų indeksas,
- GLD - aukso fondas.

Šie fondai pasirinkti dėl didelio likvidumo, nedidelių valdymo mokesčių ir jie suteikia prieigą prie pagrindinių likvidžių turto klasių (akcijų, obligacijų, nekilnojamojo turto ir žaliavų). Visi fondai vertinami JAV doleriais.

Visų fondų kainų duomenys gauti iš viešai prieinamo finansinių duomenų tiekėjo [4]. Duomenų laikotarpis: 2008.01.01 — 2024.12.31 (17 metų horizontas), pasirinktas laikotarpis gan ilgas siekiant įvertinti ir „juodąsias gulbes“: 2008 metų pasaulinę finansų krizę; 2011-2012 Europos skolų krizę; 2020 COVID-19 pandemiją. Gražų vertinimui buvo naudojamos koreguotos uždarymo kainos, kadangi tokiu būdu yra atsižvelgiama į akcijų padalinius ir išmokamus dividendus, kurie turi įtakos akcijų kainoms. Dėl šių priežasčių duomenys yra tinkami portfelio elgsenai analizuoti tiek įprastomis, tiek įtemptomis rinkos sąlygomis. Taip atrodo naudojamų duomenų fragmentas:

Date	Open	High	Low	Close	Volume
2008-01-02	83.56	85.14	83.44	84.86	12294322
2008-01-03	84.87	85.94	84.60	85.57	9554909
2008-01-04	85.34	85.55	84.43	85.13	8402615
...					
2024-12-27	241.22	241.95	241.05	241.40	4728440
2024-12-30	241.08	241.08	239.58	240.63	3522539
2024-12-31	241.07	242.52	241.05	242.13	2522102

1 lentelė: GLD duomenų fragmentas

Lentelės stulpelių pavadinimai žiūrint iš kairės į dešinę reiškia duomenų tikrinimo dieną, nurodytos dienos biržos atidarymo momento fondo kainą, aukščiausią nurodytos dienos kainą, žemiausią nurodytos dienos kainą, nurodytos dienos biržos pakoreguotą uždarymo kainą

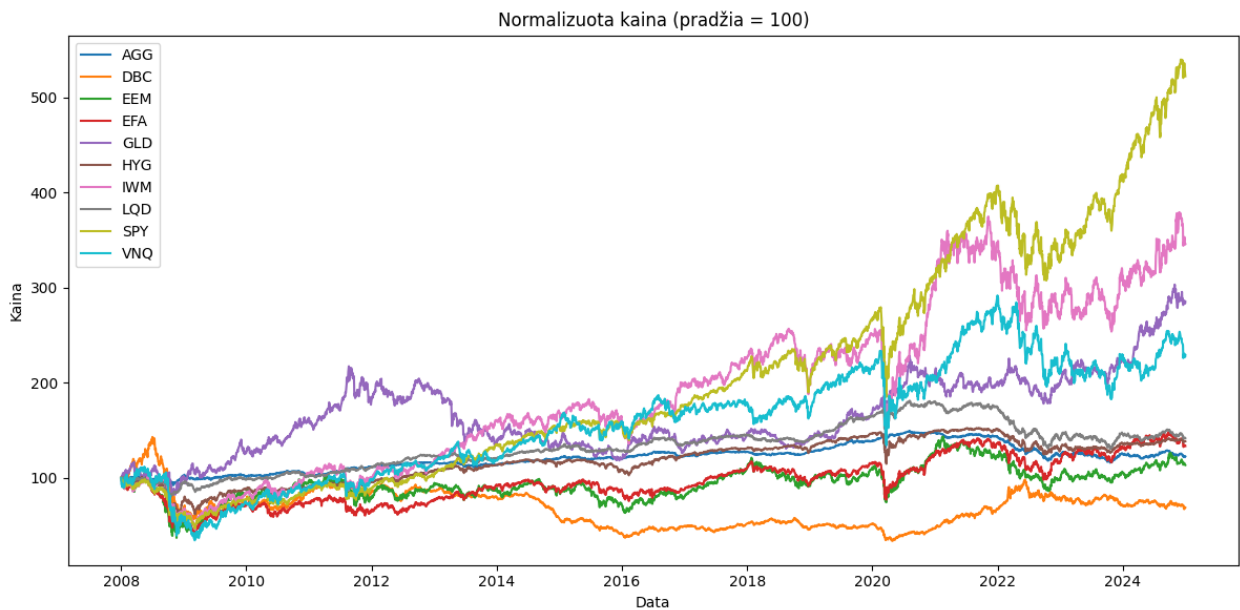
ir nurodytos dienos prekybos apimtį akcijų skaičiumi. Kitų fondų duomenys yra pateikti tokiu pačiu principu.

Visos laiko eilutės yra suderintos pagal bendrą akcijų biržos prekybos kalendorių. Pašalintos visos ne prekybos dienos (savaitgaliai ir švenčių dienos), tad galutinėje imtyje paliktos tik tos datos, kuriomis buvo prekiaujama fondais rinkoje. Pagal uždarymo kainas $P_{i,t}$ fondui i dienai t dienos gražos buvo skaičiuojamos tokiu principu:

$$r_{i,t} = \frac{P_{i,t}}{P_{i,t-1}} - 1,$$

kur $t = 2, \dots, T$. Praktinėje darbo dalyje šios gražų eilutės naudojamos skaičiuoti imties vidurkiams, standartiniams nuokrypiams, koreliacijoms ir kovariacijų matricoms įvertinti, kurios vėliau naudojamos portfelio optimizavimui.

Stebint fondų kainą laike akivaizdžiai galima išskirti didelės kapitalizacijos bendrovių akcijas (SPY), kurios ilgalaikėje perspektyvoje pasirodė geriausiai. Mažos kapitalizacijos bendrovių akcijos (IWM) palaiko tokią pačią tendenciją tik su šiek tiek didesniu nepastovumu. Išsivysčiusių šalių (EFA) bei besivystančių rinkų (EEM) akcijos augo kur kas lėčiau nei SPY per visą laikotarpį. Obligacijos, kitą vertus, atrodo stabiliai iki 2022 metų: investicinio reitingo obligacijų indeksas (AGG) ir investicinio reitingo įmonių obligacijos (LQD) augo lėtai, o nuo 2022 metų galima pastebėti akivaizdų nuosmukį dėl palūkanų normų kilimo ir obligacijų išpardavimų, tad šie metai obligacijoms buvo neįprastai blogi. Didesnės rizikos įmonių obligacijos (HYG) rodo panašią tendenciją kaip ir AGG bei LQD, tačiau stresiniu laikotarpiu krenta labiau (pvz. COVID-19 krizės metu), nes šių obligacijų įmonėms yra būdinga kredito rizika. Tuo tarpu aukso fondas (GLD) judėjo ilgais ciklais: turėjo labai gerą startą nuo 2008 metų, vėliau keletą metų krito ir nuo 2018 vėl atgavo kilimo tendenciją, na o svarbiausia šio aktyvo rolė, jog jis dažnai juda kitaip nei akcijos ir obligacijos, auksas stipriai prisideda prie portfelio diversifikacijos. Žaliavų indeksas (DBC) pasirodė prasčiausiai, turėdamas keletą staigių pakilimų po kurių sekė ilgi nuosmukai. Pagrindiniai stresiniai taškai akivaizdūs: 2008-2009, 2020 ir 2022 metais.



3 pav.: fondų kainų pokytis laike.

3.2 Koreliacija

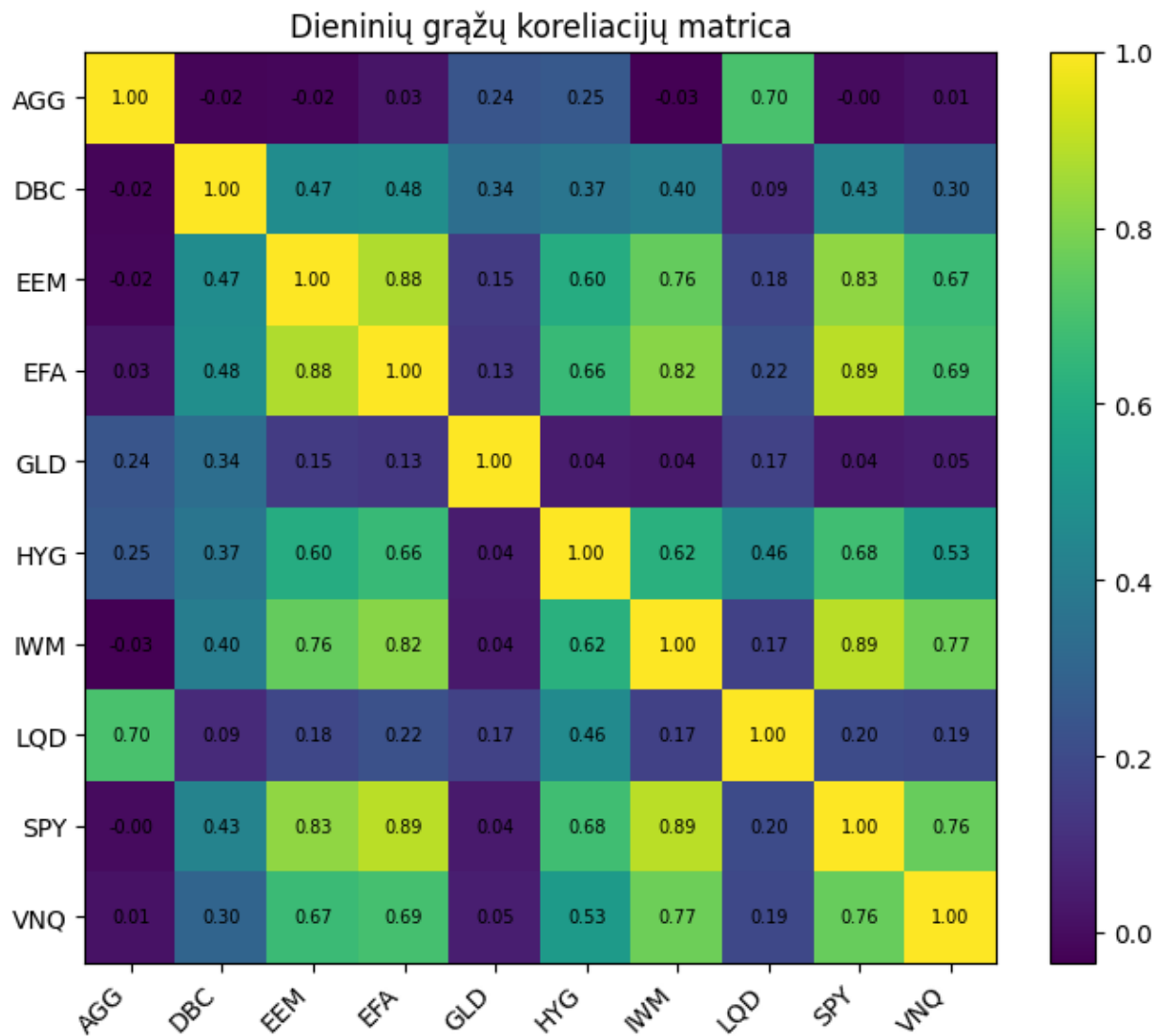
Apžvelgiant dieninių gražų koreliacijų matricą galima išskirti akcijų fondus, visi jie yra stipriai susiję tarpusavyje. Stipriausias ryšis sieja JAV didelės (SPY) bei mažos (IWM) kapitalizacijos bendroves, koreliacija tarp šių fondų yra 0,89. Labai stiprus ryšis sieja taip pat ir besivystančių rinkų (EEM) bei išsivysčiusių šalių (EFA) akcijas, čia turime 0,88 koreliaciją. Taigi, akcijų bloke diversifikacijos nauda yra labai maža, nes akcijų rinkos juda kartu. JAV nekilnojamojo turto investicinis fondas (VNQ) elgiasi panašiai kaip akcijos, turėdamas tokias koreliacijas: $VNQ-IWM \sim 0,77$; $VNQ-SPY \sim 0,76$; $VNQ-EFA \sim 0,69$; $VNQ-EEM \sim 0,67$. Galima teigti, jog šioje duomenų imtyje nekilnojamojo turto fondai elgiasi panašiai kaip akcijų fondai, o ne kaip obligacijų tipo diversifikatorius, nes VNQ pagal savo koreliaciją yra linkęs kristi kartu su akcijomis.

Pereinant prie obligacijų, ganėtinai aukštą koreliaciją galima pastebėti tarp JAV investicinio reitingo obligacijų (AGG) ir investicinio reitingo įmonių obligacijų (LQD) fondų, kuri yra 0,70, tačiau AGG koreliacijos su akcijomis yra artimos nuliui arba labai mažos ($AGG-SPY \sim 0,00$, $AGG-IWM \sim -0,03$; $AGG-EFA \sim 0,03$). Vadinasi, šiuo laikotarpiu, JAV investicinio reitingo obligacijų indeksas prisideda prie bendros portfelio diversifikacijos. JAV didesnės rizikos įmonių obligacijos (HYG), tuo tarpu, labiau koreliuoja su akcijomis ($HYG-SPY \sim 0,68$, $HYG-IWM \sim 0,62$; $HYG-EEM \sim 0,60$) nei kitomis obligacijomis ($HYG-LQD \sim 0,46$, $HYG-AGG \sim 0,25$) dėl padidėjusios įmonių kredito rizikos. Didelio pajamingumo obligacijos nėra visiškai saugus obligacijų investavimo būdas, kadangi jos iš dalies elgiasi panašiai kaip įmonių akcijos, nes kredito skirtumai padidėja, kai akcijos išparduodamos.

Auksas portfelyje yra stipriausias diversifikatorius, turintis mažą koreliaciją su rizikingiausiais aktyvais ($GLD-SPY \sim 0,04$, $GLD-IWM \sim 0,04$, $GLD-VNQ \sim 0,05$, $GLD-HYG \sim 0,04$). Koreliacija šiek tiek didesnė su AGG ($\sim 0,24$) ir su žaliavų indeksu (DBC $\sim 0,34$),

tačiau vis tiek išlieka nedidelė. Galima drąsiai teigti, jog auksas didina diversifikaciją, nes jo dienos grąžos beveik nėra susijusios su akcijų rizika.

Žaliavų indeksas (DBC) šiame portfelyje vidutiniškai koreliuoja su akcijomis (DBC-SPY $\sim 0,43$, DBC-EEM $\sim 0,47$, DBC-IWM $\sim 0,40$). Žaliavos nėra nepriklausomos nuo akcijų rizikos, tačiau koreliacija yra mažesnė nei akcijų tarpusavio koreliacija. Kai kuriais atvejais žaliavos gali diversifikuoti, tačiau šiame modelyje jos neveiks kaip nulinės koreliacijos apsidraudimo priemonė.



4 pav.: fondų grąžų koreliacijų matrica.

3.3 Grąžos

Analizuojant fondų grąžas galima išskirti SPY ir IWM kaip stipriausius fondus pagal vidutinę metinę grąžą per 2008-2024 metus, tad galima teigti, jog šiame duomenų rinkinyje būtent JAV listinguotų įmonių akcijos buvo pagrindinis augimo variklis. Portfolio diversifikaoriai, tokie kaip AGG ir LQD turi kur kas mažesnes metines vidutines grąžas 1,36% ir 2,48% atitinkamai lyginant su įmonių akcijomis, tačiau šie aktyvai suteikia portfeliui stabilumo dėl

savo mažų svyravimų, ką ir atspindi sąlyginai nedidelės maksimalios ir minimalios dienosinės grąžos. Auksas, tuo tarpu, turi padorią grąžą ir vidutinius svyravimus. Besivystančios rinkos (EEM) turi kuklią 4,77% grąžą, tačiau taip pat ir didžiausią maksimalią grąžą bei ganėtinai didelius dienosinius nuostolius 25,63% ir -16,18% atitinkamai - didelis potencialus pelnas nebūtinai reiškia gerus ilgalaikius rezultatus ypač įvykstant dideliems nuostoliams. Nekilnojamojo turto investicinis fondas (VNQ) išsiskiria savo dideliu dienosiniu nuosmikiu (-19,53%), tai parodo, kad nekilnojamojo turto fondai krizės metu gali elgtis panašiai kaip akcijos ar net blogiau. Žaliavos (DBC) turėjo prasčiausią ir vienintelę neigiamą metinę grąžą šioje imtyje (-0,29%), tačiau šio aktyvo minimali dienosinė grąža buvo viena iš geriausių šiame portfelyje (tik -7,94%), tad šis fondas trumpuoju laikotarpiu gali apdrausti nuo pavyzdžiui infliacijos šuolių, tačiau ilguoju laikotarpiu nebus naudingas.

Ticker	Vidutinė metinė grąža	Maksimali dienosinė grąža	Minimali dienosinė grąža
SPY	11.74%	14.52%	-10.95%
IWM	10.48%	9.15%	-13.26%
VNQ	9.57%	17.00%	-19.53%
GLD	7.68%	11.29%	-8.78%
EEM	4.77%	25.63%	-16.18%
EFA	4.18%	15.89%	-11.16%
HYG	2.57%	12.26%	-8.09%
LQD	2.48%	9.77%	-9.10%
AGG	1.36%	3.88%	-6.85%
DBC	-0.29%	6.89%	-7.94%

2 lentelė: fondų grąžų informacija

3.4 Standartinio nuokrypio optimizavimas

Apžvelgus surinktų duomenų modelį galima pradėti konstruoti optimalias portfelio kombinacijas naudojantis skirtingais rizikos matais. Pirmiausia bandysime minimizuoti portfelio standartinį nuokrypį naudojantis dviem optimizavimo būdais: „python“ programavimo kalbos SLSQP metodu bei Monte Karlo simuliacija. Atlikus optimizavimą gauname žemiau pateiktus rezultatus.

Aktyvas	Svoris	Metinė grąža	Metinis standartinis nuokrypis
AGG	0.8913	1,80%	5,30%
DBC	0.0575		
EEM	0.0000		
EFA	0.0000		
GLD	0.0000		
HYG	0.0046		
IWM	0.0000		
LQD	0.0000		
SPY	0.0465		
VNQ	0.0000		

3 lentelė: optimizuotas minimalaus standartinio nuokrypio portfelis.

Kadangi ieškojome mažiausių svyravimų portfelio, gavome logišką rezultatą - tokio portfelio branduolį sudaro 89% JAV investicinio reitingo obligacijų indeksas (AGG). To galima buvo tikėtis, nes AGG turi santykinai mažą nepastovumą ir beveik nulinę koreliaciją su akcijomis. Kiti mažų svorių aktyvai šiame portfelyje veikia kaip dispersijos mažintojai, o ne grąžų didinimo priemonės: žaliavų indeksas (DBC) - 5,75%, JAV didelės kapitalizacijos bendrovių akcijos (SPY) - 4,65% ir JAV didesnės rizikos įmonių obligacijos (HYG) - 0.46%. Šios mažos pozicijos tipiškai atsiranda siekiant pagerinti portfelio dispersiją per kovariacijos efektą ir tiesiog kaip siekis padėti optimizavimo įrankiui užpildyti portfelį, kad jis atitiktų visus apribojimus, tačiau vis tiek išlaikytų nepastovumo minimumą, ko mes ir siekiame šioje dalyje. Tad būtent šis modelis nemaksimizuoja grąžos, o mažina riziką naudojant kovariacijos matricą. Svarbu paminėti, jog didžiosios dalies aktyvų svoriai sudaro 0%, nes vieninteliai taikyti apribojimai buvo tokie, jog kiekvieno aktyvo indėlis į portfelį turi būti neneigiamas ir neviršyti 100%, taigi standartinio nuokrypio mažinimas optimizuojant naudojantis tokiais apribojimais gali sukurti labai koncentruotus, o ne subalansuotus portfelius.

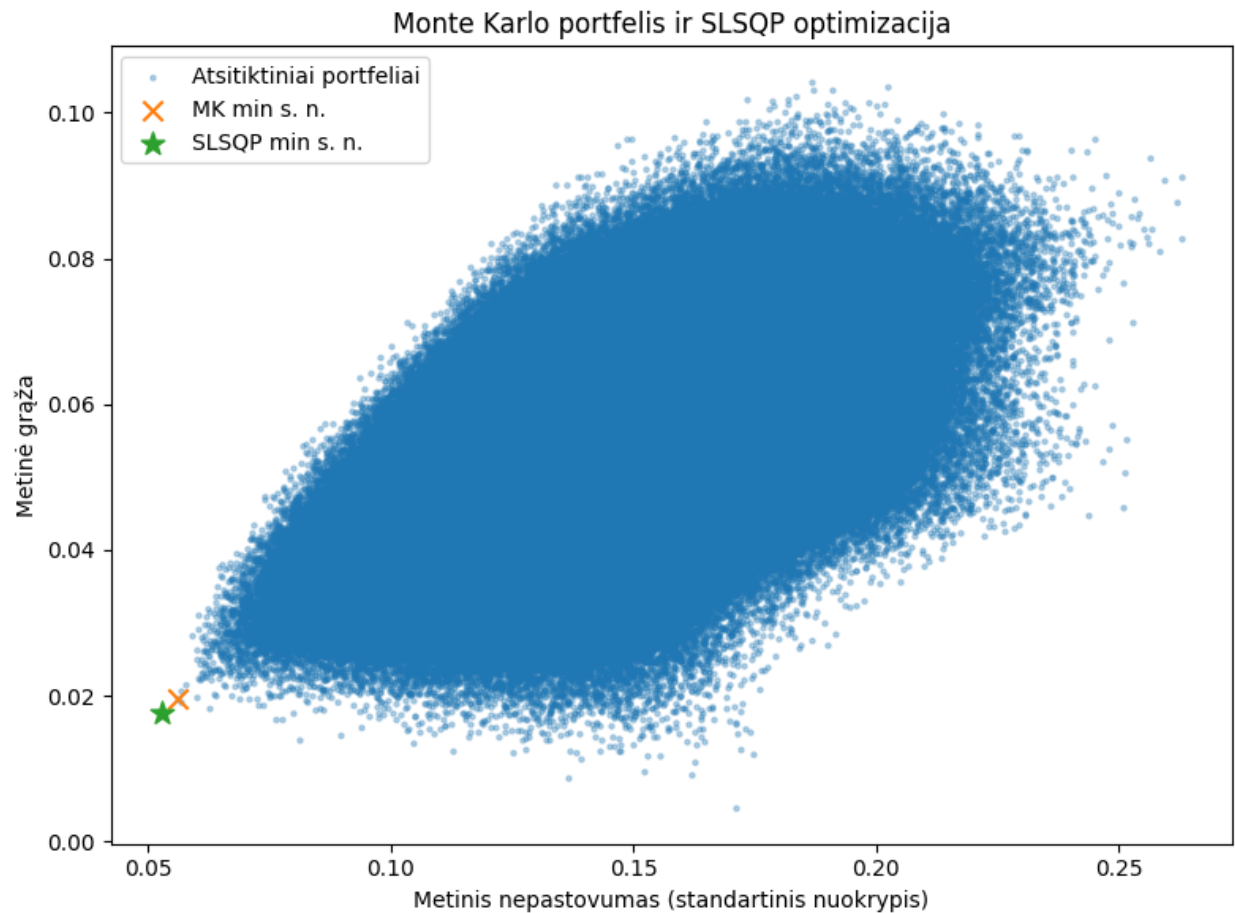
Toliau, remiantis Monte-Karlo simuliacija, gauname kiek kitokį rezultatą:

Aktyvas	Svoris	Metinė grąža	Metinis standartinis nuokrypis
AGG	0.7560	1,96%	5,61%
DBC	0.0355		
EEM	0.0015		
EFA	0.0602		
GLD	0.0135		
HYG	0.0432		
IWM	0.0041		
LQD	0.0627		
SPY	0.0200		
VNQ	0.0035		

4 lentelė: Monte Karlo minimalaus standartinio nuokrypio portfelis.

Atlikus milijoną portfelio simuliacijų, gauname riziką, kuri yra šiek tiek didesnė (+0,31%), tačiau išlieka nežymi - 5,61%. Kadangi siekėme sumažinti portfelio standartinį nuokrypį, galime teigti, kad šis modelis yra prastesnis, o tai yra normalu, nes SLSQP optimizavimo metodas yra deterministinis, o Monte-Karlo šiuo atveju atsitiktinai ieško geriausio varianto. Tokiu atveju rezultatai dažniausiai bus panašūs, bet ne tokie geri, nebent simuliacija bus atliekama su kur kas didesniu simuliacijų kiekiu arba papildomais apribojimais. Taip pat galima atkreipti dėmesį į tai, jog Monte-Karlo simuliacijos rezultate nėra nulinių svorių aktyvų, kurie buvo SLSQP optimizacijoje, bet dominuojantis išliko AGG. Taip nutiko, nes Monte-Karlo simuliacijos metu svoriai skirstomi atsitiktinai (paprastai pagal Dirichle skirstinį). Atsitiktinė atranka paprastai sukuria sklandžius nenulinius svorius, o SLSQP naudoja gradientus ir apribojimus, tam, kad judėtų tiesiai link minimumo, todėl paprastai greičiau ir tiksliau randa mažesnės dispersijos sprendinį. Lyginant portfelių metines grąžas, matome, kad Monte-Karlo portfelis suteikia 0,16% didesnę grąžą (1,96%), taip yra todėl, jog šiame portfelyje turime daugiau akcijų ir kredito rizikos (EFA, LQD, HYG), tad dėl tos pačios

priežasties padidėjo ir nepastovumas.



5 pav.: standartinio nuokrypio optimizacijų palyginimas.

Penktame paveikslėlyje galime matyti milijono portfelio kombinacijų mėlyną debesį. Abiejų optimizacijų portfeliai yra greta, tačiau SLSQP yra šiek tiek geresnis rizikos prasme.

3.5 Šarpo rodiklio optimizavimas

Kitas rizikos matas, kuris buvo naudojamas optimizuoti portfeliui yra Šarpo rodiklis, šiuo atveju siekiame maksimizuoti Šarpo rodiklį su nerizikinga norma 0%.

Aktyvas	Svoris	Metinė grąža	Šarpo rodiklis
AGG	0.3548	6,92%	0,7374
DBC	0.0000		
EEM	0.0000		
EFA	0.0000		
GLD	0.2811		
HYG	0.0000		
IWM	0.0000		
LQD	0.0000		
SPY	0.3642		
VNQ	0.0000		

5 lentelė: optimizuotas maksimalaus Šarpo rodiklio portfelis.

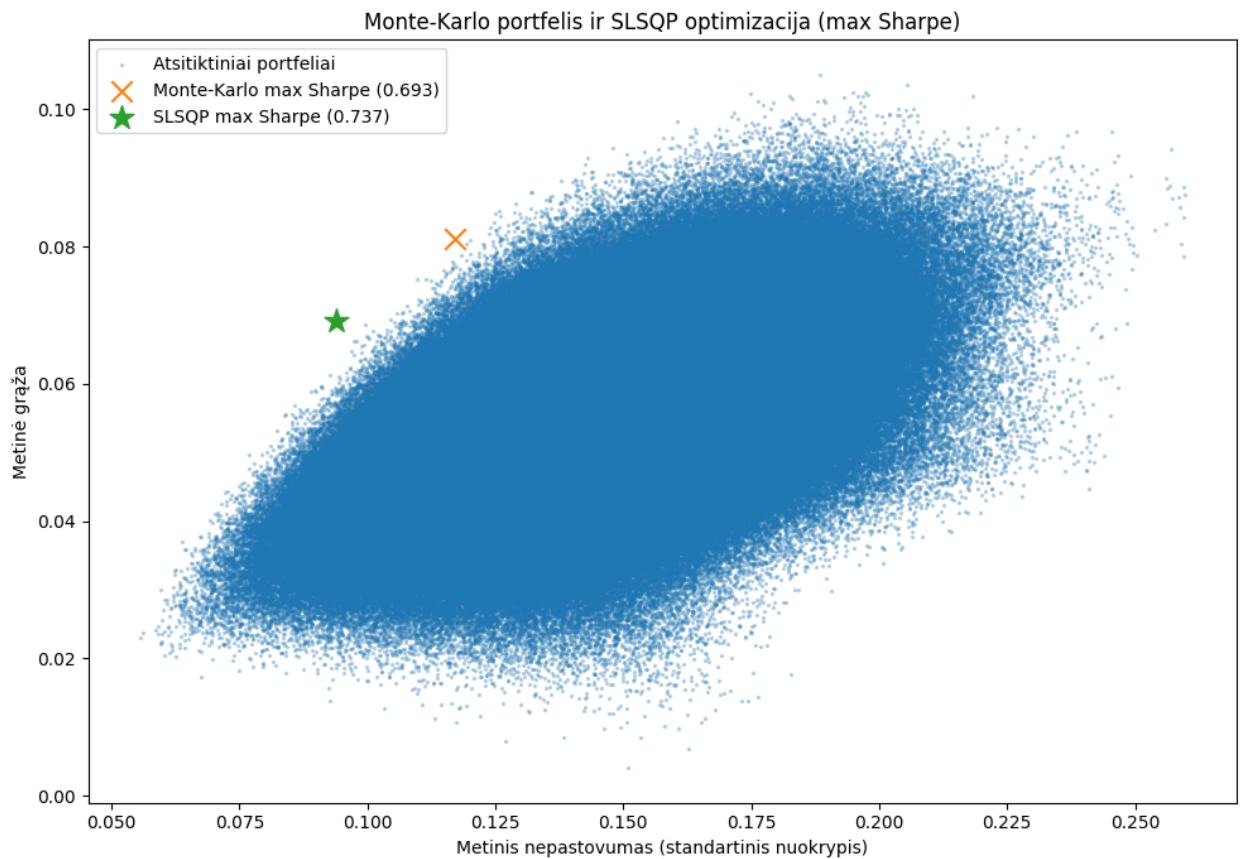
Atlikus optimizavimą galime matyti, jog portfelis sudarytas iš 3 aktyvų: JAV didelės kapitalizacijos įmonių akcijų (SPY), JAV investicinio reitingo obligacijų indekso (AGG) ir aukso fondo (GLD), kurie sudaro apie 36,42%, 35,48% ir 28,11% portfelio atitinkamai, likę aktyvai sudaro 0% portfelio. Ekonomiškai toks paskirstymas yra logiškas, įmonių akcijos (SPY) yra pagrindinis gražos variklis, obligacijų indeksas (AGG) sumažina portfelio nepastovumą, nes jis yra mažesnės rizikos ir silpnai koreliuotas su akcijomis, o auksas pagerina diversifikaciją, nes yra mažai koreliuotas su akcijomis ir dažnai elgiasi kitaip esant stresinėms situacijoms. Likę aktyvai, turintys 0% svorį nėra traukiami į portfelio imtį, nes jie nepagerina Šarpo rodiklio lyginant su SPY-AGG-GLD deriniu. Tam yra kelios priežastys: kiti akcijų fondai yra stipriai koreliuoti su SPY, tačiau turi kur kas mažesnę vidutinę gražą, kas lemia silpną diversifikacijos naudą; didesnės rizikos įmonių obligacijos (HYG) yra jautrios akcijų kainai ir padidina nepastovumą nesuteikiant pakankamos papildomos gražos; žaliavų indeksas (DBC) pasižymi ganėtinai žema ilgo periodo graža šioje imtyje. Taigi šiame optimizavimo modelyje pasirinktas toks diversifikavimas, nes jis geriausiai pagerina perteklinę gražą vienam kintamumo vienetui. Lyginant šį portfelį su praeitu, minimalaus standartinio nuokrypio portfelium, kuriame dominavo obligacijos, galime atkreipti dėmesį į tai, jog čia yra įvedama reikšminga akcijų ir aukso dalis. Toks portfelis išsiskiria kur kas didesne graža - 6,92% (+5,12% nuo standartinio nuokrypio portfelio), bet ir didesniu nepastovumu - 9,38% (+4,08%).

Toliau seka Monte Karlo metodas, kuriame vėl buvo sugeneruotas 1 mln. portfelio variacijų:

Aktyvas	Svoris	Metinė graža	Šarpo rodiklis
AGG	0.1477	8,10%	0,6927
DBC	0.0053		
EEM	0.0011		
EFA	0.0184		
GLD	0.3831		
HYG	0.0099		
IWM	0.0408		
LQD	0.0166		
SPY	0.3562		
VNQ	0.0209		

6 lentelė: Monte Karlo maksimalaus Šarpo rodiklio portfelis.

Taip pat kaip ir SLSQP optimizacijos metu buvo išskirta ta pati trijų aktyvų struktūra: auksas - 38,31%, didelės kapitalizacijos įmonių akcijos (SPY) - 35,62% ir investicinio reitingo obligacijų indeksas (AGG) - 14,77%. Likę fondai gavo santykinai mažus svorius, beveik visi neviršijo 4%. Šio portfelio metinė graža paaugo 1,18% iki 8,1%, tačiau išaugo ir nepastovumas iki 11,70% (+2,32%), o Šarpo rodiklis sumažėjo iki 0,693. Taigi Monte Karlo portfelis prisiima daugiau rizikos ir uždirba daugiau gražos, tačiau 1,18% gražos pakilimas yra per mažas, kad kompensuotų didesnį nepastovumo padidėjimą, dėl šios priežasties turime mažesnę Šarpo rodiklį.



6 pav.: Šarpo rodiklio optimizacijų palyginimas.

Kaip ir prieš tai, mėlynas debesis parodo Monte Karlo metodu sugeneruotų portfelių visumą. SLSQP portfelis yra viršutinėje kairėje debesies dalyje, o tai reiškia, kad šis portfelis pasiekia palyginus didelę grąžą su santykinai maža rizika, tai atitinka Šarpo maksimizavimo principą. Monte Karlo portfelis, tuo tarpu, yra ne per daug nutolęs nuo optimalaus SLSQP portfelio, tad galima teigti, jog atsitiktinė paieška yra artima optimumo taškui, tačiau net ir atliekant daug modeliavimų, ji gali praleisti tikrąjį geriausią tašką daugiamatėje svarių erdvėje. Monte Karlo metodu rastas portfelis, šiuo atveju, surado portfelį su didesne rizika, tačiau nepakankama papildoma grąža, kad pranoktų SLSQP rizikos pakoreguotą rezultatą.

3.6 Didžiausio nuosmukio rodiklio optimizavimas

Sekantis pasirinktas rizikos matas yra maksimalus nuosmukis. Optimizavimas sukuria itin stiprų gynybinį portfelį, kuriame yra minimizuojamas nuosmukis.

Aktyvas	Svoris	Metinė grąža	MaxDD
AGG	0.7191	2,63%	14,96%
DBC	0.0697		
EEM	0.0000		
EFA	0.0000		
GLD	0.1947		
HYG	0.0000		
IWM	0.0165		
LQD	0.0000		
SPY	0.0000		
VNQ	0.0000		

7 lentelė: minimalaus didžiausio nuosmukio portfelis.

Šio portfelio branduolį sudaro investicinio reitingo obligacijų indeksas (AGG), kurio svoris 71,9% ir auksas (19,5%). Nedidelį svorį taip pat turi žaliavų indeksas (DBC) - 7% ir mažos kapitalizacijos bendrovių akcijos (IWM) - 1,7%, visi kiti aktyvai - 0%. Natūralu, kad siekiant sumažinti maksimalų nuostolį portfelyje didžiausias svoris teks fondui, kurio didžiausias nuostolis yra mažiausias iš visų naudojamų duomenų. AGG šiuo atveju suteikia portfeliui mažą kintamumą ir stabilizuojančią obligacijų poziciją, tuo tarpu auksas prideda diversifikacijos krizių metu, o mažos DBC ir IWM alokacijos silpnai pagerina nuosmukį duotame kelyje. Šis optimizavimo būdas sukuria dar vieną portfelį, kuris skiriasi nuo standartinio nuokrypio ir Šarpo rodiklio optimizacijos. Lyginant su standartinio nuokrypio optimizacija, galime atkreipti dėmesį, jog abu portfeliai pirmenybę teikia obligacijoms, bet MDD portfelyje atsiranda reikšminga aukso dalis, kuri, šiuo atveju, apsaugo nuo didelių nuostolių. Lyginant su Šarpo rodiklio optimizacija, MDD sumažina akcijų riziką (SPY = 0%), kadangi akcijos paprastai dominuoja blogiausių istorinių nuosmukiu metu. Šio portfelio metinė grąža ganėtinai maža - 2,63%, standartinis nuokrypis - 6,27%, o MDD - 14,96%, tad aukojaime tikėtiną grąžą siekiant sumažinti didžiausią istorinį nuotolį.

Toliau pereiname prie Monte Karlo metodo, kuriame jau standartiškai generuojame 1 milijoną portfelių ir gauname tokius rezultatus:

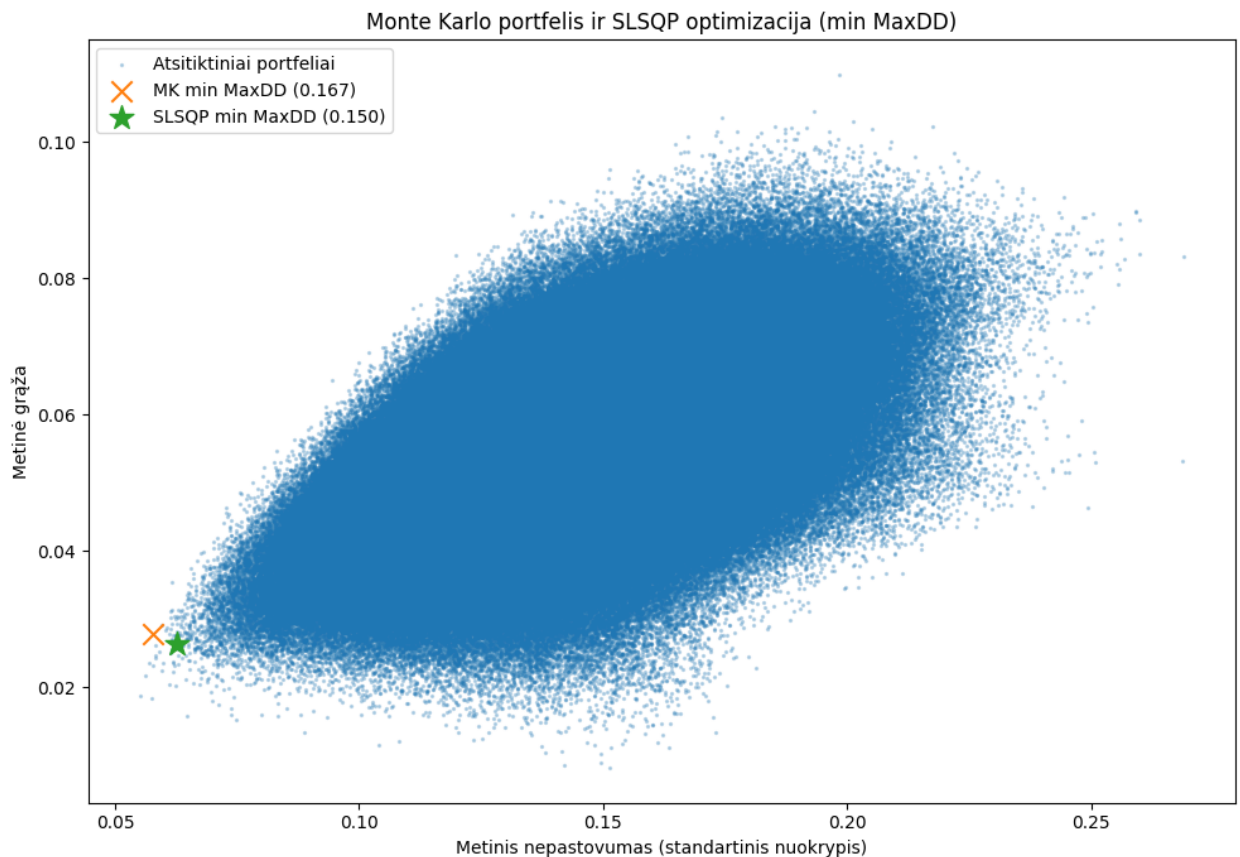
Aktyvas	Svoris	Metinė grąža	MaxDD
AGG	0.7284	2,78%	16,65%
DBC	0.0338		
EEM	0.0033		
EFA	0.0078		
GLD	0.1395		
HYG	0.0223		
IWM	0.0110		
LQD	0.0134		
SPY	0.0402		
VNQ	0.0002		

8 lentelė: Monte Karlo minimalaus didžiausio nuostolio portfelis.

Labai panašiai kaip ir deterministinio optimizavimo metu, didžiausias svoris skiriamas

investicinio reitingo obligacijų indeksui (AGG) - 72,84%, antras pagal dydį fondas šiame portfelyje taip pat yra auksas, tik su kiek mažesniu svoriu - 13,95%. Likusiems aktyvams paskirstomas likęs svoris. Monte Karlo portfelis turi šiek tiek didesnę metinę grąžą - 2,78% (+0,15%), mažesnę kintamumą - 5,78% (-0,49%), tačiau didesnę MDD - 16,65% (+1,69%). Taigi Monte Karlo simuliacijos metu buvo rastas portfelis, kuris turi šiek tiek geresnę grąžą ir standartinį nuokrypį, tačiau ši optimizacija nesumažino didžiausio galimo nuostolio taip kaip SLSQP metodas. Netgi generuojant 1 milijoną atsitiktinių portfelių Monte Karlo metodu, sudaroma imtis yra 9 dimensijų erdvė, dėl to yra sukurama daugiau portfelių turinčių mažus svorius, paskirstytus per nedominuojančius fondus, todėl tokiu būdu galima nesunkiai praleisti „kampinius“ portfelius, kurie sukelia mažiausią nuostolį. Taigi Monte Karlo minimalaus didžiausio nuosmukio optimizaciją galima laikyti kaip optimalaus varianto aproksimaciją.

Žemiau pateiktame paveikslėlyje galime matyti abiejų optimizacijų palyginimą. Abiejų optimizacijų sukurti portfeliai yra apatiniame kairiajame debesies kampe, o tai reiškia, jog jie turi mažą grąžą bei mažą riziką. Tai atitinka nuostolių mažinimo principą: norint išvengti didelių nuostolių, paprastai reikia gynybinio portfelio paskirstymo. Deterministinė optimizacija, šiuo atveju, randa portfelį su mažesniu galimu nuostoliu (15%) nei Monte Karlo metodas (16,7%), tačiau tokio portfelio standartinis nuokrypis yra didesnis, tad galima teigti, jog minimizuoti didžiausią nuostolį nėra tas pats kas minimizuoti nepastovumą ir pelno-rizikos grafike maksimalaus nuosmukio skirtumai gali būti nepastebimi.



7 pav.: maksimalaus nuosmukio optimizacijų palyginimas.

3.7 Išvados

Optimizavimo metu minimizuojant nepastovumą sukuriame labai stabilų portfelį su maža metine rizika, tačiau toks portfelis duoda ir mažą metinę grąžą. Minimalios dispersijos portfeliai yra ganėtinai jautrūs kovariacijos vertinimui, o naudojami apribojimai gali lemti stipriai koncentruotą portfelio paskirstymą tame aktyve, kuris imtyje yra saugiausias (turi žemiausią nepastovumą). Monte Karlo metodas suteikia patikimumo patikrinimą ir vizualinę intuiciją, tačiau deterministinis optimizavimas su apribojimais yra efektyvesnis ir paprastai pasiekia mažesnę minimalią dispersiją esant tiems patiems apribojimams.

Pakeitus tikslą iš siekio sumažinti nepastovumą į siekį maksimizuoti rizikos pakoreguotą našumą iš esmės pasikeičia ir portfelio sudėtis. Šarpo optimizacijos metu naudotas Monte Karlo metodas nepasiekė tikrojo Šarpo maksimumo su apribojimais, bet pavyko sugeneruoti beveik optimalų portfelį su panašia struktūra.

Mažiausio maksimalaus nuostolio portfelis aukoja augimo potencialą, kad pagerintų kapitalo išsaugojimą. Monte Karlo metodas tinka tyrinėjimams, tačiau deterministinis optimizavimas geriau orientuojasi į pasirinktą rizikos matą.

Vienodi svoriai		Min standartinis nuokrypis	
Metinė grąža	5,46%	Metinė grąža	1,76%
Metinis standartinis nuokrypis	13,96%	Metinis standartinis nuokrypis	5,27%
Šarpo rodiklis	0,391	Šarpo rodiklis	0,3334
Didžiausias nuosmukis	41,10%	Didžiausias nuosmukis	17,15%
Max Šarpo rodiklis		Min didžiausias nuostolis	
Metinė grąža	6,92%	Metinė grąža	2,63%
Metinis standartinis nuokrypis	9,38%	Metinis standartinis nuokrypis	6,27%
Šarpo rodiklis	0,7374	Šarpo rodiklis	0,4193
Didžiausias nuosmukis	24,75%	Didžiausias nuosmukis	14,96%

9 lentelė: portfelių palyginimas.

Taigi pavyko išskirti 3 geriausius portfelius pagal skirtingus rizikos matus bei galime juos palyginti su vienodų svorių portfelium. Minimalaus standartinio nuokrypio portfelis yra geriausias nepastovumo mažinimui, maksimalaus Šarpo rodiklio portfelis turi geriausius rizikos pakoreguotus rezultatus, o minimalaus didžiausio nuosmukio portfelis pasižymi geriausiu kapitalo išsaugojimą.

Vienodų svorių portfelis nėra efektyvus uodegos rizikos atveju, nepaisant to jog portfelis suteikia padorią metinę grąžą, šis portfelis turi labai didelį galimą maksimalų nuostolį - 41,1%, tad, kaip pradinį tašką, tokį portfelį lengva įgyvendinti, bet jis nekontroliuoja didžiausių nuostolių.

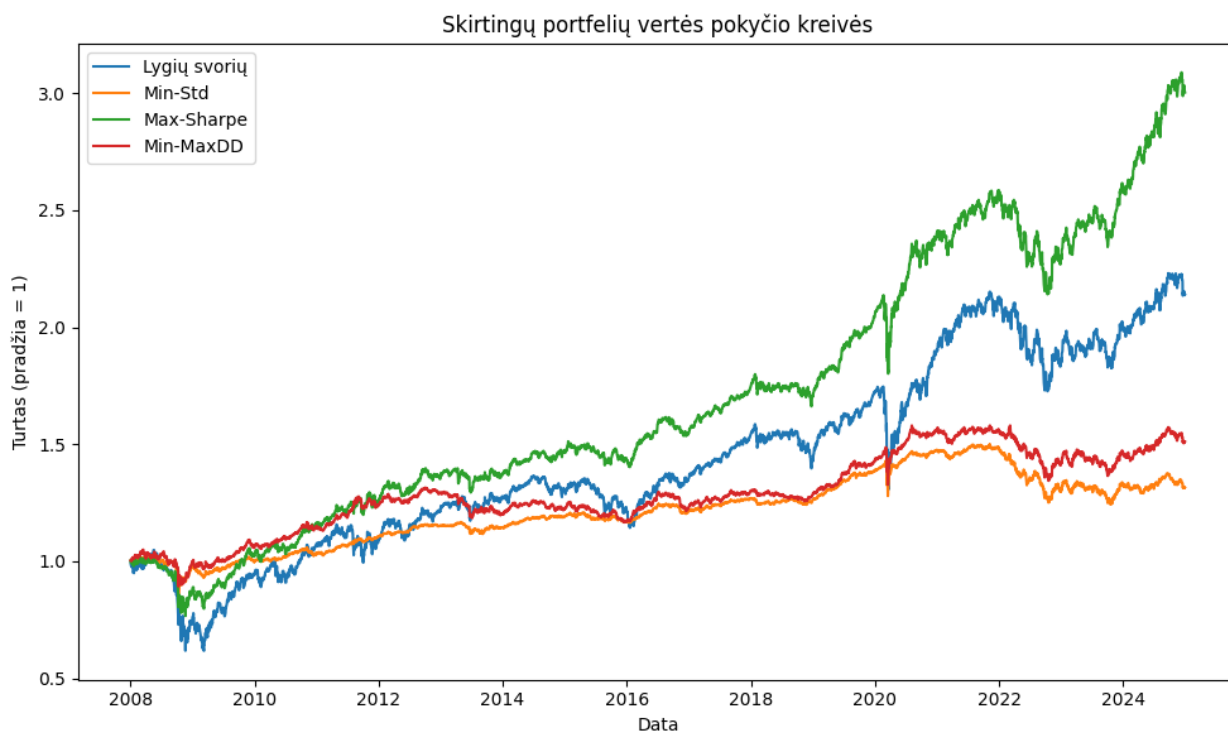
Minimalaus standartinio nuokrypio portfelis pasiekia žemiausią galimą nepastovumą, bet tai kainuoja papildomą grąžą, iš visų 4 portfelių, būtent šio grąža ir standartinis nuokrypis yra mažiausi - 1,76% ir 5,72% atitinkamai, Šarpo rodiklis - 0,333, o didžiausias nuostolis - 17,15%, tad nepastovumo mažinimas sukuria labai stabilų portfelį, bet toks portfelis gali

tapti per daug konservatyvus su silpnais tikėtinais rezultatais.

Maksimalaus Šarpo rodiklio portfelis pateikia geriausius pagal riziką įvertintus rezultatus, bet ne geriausius nuostolius. Šio portfelio grąža ir Šarpo rodiklis yra geriausi iš visų keturių atrinktų portfelių - 6,92% ir 0,737 atitinkamai, standartinis nuokrypis - 9,38%, o maksimalus nuostolis 24,75%. Toks portfelis yra geriausias, jei prioretizuojuame grąžą per rizikos vienetą, tačiau jis vis tiek patiria didelius nuostolius, tad toks portfelis nėra idealus investuotojams, siekiantiems išvengti blogiausio atvejo nuostolių.

Minimalaus didžiausio nuosmukio portfelis yra geriausias investuotojams vengiantiems didelių nuostolių. Šis portfelis turi mažiausią galimą nuostolį - 14,96%, geresnį Šarpo rodiklį nei lygių svorių portfelis - 0,419, vidutinį nepastovumą - 6,27%, tačiau mažesnę metinę grąžą nei Šarpo optimizacijos portfelis - 2,63%. Taigi, didžiausių nuostolių minimizavimas suteikia geriausią apsaugą nuo nuostolių ir priimtina pagal riziką įvertintą grąžą, todėl toks portfelis yra patrauklus, kuomet yra svarbus kapitalo išsaugojimas.

Taigi, empirinės analizės rezultatai parodo tai, jog nepastovumo mažinimas nėra pakankamas norint kontroliuoti riziką, o optimizavimas, pagrįstas nuostolių mažinimu, gali iš esmės pagerinti investuotojo blogiausio atvejo rinkoje patirtį. Todėl investuotojas turėtų rinktis tarp Šarpo ir MDD optimizavimo pagal savo poreikį: Šarpo optimizavimas tinka, kai tikslas yra maksimaliai padidinti grąžą vienam bendros rizikos vienetui, o MDD yra tinkamesnis, kuomet prioritetą yra didelių kaupiamųjų nuostolių ribojimas.



8 pav.: portfelių vertės palyginimas.

Aštuntame grafike galime matyti keturių geriausių portfelių vertės pokyčius. Šarpo rodiklio optimizacijos portfelis, pažymėtas žaliai, per visą laikotarpį auga stipriausiai. Taip pat šiame grafike galime matyti didelius svyravimus, ypač 2020-2022 metais, tokie svyravimai

atitinka ir šio portfelio didesnės rizikos ir maksimalaus nuosmukio gautus rezultatus.

Vienodų svorių portfelis, pažymėtas mėlyna kreive, užima antrąją vietą, tačiau krizės laikotarpiu smarkiai sumažėjo, ypač 2008, 2020 ir 2022 metais. Ši vizualizacija atitinka rezultata, jog lygių svorių portfelis turi didžiausią nuosmukio rodiklį ir nėra efektyvus siekiant apsisaugoti nuo kritimo.

Minimalaus standartinio nuokrypio portfelis, pažymėtas oranžine spalva, yra tolygiausias iš visų keturių, turintis kur kas mažesnius svyravimus, tačiau laikui bėgant šis portfelis pasirodė blogiausiai iš visų keturių, o tai atitinka šio portfelio mažą grąžą ir mažą kintamumą pagal ankstesnius skaičiavimus.

Minimalaus didžiausio nuosmukio portfelis, pažymėtas raudona spalva, išliko santykinai stabilus ir išvengė didelių nuostolių lyginant su kitais portfeliais. Šis portfelis neauga taip sparčiai kaip Šarpo portfelis, tačiau užtikrina geriausią kapitalo išsaugojimo profilį, ypač įtemptais laikotarpiais.

Literatūra

- [1] Portfolio return rates. *Markowitz Mean-Variance Portfolio Theory*, page 17, 02 2010.
- [2] *Standard Deviation Formula: Definition, Types and Examples - Testbook*. testbook, 2024.
- [3] Zhenghao Dong. Sharpe-ratio related portfolio selection. *BCP Business & Management*, 24:316–321, 08 2022.
- [4] Fondų istoriniai duomenys. <https://stooq.com/>.
- [5] Frank Fabozzi, Harry Markowitz, and Francis Gupta. *Portfolio Selection*. 09 2008.
- [6] Paul Glasserman. Monte carlo methods in financial engineering. *Springer*, 07 2008.
- [7] Andrius Grigutis. Portfeliai, sudaryti iš rizikingų aktyvų. 2022.
- [8] Ryo Hidaka, Yohei Hamakawa, Jun Nakayama, and Kosuke Tatsumura. Correlation-diversified portfolio construction by finding maximum independent set in large-scale market graph. *IEEE Access*, PP:1–1, 01 2023.
- [9] Andrew Lo. The statistics of sharpe ratios. *Financial Analysts Journal*, 58, 02 2003.
- [10] Amir F. Atiya Malik Magdon-Ismail. An analysis of the maximum drawdown risk measure. 08 2004.
- [11] Herve Roche. Optimal consumption and investment strategies under wealth ratcheting. pages 14–15, 11 2006.
- [12] Patrick Schober, Christa Boer, and Lothar Schwarte. Correlation coefficients: Appropriate use and interpretation. *Anesthesia & Analgesia*, 126:1, 02 2018.

4 Priedai

Listing 1: Duomenų užkrovimas

```
import pandas as pd
from pathlib import Path

data_dir = Path("C:/Users/PC/Desktop/Magistrinis/Duomenys")

data = {}

for csv_file in data_dir.glob("*.csv"):
    ticker = csv_file.stem.upper()

    df = (
        pd.read_csv(
            csv_file,
            parse_dates=["Date"],
            index_col="Date"
        )
        .sort_index()
    )

    data[ticker] = df
```

Listing 2: Uždarymo kainų sujungimas

```
prices = pd.concat(
    {ticker: df["Close"] for ticker, df in data.items()},
    axis=1
).sort_index()

prices.columns.name = "Ticker"

prices = prices.loc["2008-01-01":"2024-12-31"]

print(prices.head())
print(prices.tail())
```

Listing 3: Gražų apskaičiavimas

```
import numpy as np

returns = prices.pct_change().dropna()
```

```
corr_matrix = returns.corr()
```

Listing 4: Koreliacijų matrica

```
import matplotlib.pyplot as plt

tickers = corr_matrix.columns

plt.figure(figsize=(8, 6))
im = plt.imshow(corr_matrix, interpolation='nearest')
plt.colorbar(im, fraction=0.046, pad=0.04)

plt.xticks(range(len(tickers)), tickers, rotation=45, ha="right")
plt.yticks(range(len(tickers)), tickers)

for i in range(len(tickers)):
    for j in range(len(tickers)):
        text = f"{corr_matrix.iloc[i, j]:.2f}"
        plt.text(j, i, text,
                 ha="center", va="center", fontsize=7)

plt.title("Dieniniu grazu koreliaciju matrica")
plt.tight_layout()
plt.show()
```

Listing 5: Aktyvų kaina laike

```
prices = prices.sort_index()

norm_prices = prices / prices.iloc[0] * 100

plt.figure(figsize=(12, 6))
for col in norm_prices.columns:
    plt.plot(norm_prices.index, norm_prices[col], label=col)

plt.title("Normalizuota kaina (pradzia = 100)")
plt.xlabel("Data")
plt.ylabel("Kaina")
plt.legend(loc="upper left")
plt.tight_layout()
plt.show()
```

Listing 6: Portfelijų svorių ir kitų parametų skaičiavimo funkcija

```

returns = prices.pct_change().dropna().copy()
tickers = list(returns.columns)
n = len(tickers)
def portfolio_stats_from_weights(weights, returns,
ann_factor=252, normalize=True):
    tickers = returns.columns
    mu = returns.mean()
    Sigma = returns.cov()

    if not isinstance(weights, pd.Series):
        weights = pd.Series(weights, index=tickers)
    else:
        weights = weights.reindex(tickers)

    if normalize:
        weights = weights / weights.sum()
    else:
        if not np.isclose(weights.sum(), 1.0):
            print(f"WARNING: weights sum to
{weights.sum():.6f}, not 1.0")

    ret_daily = float((weights * mu).sum())
    vol_daily = float(np.sqrt(weights.values
@ Sigma.values @ weights.values))

    ret_annual = ret_daily * ann_factor
    vol_annual = vol_daily * np.sqrt(ann_factor)

    print("Weights:")
    print(weights.round(4))
    print("\nResults:")
    print(f"Daily return: {ret_daily:.6f}")
    print(f"Daily std dev: {vol_daily:.6f}")
    print(f"Annual return: {ret_annual:.6f}")
    print(f"Annual std dev: {vol_annual:.6f}")

    return {
        "weights": weights,
        "ret_daily": ret_daily,

```

```

        "vol_daily": vol_daily ,
        "ret_annual": ret_annual ,
        "vol_annual": vol_annual ,
    }

```

Listing 7: Vienodų svorių portfelio rezultatai

```

print(returns.columns)

my_weights = {
    "SPY": 0.10 ,
    "EFA": 0.10 ,
    "EEM": 0.10 ,
    "IWM": 0.10 ,
    "AGG": 0.10 ,
    "LQD": 0.10 ,
    "HYG": 0.10 ,
    "VNQ": 0.10 ,
    "DBC": 0.10 ,
    "GLD": 0.10 ,
}

res = portfolio_stats_from_weights(pd.Series(my_weights) ,
returns , normalize=True)

```

Listing 8: Optimizavimo apibūdinimai

```

from scipy.optimize import minimize

# svoriu apribojimas: sum w_i = 1
constraints = ({
    "type": "eq" ,
    "fun": lambda w: np.sum(w) - 1.0
})

# ribos: negalimas pardavimas, kiekvienas tarp 0 ir 1
bounds = tuple((0.0 , 1.0) for _ in range(n))

# pradžios taskas
w0 = np.repeat(1/n, n)

```

Listing 9: Standartinio nuokrypio optimizavimas

```

def objective_min_std(w, Sigma):

```

```

    return float(np.sqrt(w @ Sigma.values @ w))

res_min_std = minimize(
    objective_min_std,
    x0=w0,
    args=(Sigma,) ,
    method="SLSQP" ,
    bounds=bounds,
    constraints=constraints ,
)

w_min_std = res_min_std.x

res_min = portfolio_stats_from_weights(w_min_std, returns)

```

Listing 10: Monte Karlo optimizacijos paruošimas

```

def portfolio_return_vol(w, mu, Sigma, ann_factor=252):
    w = np.asarray(w)
    ret_d = float(w @ mu.values)
    vol_d = float(np.sqrt(w @ Sigma.values @ w))
    ret_a = ret_d * ann_factor
    vol_a = vol_d * np.sqrt(ann_factor)
    return ret_d, vol_d, ret_a, vol_a

```

Listing 11: Monte Karlo optimizacija standartiniam nuokrypiui

```

num_portfolios = 1000000

# Kiekviena eilute yra atsitiktinis teigiamas svoris ir visu suma 1
weights_mc = np.random.dirichlet(alpha=np.ones(n), size=num_portfolios)

rets_d = np.zeros(num_portfolios)
vols_d = np.zeros(num_portfolios)

for i in range(num_portfolios):
    rets_d[i], vols_d[i], __, __ = portfolio_return_vol(weights_mc[i],
    mu, Sigma, ann_factor)

# maziausio std indeksas
idx_min_mc = np.argmin(vols_d)

w_min_mc = weights_mc[idx_min_mc]

```

```

ret_min_mc_d, vol_min_mc_d, ret_min_mc_a,
vol_min_mc_a = portfolio_return_vol(
    w_min_mc, mu, Sigma, ann_factor
)

print("Weights:")
print(pd.Series(w_min_mc, index=tickers).round(4))
print("\nDaily return:    {:.6f}".format(ret_min_mc_d))
print("Daily std dev:    {:.6f}".format(vol_min_mc_d))
print("Annual return:    {:.6f}".format(ret_min_mc_a))
print("Annual std dev:    {:.6f}".format(vol_min_mc_a))

```

Listing 12: Standartinio nuokrypio optimizacijų palyginimas

```

plt.figure(figsize=(8, 6))

# Monte Karlo rezultatu konvertavimas i metinius vienetus
rets_mc_a = rets_d * ann_factor
vols_mc_a = vols_d * np.sqrt(ann_factor)

# atsitiktiniai portfeliai
plt.scatter(vols_mc_a, rets_mc_a, s=5, alpha=0.3,
label="Atsitiktiniai portfeliai")

# zymim Monte Karlo portfeli
plt.scatter(vol_min_mc_a, ret_min_mc_a, marker="x",
s=80, label="MK min s. n.")

# zymim SLSQP portfeli
plt.scatter(vol_min_slsqp_a, ret_min_slsqp_a, marker="*",
s=120, label="SLSQP min s. n.")

plt.xlabel("Metinis nepastovumas (standartinis nuokrypis)")
plt.ylabel("Metine graza")
plt.title("Monte Karlo portfelis ir SLSQP optimizacija")
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()

```

Listing 13: Šarpo rodiklio apibrėžimas

```

# Nerizikinga norma
RF_annual = 0.0

```



```

def sharpe_ratio(series , rf_annual=0.0, ann_factor=252):
    """
    series: daily returns of the portfolio
    rf_annual: annual risk-free rate
    """
    ret_daily = series.mean()
    vol_daily = series.std()

    ret_annual = ret_daily * ann_factor
    vol_annual = vol_daily * np.sqrt(ann_factor)

    # konvertuojam metini rf i dienini
    if vol_annual == 0:
        return np.nan

    return (ret_annual - rf_annual) / vol_annual

```

Listing 14: Šarpo rodiklių skaičiavimas

```

def negative_sharpe(weights , returns , rf_annual=0.0,
ann_factor=252):
    w = np.asarray(weights)
    w = w / w.sum()
    port_ret = returns.dot(w)
    s = sharpe_ratio(port_ret , rf_annual=rf_annual ,
ann_factor=ann_factor)
    return -s

constraints = ({
    "type": "eq",
    "fun": lambda w: np.sum(w) - 1.0
})
bounds = [(0.0 , 1.0)] * n
w0 = w_eq.copy()

res_max_sharpe = minimize(
    negative_sharpe ,
    x0=w0,
    args=(returns , RF_annual, ann_factor),
    method="SLSQP" ,
    bounds=bounds ,

```

```

        constraints=constraints ,
    )

w_max_sharpe = res_max_sharpe.x
w_max_sharpe = w_max_sharpe / w_max_sharpe.sum()

port_ret_sharpe = returns.dot(w_max_sharpe)
sharpe_max = sharpe_ratio(port_ret_sharpe , rf_annual=RF_annual ,
ann_factor=ann_factor)

print("Weights:")
print(pd.Series(w_max_sharpe, index=tickers).round(4))

print("\nAnnual mean return:",
      port_ret_sharpe.mean() * ann_factor)
print("Annual std dev:",
      port_ret_sharpe.std() * np.sqrt(ann_factor))
print("Sharpe ratio:",
      sharpe_max)

```

Listing 15: Monte Karlo optimizacijos paruošimas Šarpui

```

def portfolio_returns_from_weights(weights , returns):

    w = np.asarray(weights)
    w = w / w.sum()
    return returns.dot(w)

```

Listing 16: Monte Karlo optimizacija Šarpo rodikliui

```

num_portfolios_sharpe = 1000000

sharpe_vals = np.zeros(num_portfolios_sharpe)
weights_mc_sharpe = np.random.dirichlet(alpha=np.ones(n) ,
size=num_portfolios_sharpe)

for i in range(num_portfolios_sharpe):
    port_ret_i = portfolio_returns_from_weights
    (weights_mc_sharpe[i] , returns)
    sharpe_vals[i] = sharpe_ratio(port_ret_i , rf_annual=RF_annual ,
ann_factor=ann_factor)

idx_best_sharpe = np.nanargmax(sharpe_vals)

```

```

w_mc_max_sharpe = weights_mc_sharpe[idx_best_sharpe]

port_ret_mc_sharpe = portfolio_returns_from_weights
(w_mc_max_sharpe, returns)
sharpe_mc = sharpe_ratio(port_ret_mc_sharpe, rf_annual=RF_annual,
ann_factor=ann_factor)

print("Weights:")
print(pd.Series(w_mc_max_sharpe, index=tickers).round(4))

print("Annual mean return:",
      port_ret_mc_sharpe.mean() * ann_factor)
print("Annual std dev:",
      port_ret_mc_sharpe.std() * np.sqrt(ann_factor))
print("Sharpe ratio:",
      sharpe_mc)

```

Listing 17: Optimizacijų palyginimas Šarpo rodikliui

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

mc_ret_annual = np.zeros(num_portfolios_sharpe)
mc_vol_annual = np.zeros(num_portfolios_sharpe)

for i in range(num_portfolios_sharpe):
    port_ret_i = portfolio_returns_from_weights
    (weights_mc_sharpe[i], returns)
    mc_ret_annual[i] = port_ret_i.mean() * ann_factor
    mc_vol_annual[i] = port_ret_i.std() * np.sqrt(ann_factor)

slsqp_ret_annual = port_ret_sharpe.mean() * ann_factor
slsqp_vol_annual = port_ret_sharpe.std() * np.sqrt(ann_factor)

mc_best_ret_annual = port_ret_mc_sharpe.mean() * ann_factor
mc_best_vol_annual =
port_ret_mc_sharpe.std() * np.sqrt(ann_factor)

plt.figure(figsize=(10, 7))

plt.scatter(mc_vol_annual, mc_ret_annual, s=2, alpha=0.25,
label="Atsitiktiniai portfeliai")

```

```

plt.scatter(mc_best_vol_annual, mc_best_ret_annual, marker="x",
s=140,
            label=f"Monte-Karlo max Sharpe ({sharpe_mc:.3f})")

plt.scatter(slsqp_vol_annual, slsqp_ret_annual, marker="*", s=200,
            label=f"SLSQP max Sharpe ({sharpe_max:.3f})")

plt.title("Monte-Karlo portfelis ir SLSQP optimizacija
(max Sharpe)")
plt.xlabel("Metinis nepastovumas (standartinis nuokrypis)")
plt.ylabel("Metine graza")
plt.legend(loc="upper left")
plt.tight_layout()
plt.show()

```

Listing 18: Pasiruošimas MDD optimizavimui

```

def max_drawdown(return_series):
    wealth = (1 + return_series).cumprod()
    running_max = wealth.cummax()
    drawdown = wealth / running_max - 1.0
    max_dd = drawdown.min()
    return float(abs(max_dd))

```

Listing 19: Rizikos matų reikšmės kiekvienam portfeliui

```

# vienodu svoriu
w_eq = np.repeat(1/n, n)
port_eq = returns.dot(w_eq)

# standartinio nuokrypio
port_min_std = returns.dot(w_min_std)

# Sarpo rodiklio
port_max_sharpe = returns.dot(w_max_sharpe)

def describe_portfolio(name, port_ret):
    ann_ret = port_ret.mean() * ann_factor
    ann_vol = port_ret.std() * np.sqrt(ann_factor)
    dd = max_drawdown(port_ret)
    print(f"\n=== {name} ===")
    print(f"Annual return:    {ann_ret:.4f}")

```

```

print(f"Annual std dev: {ann_vol:.4 f}")
print(f"Max drawdown: {dd:.4 f}")

describe_portfolio("Equal-weight", port_eq)
describe_portfolio("Min-Std", port_min_std)
describe_portfolio("Max-Sharpe", port_max_sharpe)

Listing 20: Monte Karlo optimizacija MDD

num_portfolios = 1000000

weights_mc = np.random.dirichlet(alpha=np.ones(n), size=num_portfolios)

maxdd_mc = np.zeros(num_portfolios)
ret_mc_a = np.zeros(num_portfolios)
vol_mc_a = np.zeros(num_portfolios)

for i in range(num_portfolios):
    w = weights_mc[i]
    port_i = returns.dot(w)
    maxdd_mc[i] = max_drawdown(port_i)
    ret_mc_a[i] = port_i.mean() * ann_factor
    vol_mc_a[i] = port_i.std() * np.sqrt(ann_factor)

idx_min_dd = np.argmin(maxdd_mc)
w_min_dd_mc = weights_mc[idx_min_dd]

port_min_dd_mc = returns.dot(w_min_dd_mc)

print("Weights:")
print(pd.Series(w_min_dd_mc, index=tickers).round(4))

describe_portfolio("MC Min-MaxDD", port_min_dd_mc)

```

Listing 21: SLSQP optimizacija MDD

```

def max_drawdown(return_series: pd.Series) -> float:
    wealth = (1 + return_series).cumprod()
    running_max = wealth.cummax()
    drawdown = wealth / running_max - 1.0
    return float(abs(drawdown.min()))

def objective_maxdd(weights, returns_df):

```

```

w = np.asarray(weights)
w = w / w.sum()

port_ret = returns_df.dot(w)
return max_drawdown(port_ret)

def slsqp_min_maxdd_multistart(returns_df, n_starts=30, seed=42):
    np.random.seed(seed)
    n = returns_df.shape[1]
    bounds = [(0.0, 1.0)] * n
    constraints = [{"type": "eq", "fun": lambda w:
np.sum(w) - 1.0}]

    best_res = None
    best_obj = np.inf

    starts = [np.repeat(1/n, n)]
    # pridedame atsitiktines pradzias
    starts += list(np.random.dirichlet(np.ones(n),
size=n_starts-1))

    for w0 in starts:
        res = minimize(
            objective_maxdd,
            x0=w0,
            args=(returns_df,),
            method="SLSQP",
            bounds=bounds,
            constraints=constraints,
            options={"maxiter": 300, "ftol": 1e-9}
        )
        if res.success and res.fun < best_obj:
            best_obj = res.fun
            best_res = res

    return best_res

best_res = slsqp_min_maxdd_multistart(returns, n_starts=40)

w_min_dd_slsqp = best_res.x / best_res.x.sum()

```

```
port_min_dd_slsqp = returns.dot(w_min_dd_slsqp)
```

```
print(pd.Series(w_min_dd_slsqp, index=returns.columns).round(4))
describe_portfolio(port_min_dd_slsqp)
```

Listing 22: Geriausių portfelių apžvalga

```
# vienodu svoriu
w_eq = np.repeat(1/n, n)
port_eq = returns.dot(w_eq)

# standartinio nuokrypio
port_min_std = returns.dot(w_min_std)

# Sarpo
port_max_sharpe = returns.dot(w_max_sharpe)

# min MDD
port_min_dd_slsqp = returns.dot(w_min_dd_slsqp)

def describe_portfolio(name, port_ret, rf_annual=0.0, ann_factor=252):
    ann_ret = port_ret.mean() * ann_factor
    ann_vol = port_ret.std() * np.sqrt(ann_factor)
    dd = max_drawdown(port_ret)

    sharpe = np.nan
    if ann_vol != 0:
        sharpe = (ann_ret - rf_annual) / ann_vol

    print(f"\n=== {name} ===")
    print(f"Annual return:    {ann_ret:.4 f}")
    print(f"Annual std dev:    {ann_vol:.4 f}")
    print(f"Sharpe ratio:      {sharpe:.4 f}")
    print(f"Max drawdown:      {dd:.4 f}")

describe_portfolio("Equal-weight", port_eq, rf_annual=RF_annual,
ann_factor=ann_factor)
describe_portfolio("Min-Std", port_min_std, rf_annual=RF_annual,
ann_factor=ann_factor)
describe_portfolio("Max-Sharpe", port_max_sharpe,
rf_annual=RF_annual, ann_factor=ann_factor)
describe_portfolio("Min-MaxDD", port_min_dd_slsqp,
```

```
rf_annual=RF_annual, ann_factor=ann_factor)
```

Listing 23: MDD optimizacijų palyginimas

```
ret_min_mc_a = port_min_dd_mc.mean() * ann_factor
vol_min_mc_a = port_min_dd_mc.std() * np.sqrt(ann_factor)

ret_min_slsqp_a = port_min_dd_slsqp.mean() * ann_factor
vol_min_slsqp_a = port_min_dd_slsqp.std() * np.sqrt(ann_factor)

plt.figure(figsize=(10, 7))

plt.scatter(vol_mc_a, ret_mc_a, s=2, alpha=0.25,
label="Atsitiktiniai portfeliai")

plt.scatter(vol_min_mc_a, ret_min_mc_a, marker="x", s=140,
label=
f"MK min MaxDD ({max_drawdown(port_min_dd_mc):.3f})")

plt.scatter(vol_min_slsqp_a, ret_min_slsqp_a, marker="*", s=200,
label=f"SLSQP min MaxDD
({max_drawdown(port_min_dd_slsqp):.3f})")

plt.title
("Monte Karlo portfelis ir SLSQP optimizacija (min MaxDD)")
plt.xlabel("Metinis nepastovumas (standartinis nuokrypis)")
plt.ylabel("Metinė graža")
plt.legend(loc="upper left")
plt.tight_layout()
plt.show()
```

Listing 24: Portfelių vertės pokytis laike

```
def equity_curve(port_ret):
    return (1 + port_ret).cumprod()

eq_eq = equity_curve(port_eq)
eq_min_std = equity_curve(port_min_std)
eq_max_sharpe = equity_curve(port_max_sharpe)
eq_min_dd_slsqp = equity_curve(port_min_dd_slsqp)

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(eq_eq.index, eq_eq, label="Lygiu svoriu")
```



```

plt.plot(eq_min_std.index, eq_min_std, label="Min-Std")
plt.plot(eq_max_sharpe.index, eq_max_sharpe, label="Max-Sharpe")
plt.plot(eq_min_dd_slsqp.index, eq_min_dd_slsqp,
label="Min-MaxDD")

plt.xlabel("Data")
plt.ylabel("Turtas (pradzia = 1)")
plt.title("Skirtingu portfeliu vertes pokycio kreives")
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()

```

Listing 25: Koreliacijos pavyzdys

```

np.random.seed(42)
n = 200
x = np.linspace(-3, 3, n)
y_pos = x
y_neg = -x

x0 = np.random.normal(0, 1, n)
y0 = np.random.normal(0, 1, n)

print("corr(1)    :", np.corrcoef(x, y_pos)[0, 1])
print("corr(-1)   :", np.corrcoef(x, y_neg)[0, 1])
print("corr(0)    :", np.corrcoef(x0, y0)[0, 1])

fig, axes = plt.subplots(1, 3, figsize=(12, 4))

# rho = 1
axes[0].scatter(x, y_pos)
axes[0].set_title("Koreliacija = 1")
axes[0].set_xlabel("X")
axes[0].set_ylabel("Y")

# rho = -1
axes[1].scatter(x, y_neg)
axes[1].set_title("Koreliacija = -1")
axes[1].set_xlabel("X")
axes[1].set_ylabel("Y")

# rho = 0

```

```

axes[2].scatter(x0, y0)
axes[2].set_title("Koreliacija = 0")
axes[2].set_xlabel("X")
axes[2].set_ylabel("Y")

plt.tight_layout()
plt.show()

```

Listing 26: Aktyvų rodikliai

```

stats_table = pd.DataFrame({
    "Avg_annual_return_%": returns.mean() * ann_factor * 100,
    "Max_daily_return_%": returns.max() * 100,
    "Min_daily_return_%": returns.min() * 100,
}).sort_values("Avg_annual_return_%", ascending=False)

stats_table_fmt = stats_table.round(2)

stats_table_pct = stats_table.applymap(lambda x: f"{x:.2f}%")
print(stats_table_pct)

```