



**Matematikos ir
informatikos
fakultetas**

VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MAGISTRANTŪROS STUDIJŲ PROGRAMA
FINANSŲ IR DRAUDIMO MATEMATIKA

**Diskretaus laiko E. Sparre Andersen
modelio bankroto laiko analizė**

**Analysis of the Ruin Time
in a Discrete Time E. Sparre Andersen Model**

Baigiamasis magistro darbas

Atliko: Miglė Venckūnaitė

VU el. pašto adresas: migle.venckunaite@mif.stud.vu.lt

Darbo vadovas: Doc. Dr. Andrius Grigutis

Vilnius
2025

Turiny

Įvadas	4
1 E. Sparre Andersen modelis	5
2 Praktiniai pavyzdžiai	9
Išvados	31
Literatūros šaltiniai	32
Priedai	33

Diskretaus laiko E. Sparre Andersen modelio bankroto laiko analizė

Santrauka

Šiame magistro baigiamajame darbe nagrinėjamas diskretaus laiko E. Sparre Andersen rizikos modelis. Pristatomas draudiko valdomo turto procesas, apibrėžiamas bankroto laikas, baigtinio ir begalinio laiko bankroto tikimybės. Išvedama rekursinė formulė, leidžianti apskaičiuoti bankroto laiko tikimybes, ir aptariama grynojo pelno sąlyga. Praktinėje darbo dalyje analizuojami atvejai, kai žalų dydžiai ir laiko tarpai tarp žalų aprašomi Puasono skirstiniais. Naudojant Python programavimo kalbą, atliekami skaitiniai bankroto laiko ir bankroto tikimybių skaičiavimai skirtingoms modelio parametrų reikšmėms.

Raktiniai žodžiai: E. Sparre Andersen modelis, diskretaus laiko rizikos modelis, bankroto laikas, baigtinio laiko bankroto tikimybė, begalinio laiko bankroto tikimybė, grynojo pelno sąlyga, Puasono skirstinys, Skellam skirstinys, modifikuotoji pirmosios rūšies Bessel funkcija, rekursinė formulė, tikimybių masės funkcija.

Analysis of the Ruin Time in a Discrete Time E. Sparre Andersen Model

Abstract

This master's thesis reviews the discrete time E. Sparre Andersen risk model. The insurer's surplus process, the ruin time, finite time and infinite time ruin probabilities are defined. A recursive formula for calculating ruin time probabilities is derived, and the net profit condition is discussed. In the practical part of the thesis, cases in which claim sizes and interarrival times between claims are described by Poisson distributions are analyzed. Using the Python programming language, numerical calculations of ruin time and ruin probabilities are performed for different values of the model parameters.

Keywords: E. Sparre Andersen model, discrete time risk model, ruin time, finite time ruin probability, infinite time ruin probability, net profit condition, Poisson distribution, Skellam distribution, modified Bessel function of the first kind, recursive formula, probability mass function.

Įvadas

Rizikos teorijoje draudimo bendrovės veikla dažnai aprašoma matematiniais modeliais, kurie leidžia analizuoti draudiko turto kitimą laike. Vienas iš tokių modelių yra E. Sparre Andersen modelis, pirmą kartą pristatytas E. Sparre Andersen 1957 m. tarptautiniame aktuarių kongrese Niujorke [1]. Šis modelis apibendrina Cramér-Lundberg modelį atsisakant ribojančių prielaidų apie žalų atsiradimo laiką. E. Sparre Andersen modelyje taikoma prielaida, kad laiko tarpai tarp žalų ir žalų dydžiai yra aprašomi nepriklausomomis ir vienodai pasiskirsčiusiomis atsitiktinių dydžių sekomis, kurios tarpusavyje yra nepriklausomos, todėl šis modelis yra lankstesnis nei Cramér-Lundberg modelis.

Praktiniuose taikymuose draudimo bendrovių duomenys dažnai analizuojami diskrečiais laiko momentais, pavyzdžiui, mėnesio, ketvirčio ar metų gale, todėl šiame darbe nagrinėjamas diskretaus laiko E. Sparre Andersen modelio variantas, kuris leidžia taikyti rekursinius skaičiavimo metodus ir tiksliai apskaičiuoti bankroto tikimybes.

Viena svarbiausių diskretaus laiko rizikos modelio charakteristikų yra bankroto laikas, kuris apibrėžia pirmąjį laiko momentą, kai draudiko turtas pasiekia nulį arba tampa neigiamas. Šio magistro baigiamojo darbo tikslas yra ištirti bankroto laiko pasiskirstymą diskretaus laiko E. Sparre Andersen modelyje, apibrėžiant bankroto laiką ir jo tikimybes, suformuluojant rekursinę bankroto laiko tikimybių skaičiavimo formulę ir teorinėje dalyje aprašytus skaičiavimo metodus pritaikant praktiniuose skaičiavimuose.

1 E. Sparre Andersen modelis

E. Sparre Andersen modelis arba kitaip rizikos atstatymo modelis aprašo draudiko turto kitimą bėgant laikui. Šis modelis apibrėžiamas taip:

Apibrėžimas 1.1. *Sakoma, kad draudiko valdomas turtas $W(t)$ kinta pagal rizikos atstatymo modelį, jeigu bet kuriam laiko momentui $t \geq 0$,*

$$W(0) := u, \quad W(t) := u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, t > 0. \quad (1)$$

Šiame apibrėžime:

- $u \geq 0$ yra draudiko pradinis turtas,
- $X_1, X_2, X_3 \dots$ yra nepriklausomos neneigiamo atsitiktinio dydžio X kopijos. Atsitiktinis dydis X_i nusako draudiko i -osios žalos dydį,
- $c > 0$ yra premijų surinkimo greitis,
- $N(t)$ yra žalų skaičius intervale $[0, t]$. Galima pastebėti, kad $N(t)$ taip pat yra atstatymo procesas, t.y.

$$N(t) = \max\{n \in \mathbb{N} : \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n \leq t\}. \quad (2)$$

Čia $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ yra nepriklausomos neneigiamo atsitiktinio dydžio θ kopijos. Atsitiktinis dydis θ_1 yra pirmosios žalos pasirodymo laikas, o atsitiktiniai dydžiai θ_i , $i > 1$ nusako laiko tarpą tarp $(i-1)$ -osios ir i -osios žalų,

- Atsitiktinių dydžių sekos $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ ir $X_1, X_2, X_3 \dots$ tarp savęs yra nepriklausomos.

Šis E. Sparre Andersen modelis (1) apibrėžiamas tolydžiam laikui, tačiau praktiniuose skaičiavimuose patogiau naudoti diskretaus laiko rizikos modelį, nes draudimo bendrovės įprastai naudoja duomenis ne nuolat, o kas tam tikrą laiko tarpą, pavyzdžiui, mėnesio, ketvirčio ar metų pabaigoje.

Būtent todėl šiame darbe toliau bus nagrinėjamas diskretaus laiko rizikos modelis, išlaikant tas pačias E. Sparre Andersen modelio prielaidas, tik indeksuojant procesą pagal diskrečius laiko momentus $t \in \mathbb{N}$.

Diskretaus laiko rizikos atstatymo modelis apibrėžiamas taip:

Apibrėžimas 1.2. *Sakoma, kad draudiko valdomas turtas $U(t)$ kinta pagal diskretaus laiko rizikos atstatymo modelį, jeigu bet kuriam laiko momentui $t \in \mathbb{N}$,*

$$U(0) = u, \quad U(t) = u - \sum_{i=1}^t (X_i - c\theta_i), \quad t \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Šiame diskretaus laiko rizikos modelyje žymėjimai ir jų reikšmės išlieka tokie patys kaip ir tolydaus laiko rizikos modelio apibrėžime 1.1.

Galima pastebėti, kad lygtyje (3) nebėra atstatymo proceso $N(t)$, kuris buvo naudojamas tolydaus laiko modelio apibrėžime 1.1. Taip yra todėl, nes diskretaus laiko modelyje laikas nagrinėjamas tam tikrais fiksuotais momentais - po kiekvienos žalos atsiradimo.

Tam pažymimas t -osios žalos pasirodymo laikas:

$$T_t = \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_t.$$

Pagal formulę (2), $N(T_t) = t$. Tada

$$W(T_t) := u + cT_t - \sum_{i=1}^{N(T_t)} X_i = u + c \sum_{i=1}^t \theta_i - \sum_{i=1}^t X_i.$$

Toliau šiame darbe visi apibrėžimai ir skaičiavimai bus formuluojami diskretaus laiko kontekste.

Dabar galima apibrėžti vieną iš svarbiausių charakteristikų, susijusių su rizikos atstatymo modeliu - bankroto laiką. Šis dydis nusako laiko momentą, kai turtas $U(t)$ pirmą kartą pasiekia nulį arba tampa neigiamas.

Apibrėžimas 1.3. *Laiko momentas, kai draudiko turtas pirmą kartą pasiekia nulį arba nukrenta žemiau nulio vadinamas bankroto laiku. Bankroto laiką diskretaus laiko rizikos modeliui (3) galima aprašyti lygybe:*

$$T_u = \begin{cases} \min\{t \geq 1 : U(t) \leq 0\}, \\ \infty, & \text{jei } U(t) > 0 \text{ visiems } t \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Kadangi bankroto laikas yra atsitiktinis dydis, toliau galima nagrinėti jo pasiskirstymą, t.y. tikimybes, kad bankrotas įvyks konkrečiu laiko momentu.

Apibrėžimas 1.4. *Bankroto laiko tikimybę diskretaus laiko rizikos modeliui (3) galima apibrėžti taip:*

$$\mathbb{P}(T_u = 1) = \mathbb{P}(X - c\theta \geq u),$$

$$\mathbb{P}(T_u = l) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^l (X_i - c\theta_i) \geq u, \sup_{1 \leq n \leq l-1} \sum_{i=1}^n (X_i - c\theta_i) < u\right), l \in \{2, 3, \dots\}.$$

Kadangi toliau bus naudojami diskretūs atsitiktiniai dydžiai, verta apibrėžti tikimybių masės funkciją ir jos savybes, kurios aprašo diskretaus atsitiktinio dydžio pasiskirstymą.

Apibrėžimas 1.5. *Tarkime, kad X yra diskretus atsitiktinis dydis, galintis įgyti reikšmes iš aibės $\mathbb{Z}$. Tada funkcija*

$$f(k) = \mathbb{P}(X = k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

vadinama atsitiktinio dydžio X tikimybių masės funkcija.

Tikimybių masės funkcija tenkina šias savybes [2]:

- $0 \leq f(k) \leq 1$ visiems $k \in \mathbb{Z}$,
- $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) = 1$,
- Bet kurio įvykio $A \subset \mathbb{Z}$ tikimybė apskaičiuojama pagal formulę:

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{k \in A} f(k).$$

Šios savybės leidžia diskretaudo dydžio patekimo į intervalą tikimybę skaičiuoti sumuojant, pavyzdžiui,

$$\mathbb{P}(a \leq Y \leq b) = \sum_{k=a}^b f(k).$$

Pritaikius diskretaudo laiko rizikos modelio apibrėžimus 1.2, 1.3, 1.4 ir tikimybių masės funkcijos apibrėžimą 1.5, galima suformuluoti ir įrodyti lemą 1.1, kuri bankroto laiko tikimybes leidžia apskaičiuoti rekursiškai. Tokia rekursinė formulė (4) leidžia kiekvieno laiko momento bankroto tikimybę susieti su ankstesniais laiko momentais, todėl skaičiavimai tampa patogesni, aiškesni ir lengviau pritaikomi praktiškai.

Lema 1.1. Jei $l \in \{2, 3, \dots\}$ ir

$$f(k) := \mathbb{P}(X - c\theta = k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

yra atsitiktinio dydžio $X - c\theta$ tikimybių masės funkcija, tai bankroto laiko tikimybė diskretaudo laiko rizikos modeliui (3) tenkina šią rekursinę formulę:

$$\mathbb{P}(T_u = l) = \sum_{k=-\infty}^{u-1} f(k) \mathbb{P}(T_{u-k} = l-1), \quad (4)$$

kur T_u yra bankroto laikas, apibrėžtas apibrėžime 1.3.

Įrodymas. Kadangi $l \in \{2, 3, \dots\}$, tai bankrotas laiko momentu l reiškia, jog po l -ojo žingsnio draudiko turtas pirmą kartą tampa neigiamas:

$$\mathbb{P}(T_u = l) = \mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^l (X_i - c\theta_i) \geq u, \sup_{1 \leq n \leq l-1} \sum_{i=1}^n (X_i - c\theta_i) < u \right). \quad (5)$$

Kadangi nagrinėjamas atvejis, kai $l \geq 2$, tai reiškia, kad bankrotas laiko momentu $l = 1$ neįvyko, todėl turi galioti $X_1 - c\theta_1 < u$. Tokiu būdu (5) galima perrašyti:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^l (X_i - c\theta_i) \geq u, \sup_{2 \leq n \leq l-1} \sum_{i=1}^n (X_i - c\theta_i) < u, X_1 - c\theta_1 < u \right) \\
&= \mathbb{P} \left(\sum_{i=2}^l (X_i - c\theta_i) \geq u - (X_1 - c\theta_1), \right. \\
&\quad \left. \sup_{2 \leq n \leq l-1} \sum_{i=2}^n (X_i - c\theta_i) < u - (X_1 - c\theta_1), X_1 - c\theta_1 < u \right). \quad (6)
\end{aligned}$$

Kadangi $\{X_i\}, i \in \mathbb{N}$ yra nepriklausomos atsitiktinio dydžio X kopijos, o $\{\theta_i\}, i \in \mathbb{N}$ yra nepriklausomos atsitiktinio dydžio θ kopijos, bei tarpusavyje šie dydžiai yra nepriklausomi, tai, remiantis šaltiniu [3], $\{X_i - c\theta_i\}$ yra nepriklausomos atsitiktinio dydžio $X - c\theta$ kopijos, todėl, remiantis pilnosios tikimybės formule [4], sąlyginė tikimybė pagal pirmąjį žingsnį leidžia išskaidyti įvykius pagal galimas $X_1 - c\theta_1$ reikšmes. Galima pažymėti tokio žingsnio reikšmę k ir sumuoti pagal visas galimas $k < u$, tada (6) perrašoma taip:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=-\infty}^{u-1} \mathbb{P}(X_1 - c\theta_1 = k) \mathbb{P} \left(\sum_{i=2}^l (X_i - c\theta_i) \geq u - k, \sup_{2 \leq n \leq l-1} \sum_{i=2}^n (X_i - c\theta_i) < u - k \right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{u-1} f(k) \mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^{l-1} (X_i - c\theta_i) \geq u - k, \sup_{1 \leq n \leq l-2} \sum_{i=1}^n (X_i - c\theta_i) < u - k \right), \\
&= \sum_{k=-\infty}^{u-1} f(k) \mathbb{P}(T_{u-k} = l-1).
\end{aligned}$$

□

Lema 1.1 aprašo bankroto laiko tikimybes tam tikrais laiko momentais. Toliau apibrėžiamos baigtinio ir begalinio laiko bankroto tikimybės.

Apibrėžimas 1.6. *Baigtinio laiko bankroto tikimybė apibrėžiama formule*

$$\psi(u, T) = \mathbb{P}(T_u \leq T),$$

kur T_u žymi bankroto laiką, apibrėžtą apibrėžime 1.3.

Atitinkamai, bankroto tikimybė begaliniu laiku apibrėžiama formule

$$\psi(u) = \mathbb{P}(T_u < \infty).$$

Apibrėžimas 1.6 aprašo bankroto tikimybes baigtiniame ir begaliniame laike. Toliau apibrėžiama sąlyga, kuri parodo, ar bankroto tikimybė begaliniame laike yra lygi vienetui, t. y. ar bankrotas yra neišvengiamas.

Apibrėžimas 1.7. *Jeigu diskretaus laiko modelyje (3) žalas generuojantis atsitiktinis dydis X bei tarplaičius generuojantis atsitiktinis dydis θ turi baigtinius vidurkius, tai sąlyga*

$$\mathbb{E}X - c\mathbb{E}\theta < 0,$$

vadinama grynojo pelno sąlyga rizikos atstatymo modeliui.

Jeigu grynojo pelno sąlyga netenkinama, t. y.

$$\mathbb{E}X - c\mathbb{E}\theta > 0,$$

tai bankroto tikimybė begaliniam laikui $\psi(u)$ yra lygi vienetui visoms pradinio turto reikšmėms $u > 0$. Tai reiškia, kad bankrotas tikrai įvyks. Taip pat, kai $\mathbb{E}X - c\mathbb{E}\theta = 0$, bankroto tikimybė begaliniam laikui $\psi(u) = 1$, išskyrus kai kuriuos atvejus, kai abu atsitiktiniai dydžiai X ir θ yra išsigimę [8]. Tuo tarpu, kai grynojo pelno sąlyga tenkinama, bankroto tikimybė begaliniam laikui yra mažesnė už vienetą ir draudikas bankroto gali ir nepatirti.

Iš tikrųjų, jeigu vidutinės draudiko pajamos viršija vidutinius nuostolius, tai draudikas dirba pelningai ir turi galimybę išgyventi, tačiau jei vidutinės pajamos yra mažesnės už vidutinius nuostolius, tai bankrotas bus neišvengiamas.

Apibrėžimai 1.1-1.7 ir gauta rekursinė formulė lemoje 1.1 aprašo diskretaus laiko E. Sparre Andersen modelį. Šios išraiškos leidžia apskaičiuoti bankroto laiko tikimybes skirtingiems pradinio turto ir modelio parametrų pasirinkimams. Toliau šie rezultatai taikomi praktiniams pavyzdžiams ir skaičiavimams.

2 Praktiniai pavyzdžiai

Pavyzdys 2.1. *Tarkime, kad $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$, $\theta \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ yra Puasono atsitiktiniai dydžiai su $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ parametrais ir $c \in \mathbb{N}$. Pavyzdyje bus parodyta, kaip šiuo atveju apskaičiuojama atsitiktinio dydžio $X - c\theta$ tikimybių masės funkcija.*

Pasinaudojus pilnosios tikimybės formule [4] pagal θ ir šaltiniu [2] apie Puasono atsitiktinio dydžio tikimybių masės funkciją, atsitiktinio dydžio $X - c\theta$ tikimybių masės funkcija, kur X ir θ yra nepriklausomi yra

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X - c\theta = k) &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(X - c\theta = k | \theta = j) \mathbb{P}(\theta = j) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k + cj) \mathbb{P}(\theta = j) = \sum_{\substack{j \geq 0 \\ k+cj \geq 0}} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^{k+cj}}{(k+cj)!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^j}{j!} \\ &= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{\substack{j \geq 0 \\ k+cj \geq 0}} \frac{\lambda_1^{cj+k} \lambda_2^j}{j!(cj+k)!}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (7)$$

Toliau bus nagrinėjamas atvejis, kai $c = 1$:

$$\mathbb{P}(X - \theta = k) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{\substack{j \geq 0 \\ k+j \geq 0}} \frac{\lambda_1^{j+k} \lambda_2^j}{j!(j+k)!}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (8)$$

Kadangi, kai $c = 1$, atsitiktinis dydis $X - c\theta$ yra dviejų nepriklausomų Puasono dydžių skirtumas, toliau nagrinėjamas Skellam skirstinys [5], kuris apibūdina būtent tokį skirtumą.

Apibrėžimas 2.1. (*Skellam skirstinys*)

Jei $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ ir $\theta \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ yra nepriklausomi Puasono atsitiktiniai dydžiai, tai atsitiktinis dydis $K = X - \theta$ turi Skellam skirstinį. Jo tikimybių masės funkcija yra:

$$\mathbb{P}(K = k) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{k/2} I_k \left(2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Čia I_k yra modifikuotoji pirmosios rūšies Bessel funkcija, kuri apibrėžiama taip:

$$I_k(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j! \Gamma(j+k+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2j+k} \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (9)$$

Modifikuotoji pirmosios rūšies Bessel funkcija tenkina šią savybę [6]:

$$I_k(x) = I_{-k}(x) \quad k \in \mathbb{Z},$$

todėl Skellam skirstinio tikimybių masės funkcija yra apibrėžta visiems $k \in \mathbb{Z}$.

Galima pastebėti, kad į (9) formulę įstačius $x = 2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$ gaunama:

$$\begin{aligned} I_k(2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!(j+k)!} \left(\frac{2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}{2} \right)^{2j+k} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}^{2j+k}}{j!(j+k)!} \\ &= (\lambda_1 \lambda_2)^{\frac{k}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 \lambda_2)^j}{j!(j+k)!}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (10)$$

Gautą (10) išraišką padauginus iš $e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{k/2}$ gaunama (8):

$$e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{k/2} (\lambda_1 \lambda_2)^{\frac{k}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 \lambda_2)^j}{j!(j+k)!} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^{j+k} \lambda_2^j}{j!(j+k)!}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Todėl

$$\mathbb{P}(X - \theta = k) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{k/2} I_k \left(2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \right), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (11)$$

Taigi gauta išraiška (11) yra Skellam skirstinio tikimybių masės funkcija su parametrais λ_1, λ_2 .

Pavyzdys 2.2. Tarkime, kad $X \sim \mathcal{P}(1)$, $\theta \sim \mathcal{P}(1)$ yra nepriklausomi Puasono atsitiktiniai dydžiai, premijos surinkimo greitis $c = 1$. Tegul pradinis draudiko turtas $u \in \mathbb{N}_0$. Šiame pavyzdyje parodoma, kaip praktiškai apskaičiuojamos bankroto laiko tikimybės diskrečiam E . Sparre Andersen modeliui, esant pasirinktoms parametų reikšmėms.

Pagal apibrėžimą 1.4,

$$\mathbb{P}(T_u = 1) = \mathbb{P}(X - c\theta \geq u) = 1 - \mathbb{P}(X - c\theta < u).$$

Kadangi $c = 1$, o $\lambda_1 = \lambda_1 = 1$, tai, remiantis (11) formule,

$$P(X - \theta = k) = e^{-2} I_k(2), \quad k \in \mathbb{Z},$$

kur $I_k(2)$ yra modifikuotoji pirmosios rūšies Bessel funkcija, todėl

$$P(T_u = 1) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{u-1} P(X - \theta = k) = 1 - e^{-2} \sum_{k=-\infty}^{u-1} I_k(2). \quad (12)$$

Lema 2.1. Jei $I_k(2)$, $k \in \mathbb{Z}$ yra modifikuotoji pirmosios rūšies Bessel funkcija, tai $\forall \varepsilon > 0, \exists J \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k < -J} I_k(2) < \varepsilon.$$

Irodymas. Kadangi modifikuotoji pirmosios rūšies Bessel funkcija turi savybę $I_{-k}(2) = I_k(2)$, $k \in \mathbb{Z}$ [6], tai uodega gali būti perrašyta taip:

$$\sum_{k < -J} I_k(2) = \sum_{k > J} I_k(2). \quad (13)$$

Tada iš apibrėžimo (9), įsistačius $x = 2$, gauname

$$I_k(2) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j! \Gamma(j+k+1)} \left(\frac{2}{2}\right)^{2j+k} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!(j+k)!}. \quad (14)$$

Kadangi visi nariai yra teigiami, tai gautą išraišką (14) galima įvertinti iš abiejų pusių:

$$0 \leq I_k(2) \leq \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} = \frac{e}{k!}.$$

Tada

$$0 \leq \sum_{k > J} I_k(2) \leq \sum_{k > J} \frac{e}{k!}. \quad (15)$$

Taip pat žinoma, kad

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e}{k!} = e \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e^2 < \infty.$$

Taigi eilutė $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e}{k!}$ konverguoja, todėl, remiantis šaltiniu [7], jos uodega tenkina :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists J \in \mathbb{N}:$$

$$\sum_{k>J} \frac{e}{k!} < \varepsilon,$$

todėl remiantis (15), $\forall \varepsilon > 0, \exists J \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k>J} I_k(2) < \varepsilon.$$

Galiausiai, remiantis (13), $\forall \varepsilon > 0, \exists J \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k<-J} I_k(2) < \varepsilon.$$

□

Kadangi, remiantis lema 2.1, formulėje (12) vietoj $-\infty$ galima sumuoti nuo pakankamai mažo sveikąjį skaičių, tai praktiniuose skaičiavimuose su Python programavimo kalba naudojamas pjūvis $k = -KNEG, \dots, u-1$, kai $KNEG = 100$.

Tuomet gaunamos šios reikšmės:

$l \setminus u$	0	1	2	3	4	5	6	7
1	0.65425	0.34575	0.13048	0.03724	0.00845	0.00158	0.00025	0.00003

1 lentelė: Bankroto laiko tikimybės $\mathbb{P}(T_u = 1)$, kai $c = 1$ ir $X \sim \mathcal{P}(1)$, $\theta \sim \mathcal{P}(1)$.

Iš lentelėje (1) pateiktų rezultatų matosi dėsningumas: didėjant pradiniam turtui u , bankroto tikimybė per vieną žingsnį $P(T_u = 1)$ sparčiai mažėja. Pavyzdžiui, kai $u = 0$, gaunama $P(T_0 = 1) = 0.654$, tačiau padidinus pradinį turtą iki $u = 4$, tikimybė sumažėja iki 0.0085, o kai $u = 7$, ji praktiškai lygi nuliui. Taigi pakankamas pradinis turtas smarkiai sumažina bankroto riziką.

Kai $T_u = 2, 3, \dots$, bankroto laiko tikimybė apskaičiuojama remiantis rekursine formule (4):

$$\mathbb{P}(T_u = l) = \sum_{k=-\infty}^{u-1} f(k) \mathbb{P}(T_{u-k} = l-1) = e^{-2} \sum_{k=-\infty}^{u-1} I_k(2) \mathbb{P}(T_{u-k} = l-1).$$

Kadangi $0 \leq \mathbb{P}(T_{u-k} = l-1) \leq 1$, tai, remiantis lema 2.1, gaunama:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{k=-\infty}^{u-1} I_k(2) \mathbb{P}(T_{u-k} = l-1) - \sum_{k=-J}^{u-1} I_k(2) \mathbb{P}(T_{u-k} = l-1) \\ &= \sum_{k<-J} I_k(2) \mathbb{P}(T_{u-k} = l-1) \leq \sum_{k<-J} I_k(2) \cdot 1 < \varepsilon. \end{aligned}$$

Taigi pakankamai dideliu J uodega reikšmingos įtakos neturi, todėl, kaip ir $P(T_u = 1)$ atveju, praktiniuose skaičiavimuose vietoj $-\infty$ galima sumuoti nuo pakankamai mažo sveiką skaičių, todėl praktiniuose skaičiavimuose naudojamas tas pats pjūvis $k = -KNEG, \dots, u - 1$, kai $KNEG = 100$.

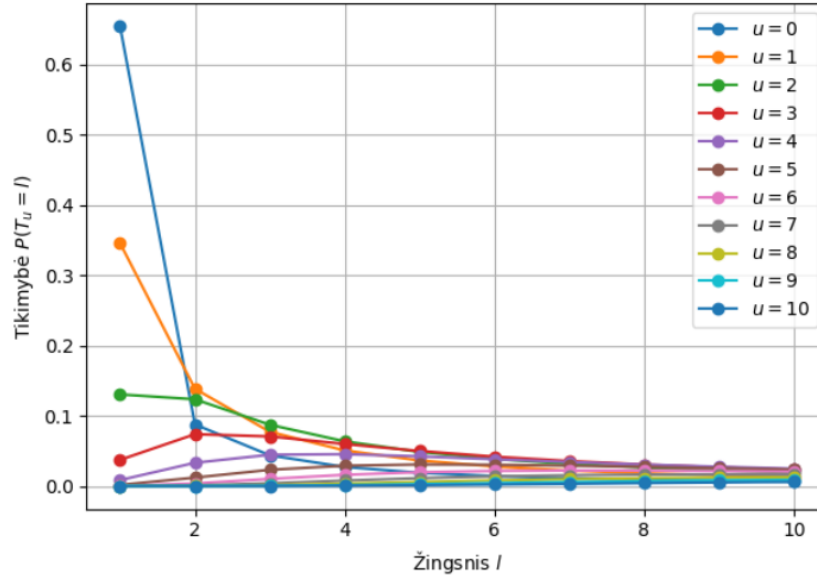
Remiantis Python skaičiavimais bankroto laiko tikimybėms, kai $T_u = 2, 3, \dots$, gaunamos reikšmės:

$l \backslash u$	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0.08773	0.13848	0.12353	0.07379	0.03311	0.01197	0.00364	0.00096
3	0.04370	0.07723	0.08726	0.07062	0.04455	0.02309	0.01017	0.00390
4	0.02713	0.05065	0.06364	0.05984	0.04535	0.02893	0.01597	0.00777
5	0.01891	0.03643	0.04860	0.04986	0.04223	0.03072	0.01964	0.01121
6	0.01415	0.02781	0.03854	0.04185	0.03815	0.03033	0.02147	0.01372
7	0.01109	0.02212	0.03148	0.03556	0.03416	0.02893	0.02205	0.01531
8	0.00900	0.01813	0.02632	0.03062	0.03057	0.02715	0.02188	0.01619
9	0.00749	0.01521	0.02242	0.02667	0.02744	0.02529	0.02129	0.01655
10	0.00636	0.01300	0.01939	0.02348	0.02473	0.02348	0.02046	0.01655

2 lentelė: Bankroto laiko tikimybės $\mathbb{P}(T_u = l)$, kai $c = 1$ ir $X \sim \mathcal{P}(1)$, $\theta \sim \mathcal{P}(1)$.

Siekiant įsitikinti, kad pjūvis $k = -KNEG, \dots, u - 1$, kai $KNEG = 100$ tikrai neturi reikšmingos įtakos rezultatams, buvo atliktas jautrumo testas. Tie patys skaičiavimai buvo pakartoti kelioms KNEG reikšmėms ($KNEG = 50, 100, 150$), o gautos tikimybės $\mathbb{P}(T_u = l)$, $l = 1, \dots, 10$ buvo palygintos tarpusavyje, apskaičiuojant didžiausią absoliutų skirtumą tarp rezultatų. Gautas maksimalus skirtumas buvo maždaug $1.11 \cdot 10^{-16}$, kas reiškia, kad skirtumas yra tikrai nereikšmingas, todėl skaičiavimuose naudotą pjūvį $KNEG = 100$ galima laikyti tinkamu ir neturinčiu įtakos galutiniam rezultatui.

Grafike (1) pavaizduotos funkcijos $\mathbb{P}(T_u = l)$ reikšmės grafiškai, kai $u \leq 10$. Grafikas leidžia vizualiai lengviau įvertinti, kaip pradinis turtas u veikia bankroto laiko pasiskirstymą.



1 pav.: Bankroto laiko tikimybių $\mathbb{P}(T_u = l)$ grafikas kai $c = 1$ ir $X \sim \mathcal{P}(1)$, $\theta \sim \mathcal{P}(1)$.

Pateiktas grafikas (1) vaizduoja bankroto tikimybes skirtingiems u iki $u = 10$, kai $c = 1$. Iš grafiko matyti priklausomybė tarp pradinio turto dydžio ir tikėtino bankroto laiko: didėjant pradiniam turtui, ankstyvojo bankroto tikimybės sparčiai mažėja o bankrotas tampa labiau tikėtinas vėlesniuose laiko momentuose l . Kreivės tampa lygesnės ir, didėjant pradiniam turtui u , jos vis labiau artėja prie 0. Tai rodo, kad didesnis pradinis turtas sumažina ankstyvojo bankroto tikimybę.

Aiškiai išsiskiria atvejis, kai $u = 0$: bankrotas pirmame žingsnyje yra labai tikėtinas (apie 65%), nes be jokio pradinio turto, draudikas negali padengti net vienos žalos. Didėjant pradiniam turtui u , pavyzdžiui, kai $u = 3$ arba $u = 5$, didžiausios tikimybės persikelia į vėlesnius laikotarpius, t.y. draudiko turtas gali padengti kelias žalas iki kol taps neigiamas. Kai $u = 10$ visų pirmųjų žingsnių tikimybės yra arti nulio, t.y. draudikas, su didesniu pradinio turto turi žymiai mažesnę riziką bankrutuoti pirmaisiais laiko momentais, nes didesnė turto suma veikia kaip saugumo buferis, leidžiantis padengti kelias žalas iš eilės.

Galima pastebėti, kad esant pakankamai dideliu u (pvz., kai $u \geq 5$) kreivės yra panašios, tai reiškia, kad didėjant pradiniam turtui, bankroto laiko pasiskirstymo forma stabilizuojasi.

Tokie rezultatai patvirtina, kad pradinis turtas tiesiogiai mažina tiek bendrą bankroto tikimybę, tiek tikimybę, kad bankrotas įvyks pirmaisiais laiko momentais.

Atskiros bankroto laiko tikimybės $\mathbb{P}(T_u = l)$ parodo, kokia yra bankroto rizika būtent l -tuoju laiko momentu, bet praktikoje taip pat svarbu žinoti, kokia

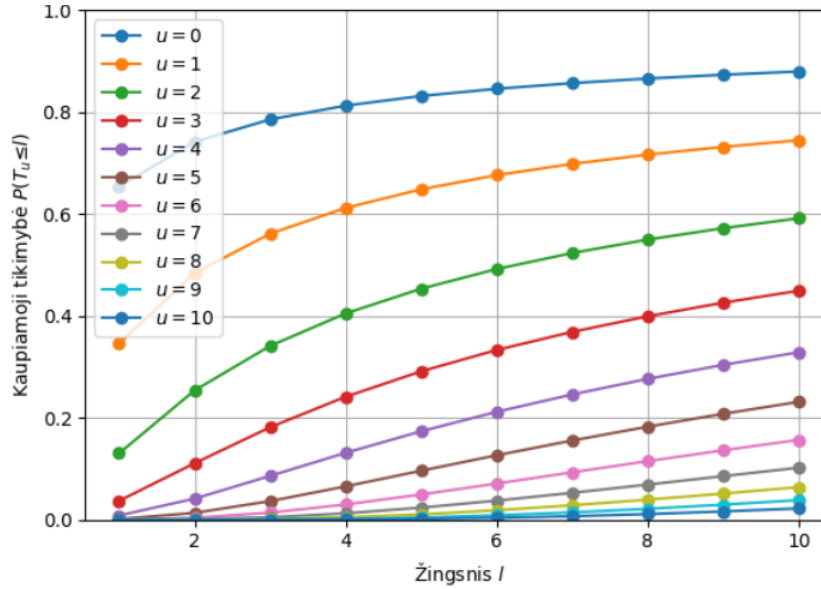
bus tikimybė, kad bankrotas įvyks iki tam tikro laiko momento, todėl dabar galima skaičiuoti baigtinio laiko bankroto tikimybes $\mathbb{P}(T_u \leq l)$, apibrėžtas apibrėžime 1.6, kurios leidžia įvertinti bankroto rizikos augimą bėgant laikui.

Baigtinio laiko bankroto tikimybių reikšmės:

$l \backslash u$	0	1	2	3	4	5	6	7
1	0.65425	0.34575	0.13048	0.03724	0.00845	0.00158	0.00025	0.00003
2	0.74198	0.48423	0.25401	0.11102	0.04155	0.01355	0.00389	0.00099
3	0.78568	0.56146	0.34127	0.18165	0.08610	0.03663	0.01406	0.00490
4	0.81281	0.61211	0.40492	0.24148	0.13145	0.06557	0.03004	0.01267
5	0.83173	0.64855	0.45352	0.29134	0.17368	0.09628	0.04968	0.02388
6	0.84587	0.67635	0.49206	0.33319	0.21183	0.12661	0.07115	0.03760
7	0.85696	0.69847	0.52354	0.36876	0.24599	0.15554	0.09320	0.05291
8	0.86596	0.71660	0.54987	0.39937	0.27656	0.18270	0.11508	0.06910
9	0.87345	0.73182	0.57229	0.42605	0.30399	0.20799	0.13636	0.08564
10	0.87981	0.74482	0.59168	0.44953	0.32872	0.23146	0.15683	0.10220

3 lentelė: Bankroto laiko tikimybės $\mathbb{P}(T_u \leq l)$, kai $c = 1$ ir $X \sim \mathcal{P}(1)$, $\theta \sim \mathcal{P}(1)$.

Toliau grafike (2) pavaizduotos funkcijos $P(T_u \leq l)$ reikšmės grafiškai, kai $u \leq 10$.



2 pav.: Bankroto laiko tikimybių $\mathbb{P}(T_u \leq l)$ grafikas kai $c = 1$ ir $X \sim \mathcal{P}(1)$, $\theta \sim \mathcal{P}(1)$.

Pateiktas grafikas (2) parodo baigtinio laiko bankroto tikimybes $\mathbb{P}(T_u \leq l)$ skirtingiems u iki $u = 10$, kai $c = 1$. Čia analizuojama, kokia yra tikimybė, kad

bankrotas įvyks iki tam tikro laiko momento.

Grafike (2) galima pastebėti, kad, kai $u = 0$, bankroto rizika yra didelė ir artimiausia vienetui, t.y. jau per pirmus kelis žingsnius tikimybė pasiekia daugiau nei 80%.

Didėjant pradiniam turtui, pavyzdžiui, kai $u = 5$, net ir po 10 žingsnių tikimybė siekia apie 23%, o kai $u = 10$ - vos kelis procentus. Tai rodo, kad didesnis pradinis turtas ne tik sumažina ankstyvojo bankroto tikimybę, bet ir prailgina laiką, per kurį rizika realiai pasireiškia.

Kadangi $X \sim P(1)$, $\theta \sim P(1)$ ir $c = 1$, tai, remiantis 1.7 apibrėžimu ir šaltiniu [4]

$$\mathbb{E}X - c\mathbb{E}\theta = 1 - 1 \cdot 1 = 0,$$

todėl šiuo atveju grynojo pelno sąlyga netenkinama ir bankroto tikimybė begaliniam laikui $\psi(u) = 1$.

Pavyzdžiui atlikus tuos pačius skaičiavimus Python iki 50 žingsnio, $\mathbb{P}(T_u \leq 50)$, kai $c = 1$ gaunamos tokios reikšmės:

$l \backslash u$	0	1	2	3	4	5	6	7
50	0.94582	0.88337	0.80872	0.73276	0.65903	0.58849	0.52166	0.45898

4 lentelė: Bankroto laiko tikimybės $\mathbb{P}(T_u \leq 50)$, kai $c = 1$ ir $X \sim \mathcal{P}(1)$, $\theta \sim \mathcal{P}(1)$.

Pateikti skaičiavimai $\mathbb{P}(T_u \leq 50)$ lentelėje (4) iliustruoja, kaip $\mathbb{P}(T_u \leq l)$ artėja prie vieneto didėjant l .

Pavyzdys 2.3. Tarkime, kad premijos surinkimo greitis $c > 0$, t.y. nebūtinai lygu vienetui ir $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$, $\theta \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$, kur $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ yra nepriklausomi Puasono atsitiktiniai dydžiai. Tegul pradinis draudiko turtas $u \in \mathbb{N}_0$. Šiame pavyzdyje parodoma, kaip praktiškai apskaičiuojamos bankroto laiko tikimybės su pasirinktomis parametru reikšmėmis.

Remiantis (7) formule:

$$\begin{aligned} f(k) &= \mathbb{P}(X - c\theta = k) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{\substack{j \geq 0 \\ cj + k \geq 0}} \frac{\lambda_1^{cj+k} \lambda_2^j}{j!(cj+k)!} \\ &= e^{-2} \sum_{\substack{j \geq 0 \\ cj + k \geq 0}} \frac{1}{j!(cj+k)!}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Tada

$$\mathbb{P}(T_u = 1) = 1 - \mathbb{P}(X - c\theta < u) = 1 - e^{-2} \sum_{k=-\infty}^{u-1} \sum_{\substack{j \geq 0 \\ cj + k \geq 0}} \frac{1}{j!(cj+k)!}. \quad (16)$$

Lema 2.2. *Tarkime, kad*

$$a_j(k) = \frac{\lambda_1^{cj} \lambda_2^j}{j!(cj+k)!}, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

kur $c > 0$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, o $k \leq u-1$ yra fiksuotas sveikasis skaičius.

Tada $\forall \varepsilon > 0, \exists J \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{j>J} a_j(k) < \varepsilon \quad \forall k \leq u-1.$$

Irodymas. Galima pastebėti, kad narys $a_j(k)$ yra apibrėžtas tik tada, kai $cj+k \geq 0$, nes kitaip faktorialas $(cj+k)!$ būtų neapibrėžtas, todėl, jei $cj+k < 0$, laikoma, kad

$$a_j(k) = 0.$$

Taigi, nemažinant bendrumo, faktorialą $(cj+k)!$ galima įvertinti taip:

$$(cj+k)! \geq 1, \quad (17)$$

nes faktorialas yra didėjanti funkcija.

Kadangi $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $c > 0$, $j = 0, 1, 2, \dots$, tai, remiantis (17), narį $a_j(k)$ galima įvertinti taip:

$$0 \leq a_j(k) = \frac{\lambda_1^{cj} \lambda_2^j}{j!(cj+k)!} \leq \frac{\lambda_1^{cj} \lambda_2^j}{j! \cdot 1} = \frac{(\lambda_1^c \lambda_2)^j}{j!} =: b_j. \quad (18)$$

Taigi, viršutinė riba b_j nepriklauso nuo k , todėl toks įvertis tinka visiems $k \leq u-1$.

Toliau galima pastebėti, kad suma $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ yra baigtinė:

$$\sum_{j=0}^{\infty} b_j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1^c \lambda_2)^j}{j!} = e^{\lambda_1^c \lambda_2} < \infty.$$

Kadangi $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ konverguoja, tai, remiantis [7], jos uodega tenkina tokią taisyklę:

$\forall \varepsilon > 0, \exists J \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{j>J} b_j < \varepsilon. \quad (19)$$

Tada iš (18) ir (19) seka, kad

$$\sum_{j>J} a_j(k) \leq \sum_{j>J} b_j \leq \varepsilon.$$

Taigi $\forall \varepsilon > 0, \exists J \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{j>J} a_j(k) < \varepsilon \quad \forall k \leq u-1.$$

□

Skaičiuojant bankroto laiko tikimybes, naudojama formulė:

$$\mathbb{P}(T_u = 1) = 1 - \mathbb{P}(X - c\theta < u) = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{k=-\infty}^{u-1} \sum_{\substack{j \geq 0 \\ cj+k \geq 0}} \frac{\lambda_1^{cj+k} \lambda_2^j}{j!(cj+k)!}.$$

Toliau bus įrodyta, kad išorinę sumą pagal k galima sumuoti nuo kažkokio didelio neigiamo skaičiaus reikšmingai nepakeičiant rezultato.

Lema 2.3. *Tarkime, kad*

$$a_j(k) = \frac{\lambda_1^{cj+k} \lambda_2^j}{j!(cj+k)!}, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

kur $c > 0$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

Galima pažymėti tikimybių masės funkciją

$$f(k) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(k).$$

Tada $\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{Z}$:

$$\sum_{k < -K} f(k) < \varepsilon.$$

Įrodymas. Pirmiausia reikia pastebėti, kad, kaip ir lemoje 2.2, narys $a_j(k)$ yra apibrėžtas tik tada, kai $cj + k \geq 0$, nes kitu atveju faktorialas $(cj + k)!$ būtų neapibrėžtas. Todėl, jei $cj + k < 0$, laikoma, kad

$$a_j(k) = 0.$$

Taigi visiems j ir k :

$$a_j(k) \geq 0.$$

Kadangi $a_j(k) \geq 0$ ir $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ tai ir $e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} > 0$, todėl

$$f(k) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(k) \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Kadangi $f(k)$ yra tikimybių masės funkcija, tai, remiantis apibrėžimu 1.5,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) = 1.$$

Taigi eilutė $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)$ konverguoja ir yra sudaryta iš neneigiamų narių.

Toliau galima apibrėžti dalines sumas:

$$S_K = \sum_{k=-K}^K f(k), \quad K \in \mathbb{N}.$$

Kadangi $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) = 1$, tai

$$\lim_{K \rightarrow \infty} S_K = 1.$$

Tuo tarpu

$$1 - S_K = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) - \sum_{k=-K}^K f(k) = \sum_{k < -K} f(k) + \sum_{k > K} f(k).$$

Kadangi visi $f(k) \geq 0$, gaunama nelygybė

$$0 \leq \sum_{k < -K} f(k) \leq 1 - S_K.$$

Kadangi $S_K \rightarrow 1$, tai $1 - S_K \rightarrow 0$, kai $K \rightarrow \infty$, todėl pagal dviejų policininkų principą [7]:

$$\sum_{k < -K} f(k) \rightarrow 0, \quad \text{kai } K \rightarrow \infty.$$

Vadinasi, kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks $K \in \mathbb{Z}$, kad

$$\sum_{k < -K} f(k) < \varepsilon.$$

□

Kadangi sprendžiamas uždavinys kai $c > 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 > 0$ tai lemų 2.2 ir 2.3 sąlygos tenkinamos ir jas galima taikyti formulei (16).

Remiantis lema 2.2, formulėje (16) vidinėje sumoje pagal j vietoj $+\infty$ galima naudoti pakankamai didelį sveikąjį skaičių, o pagal lema 2.3, išorinėje sumoje pagal k vietoj $-\infty$ galima naudoti pakankamai mažą sveikąjį skaičių, tai praktiniuose skaičiavimuose su Python naudojamas pjūvis $j = 0, 1, \dots, JMAX$, kai $JMAX = 500$ ir naudojamas pjūvis $k = -KNEG, \dots, u-1$, kai $KNEG = 500$.

Nors Python skaičiavimas pritaikytas bet kokiam $c > 0$, praktiniuose skaičiavimuose vienu metu galima analizuoti tik vieną fiksuotą c . Tolimesniuose skaičiavimuose $c = 5$.

Tuomet, naudojant formulę (16), gaunamos šios reikšmės:

$l \setminus u$	0	1	2	3	4	5	6	7
1	0.36923	0.23276	0.09724	0.02955	0.00699	0.00135	0.00022	0.00003

5 lentelė: Bankroto laiko tikimybės $\mathbb{P}(T_u = 1)$, kai $c = 5$ ir $X \sim \mathcal{P}(1)$, $\theta \sim \mathcal{P}(1)$.

Iš lentelėje (5) pateiktų rezultatų matosi toks pats dėsningumas kaip ir nagrinėjant atvejį, kai $c = 1$ (1): didėjant pradiniam turtui u , bankroto tikimybė per pirmą žingsnį $P(T_u = 1)$ sparčiai mažėja. Pavyzdžiui, kai $u = 0$, gaunama $P(T_0 = 1) = 0.3692$, tačiau padidinus turtą iki $u = 4$, tikimybė sumažėja iki

0.007, o kai $u \geq 6$, tikimybė praktiškai lygi nuliui. Taigi pakankamas pradinis turtas smarkiai sumažina bankroto riziką.

Taip pat, lyginant (1) ir (5) lenteles, galima pastebėti, kad kai premijų surinkimo greitis yra didesnis, tikimybė bankrutuoti per pirmąjį žingsnį yra mažesnė visiems pradinio turto u lygiams. Toki rezultatai patvirtina intuiciją, kad kai draudikas gauna daugiau pajamų iš premijų, jo finansinė padėtis tampa stabilėsnė ir tada didesnis premijų surinkimo greitis veikia kaip papildoma saugumo pagalvė, mažinanti bankroto laiko tikimybes.

Kai $T_u = 2, 3, \dots$, bankroto laiko tikimybė apskaičiuojama remiantis rekursine formule (4):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_u = l) &= \sum_{k=-\infty}^{u-1} f(k) \mathbb{P}(T_{u-k} = l-1) \\ &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{k=-\infty}^{u-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^{cj+k} \lambda_2^j}{j!(cj+k)!} \mathbb{P}(T_{u-k} = l-1).\end{aligned}$$

Kadangi, kaip ir $c = 1$ atveju $0 \leq \mathbb{P}(T_{u-k} = l-1) \leq 1$, tai, remiantis lema 2.2 gaunama:

$$0 \leq \sum_{j>J} \frac{\lambda_1^{cj+k} \lambda_2^j}{j!(cj+k)!} \mathbb{P}(T_{u-k} = l-1) \leq \sum_{j>J} \frac{\lambda_1^{cj+k} \lambda_2^j}{j!(cj+k)!} < \varepsilon.$$

Analogiškai, remiantis lema 2.3,

$$0 \leq \sum_{k<-K} f(k) \mathbb{P}(T_{u-k} = l-1) \leq \sum_{k<-K} f(k) < \varepsilon.$$

Taigi, kadangi nagrinėjamu atveju $c > 0$ ir $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 > 0$, tai abu karpymai (pagal j ir pagal k) įtakos galutinam rezultatui neturi ir vidinėje sumoje pagal j vietoj $+\infty$ galima naudoti pakankamai didelį sveikąjį skaičių, o išorinėje sumoje pagal k vietoj $-\infty$ galima naudoti pakankamai mažą sveikąjį skaičių, todėl praktiniuose skaičiavimuose ir toliau naudojami tie patys pjūviai $j = 0, 1, \dots, JMAX$, kai $JMAX = 500$ ir $k = -KNEG, \dots, u-1$, kai $KNEG = 500$.

Remiantis Python skaičiavimais bankroto laiko tikimybių, kai $T_u = 2, 3, \dots$ ir $c = 5$ gautos reikšmės pavaizduotos lentelėje (6):

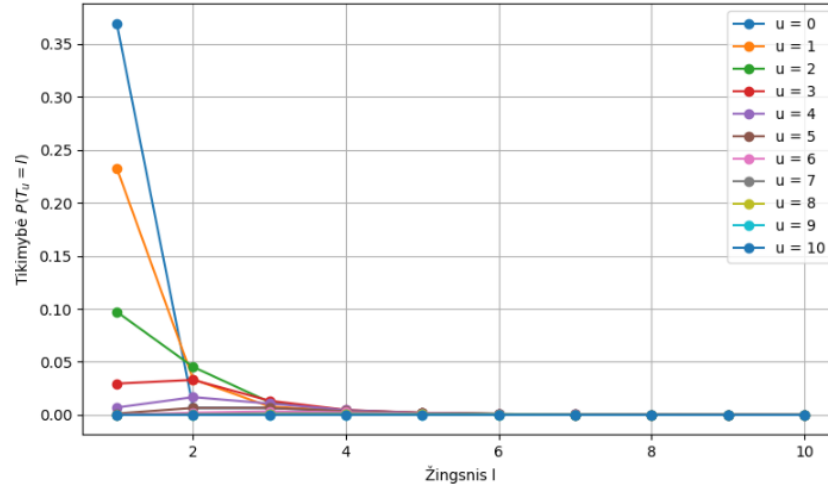
$l \backslash u$	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0.00664	0.03366	0.04526	0.03306	0.01681	0.00664	0.00216	0.00060
3	0.00665	0.00793	0.01213	0.01342	0.01075	0.00667	0.00338	0.00145
4	0.00365	0.00356	0.00416	0.00472	0.00459	0.00371	0.00251	0.00145
5	0.00164	0.00181	0.00199	0.00203	0.00195	0.00172	0.00136	0.00096
6	0.00076	0.00089	0.00102	0.00103	0.00095	0.00083	0.00068	0.00053
7	0.00039	0.00045	0.00052	0.00054	0.00050	0.00043	0.00036	0.00028
8	0.00021	0.00024	0.00028	0.00029	0.00027	0.00024	0.00020	0.00016
9	0.00011	0.00013	0.00015	0.00015	0.00015	0.00013	0.00011	0.00009
10	0.00006	0.00007	0.00008	0.00009	0.00008	0.00007	0.00006	0.00005

6 lentelė: Bankroto laiko tikimybės $\mathbb{P}(T_u = l)$, kai $c = 5$ ir $X \sim \mathcal{P}(1)$, $\theta \sim \mathcal{P}(1)$.

Siekiant įsitikinti, kad pjūviai $j = 0, 1, \dots, JMAX$, kai $JMAX = 500$ ir $k = -KNEG, \dots, u - 1$, kai $KNEG = 500$ tikrai neturi reikšmingos įtakos rezultatams, buvo atliktas jautrumo testas. Tie patys skaičiavimai buvo pakartoti kelioms KNEG reikšmėms ($KNEG = 300, 500, 700$) fiksuojant $JMAX=500$ reikšmę, o gautos tikimybės $\mathbb{P}(T_u = l)$, $l = 1, \dots, 10$ buvo palygintos tarpusavyje. Gauti skirtumai tarp rezultatų buvo praktiškai lygūs nuliui, todėl skaičiavimuose naudotą pjūvį $KNEG = 500$ galima laikyti tinkamu ir neturiniu įtakos galutiniam rezultatui.

Analogiškai buvo patikrinta pjūvio pagal j įtaka. Fiksuojant $KNEG = 500$ reikšmę buvo atlikti skaičiavimai su $JMAX = 300, 500$ ir 700 ir visais atvejais gautos tikimybės sutapo, todėl galima teigti, kad $JMAX$ pjūvio pasirinkimas rezultatų nepaveikia.

Toliau grafike (3) pavaizduotos funkcijos $P(T_u = l)$ reikšmės grafiškai, kai $u \leq 10$.



3 pav.: Bankroto laiko tikimybių $\mathbb{P}(T_u = l)$ grafikas kai $c = 5$ ir $X \sim \mathcal{P}(1)$, $\theta \sim \mathcal{P}(1)$.

Pateiktas grafikas (3) vaizduoja bankroto laiko tikimybes skirtingiems u iki $u = 10$, kai $c = 5$. Iš grafiko matyti, kad kaip ir $c = 1$ atveju, bankroto laiko tikimybės sparčiai mažėja didėjant pradinio turto kiekiui u . Jau nuo $u \geq 4$ visos tikimybės $\mathbb{P}(T_u = l)$ yra labai arti 0. Galima pastebėti, kad kai $u = 0$, bankroto tikimybė antrame žingsnyje yra arti nulio. Taip yra todėl, nes kai $u = 0$, į antrą žingsnį pereina tik tie atvejai, kurie pirmame žingsnyje yra palankūs (t.y. turtas netampa neigiamas). Neturint pradinio turto toks atvejis galimas tik tada, kai neįvyksta žala, o tada turtas ženkliai pakyla, nes premijų surinkimo greitis $c = 5$, todėl bankroto tikimybė antrame žingsnyje tampa maža. Tuo tarpu, kai $u = 1, 2, \dots$, pirmame žingsnyje įmonė dar gali atlaikyti keletą žalių ir tokiais atvejais turtas, einant į antrą žingsnį, gali būti artimas nuliui, o su mažu turtu, bankroto tikimybė yra didesnė. Taigi, su nuliniu pradiniu turtu nebankrutavus per pirmą žingsnį, antrame žingsnyje bankroto tikimybė tampa maža, nes turtas po pirmojo žingsnio tampa pakankamai didelis.

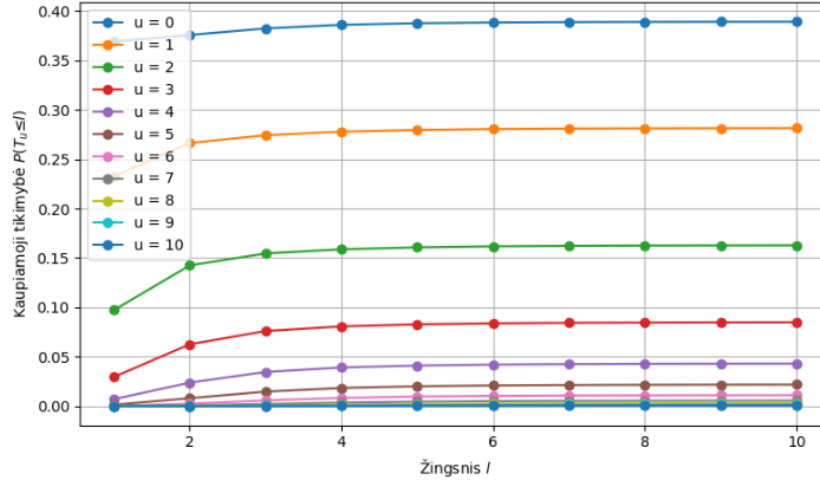
Lyginant su $c = 1$ grafiku, reikšmingos tikimybės čia yra ties pirmais dviem žingsniais. Tai reiškia, kad esant didesnei c reikšmei, bankrotas labiau tikėtinas tik pačioje pradžioje, o vėlesniuose laiko momentuose tikimybė tampa artima 0, kai tuo tarpu $c = 1$ atveju tikimybės išsidėsto plačiau, reikšmingos tikimybės dar yra ties 3, 4 laiko momentais. Kadangi $c = 5$ atveju pajamos per vieną žingsnį didėja greičiau, tai ir turtas kaupiamas greičiau, todėl bankroto tikimybės mažėja pakankamai greitai ir bankroto laiko pasiskirstymas tampa siauresnis.

Toliau pateikiamos baigtinio laiko bankroto tikimybių reikšmės:

$l \backslash u$	0	1	2	3	4	5	6	7
1	0.36923	0.23276	0.09724	0.02955	0.00699	0.00135	0.00022	0.00003
2	0.37586	0.26643	0.14250	0.06260	0.02379	0.00799	0.00238	0.00063
3	0.38251	0.27436	0.15463	0.07602	0.03454	0.01466	0.00576	0.00208
4	0.38616	0.27792	0.15879	0.08074	0.03913	0.01837	0.00828	0.00354
5	0.38780	0.27973	0.16078	0.08277	0.04109	0.02009	0.00964	0.00449
6	0.38856	0.28062	0.16180	0.08380	0.04204	0.02092	0.01032	0.00502
7	0.38894	0.28107	0.16232	0.08434	0.04254	0.02136	0.01068	0.00530
8	0.38915	0.28131	0.16260	0.08463	0.04281	0.02159	0.01088	0.00546
9	0.38926	0.28143	0.16275	0.08478	0.04295	0.02172	0.01099	0.00554
10	0.38932	0.28151	0.16283	0.08487	0.04303	0.02180	0.01105	0.00559

7 lentelė: Bankroto laiko tikimybės $\mathbb{P}(T_u \leq l)$, kai $c = 5$ ir $X \sim \mathcal{P}(1)$, $\theta \sim \mathcal{P}(1)$.

Grafike (4) pavaizduotos funkcijos $P(T_u \leq l)$ reikšmės grafiškai, kai $u \leq 10$.



4 pav.: Bankroto laiko tikimybių $\mathbb{P}(T_u \leq l)$ grafikas kai $c = 5$ ir $X \sim \mathcal{P}(1)$, $\theta \sim \mathcal{P}(1)$.

Pateiktas grafikas (4) parodo baigtinio laiko bankroto tikimybes $\mathbb{P}(T_u \leq l)$ skirtingiems u iki $u = 10$, kai $c = 5$.

Galima pastebėti, kad kai $c = 5$, baigtinio laiko bankroto tikimybės yra žymiai mažesnės, o lyginant su atveju grafike (2), kai $c = 1$, kreivės greitai stabilizuojasi. Tai reiškia, kad bankrotas dažniausiai įvyksta per pirmuosius du žingsnius, o vėlesni žingsniai papildomos rizikos beveik nesukuria. Taigi, kuo didesnis įmokų surinkimo greitis, tuo greičiau formuojasi turtas ir bankroto rizika susikoncentruoja proceso pradžioje, o vėliau beveik nebeauga.

Kadangi $X \sim P(1)$, $\theta \sim P(1)$ ir $c = 5$, tai, remiantis 1.7 apibrėžimu ir šaltiniu [4]

$$\mathbb{E}X - c\mathbb{E}\theta = 1 - 5 \cdot 1 = -5 < 0,$$

todėl šiuo atveju grynojo pelno sąlyga tenkinama ir bankroto tikimybė begaliniame laike $\psi(u) < 1$.

Grafike (4) galima pastebėti, kad didėjant žingsnių skaičiui l , tikimybės $\mathbb{P}(T_u \leq l)$ stabilizuojasi ir neartėja prie vieneto, kas ir atitinka teorinį rezultatą, kad grynojo pelno sąlyga tenkinama. Tai reiškia, kad draudiko gaunamos vidutinės pajamos viršija vidutinius patiriamus nuostolius ir draudikas dirba pelningai.

Pavyzdys 2.4. Tarkime, kad premijos surinkimo greitis $c = 5$ ir tarplaidžių skirstinys yra $\theta \sim \mathcal{P}(1)$, o žalų pasiskirstymo parametras bus pakeistas, t.y. $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$. Šiame pavyzdyje nagrinėjama žalų intensyvumo λ_1 įtaka bankroto tikimybėms.

Šiuo atveju $\mathbb{E}X = \lambda_1$, $\mathbb{E}\theta = 1$ ir grynojo pelno sąlyga, apibrėžta apibrėžime 1.7 įgyja pavidalą $\lambda_1 - 5 < 0$, todėl, kai $\lambda_1 < 5$, bankroto tikimybė begaliniame

laikė $\psi(u) < 1$.

Nagrinėjamas atvejis, kai $\lambda_1 = 4$, tada grynojo pelno sąlyga:

$$\mathbb{E}X - c\mathbb{E}\theta = 4 - 5 \cdot 1 = -1 < 0$$

ir remiantis apibrėžimu 1.7, $\psi(u) < 1$.

Kai $c = 5$ ir $X \sim \mathcal{P}(4)$, $\theta \sim \mathcal{P}(1)$, kur X ir θ yra nepriklausomi Puasono atsitiktiniai dydžiai ir pradinis draudiko turtas $u \in \mathbb{N}_0$, tai, remiantis (7):

$$\begin{aligned} f(k) &= \mathbb{P}(X - c\theta = k) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{\substack{j \geq 0 \\ cj+k \geq 0}} \frac{\lambda_1^{cj+k} \lambda_2^j}{j!(cj+k)!} \\ &= e^{-5} \sum_{\substack{j \geq 0 \\ 5j+k \geq 0}} \frac{4^{5j+k}}{j!(5j+k)!}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Tada

$$\mathbb{P}(T_u = 1) = 1 - \mathbb{P}(X - c\theta < u) = 1 - e^{-5} \sum_{k=-\infty}^{u-1} \sum_{\substack{j \geq 0 \\ 5j+k \geq 0}} \frac{4^{5j+k}}{j!(5j+k)!}. \quad (20)$$

Formulei (20) galioja lemos 2.2 ir 2.3, nes $\lambda_1 = 4 > 0$ ir $\lambda_2 = 1 > 0$, o $c = 5 > 0$, todėl praktiniuose skaičiavimuose vidinėje sumoje pagal j vietoj $+\infty$ galima naudoti pakankamai didelį sveikąjį skaičių, o išorinėje sumoje pagal k vietoj $-\infty$ galima naudoti pakankamai mažą sveikąjį skaičių, todėl praktiniuose skaičiavimuose naudojami tie patys rėžiai kaip ir $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ atveju: $j = 0, 1, \dots, JMAX$, kai $JMAX = 500$ ir $k = -KNEG, \dots, u-1$, kai $KNEG = 500$.

Tuomet naudojant formulę (20) gaunamos šios reikšmės:

$l \setminus u$	0	1	2	3	4	5	6	7
1	0.50592	0.44071	0.37507	0.29915	0.21629	0.13954	0.08009	0.04105

8 lentelė: Bankroto laiko tikimybės $\mathbb{P}(T_u = 1)$, kai $c = 5$ ir $X \sim \mathcal{P}(4)$, $\theta \sim \mathcal{P}(1)$.

Iš lentelėje (8) pateiktų rezultatų matosi toks pats dėsningumas kaip ir nagrinėjant atvejį, kai $c = 5$ ir $X \sim \mathcal{P}(1)$, $\theta \sim \mathcal{P}(1)$ lentelėje (5): didėjant pradiniam turtui u , bankroto tikimybė per pirmą žingsnį $\mathbb{P}(T_u = 1)$ sparčiai mažėja.

Lyginant rezultatus tarp lentelių (8) ir (5), galima pastebėti, kad padidėjęs žalų intensyvumas nuo $\lambda_1 = 1$ iki $\lambda_1 = 4$, bankroto tikimybės šiek tiek padidina visoms pradinio turto reikšmėms u . Pavyzdžiui, kai $u = 0$, bankroto tikimybė pirmame žingsnyje padidėja nuo ~ 0.37 iki ~ 0.5 .

Kai $T_u = 2, 3, \dots$, bankroto laiko tikimybė apskaičiuojama remiantis rekursine formule (4):

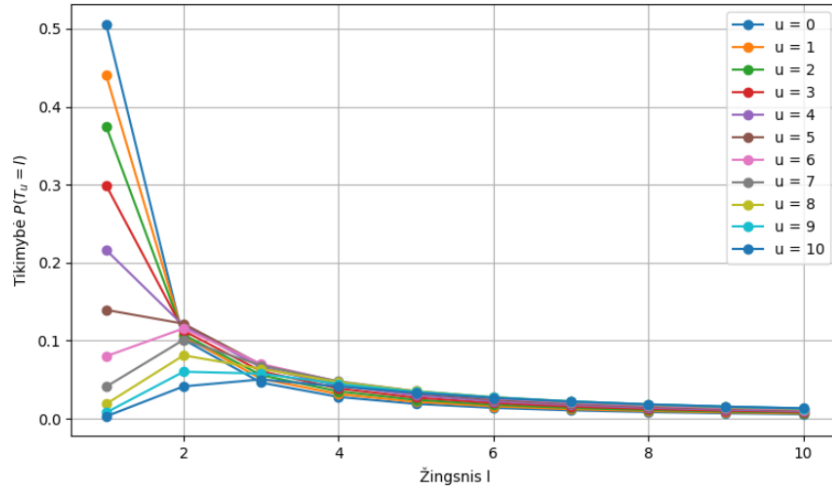
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_u = l) &= \sum_{k=-\infty}^{u-1} f(k) \mathbb{P}(T_{u-k} = l-1) \\ &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{k=-\infty}^{u-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^{cj+k} \lambda_2^j}{j!(cj+k)!} \mathbb{P}(T_{u-k} = l-1) \\ &= e^{-5} \sum_{k=-\infty}^{u-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{4^{5j+k}}{j!(5j+k)!} \mathbb{P}(T_{u-k} = l-1)\end{aligned}\quad (21)$$

Remiantis Python skaičiavimais gautos bankroto laiko tikimybių reikšmės pavaizduotos lentelėje (9):

$l \backslash u$	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0.10146	0.10565	0.10769	0.11267	0.11928	0.12179	0.11579	0.10119
3	0.04633	0.05130	0.05591	0.06096	0.06590	0.06934	0.07021	0.06831
4	0.02796	0.03153	0.03497	0.03868	0.04245	0.04559	0.04748	0.04787
5	0.01906	0.02168	0.02427	0.02709	0.03000	0.03257	0.03441	0.03533
6	0.01396	0.01597	0.01799	0.02019	0.02249	0.02458	0.02620	0.02721
7	0.01073	0.01232	0.01393	0.01570	0.01756	0.01929	0.02069	0.02165
8	0.00854	0.00983	0.01115	0.01260	0.01414	0.01559	0.01679	0.01766
9	0.00698	0.00805	0.00915	0.01036	0.01165	0.01288	0.01392	0.01470
10	0.00582	0.00672	0.00765	0.00868	0.00977	0.01083	0.01173	0.01244

9 lentelė: Bankroto laiko tikimybės $\mathbb{P}(T_u = l)$, kai $c = 5$ ir $X \sim \mathcal{P}(4)$, $\theta \sim \mathcal{P}(1)$.

Toliau grafike (5) pavaizduotos lentelių (8) ir (9) reikšmės:



5 pav.: Bankroto laiko tikimybių $\mathbb{P}(T_u = l)$ grafikas kai $c = 5$ ir $X \sim \mathcal{P}(4)$, $\theta \sim \mathcal{P}(1)$.

Iš pateikto grafiko (5) matyti, kad didžiausia bankroto tikimybė daugeliu atvejų pasiekama pirmuoju ir antruoju laiko momentais, nes kai žalų intensyvumas yra didesnis, jau per pirmuosius laiko momentus gali įvykti reikšmingos žalos.

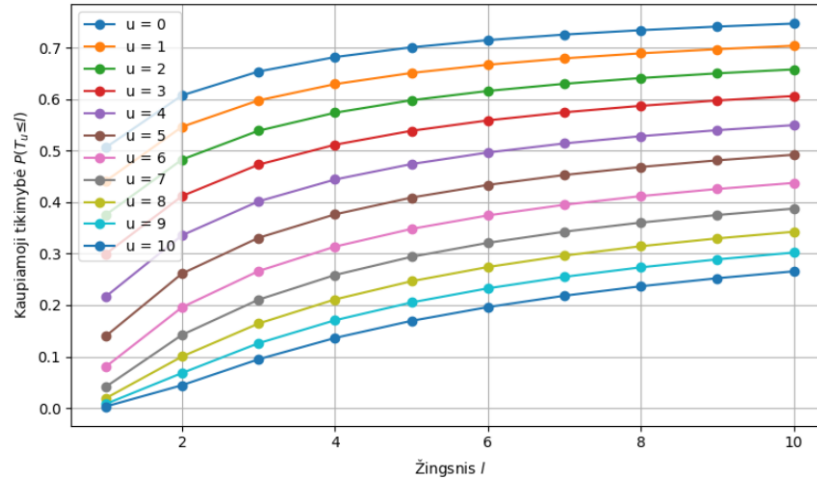
Lyginant su (3) grafiku, galima pastebėti, kad padidėjus žalų intensyvumui, bankroto tikimybės išlieka didesnės ir vėlesniuose laiko momentuose.

Toliau lentelėje (10) pateikiamos baigtinio laiko bankroto tikimybių reikšmės:

$l \backslash u$	0	1	2	3	4	5	6	7
1	0.50592	0.44071	0.37507	0.29915	0.21629	0.13954	0.08009	0.04105
2	0.60738	0.54636	0.48276	0.41182	0.33557	0.26133	0.19589	0.14224
3	0.65371	0.59767	0.53867	0.47278	0.40147	0.33067	0.26610	0.21055
4	0.68167	0.62920	0.57364	0.51146	0.44392	0.37626	0.31358	0.25843
5	0.70073	0.65088	0.59791	0.53855	0.47392	0.40883	0.34799	0.29375
6	0.71469	0.66685	0.61590	0.55874	0.49641	0.43342	0.37419	0.32096
7	0.72543	0.67917	0.62983	0.57444	0.51397	0.45271	0.39488	0.34261
8	0.73397	0.68900	0.64099	0.58704	0.52811	0.46830	0.41166	0.36027
9	0.74095	0.69705	0.65013	0.59740	0.53976	0.48117	0.42558	0.37497
10	0.74676	0.70377	0.65778	0.60608	0.54953	0.49200	0.43731	0.38741

10 lentelė: Bankroto laiko tikimybės $\mathbb{P}(T_u \leq l)$, kai $c = 5$ ir $X \sim \mathcal{P}(4)$, $\theta \sim \mathcal{P}(1)$.

Grafike (6) pavaizduotos funkcijos $P(T_u \leq l)$ reikšmės grafiškai, kai $u \leq 10$.



6 pav.: Bankroto laiko tikimybių $\mathbb{P}(T_u \leq l)$ grafikas kai $c = 5$ ir $X \sim \mathcal{P}(4)$, $\theta \sim \mathcal{P}(1)$.

Iš pateikto grafiko (6) galima pastebėti, kad kai $\lambda_1 = 4$, baigtinio laiko bankroto tikimybės $\mathbb{P}(T_u \leq l)$ sparčiai didėja pirmaisiais laiko momentais, o vėliau po truputį stabilizuojasi. Didėjant pradiniam turtui u , baigtinio laiko bankroto tikimybės mažėja, tačiau visoms u reikšmėms ji stabilizuojasi lėčiau

nei atveju, kai $X \sim \mathcal{P}(1)$.

Nors abiem atvejais tenkinama grynojo pelno sąlyga $\mathbb{E}X - c\mathbb{E}\theta < 0$, kai $\lambda_1 = 4$ skirtumas tarp vidutinių nuostolių ir vidutinių pajamų sumažėja. Dėl šios priežasties ankstyvojo bankroto rizika yra didesnė, net ir esant tam pačiam premijų surinkimo greičiui $c = 5$.

Pavyzdys 2.5. Tarkime, kad žali skirstinys yra $X \sim \mathcal{P}(1)$, $c = 5$, o tarplaikių skirstinio parametras bus pakeistas, t. y. $\theta \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$. Šiame pavyzdyje nagrinėjama tarplaikių pasiskirstymo įtaka bankroto tikimybėms.

Kadangi $\mathbb{E}X = 1$, o $\mathbb{E}\theta = \lambda_2$, grynojo pelno sąlyga, apibrėžta apibrėžime 1.7 įgyja pavidalą $1 - 5\lambda_2 < 0$, todėl, kai $\lambda_2 > 0.2$, bankroto tikimybė begaliniam laikui $\psi(u) < 1$.

Toliau bus nagrinėjamas atvejis, kai $\lambda_2 = 0.25$, tada grynojo pelno sąlyga:

$$\mathbb{E}X - c\mathbb{E}\theta = 1 - 5 \cdot 0.25 = -0.25 < 0$$

ir, remiantis apibrėžimu 1.7, $\psi(u) < 1$.

Kai $c = 5$ ir $X \sim \mathcal{P}(1)$, $\theta \sim \mathcal{P}(0.25)$, kur X ir θ yra nepriklausomi Puasono atsitiktiniai dydžiai ir pradinis draudiko turtas $u \in \mathbb{N}_0$, tai, remiantis (7):

$$\begin{aligned} f(k) &= \mathbb{P}(X - c\theta = k) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{\substack{j \geq 0 \\ cj + k \geq 0}} \frac{\lambda_1^{cj+k} \lambda_2^j}{j!(cj+k)!} \\ &= e^{-1.25} \sum_{\substack{j \geq 0 \\ 5j + k \geq 0}} \frac{0.25^j}{j!(5j+k)!}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Tada

$$\mathbb{P}(T_u = 1) = 1 - \mathbb{P}(X - c\theta < u) = 1 - e^{-1.25} \sum_{k=-\infty}^{u-1} \sum_{\substack{j \geq 0 \\ 5j + k \geq 0}} \frac{0.25^j}{j!(5j+k)!}. \quad (22)$$

Formulei (22) galioja lemos 2.2 ir 2.3, nes $\lambda_1 = 1 > 0$ ir $\lambda_2 = 0.25 > 0$, o $c = 5 > 0$, todėl praktiniuose skaičiavimuose naudojami tie patys režiai kaip ir $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ atveju: $j = 0, 1, \dots, JMAX$, kai $JMAX = 500$ ir $k = -KNEG, \dots, u - 1$, kai $KNEG = 500$.

Tuomet naudojant formulę (22) gaunamos šios reikšmės:

$l \setminus u$	0	1	2	3	4	5	6	7
1	0.77951	0.49241	0.20581	0.06254	0.01479	0.00285	0.00046	0.00006

11 lentelė: Bankroto laiko tikimybės $\mathbb{P}(T_u = 1)$, kai $c = 5$ ir $X \sim \mathcal{P}(1)$, $\theta \sim \mathcal{P}(0.25)$.

Iš lentelėje (11) pateiktų rezultatų matosi toks pats dėsningumas kaip ir nagrinėjant atvejį, kai $c = 5$ ir $X \sim \mathcal{P}(1)$, $\theta \sim \mathcal{P}(1)$ lentelėje (5): didėjant pradiniam turtui u , bankroto tikimybė per pirmą laiko momentą $P(T_u = 1)$ sparčiai mažėja.

Lyginant rezultatus tarp lentelių (11) ir (5), galima pastebėti, kad sumažinus tarplaikių parametą nuo $\lambda_2 = 1$ iki $\lambda_2 = 0.25$, bankroto tikimybės pirmuoju laiko momentu padidėja visoms pradinio turto reikšmėms u . Pavyzdžiui, kai $u = 0$, bankroto tikimybė padidėja nuo ~ 0.37 iki ~ 0.78 . Tokie rezultatai parodo, kad bankroto rizika gali padidėti tiek dėl padidėjusio žalų intensyvumo, tiek dėl sumažinto tarplaikių parametro.

Kai $T_u = 2, 3, \dots$, bankroto laiko tikimybė apskaičiuojama remiantis rekursine formule (4):

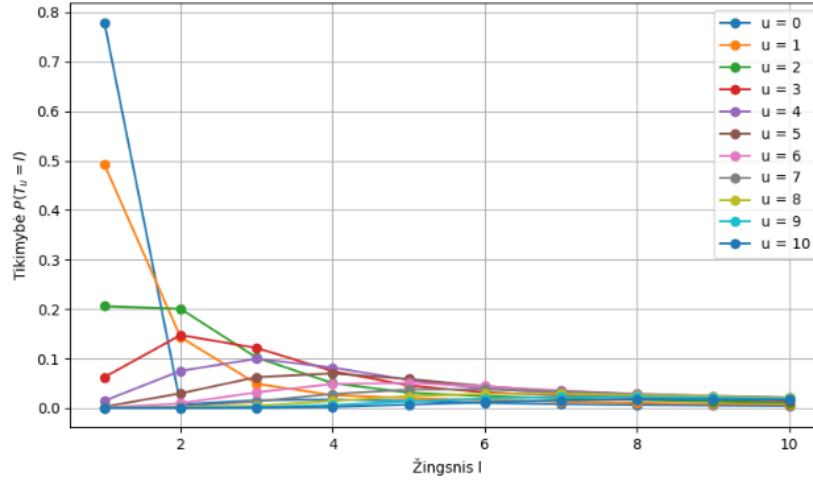
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_u = l) &= \sum_{k=-\infty}^{u-1} f(k) \mathbb{P}(T_{u-k} = l-1) \\ &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{k=-\infty}^{u-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^{cj+k} \lambda_2^j}{j!(cj+k)!} \mathbb{P}(T_{u-k} = l-1) \\ &= e^{-1.25} \sum_{k=-\infty}^{u-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{0.25^j}{j!(5j+k)!} \mathbb{P}(T_{u-k} = l-1) \end{aligned} \quad (23)$$

Remiantis Python skaičiavimais gautos bankroto laiko tikimybių reikšmės pavaizduotos lentelėje (12):

$l \backslash u$	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0.00743	0.14350	0.20072	0.14759	0.07519	0.02973	0.00969	0.00270
3	0.01564	0.04908	0.10205	0.12162	0.09985	0.06262	0.03188	0.01370
4	0.01744	0.02622	0.05044	0.07473	0.08204	0.07008	0.04876	0.02859
5	0.01447	0.02012	0.03129	0.04560	0.05677	0.05872	0.05081	0.03747
6	0.01071	0.01650	0.02409	0.03208	0.03964	0.04432	0.04375	0.03787
7	0.00799	0.01323	0.01983	0.02557	0.03035	0.03392	0.03529	0.03356
8	0.00634	0.01060	0.01634	0.02132	0.02501	0.02753	0.02882	0.02850
9	0.00529	0.00871	0.01350	0.01790	0.02121	0.02335	0.02441	0.02440
10	0.00453	0.00736	0.01135	0.01514	0.01815	0.02018	0.02122	0.02134

12 lentelė: Bankroto laiko tikimybės $\mathbb{P}(T_u = l)$, kai $c = 5$ ir $X \sim \mathcal{P}(1)$, $\theta \sim \mathcal{P}(0.25)$.

Grafike (7) pavaizduotos lentelių (11) ir (12) reikšmės:



7 pav.: Bankroto laiko tikimybių $\mathbb{P}(T_u = l)$ grafikas kai $c = 5$ ir $X \sim \mathcal{P}(1)$, $\theta \sim \mathcal{P}(0.25)$.

Iš pateikto (7) grafiko matyti, kad didžiausia bankroto tikimybė daugeliu atvejų pasiekama pirmaisiais laiko momentais. Ypač ryški ankstyvojo bankroto rizika pastebima esant mažoms pradinio turto reikšmėms u . Didėjant žingsniui l , bankroto laiko tikimybės mažėja ir vėlesniuose laiko momentuose tampa artimos nuliui.

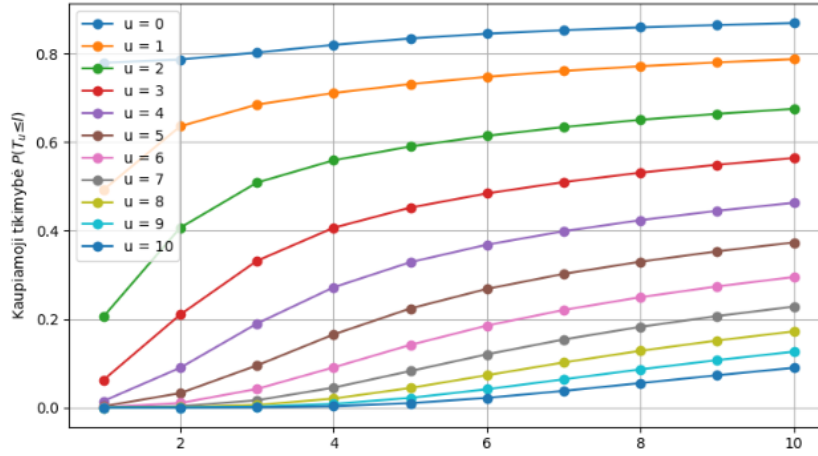
Lyginant su (3) grafiku, galima pastebėti, kad sumažinus tarplaikių parametro reikšmę iki $\lambda_2 = 0.25$, bankroto tikimybės pirmaisiais laiko momentais ženkliai padidėja visoms pradinio turto reikšmėms u .

Lentelėje (13) pateikiamos baigtinio laiko bankroto tikimybių reikšmės:

$l \backslash u$	0	1	2	3	4	5	6	7
1	0.77951	0.49241	0.20581	0.06254	0.01479	0.00285	0.00046	0.00006
2	0.78694	0.63591	0.40653	0.21013	0.08997	0.03258	0.01015	0.00276
3	0.80258	0.68499	0.50857	0.33175	0.18983	0.09520	0.04203	0.01647
4	0.82002	0.71121	0.55901	0.40649	0.27186	0.16528	0.09079	0.04506
5	0.83449	0.73133	0.59030	0.45209	0.32864	0.22399	0.14160	0.08253
6	0.84520	0.74783	0.61439	0.48417	0.36828	0.26832	0.18535	0.12039
7	0.85319	0.76106	0.63422	0.50974	0.39862	0.30224	0.22065	0.15395
8	0.85952	0.77166	0.65056	0.53106	0.42363	0.329778	0.24947	0.18245
9	0.86482	0.78037	0.66405	0.54895	0.44484	0.35313	0.27388	0.20685
10	0.86934	0.78774	0.67541	0.56409	0.46299	0.37331	0.29510	0.22819

13 lentelė: Bankroto laiko tikimybės $\mathbb{P}(T_u \leq l)$, kai $c = 5$ ir $X \sim \mathcal{P}(1)$, $\theta \sim \mathcal{P}(0.25)$.

Grafike (8) pavaizduotos funkcijos $P(T_u \leq l)$ reikšmės grafiškai, kai $u \leq 10$.



8 pav.: Bankroto laiko tikimybių $\mathbb{P}(T_u \leq l)$ grafikas kai $c = 5$ ir $X \sim \mathcal{P}(1)$, $\theta \sim \mathcal{P}(0.25)$.

Pateiktą (8) grafiką lyginant su (4) grafiku, galima pastebėti, kad pasikeitus tarplaičių skirstiniui, baigtinio laiko bankroto tikimybės $\mathbb{P}(T_u \leq l)$ auga sparčiau pirmaisiais laiko momentais.

Nors šiuo atveju grynojo pelno sąlyga $\mathbb{E}X - c\mathbb{E}\theta < 0$ tenkinama, gauti rezultatai rodo, kad nors ir bankroto tikimybė begaliniame laike neviršija vieneto, toks tarplaičių parametro reikšmės pokytis daro įtaką bankroto rizikos pasiskirstymui.

Apibendrinant praktinės dalies rezultatus, galima teigti, kad diskretaus laiko E. Sparre Andersen modelis leidžia aiškiai įvertinti bankroto laiko pasiskirstymo priklausomybę nuo pradinio turto, premijų surinkimo greičio bei žalų ir tarplaičių pasiskirstymo. Skaitiniai rezultatai ir jų grafikai leidžia įvertinti, kaip šios priklausomybės pasireiškia praktiniuose skaičiavimuose. Taip pat parodyta, kad taikomi skaičiavimo metodai ir pasirinkti pjūviai leidžia patikimai ir tiksliai apskaičiuoti bankroto laiko tikimybes praktiniuose uždaviniuose.

Išvados

Šiame magistro baigiamajame darbe buvo nagrinėtas diskretaus laiko E. Sparre Andersen rizikos modelis ir bankroto laiko pasiskirstymas. Teorinėje darbo dalyje apibrėžtas draudiko turto procesas, bankroto laikas bei baigtinio ir begalinio laiko bankroto tikimybės, išvesta rekursinė bankroto laiko tikimybių skaičiavimo formulė ir aptarta grynojo pelno sąlyga.

Praktinėje darbo dalyje, nagrinėjant atvejus su Puasono skirstiniais, atlikti skaitiniai bankroto laiko tikimybių skaičiavimai. Nustatyta, kad pradinis draudiko turtas, premijų surinkimo greitis bei žalų ir tarplaikų skirstinių parametrų pasirinkimas turi esminę įtaką bankroto laiko pasiskirstymui. Taip pat parodyta, kad pasirinkti skaitiniai metodai ir taikomi pjūviai yra tinkami praktiniams bankroto laiko tikimybių skaičiavimams.

Ateityje būtų galima pratęsti šiame darbe pradėtą tyrimą, taikant aprašytus skaičiavimo metodus kitiems diskretaus laiko rizikos modelio parametrų pasirinkimams ir skirstiniams.

Literatūros šaltiniai

- [1] Andersen, E.S., On the Collective Theory of Risk in Case of Contagion between the Claims, *Transactions on XVth International Congress of Actuaries*, 2, 219-229, 1957.
- [2] H. Pishro-Nik, Introduction to probability, statistics, and random processes, *Kappa Research LLC*, 2014. <https://www.probabilitycourse.com>.
- [3] A. Balčiūnas, Taikomoji statistika: 5 paskaita. Atsitiktiniai dydžiai, *Vilniaus universitetas*, 2019. <https://web.vu.lt/mif/a.balciunas/files/2019/12/Taikomoji-statistika5.pdf>.
- [4] H. P. Hsu, Schaum's Outline of Theory and Problems of Probability, Random Variables, and Random Processes, *New York : McGraw-Hill*, 1997.
- [5] N. Gupta, A. Kumar, N. Leonenko, Skellam Type Processes of Order k and Beyond, *Entropy*, 22(11), 1193, 2020.
- [6] The Bessel Functions, *Brown University, Applied Mathematics*. <https://appliedmath.brown.edu/sites/default/files/fractional/35%20TheBesselFunctions.pdf>.
- [7] V. Mackevičius, Matematinė analizė I. Paskaitų konspektas. <https://www.vigirdas.lt/lt/textBooks.html>.
- [8] A. Grigutis, A. Karbonskis, J. Šaulys, Ruin probability for renewal risk models with neutral net profit condition, *Institute of Mathematics, Vilnius University*, 2023

Priedai

Python kodas naudotas 2.2 pavyzdyje

```
import numpy as np
from scipy.special import iv
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt

lam1 = 1.0
lam2 = 1.0
c = 1
iki = 100
KNEG = 100
LMAX = iki + KNEG
EPS = 1e-15

def f_k(k):
    k = np.asarray(k, dtype=float)
    return np.exp(-(lam1 + lam2)) * (lam1 / lam2)**(k / 2) * iv(np.abs(k), 2 * np.sqrt(lam1 * lam2))

def skaiciavimas_l1(LMAX, KNEG):
    l1 = []
    for u in range(0, LMAX + 1):
        ks = np.arange(-KNEG, u)
        reiks = 1.0 - np.sum(f_k(ks))
        if reiks < EPS:
            l1 += [0.0] * (LMAX + 1 - u)
            break
        l1.append(float(reiks))
    l1 = np.array(l1, dtype=float)
    if len(l1) < LMAX + 1:
        l1 = np.pad(l1, (0, LMAX + 1 - len(l1)), mode='constant')
    return l1

def sekantis_zingsnis(buves_zingsnis, LMAX, KNEG):
    visi = []
    for u in range(0, LMAX + 1):
        ks = np.arange(-KNEG, u)
        idx = u - ks
        reiks = np.sum(f_k(ks) * buves_zingsnis[idx])
        if reiks < EPS:
            visi += [0.0] * (LMAX + 1 - u)
            break
        visi.append(float(reiks))
    visi = np.array(visi, dtype=float)
    if len(visi) < LMAX + 1:
        visi = np.pad(visi, (0, LMAX + 1 - len(visi)), mode='constant')
    return visi

def visi_zingsniai(M, iki, KNEG=100):
    zingsniai = []
    l1 = skaiciavimas_l1(LMAX, KNEG)
    zingsniai.append(l1)
    buves = l1
    for m in range(2, M + 1):
        curr = sekantis_zingsnis(buves, LMAX, KNEG)
        zingsniai.append(curr)
        buves = curr
    zingsniai_u = [lay[:iki+1] for lay in zingsniai]
    return zingsniai_u

M = 10
zingsniai_u = visi_zingsniai(M, iki, KNEG=KNEG)

def visi_zingsniai_skirtingiems_K(KNEG):
    zingsniai_u = visi_zingsniai(M=10, iki=iki, KNEG=KNEG)
    return np.vstack(zingsniai_u)
```

```

tikrinu_50 = visi_zingsniai_skirtingiems_K(50)
tikrinu_100 = visi_zingsniai_skirtingiems_K(100)
tikrinu_150 = visi_zingsniai_skirtingiems_K(150)

print("max |K=50 - K=100| :", np.max(np.abs(tikrinu_50 - tikrinu_100)))
print("max |K=100 - K=150|:", np.max(np.abs(tikrinu_100 - tikrinu_150)))

visi = np.vstack(zingsniai_u)
cum_iki_m = np.cumsum(visi, axis=0)

columns = [f"u={u}" for u in range(0, iki+1)]
rows = []

for m in range(1, M+1):
    rows.append([f"P(T_u={m})"] + list(zingsniai_u[m-1]))

for m in range(1, M+1):
    rows.append([f"P(T_u<={m})"] + list(cum_iki_m[m-1]))

df = pd.DataFrame(rows, columns=["Rodiklis"] + columns)
df.iloc[:, 1:] = df.iloc[:, 1:].astype(float).round(5)

pd.set_option("display.max_columns", None)
pd.set_option("display.width", 200)
print(df.to_string(index=False))

m_reikmes = np.arange(1, M + 1)

plt.figure()
for u_fix in [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]:
    if u_fix <= iki:
        pmf = visi[:, u_fix]
        plt.plot(m_reikmes, pmf, marker='o', label=f"$u = {u_fix}$")

plt.xlabel(r"Žingsnis $l$")
plt.ylabel(r"Tikimybė $P(T_u = 1)$")
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()

plt.figure()
for u_fix in [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]:
    if u_fix <= iki:
        cdf_reiksmes = cum_iki_m[:, u_fix]
        plt.plot(m_reikmes, cdf_reiksmes, marker='o', label=f"$u = {u_fix}$")

plt.xlabel(r"Žingsnis $l$")
plt.ylabel(r"Kaupiamoji tikimybė $P(T_u \leq 1)$")
plt.ylim(0, 1)
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()

```

Python kodas naudotas 2.3, 2.4, 2.5 pavyzdžiuose

```

import numpy as np
import pandas as pd
import math
import matplotlib.pyplot as plt

lam1 = 1.0 # 4.0
lam2 = 1.0 # 0.25
c = 5
iki = 50

```

```

M      = 10
KNEG   = 500
JMAX   = 500
TOL     = 1e-20
EPS     = 1e-18

def f_k(k):
    k = int(k)
    totalas = 0.0
    for j in range(0, JMAX+1):
        cjpk = c*j + k
        if cjpk < 0:
            continue
        log_reiksme = (-(lam1 + lam2)
                        + (cjpk) * math.log(lam1)
                        + j * math.log(lam2)
                        - math.lgamma(j + 1.0)
                        - math.lgamma(cjpk + 1.0))
        term = math.exp(log_reiksme)
        totalas += term
        if term < TOL and j > 10:
            break
    return totalas

def skaiciavimas_l1(iki, KNEG):
    l1 = []
    for u in range(0, iki + 1):
        ks = np.arange(-KNEG, u, dtype=int)
        reiks = 1.0 - np.sum([f_k(k) for k in ks])
        if reiks < EPS:
            l1 += [0.0] * (iki + 1 - u)
            break
        l1.append(reiks)
    l1 = np.array(l1, dtype=float)
    if len(l1) < iki + 1:
        l1 = np.pad(l1, (0, (iki + 1) - len(l1)), mode='constant')
    return l1

def sekantis_zingsnis(buves_zingsnis, iki, KNEG):
    visi = []
    for u in range(0, iki + 1):
        ks = np.arange(-KNEG, u, dtype=int)
        idx = u - ks
        apb = (idx >= 0) & (idx <= iki)
        tinkamas_ks = ks[apb]
        tinkamas_idx = idx[apb]
        reiks = np.sum([f_k(k) * buves_zingsnis[i] for k, i in zip(tinkamas_ks, tinkamas_idx)])
        if reiks < EPS:
            visi += [0.0] * (iki + 1 - u)
            break
        visi.append(reiks)
    visi = np.array(visi, dtype=float)
    if len(visi) < iki + 1:
        visi = np.pad(visi, (0, (iki + 1) - len(visi)), mode='constant')
    return visi

def visi_zingsniai(M, iki, KNEG):
    zingsniai = []
    l1 = skaiciavimas_l1(iki, KNEG)
    zingsniai.append(l1)
    buves = l1
    for m in range(2, M + 1):
        curr = sekantis_zingsnis(buves, iki, KNEG)
        zingsniai.append(curr)
        buves = curr
    return zingsniai

zingsniai = visi_zingsniai(M, iki, KNEG)

```

```

visi = np.vstack(zingsniai)
cum_iki_m = np.cumsum(visi, axis=0)

columns = [f"u={u}" for u in range(0, iki+1)]
rows = []

for m in range(1, M+1):
    rows.append([f"P(T_u={m})" + list(visi[m-1])])
for m in range(1, M+1):
    rows.append([f"P(T_u<={m})" + list(cum_iki_m[m-1])])

df = pd.DataFrame(rows, columns=["Rodiklis"] + columns)
df.iloc[:, 1:] = df.iloc[:, 1:].astype(float).round(5)

pd.set_option("display.max_columns", None)
pd.set_option("display.width", 200)
print(df.to_string(index=False))

m_reiksmes = np.arange(1, M + 1)

plt.figure()
for u_fix in [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]:
    if u_fix <= iki:
        pmf = visi[:, u_fix]
        plt.plot(m_reiksmes, pmf, marker='o', label=f"$u = {u_fix}$")

plt.xlabel(r"Žingsnis $l$")
plt.ylabel(r"Tikimybė $P(T_u = 1)$")
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()

plt.figure()
for u_fix in [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]:
    if u_fix <= iki:
        cdf_reiksmes = cum_iki_m[:, u_fix]
        plt.plot(m_reiksmes, cdf_reiksmes, marker='o', label=f"$u = {u_fix}$")

plt.xlabel(r"Žingsnis $l$")
plt.ylabel(r"Kaupiamoji tikimybė $P(T_u \leq 1)$")
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()

def visi_zingsniai_skirtingiems_K(KNEG_reiksme):
    zingsniai_u = visi_zingsniai(M=M, iki=iki, KNEG=KNEG_reiksme)
    return np.vstack(zingsniai_u)

tikrinu_300 = visi_zingsniai_skirtingiems_K(300)
tikrinu_500 = visi_zingsniai_skirtingiems_K(500)
tikrinu_700 = visi_zingsniai_skirtingiems_K(700)

print("KNEG karpymo testas:")
print("max |KNEG=300 - KNEG=500| =", np.max(np.abs(tikrinu_300 - tikrinu_500)))
print("max |KNEG=500 - KNEG=700| =", np.max(np.abs(tikrinu_500 - tikrinu_700)))
print()

def visi_zingsniai_skirtingiems_JMAX(JMAX_reiksme, KNEG_fix=500):
    global JMAX
    senas_JMAX = JMAX
    JMAX = JMAX_reiksme
    zingsniai_u = visi_zingsniai(M=M, iki=iki, KNEG=KNEG_fix)
    JMAX = senas_JMAX
    return np.vstack(zingsniai_u)

```

```

tikrinu_J300 = visi_zingsniai_skirtingiems_JMAX(300, KNEG_fix=500)
tikrinu_J500 = visi_zingsniai_skirtingiems_JMAX(500, KNEG_fix=500)
tikrinu_J700 = visi_zingsniai_skirtingiems_JMAX(700, KNEG_fix=500)

print("JMAX karpymo testas (KNEG=500):")
print("max |JMAX=300 - JMAX=500| =", np.max(np.abs(tikrinu_J300 - tikrinu_J500)))
print("max |JMAX=500 - JMAX=700| =", np.max(np.abs(tikrinu_J500 - tikrinu_J700)))

```