ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS

INFORMATIKOS KATEDRA

Giedrė Vitkevičienė

(Matematikos studijų programa, valstybinis kodas: 6211AX010)

Analizinių funkcijų aproksimavimas diskrečiais Rymano dzeta funkcijos postūmiais

Magistro darbas

Darbo vadovė

prof. dr. Renata Macaitienė

Šiauliai, 2018

Patvirtinu, kad magistro darbas yra originalus, neturintis plagiato požymių.

....	....	....
(Parašas)	(Vardas ir pavardė)	(Data)

Turinys

ĮVADAS

Aktualumas

Magistro darbe analizuojama Rymano (Riemann) dzeta funkcijos $\zeta(s)$, $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$, kuri pusplokštumėje $\sigma > 1$ apibrėžiama paprastąja Dirichlė (Dirichlet) eilute bei polinomine Oilerio (Euler) sandauga,

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

elgesį. Tiksliau, išnagrinėsime vieną iš nuostabių šios funkcijos savybių – *universalumo savybę*, reiškiančią, jog Rymano dzeta funkcijos $\zeta(s)$ postūmiais $\zeta(s+i\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, gali būti aproksimuojama plati analizinių funkcijų klasė.

Žinome [1], [3], [4], [6], [8], [11], jog Rymano dzeta funkcija tenkina funkcinę lygtį

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})\zeta(1-s),$$

kuri duoda $\zeta(s)$ analizinį pratęsimą į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus tašką $s = 1$, kuris yra paprastas polius su reziduumu 1.

Daugiau nei keturiasdešimt pastarųjų metų, ypatingai daug dėmesio skiriama funkcijų, apibrėžimų Dirichlė eilutėmis ar jų klasių universalumo savybei įrodyti [10].

Linikas (Linnik) kartu su Ibrahimovu (Ibrahimov) iškėlė hipotezę, kuri teigia, jog visos funkcijos, kurioje nors pusplokštumėje apibrėžiamos Dirichle eilute, analiziškai pratęsiamos į kairę nuo absoliutaus konvergavimo pusplokštumės ir tenkinančios kai kurias natūralias augimo sąlygas, yra universalios Voronino prasme.

Tokio tipo tyrimus vykdė ir vykdo daugelis žinomų skaičių teorijos specialistų, kaip B. Bagčis (Bagchi), H. Baueris (Bauer), R. Garunkštis, S. M. Gonekas (Gonek), A. Laurinčikas, K. Matsumotas (Matsumoto), J. Štaudingas (Steuding) ir daugelis kitų Lietuvos, Japonijos, Vokietijos bei Lenkijos matematikų. Rezultatų gausa dar kartą parodo universalumo problemos aktualumą ne tik dzeta ir L funkcijų teorijoje ir visoje skaičių teorijoje. Nors rasta daug universalių dzeta ir L-funkcijų (pavyzdžiui, Hurvico dzeta funkcija, Lercho dzeta funkcija ir kt.), tačiau nesunku įrodyti, jog ne visos funkcijos, užrašytos Dirichle eilute yra universalios.

Pavyzdžiui, jei Dirichlė eilutėje $a(n) = 1$, kai $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, o $a(n) = 0$ – kitais atvejais, gaunama, jog

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{sk}} = \frac{1}{1-2^{-s}},$$

deja, nėra universali funkcija.

Universalumas yra svarbi ir naudinga dzeta ir L funkcijų savybė, turinti visą eilę teorinių ir praktinių pritaikymų: universalumas yra sudėtinė dzeta ir L funkcijų funkcinės nepriklausomybės įrodymo dalis, ši savybė naudojama nulių pasiskirstymo ir momentų problemų sprendimui, padeda įrodyti įvairias aibių tirštumo teoremas, atlikti integralų pagal sudėtingas analizines kreives, naudojamų kvantinėje mechanikoje, vertinimą, atlieka pagrindinį vaidmenį analizinių funkcijų aproksimavimo teorijoje.

Tolydus $\zeta(s)$ universalumas. 1975 m. S. M. Voroninas [14] pradėjo nagrinėti Rymano dzeta funkcijos $\zeta(s)$, $s = \sigma + it$, universalumą. Jis įrodė, kad kiekviena tolydi, nelygi nuliui analizinė funkcija juostos

$$D = \left\{ s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1 \right\}$$

kompaktiniuose poaibiuose gali būti tolygiai aproksimuota norimu tikslumu postūmiais $\zeta(s+i\tau), \tau \in \mathbb{R}$. Vėliau Voronino rezultatas buvo patikslintas – profesorius A. Laurinčikas [7] pateikė bendresnį rezultatą.

A teorema [7]. *Tegul K yra juostos D kompaktinė aibė, turinti jungųjį papildinį. Tarkime, kad funkcija $f(s)$ tolydi ir nelygi nuliui aibėje K bei analizinė aibės K viduje. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas \left\{ \tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Čia simboliu $meas\,\{A\}$ žymimas mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matas.

Voronino įrodytoje teoremoje aibė K yra skritulys $|s - \frac{3}{4}| \leq r, \quad 0 < r < \frac{1}{4}$, o A teorema parodo, kad funkcija $f(s)$ yra aproksimuota Rymano dzeta funkcijos postūmiais bendresnėje aibėje negu skritulys; be to, aibės postūmių, aproksimuojančių duotą analizinę funkciją, apatinis tankis yra griežtai teigiamas. Minėtos teoremos įrodymas, skirtingai nuo pirmojo Voronino įrodymo, remiasi ribine teorema apie silpnąjį tikimybinių matų konvergavimą analizinių funkcijų erdvėje.

Diskretus Rymano dzeta funkcijos universalumas. Atsižvelgiant į poreikį taikymų srityje, vis aktualesni tampa rezultatai, susiję su analizinių funkcijų aproksimavimu diskrečiais minėtų funkcijų postūmiais. A teoremoje pateikėme taip vadinamą *tolydaus tipo* $\zeta(s)$ *universalumo* atveją, kuomet postūmiai τ įgyja bet kurias realias reikšmes. Tuo atveju, kai τ reikšmės imamos iš kokios nors diskrečios aibės, tokio tipo teoremos vadinamos *diskretaus universalumo* teoremomis. Paprasčiausias pavyzdys yra aibė $\{kh : k \in \mathbb{N}_0\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, kur $h > 0$ yra fiksuotas skaičius (t.y., reikšmės imamos iš aritmetinės progresijos). Pirmasis diskretų universalumą Dedekindo dzeta funkcijai nagrinėjo Reichas (Reich). Vėliau tokio pobūdžio tyrimus tęsė daug kitų matematikų, pavyzdžiui, Bagčis (B. Bagchi) įrodė diskretaus universalumo teoremą [1] Dirichlė L funkcijoms, Štaudingas (Steuding) Hurvico dzeta funkcijai, su racionaliu parametru [12], R. Macaitienė – bendroms Dirichlė eilutėms [9] ir kiti.

Naujausią diskretaus tipo universalumo teoremos versiją funkcijai $\zeta(s)$, kai postūmių reikšmės imamos iš aritmetinės progresijos, taip pat pateikė A. Laurinčikas.

B teorema [7]. *Tegul K yra juostos D kompaktinė aibė, turinti jungųjį papildinį, o $f(s)$ yra tolydi nelygi nuliui aibėje K ir analizinėje aibės K viduje funkcija. Tuomet su kiekvienu $h > 0$ ir $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \le k \le N : \sup_{s\in K} |\zeta(s+ikh) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Čia $\#B$ žymi aibės B galią.

B teoremoje pateiktą rezultatą praplėtė A. Dubickas ir A. Laurinčikas [2], postūmius imdami iš sekos $\{k^\alpha : k \in \mathbb{N}_0\}$, čia α fiksuotas, $0 < \alpha < 1$. Šio rezultato įrodymui naudotąsi tuo, jog seka $\{k^\alpha h : k \in \mathbb{N}_0\}$ yra tolygiai pasiskirsčiusi moduliu 1.

Akcentuosime, tai, jog siekiama rasti kuo platesnes diskrečias aibes, kurioms būtų teisingos universalumo teoremos.

Magistro darbo tikslas – *įrodyti diskretų Rymano dzeta funkcijos $\zeta(s)$ universalumą tam tikrai postūmių sekų, tolygiai pasiskirsčiusių moduliu 1, klasei.*

Nagrinėsime sekų $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \in \mathfrak{X} \subset \mathbb{R}$, tenkinančių reikalavimus, klasę:

1. $\{ax_k\}$ yra tolygiai pasiskirsčiusi moduliu 1 su visiais realiaisiais skaičiais $a \neq 0$;

2. $1 \le x_k \le k$, visiems $k \in \mathbb{N}$;

3. Kai $1 \leq k$, $m \leq N$, $k \neq m$, teisinga nelygybė

$$|x_k - x_m| \geq \frac{1}{y_N},$$

čia $y_N > 0$ toks, kad $y_N x_N \ll N$.

Tegul, kaip ir anksčiau, $D = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$; simboliu $\mathcal{K}$ žymėsime juostos D kompaktinių aibių su jungiuoju papildiniu klasę, o simboliu $H_0(K)$, $K \in \mathcal{K}$, – tolydžių, nevirstančių nuliu aibėje K ir analizinių aibės K viduje funkcijų klasę.

Pagrindinė teorema. *Tarkime, kad* $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \in \mathfrak{X}$. *Tegul* $K \in \mathcal{K}$ *ir* $f(s) \in H_0(K)$. *Tuomet su visais* $h > 0$ *ir* $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \# \left\{ 1 \leq k \leq N : \sup_{s \in K} |\zeta(s + ix_k h) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Kaip jau minėjome, A. Dubickas ir A. Laurinčikas įrodė [2], jog klasės $H_0(K)$, $K \in \mathcal{K}$, funkcijos gali būti aproksimuojamos $\zeta(s)$ postūmiais $\zeta(s + ik^\alpha h)$, $0 < \alpha < 1$, $h > 0$. Seka $\{k^\alpha\}$, $0 < \alpha < 1$, taip pat yra klasės $\mathfrak{X}$ elementas. Remdamiesi 3.10 užduotimi iš [5] turime, jog seka $\{\alpha k^\alpha\}$ yra tolygiai pasiskirsčiusi moduliu 1. Be to, nesunku pastebėti, kad

$$(k+1)^\alpha - k^\alpha \geq \frac{\alpha}{2N^{1-\alpha}}, \text{ kai } \quad 1 \leq k \leq N-1.$$

Taigi, šiuo atveju, y_N galime parinkti taip, kad $y_N = \dfrac{\alpha}{2N^{1-\alpha}}$. Tuomet teorema iš [2] atskirasis mūsų įrodytos teoremos atvejis.

Naudojami tyrimo metodai

Diskrečių ribinių teoremų įrodymai remiasi silpnojo tikimybinių matų konvergavimo savybėmis bei realiųjų skaičių sekų, tolygiai pasiskirsčiusių moduliu 1, teorija.

Sekos $\{k^\alpha\}$, $0 < \alpha < 1$, savybės jau buvo taikytos A. Laurinčiko, R.Macaitienės ir D. Šiaučiūno darbe [8], kuriame įrodytas diskretus Dirichle (Dirichlet) L funkcijų $L(s, \chi)$ rinkinio universalumas.

Diskrečiai universalumo teoremai įrodyti naudojamos eilučių analizinių funkcijų erdvėje savybės, Mergeliano (Mergelyan) teorema.

Darbo struktūra

Magistro darbą sudaro įvadas, du skyriai, išvados, literatūros sąrašas bei santraukos lietuvių ir anglų kalbomis. Apibrėžimai, teoremos, lemos ir formulės numeruojamos skaičiais, nurodant skyriaus, poskyrio bei objekto numerį skyriuje.

Aprobacija

Magistro darbo rezultatai pristatyti dviejose konferencijose:

- 13th International Scientific Conference *Students on their Way to Science*, Jelgava, 2018 m. balandžio 20 d. [14].
- 13-ojoje Šiaulių universiteto *Studentų mokslinių darbų konferencijoje*, 2018 m. gegužės 17 d.

1 NAUDOJAMOS SĄVOKOS IR REZULTATAI

Šiame skyriuje pateikiami darbe naudojamų sąvokų apibrėžimai, terminai bei pagalbinės lemos.

1.1 Silpnasis matų konvergavimas

1.1.1 apibrėžimas. *Tarkime, kad* Ω *yra netuščia aibė. Aibės* Ω *poaibių sistema* $\mathcal{F}$ *vadinamas Borelio kūnu (*σ*-kūnu), jei:*

a) $\Omega \in \mathcal{F}$*;*

b) $A^c \in \mathcal{F}$*, čia* $A \in \mathcal{F}$ *(*A^c *aibės* A *papildinys);*

c) $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{F}$ *visoms* $A_m \in \mathcal{F}$*,* $m = 1, 2, \ldots$ *.*

1.1.2 apibrėžimas. *Trejetas* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vadinamas tikimybine erdve.*

Tegul $\mathcal{T}$ topologinė erdvė, o $\mathcal{B}(\mathcal{T})$ – erdvės $\mathcal{T}$ Borelio aibių klasė, t. y. visų atvirų aibių sistemos generuotas σ-kūnas. Tada kiekvienas matas klasėje $\mathcal{B}(\mathcal{T})$ vadinamas *Borelio matu.*

Tikimybinių metodų panaudojimo idėja, tyrinėjant funkcijų, apibrėžtų Dirichlė eilutėmis, reikšmių pasiskirstymą, yra grindžiama silpno tikimybinių matų konvergavimo taikymu, kuris yra vienas iš pagrindinių asimptotinių metodų.

Tarkime, kad P_n ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $(\mathcal{S}, \mathcal{B}(\mathcal{S}))$.

1.1.3 apibrėžimas. *Sakome, kad* P_n *silpnai konverguoja į* P*, kai* $n \to \infty$*, jei*

$$\int\limits_S f dP_n \to \int\limits_S f dP, \quad n \to \infty,$$

kiekvienai realiai, apibrėžtai, tolydžiai funkcijai f *iš* S*.* Žymime $P_n \Rightarrow P$.

1.1.4 lema (Galagherio lema.) *Tarkime,* T_0 *ir* $T \geq \delta > 0$ *yra realieji skaičiai, o* $\mathcal{T}$ *yra baigtinė aibė intervale* $[T_0, T + T_0]$ *ir*

$$N_\delta(x) = \sum_{\substack{t \in \mathcal{T} \\ |t-x|<\delta}} 1,$$

Be to, tegul $S(x)$ *yra tolydi intervale* $[T_0, T+T_0]$ *kompleksinio kintamojo funkcija , turinti* *tolydžią išvestinę intervale* $(T_0, T + T_0)$. *Tada*

$$\sum_{t \in T} N_s^{-1}(t)|S(t)|^2 \leq \frac{1}{\delta} \int_{T_0}^{T_0+T} |S(x)|^2 dx + \left(\int_{T_0}^{T_0+T} |S(x)|^2 dx \int_{T_0}^{T_0+T} |S'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Darbe naudosime vieną iš paprasčiausių silpno konvergavimo kriterijų [7].

1.1.5 teorema. $P_n \Rightarrow P$ *tada ir tik tada, jei iš kiekvino posekio* $\{P_n'\}$ *galima išskirti kitą posekį* $\{P_n''\}$ *taip, kad* $P_n'' \Rightarrow P$.

1.1.6 apibrėžimas. *Apibrėžtų erdvėje* $(\mathcal{S}, \mathcal{B}(\mathcal{S}))$ *tikimybinių matų šeima* $\{P\}$ *yra reliatyviai kompaktiška, jei kiekvienas elementų iš* $\{P\}$ *posekis turi silpnai konverguojantį posekį.*

1.1.7 apibrėžimas. *Tikimybinių matų šeima* P *vadinama suspausta (tiršta), jei kiekvienam* $\forall \varepsilon > 0$ *egzistuoja kompaktiška aibė* $K \subset S$ *tokia, kad* $P(K) > 1 - \varepsilon$, *visiems* P *iš* $\{P\}$.

Tikimybinių matų silpno konvergavimo teorijoje svarbų vaidmenį atlieka Prochorovo teoremos, susiejančias reliatyvaus kompaktiškumo ir suspaustumo sąvokas.

1.1.8 lema. *Jei tikimybinių matų šeima* $\{P\}$ *yra tiršta, tai ji yra ir reliatyviai kompaktiška.*

1.1.9 lema. *Tegul* S *– pilna separabili metrinė erdvė. Jei apibrėžtų erdvėje* $(\mathcal{S}, \mathcal{B}(\mathcal{S}))$ *tikimybinių matų šeima* $\{P\}$ *yra reliatyviai kompaktiška, tai ji yra ir suspausta.*

1.1.8, 1.1.9 teoremų įrodymai pateikti [1].

1.1.10 apibrėžimas. *Atsitiktinių elementų seka* $\{X_n\}$ *konverguoja pagal skirstinį į atsitiktinį elementą* X, *kai* $n \to \infty$, *jei* X_n *skirstiniai konverguoja į elemento* X *skirstinį.* Žymėsime $(X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X)$.

Tegul S – separabili metrinė erdvė su metrika ρ, o $X_n, X_{n1}, X_{n2}, \ldots$ yra S–reikšmiai atsitiktiniai elementai, apibrėžti erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1.1.11 lema. *Tarkime, kad* $(X_{kn} \xrightarrow{\mathcal{D}} X_k)$, *kai* $n \to \infty$ *(kiekvienam* k*), bei* $(X_k \xrightarrow{\mathcal{D}} X)$, *kai* $k \to \infty$. *Jei kiekvienam* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k \to \infty} \overline{\lim_{n \to \infty}} \mathbb{P}\{\rho(X_{k_n}, Y_n) \geq \varepsilon\} = 0,$$

tai $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, *kai* $n \to \infty$.

Taip pat pateikiame keletą sąvokų susijusias su vienu iš pagrindinių komponentų ribinių teoremų įrodymuose – Haro (Harr) matu.

1.1.12 apibrėžimas. *Tegul aibėje G apibrėžta grupės bei topologinė struktūra. Jei funkcija $h : G \times G \to G$, apibrėžiama lygybe $h(x, y) = xy^{-1}$, yra tolydi, tuomet aibė G vadinama topologine grupe.*

1.1.13 apibrėžimas. *Topologinė grupė vadinama kompaktiška, jei jos topologija yra kompaktiška.*

1.1.14 apibrėžimas. *Borelio matas P, apibrėžtas kompaktiškoje topologinėje grupėje G, vadinamas invariantiniu, jei $P(A) = P(xA) = P(Ax)$ visoms $A \in \mathcal{B}(G)$ ir $x \in G$. Čia xA ir Ax yra atitinkamai aibės $\{xy : y \in A\}$ ir $\{xy : x \in A\}$.*

1.1.15 apibrėžimas. *Invariantinis Borelio matas, apibrėžtas kompaktiškoje topologinėje grupėje, vadinamas Haro matu.*

1.1.16 lema. *Kiekvienoje kompaktiškoje topologinėje grupėje egzistuoja vienintelis tikimybinis Haro matas.*

1.2 Tolygus pasiskirstymas moduliu 1

1.2.1 abibrėžimas. *Seka $\{z^k : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ yra vadinama tolygiai pasiskirsčiusia moduliu 1, jei kiekvienam intervalui $I = [a, b) \subset [0, 1)$, kurio ilgis $|I|$, teisinga lygybė*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \chi_I(\{z_k\}) = /I|,$$

čia χ_I yra intervalo I indikatorius, o $\{u\}$ yra skaičius $u \in \mathbb{R}$ trupmeninė dalis.

Tiek B, tiek pagrindinės teoremos įrodymui naudojamas Veilio (Weyl) kriterijus, nurodantis būtinas ir pakankamas sąlygas, kad realiųjų skaičių seka $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ būtų tolygiai pasiskirsčiusi moduliu 1.

1.2.2 lema [5]. *Realių skaičių seka $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ yra tolygiai pasiskirsčiusi moduliu 1 tada ir tik tada, kai su visais sveikaisiais $m \neq 0$ yra teisinga lygybė*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i m x_k} = 0.$$

1.3 Universalumo teorija

Universalumo teoremos įrodymui naudojami analizinių funkcijų aproksimavimo, bei tikimybinių matų funkcijų erdvėje atramos radimo metodai.

1.3.1 apibrėžimas. *Mato P atrama (nešėju) vadinama tokia minimali uždara aibė $A \in \beta(s)$, kad $P(A) = 1$.*

Remiantis silpnojo tikimybinių matų konvergavimo apibrėžimu, sudėtinga nustatyti konkrečių tikimybinių matų konvergavimą, todėl naudojamasi ekvivalentais, fotmuojamais aibių terminais.

1.3.2 lema. *Tegul P_n, $n \in \mathbb{N}$, ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$. Tuomet P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į P tada ir tik tada, kai galioja bent vienas iš tvirtinimų:*

1. *Su kiekviena tolygiai aprėžta realia funkcija f erdvėje S*

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f dP_n = \int_S f dP;$$

2. *Su kiekviena erdvės S uždarąja aibe F yra teidinga nelygybė*

$$\limsup_{n\to\infty} P_n(F) \leq P(F);$$

3. *Su kiekviena erdvės S atvirąja aibe G yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{n\to\infty} P_n(G) \geq P(G);$$

4. *Su kiekviena mato P tolydumo aibe A (aibė A yra vadinama mato P tolydumo aibe, jeigu jos krašto ∂A matas P yra lygus nuliui, t.y., $P(\partial A) = 0$)) yra teisinga lygybė*

$$\lim P_n(A) = P(A).$$

1.3.3 lema (Mergeliano) *Tegul $K \subset D$ yra kompaktinė aibė, turinti jungųjį papildinį, o funkcija $f(s)$ yra tolydi aibėje K ir analizinė aibės K viduje. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$, egzistuoja toks polinomas $p(s)$, kad*

$$\sup_{s\in K} |g(s) - p(s)| < \varepsilon.$$

2 PAGRINDINĖS TEOREMOS ĮRODYMAS

Šiame skyriuje pateikiami nauji ir jau žinomi rezultatai, naudojami pagrindinės teoremos įrodymui.

2.1 Tikimybinis modelis

Pažymėkime $\mathcal{B}(X)$ erdvės X Borelio σ-kuną. Tegul $\gamma_p = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$ yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje ir

$$\Omega = \prod_p \gamma_p,$$

su visais pirminiais p. Žinoma [7], kad su sandaugos topologija ir pataškine daugyba begaliniamatis toras Ω yra kompaktinė topologinė Abelio grupė, todėl erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ galima apibrėžti tikimybinį Haro matą m_H. Gaunama tikimybine erdvė $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Pažymėkime $\omega(p)$ elemento $\omega \in \Omega$ projekciją į kordinatinę erdvę γ_p ir apibrėžkime kompleksines reikšmes įgyjantį atsitiktinį elementą

$$\zeta(s, \omega) = \prod_p \left(1 - \frac{\omega(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Įrodyda [7], kad ši sandauga pagal pirminius skaičius konverguoja tolygiai juostos D kompaktiškuose poaibiuose beveik visiems $\omega \in \Omega$. Taigi, $\zeta(s, \omega)$ yra $H(D)$-reikšmis, atsitiktinis elementas, apibrėžtas ant tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Čia $H(D)$ žymi analizinių juostoje D funkcijų erdvę su tolygaus konvergavimo ant kompaktinių topologija. Tarkime, P_ζ yra atsitiktinio elemento $\zeta(s, \omega)$ skirstinys, t.y.,

$$P_\zeta(A) = m_H(\omega \in \Omega : \zeta(s, \omega) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H(D)).$$

Šio poskyrio tikslas yra įrodyti pagalbinį rezultatą apie tam tikro tikimybinio mato konvergavimą į P_ζ.

2.1.1 teorema. *Tarkime, kad* $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \in \mathfrak{X}$. *Tuomet su visias* $h > 0$

$$P_N(A) \overset{def}{=} \frac{1}{N} \#\{1 \le k \le N : \zeta(s + ix_k h) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(H(D)),$$

kai $N \to \infty$ silpnai konverguoja į P_ζ.

2.1.1 teoremos įrodymo pagrindas yra ribinė teorema tore Ω. Pažymėkime

$$Q_N(A) = \frac{1}{N}\#\{1 \le k \le N : (p^{-ix_k h} : p \in \mathcal{P}) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\Omega).$$

2.1.2 teorema *Tarkime, kad seka $\{ax_k\}$ yra tolygiai pasiskirsčiusi moduliu 1 su visais realiaisias $a \neq 0$. Tuomet kiekvienam $h > 0$, matas Q_N, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į tikimybinį Haro matą m_H.*

Įrodymas. Veilio kriterijus, kurį pateikėme 1.2 poskyryje (1.2.2 lema), yra puikus būdas patikrinti, ar seka yra tolygiai pasiskirsčiusi moduliu 1.

2.1.2 teoremos įrodymui taikysime Furje transformaciją $g_N(k)$, $k = (k_p : k_p \in \mathbb{Z}, p \in \mathcal{P})$, kur $\mathcal{P}$ žymi visų pirminių skaičių aibę. Žinoma, kad

$$\begin{aligned} g_N(\underline{k}) &= \int_\Omega \prod_p \omega^{k_p}(p) dQ_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\prod_p p^{-ix_k k_p h} = \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\exp\left\{-ix_k h \sum_p k_p \log p\right\}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

čia tik baigtinis sveikųjų skaičių k_p skaičius yra nelygus nuliui. Akivaizdu, jei $\underline{k} = \underline{0}$, tada

$$g_N(\underline{k}) = 1. \tag{2.2}$$

Be to, gerai žinoma, kad pirminių skaičių logaritmai yra tiesiškai nepriklausomi virš racionaliųjų skaičių kūno. Todėl, jei $\underline{k} \neq \underline{0}$, tada

$$\sum_p k_p \log p \neq 0.$$

Taigi, remiantis pirmuoju reikalavimu klasės $\mathfrak{X}$ elementams, tuo atveju kai $\underline{k} \neq \underline{0}$, seka

$$\left\{-\frac{1}{2\pi} x_k h \sum_p k_p \log p\right\}$$

yra tolygiai pasiskirsčiusi moduliu 1. Vadinasi, pagal Veilio kriterijų

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\exp\left\{-ix_k h \sum_p k_p \log p\right\} = 0$$

Iš čia, bei (2.1) ir (2.2) seka, kad

$$\lim_{N\to\infty} g_N(\underline{k}) = \begin{cases} 1 & \text{jei } \underline{k} = \underline{0}, \\ 0 & \text{jei } \underline{k} \neq \underline{0}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Kadangi (2.3) Furje transformacijos dešinė pusė sutampa su Haro matu m_H, pasinaudoję tolydumo tikimybiniams matams kompaktinėse grupėse teorema, gauname 2.1.2 lemos tvirtinimą. ■

Sekantis rezultatas, kuris bus reikalingas 2.1.1 teoremos įrodymui, yra ribinė teorema absoliučiai konverguojančiomis Dirichlė eilutėms.

Tegul $\theta > \frac{1}{2}$ yra fiksuotas skaičius. Pažymėkime

$$v_n(m) = \exp\left\{-\left(\frac{m}{n}\right)^{\theta}\right\}, \quad m, n \in \mathbb{N},$$

ir apibrėžkime

$$\zeta_n(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{v_n(m)}{m^s}.$$

Įrodyta [7], kad eilutė $\zeta_n(s)$ absoliučiai konverguoja pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$. Apibrėžkime tikimybinį matą

$$P_{N,n}(A) = \frac{1}{N}\#\{1 \leq k \leq N : \zeta_n(s + ix_k h) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(H(D).$$

Nagrinėsime $P_{N,n}(A)$ silpną konvergavimą, kai $N \to \infty$.

Apibrėžkime funkciją $u_n : \Omega \to H(D)$ formule

$$u_n(\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{v_n(m)\omega(m)}{m^s},$$

čia $\omega(m)$ yra pratęsta į aibę $\mathbb{N}$ formulės

$$\prod_{\substack{p^l | m \\ p^{l+1} \nmid m}} \omega^l p, \quad m \in \mathbb{N},$$

pagalba.

Kadangi $\zeta_n(s)$ absoliučiai konverguoja pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$, turime, kad funkcija u_n yra tolydi. Šie argumentai kartu su 2.1.2 teoremos rezultatu sudaro galimybę nesunkiai įrodyti ribinę teoremą matui $P_{N,n}$.

2.1.3 lema. *Tarkime, kad seka $\{ax_k\}$, yra tolygiai pasiskirsčiusi moduliu 1. Tuomet tikimybinis matas $P_{N,n}$, kai $N \to \infty$ silpnai konverguoja į matą $\widehat{P}_n(A) = m_H u_n^{-1}$.*

Lemos įrodymas yra analogiškas 2.1.1 teoremos iš [8] įrodymui, todėl jį praleisime.

Sudėtingiausia 2.1.1 teoremos įrodymo dalis yra „perėjimas" nuo $\zeta_n(s)$ prie $\zeta(s)$. Tam naudosime kitus reikalavimus sekos $\mathfrak{X}$ elementams.

Tegul $\rho(g_1, g_2)$ žymi metrika su indukuota, tolygaus konvergavimo kompaktuose topologija.

2.1.4 teorema. *Tarkime, kad $\{x_k\} \in \mathfrak{X}$, tada su kiekvienu $h > 0$,*

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \rho(\zeta(s + ix_k h), \zeta_n(s + ix_k h)) = 0.$$

Įrodymas. Remiantis 3-iuoju reikalavimu sekų klasei $\mathfrak{X}$, randame, kad

$$N_\delta(x_k) = \sum_{\substack{m=1 \\ |x_k - x_m| < \frac{1}{y_N}}}^{N} 1 = 1, \quad \delta = \frac{1}{y_N}.$$

Todėl, atsižvelgę į gerai žinomus įverčius

$$\int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^2 dt = O(T), \quad \sigma \in \left(\frac{1}{2}, 1\right),$$

bei

$$\int_1^T |\zeta'(\sigma + it)|^2 dt = O(T), \quad \sigma \in \left(\frac{1}{2}, 1\right),$$

ir pasinaudoję 1.1.4 (žr. 1.1 poskirį) lema bei 2-uoju ir 3-iuoju reikalavimais klasės $\mathfrak{X}$ elementams, randame, kad, kai $\frac{1}{2} < \sigma < 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} |\zeta(\sigma + ix_k h + it)|^2 &\le \frac{y_N}{h} \int_{x_1 h}^{x_N h} |\zeta(\sigma + i\tau + it)|^2 d\tau \\ &+ \left(\int_{x_1 h}^{x_N h} |\zeta(\sigma + i\tau + it)|^2 d\tau \int_{x_1 h}^{x_N h} |\zeta'(\sigma + i\tau + it)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\ll \frac{y_N}{h}(x_N h + |t|) + x_N h + |t| \ll y_N x_N + y_N |t| \ll N(1 + |t|). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Kaip ir ankščiau, tegul K yra kompaktiškas srities D poaibis. Pasinaudoję (2.4) įverčiu ir pritaikę kontūrinį integravimą, analogiškai kaip ir 4.1 teoremos [8] įrodyme, gauname, jog

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sup_{s\in K}|\zeta(s+ix_kh)-\zeta_n(s+ix_kh)|=0.$$

Iš šios lygybės ir metrikos ρ apibrėžimo seka teoremos įrodymas. ■

2.1.1 teoremos įrodymas. Tikimybinėje erdvėje $(\widehat{\Omega},\mathcal{F},\mu)$ apibrėžkime atsitiktinį dydį η_N formulė

$$\mu(\eta_N=x_kh)=\frac{1}{N},\quad k=1,\dots,N.$$

Tegul $X_{N,n}$, yra $H(D)$-reikšmis atsitiktinis elementas

$$X_{N,n}=X_{N,n}(s)=\zeta_n(s+i\eta_N),$$

o $\widehat{P}_n$ (apibrėžtos 2.1.3 lemos) yra $H(D)$-reikšmio atsitiktinio elemento $\widehat{X}_n$ skirstinys. Tada, naudojantis konvergavimo pagal pasiskirstymą teorija bei 2.1.3 lema turime, kad

$$X_{N,n}\xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{D}}\widehat{X}_n. \tag{2.5}$$

Toliau nagrinėsime, tikimybinių matų šeimą $\left\{\widehat{P}_n : n\in\mathbb{N}\right\}$ ir įrodysime, kad ji yra tiršta (suspausta). Iš tiesų, pasinaudoję sekos $\zeta_n(s)$ absoliučiu konvergavimu, randame, kad

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_1^T|\zeta_n(\sigma+it)|^2dt=\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{v_n^2(m)}{m^{2\sigma}}\le\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{2\sigma}}\le C<\infty,\sigma>\frac{1}{2}.$$

Pastarasis rezultatas, Galagherio lema (žr. 1.1 poskyrį) ir Koši nelygybė duoda įvertį

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}|\zeta_n(\sigma+ix_kh)|\le C_1<\infty,\quad \sigma>\frac{1}{2}.$$

Todėl, pasinaudoję integraline Koši formule, galime daryti prielaidą, jog egzistuoja teigiama konstanta B_l, kad

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sup_{s\in K_l}|\zeta_n(s+ix_kh)|\le B_l, \tag{2.6}$$

kur $\{K_l : l\in\mathbb{N}\}$ yra kompaktiškų poaibių srityje D seka tokia, kad

$$D=\bigcup_{l=1}^{\infty}K_l,\quad K_l\subset K_{l+1}$$

ir, jei $K \subset D$ yra kompaktiškas poaibis, tai $K \subset K_l$ tam tikriems l.

Tarkime, $\varepsilon > 0$ yra tam tikras fiksuotas skaičius, o $M_l = B_l e^{-1} 2^l$. Tuomet, atsižvelgę į (2.6) gauname, kad su visais $n \in \mathbb{N}$ ir $l \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&\limsup_{N\to\infty} \mu\left(\sup_{s\in K_l} |X_{N,n}(s)| > M_l\right)\\
=&\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#\left\{1 \le k \le N : \sup_{s\in K_l} |\zeta_n(s+ix_k h)| \le M_l\right\}\\
\le&\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{NM_l}\sum_{k=1}^{N} \sup_{s\in K_l} |\zeta_n(s+ix_k h)| \le \frac{\varepsilon}{2^l}.
\end{aligned}$$

Tada, iš (2.5) seka, jog

$$\mu\left(\sup_{s\in K_l} |\widehat{X_n}(s)| > M_l\right) \le \frac{\varepsilon}{2^l} \tag{2.7}$$

su visais $n \in \mathbb{N}$ ir $l \in \mathbb{N}$. Pažymėkime,

$$K = K(\varepsilon) = \left\{g \in H(D) : \sup_{s\in K_l} |g(s)| \le M_l, l \in \mathbb{N}\right\}.$$

Tuomet aibė K yra kompaktiškas $H(D)$ poaibis ir remiantis (2.7), gauname įvertį

$$\mu(X_n(s) \in K) \ge 1 - \varepsilon,$$

visiems $n \in \mathbb{N}$. Kitaip sakant, $\widehat{P}_n(K) \ge 1-\varepsilon$ su visias $n \in \mathbb{N}$. Iš 1.1.7 apibrėžimo (žr. 1.1 poskyrį) seka, kad tikimybinių matų šeima $\widehat{P}_n$ yra suspausta.

Iš $\widehat{P}_n$ suspaustumo seka reliatyvus kompaktiškumas. Vadinasi egzistuoja, toks posekis $\{\widehat{P}_{nl}\} \subset \{\widehat{P}_n\}$, kad $\widehat{P}_{nl}$, kai $l \longrightarrow \infty$, silpnai konverguoja į tam tikrą tikimybinį matą P, apibrėžtą erdvėje iš $(H(D), \mathcal{B}(H(D))$. Kadangi erdvė $H(D)$ separabili, tai

$$\widehat{X}_{nl} \xrightarrow[l\to\infty]{\mathcal{D}} P. \tag{2.8}$$

Pažymėkime dar vieną $H(D)$-reikšmį atsitiktinį elementą $X_N = X_N(s) = \zeta(s + i\eta_N)$.

Tada, naudodamiesi 2.1.4 teorema, gauname, kad su kiekvienu $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\limsup_{N\to\infty}\mu(\rho(X_N(s),X_{N,n}(s))\\ &\leq \lim_{n\to\infty}\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N\varepsilon}\sum_{k=1}^{N}\rho(\zeta(s+ix_kh),\zeta_n(s+ix_kh))=0.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Dabar, naudodamiesi 4.2 teorema iš [7] ir (2.5), (2.8) bei (2.9), gauname, jog

$$X_N \xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{D}} P, \tag{2.10}$$

t.y., tikimybinis matas P_N, kai $N\to\infty$, silpnai konverguoja į matą P. Pastarasis sąryšis parodo, kad ribinis matas P yra nepriklausomas nuo sekos $\{P_{nl}\}$. Kadangi $\{P_n : n\in\mathbb{N}\}$ yra reliatyviai kompaktiškas,

$$\widehat{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} P.$$

t.y, tikimybinis matas P_N, kai $N\to\infty$, silpnai konverguoja į P.

Be to, A. Laurinčiko monografijoje [7] įrodyta, kad

$$\frac{1}{T}meas\{\tau\in[0,T] : \zeta(s+i\tau)\in A\},\quad A\in\mathcal{B}(H(D)),$$

kai $T\to\infty$, taip pat silpnai konverguoja į ribinį matą P ir $P=P_\zeta$. Taigi, P_N, kai $N\to\infty$, kaip silpnai konverguoja į P_ζ. ■

2.2 Pagrindinės teoremos įrodymas

Mums bus reikalinga Mergeliano teorema apie analizinių funkcijų aproksimavimą polinomais. Ją pateikėme 1.3 poskyryje.

Remiantis šia lema, egzistuoja toks polinomas $p(s)$, kad

$$\sup_{s\in K}|f(s)-e^{p(s)}| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.11}$$

Žinoma [7], kad mato P_ζ atrama yra aibė $\{g\in H(D) : g(s)\neq 0 \text{ arba } g(s)\equiv 0\}$. Tegul

$$G=\left\{g\in H(D) : \sup_{s\in K}|g(s)-e^{p(s)}| < \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Kai $e^{p(s)}\neq 0$, G yra ribinio mato P_ζ atramos elemento $e^{p(s)}$ atviroji aplinka. Todėl galioja nelygybė $P_\zeta(G) > 0$. Taigi, iš 2.1.1 teoremos turime, kad

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#\{1 \le k \le N : \zeta(s + ix_k h) \in G\} \ge P_\zeta(G) > 0.$$

Šis įvertis ir aibės G apibrėžimas, leidžia gauti nelygybę

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N}\# \left\{1 \le k \le N : \sup_{s\in K} |\zeta(s + ix_k h) - e^{p(s)}| < \frac{\varepsilon}{2}\right\} > 0.$$

Iš čia ir (2.11) gauname teoremos įrodymą. ■

IŠVADOS

Magistro darbe išnagrinėtas Rymano dzeta funkcijos universalumo klausimas, akcentuojant analizinių funkcijų aproksimavimo diskrečiais Rymano dzeta funkcijos postūmiais problemą.

Magistro darbe pateiktas Rymano dzeta universalumo atvejis apibendrina ankščiau gautus ([2], [7]) rezultatus – gauta universalumo teorema tam tikrai, platesnei diskrečių postūmių sekų klasei.

LITERATŪRA

[1] B. Bagchi. *The statistical behaviour and universality properties of the Riemann zeta - function and other allied Dirichlet series.* Ph. D. Thesis. Indian Statistical Institute, Calcutta, 1981.

[2] A. Dubickas ir A. Laurinčikas. *Distribution modulo 1 and the discrete universality of the Riemann zeta - function.* Abh. Math. Semin. Univ. Hamb. **86**(1) (2016), 79-87.

[3] R. Kačinskaitė, A. Laurinčikas. *Pirminių skaičių pasiskirstymas.* VŠĮ Šiaulių universiteto leidykla, 2003.

[4] J. Kubilius, *Rymano dzeta funkcija ir jos paslaptys*:
$http://web.vu.lt/mif/v.stakenas/a+o/1996-1/1996-1-47-54.pdf$.

[5] L. Kuipers, H. Niederreiter. *Uniform Distribution of Sequences.* Pure and Applied Mathematics, Wiley - Interscience, New York, London, Sydney, 1974.

[6] A. Laurinčikas. *Rymano dzeta funkcijos teorijos pagrindai.* Vilniaus universitetas, 1992.

[7] A. Laurinčikas. *Limit Theorems of the Riemann Zeta - Function.* Kluwer, Dordrecht, Boston, London, 1996.

[8] A. Laurinčikas, R. Macaitienė, D. Šiaučiūnas. *Uniform distribution modulo 1 and the joint universality of Dirichlet L-functions.* Lith. Math. J. (to appier).

[9] R. Macaitienė. Dzeta funkcijų reikšmių pasiskirstymo tyrimai. Mokslo darbų apžvalga. Fiziniai mokslai. Matematika ŠU, 2013.

[10] K. Matsumoto. A Survey on the theory of universality for zeta and L function, *Number theory: Plowing and Starring Through High Wave Forms*, Japan, 2015, 95–144.

[11] Roland van der Veen. *The Riemann Hypotesis „A million dollar problem".* Leiden University and Jan van der Craats, 2011.

[12] J. Steuding. *Value - Distribution of L - Functions.* Lecture Notes Math. 1877, Springer, Berlin, 2007.

[13] S. M. Voronin. Theorem on the "universatity" of the Riemann zeta- function. *Math USSR Izv.* 9, 1975, 443–453.

[14] G. Vitkevičienė, R. Macaitienė. On discrete universality of the Riemann zeta function Collection of Abstract from 13th International Saintific Conference "Students on their Way tu Science", Jelgava 2018, 71p.

SANTRAUKA

Analizinių funkcijų aproksimavimas

diskrečiais Rymano dzeta funkcijos postūmiais

Gerai žinoma, jog Rymano dzeta funkcija $\zeta(s)$, $s = \sigma + it$, yra universali funkcija Voronino prasme – funkcijos $\zeta(s)$ postūmiais $\zeta(s + i\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, gali būti aproksimuojama plati analizinių funkcijų klasė.

Voronino tyrimus tęsia daugelis žinomų skaičių teorijos specialistų, pavyzdžiui B. Bagčis (Bagchi), A. Reichas (Reich), S. M. Gonekas (Gonek) ir daugelis kitų matematikų. Rezultatų gausa dar kartą parodo universalumo problemos aktualumą ne tik dzeta ir L funkcijų teorijoje, bet ir visoje skaičių teorijoje.

Atsižvelgiant į poreikį taikymų srityje, vis aktualesni tampa rezultatai, susiję su analizinių funkcijų aproksimavimu diskrečiais minėtų funkcijų postūmiais. Tuo atveju, kai τ reikšmės imamos iš kokios nors diskrečios aibės, tokio tipo teoremos vadinamos *diskretaus universalumo* teoremomis. Paprasčiausias pavyzdys, kurį pateikė Bagčis (B. Bagchi) [1], yra aibė $\{kh : k \in \mathbb{N}_0\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, kur $h > 0$ yra fiksuotas skaičius (t.y., reikšmės imamos iš aritmetinės progresijos). Pateiktą rezultatą praplėtė A. Dubickas ir A. Laurinčikas [2], postūmius imdami iš sekos $\{k^\alpha h : k \in \mathbb{N}_0\}$, čia α fiksuotas, $0 < \alpha < 1$. Vienas iš aktualiausių uždavinių diskretaus universalumo teorijoje yra rasti kuo platesnę postūmių, su kuriais galiotų universalumo teoremos, aibę.

Magistro darbo tikslas – *įrodyti diskretų Rymano dzeta funkcijos $\zeta(s)$ universalumą tam tikrai postūmių sekų, tolygiai pasiskirsčiusių moduliu 1, klasei.*

Nagrinėtos sekos $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \in \mathfrak{X} \subset \mathbb{R}$, tenkinančios reikalavimus:

1. $\{ax_k\}$ yra tolygiai pasiskirsčiusi moduliu 1 su visiais realiaisiais skaičiais $a \neq 0$;
2. $1 \leq x_k \leq k$, visiems $k \in \mathbb{N}$;
3. Kai $1 \leq k, m \leq N$, $k \neq m$, teisinga nelygybė

$$|x_k - x_m| \geq \frac{1}{y_N},$$

čia $y_N > 0$ toks, kad $y_N x_N \ll N$.

Magistro darbe įrodytas $\zeta(s)$ universalumas, postūmius imant iš klasės $\mathfrak{X}$.

Pagrindinė teorema. *Tarkime, kad* $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \in \mathfrak{X}$, $\mathcal{K}$ *yra juostos* $D = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$ *aibė, turinti jungųjį papildinį, o* $f(s)$ *yra tolydi nelygi nuliui aibėje* K *ir analizinė aibės* K *viduje funkcija. Tuomet su kiekvienu* $h > 0$ *ir* $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \# \left\{ 1 \leq k \leq N : \sup_{s\in K} |\zeta(s + ix_k h) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

SUMMARY

Aproximation of analytic functions by
discrete shifts of the Riemann zeta-function

It is well known that the Riemann zeta-function $\zeta(s)$, $s = \sigma + it$, is universal in the Voronin sense, that is, its shifts $\zeta(s + i\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, approximate a wide class of analytic functions.

Voronin's result turned out to be interesting for number theorists. A. Reich, S. M. Gonek, B. Bagchi, A. Good and others proposed new methods for proving of universality, improved Voronin's theorem and extended the universality property for other zeta and L-functions.

In the master thesis we focus on the *discrete universality* of $\zeta(s)$, when τ takes values from a certain discrete set (e.g., from an arithmetic progression). The simplest discrete result was given by B. Bagchi [1] for the set $\{kh : k \in \mathbb{N}_0\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, where $h > 0$ is a fixed number. His result was generalized by A. Laurinčikas [7], and later extended by A. Dubickas and A. Laurinčikas [2] for the sequence $\{k^\alpha h : k \in \mathbb{N}_0\}$ with a fixed α, $0 < \alpha < 1$.

The aim of this work was a generalization of the mentioned A. Dubickas and A. Laurinčikas' result. More precisely, we have obtained the discrete universality of $\zeta(s)$ for the class $\mathfrak{X}$ of sequences $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ satisfying the following hypotheses

1. $\{ax_k\}$ is uniformly distributed modulo 1 for all real $a \neq 0$;

2. $1 \leq x_k \leq k$, for all $k \in \mathbb{N}$;

3. for $1 \leq k$, $m \leq N$, $k \neq m$, the inequality

$$|x_k - x_m| \geq \frac{1}{y_N}$$

holds with $y_N > 0$ satisfying $y_N x_N \ll N$.

We obtaibed the following result.

Main theorem. *Suppose that the sequence* $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \in \mathfrak{X}$*. Let* $K \subset \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$ *be a compact subset with connected complement, and let* $f(s)$ *be a continuous non-vanishing function on* K *which is analytic in the interior of* K*. Then, for every* $h > 0$ *and* $\varepsilon > 0$*,*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \# \left\{ 1 \le k \le N : \sup_{s\in K} |\zeta(s + ix_k h) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$