ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
INFORMATIKOS KATEDRA

Paula Mockutė
Matematikos studijų programa, valstybinis kodas: 6211AX010

Normuotų parabolinių formų dzeta funkcijų reikšmių pasiskirstymas

Magistro darbas

Darbo vadovė

prof. dr. Renata Macaitienė

Šiauliai, 2018

Patvirtinu, kad magistro darbas yra originalus, neturintis plagiato požymių.

Parašas .... Vardas ir pavardė ....

Data ....

Turinys

Įvadas

Daugiau kaip prieš dvidešimt metų A. Vailso (Wiles) įrodyta P. Ferma (Fermat) teorema apie lygties

$$x^n + y^n = z^n, \qquad x, y, z \in \mathbb{Z}, \qquad n \geq 3,$$

neišsprendžiamumą, sukėlė dar didesnį nei ankščiau susidomėjimą modulinių formų dzeta funkcijomis, kurios vaidino svarbų vaidmenį šios problemos sprendime. Todėl pastarąjį dešimtmetį ypatingai daug dėmesio skiriama modulinių formų dzeta funkcijų reikšmių pasiskirstymui. Vienas iš tokių pavyzdžių – A. Sankaranarayananas (Sankaranarayanan), kuris lygiagrečiai A. Selbergo (Selberg)sukurtai teorijai (Rymano dzeta funkcijai), išvystė parabolinių formų dzeta funkcijų teoriją. Tai sudarė galimybes nagrinėti normuotų tikrinių formų dzeta funkcijas Boro-Jeseno (Bohr–Jessen) metodu ir gauti analogiškus rezultatus A. Selbergo (Selberg), D. Džoinerio (Joyner), A. Gudo (Good), A. Gošo (Ghosh), A. Laurinčiko pateiktiems rezultatams Rymano dzeta funkcijai.

Magistro darbe nagrinėsme normuotų parabolinių formų dzeta funkcijų reikšmių pasiskirstymą. Ribinės teoremos normuotų tikrinių parabolinių formų dzeta funkcijoms yra nagrinėtos ir ankščiau. Pavyzdžiui, R. Ivanauskaitė [5] pateikė parabolinių formų dzeta funkcijų momentų asimptotiką arti kritinės tiesės, šių funkcijų argumento formules, įrodė ribinę teoremą apie konvergavimą į pusiau normalųjį dėsnį parabolinių formų dzeta funkcijoms. A. Kolupajeva [7] nagrinėjo ribines teoremas parabolinių formų L-funkcijų sąsūkoms su Dirichlė charakteriais. R. Ivanauskaitės disertacijoje [5] gauta asimptotinė formulė leidžia įrodyti ribinę teoremą normuotoms parabolinių formų dzeta funkcijoms $\varphi(s, F)$ arti kritinės tiesės.

Funkcijos $\varphi(s, F)$ apibrėžimas ir savybės pateikiamos 1.1 poskyryje, tačiau priminsime, jog kiekvienai normuotai tikrinei formai $F(z)$ galima apibrėžti dzeta funkciją $\varphi(s, F)$ Dirichlė (Dirichlet) eilute

$$\varphi(s, F) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c(m)}{m^s}, \quad s = \sigma + it.$$

Dirichlė eilutė konverguoja absoliučiai srityje $\sigma > \frac{\kappa+1}{2}$, kur κ yra modulinės formos svoris. Be to, funkcija $\varphi(s, F)$ yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą.

Darbo tikslas – *įrodyti ribinę teoremą apie konvergavimą į lognormalųjį dėsnį parabolinių formų dzeta funkcijoms arti kritinės tiesės.*

Tyrimo objektas – *normuotų tikrinių parabolinių formų dzeta funkcijos.*

Ribinių teoremų įrodymui taikomas momentų metodas.

Pirmąjį tikimybinio pobūdžio rezultatą Rymano dzeta funkcijai $\zeta(s)$, primenantį šiuolaikines ribines teoremas silpnojo tikimybinio mato konvergavimo prasme, praėjusio amžiaus ketvirtajame dešimtmetyje gavo H. Boras ir B. Jesenas [2].

Tegul R yra uždaras stačiakampis su lygiagrečiomis ašims kraštinėmis, m yra Žordano (Jordan) matas ir

$$L(\sigma, R) = m(t \in [0, T] : \log \zeta(\sigma + it) \in R).$$

1930 m. Boras ir Jesenas įrodė tokią teoremą.

A teorema [2]. *Tegul $\sigma > 1$. Tuomet egzistuoja riba*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{L(\sigma, R)}{T} \stackrel{\text{def}}{=} W(\sigma, R),$$

kuri priklauso tik nuo σ ir R.

Vėliau **A** teorema buvo išplėsta į sritį $\sigma > 1/2$.

Naudojant šiuolaikinę terminologiją, **A** teorema yra formuluojama tikimybinių matų silpnojo konvergavimo prasme. Tegul $\mathcal{B}(S)$ yra erdvės S Borelio aibių klasė, meas$\{A\}$ žymi mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego (Lebesgue) matą, o

$$\nu_T(...) = \frac{1}{T} meas\{t \in [0, T] : ...\}.$$

Čia vietoje daugtaškio yra rašoma sąlyga, kurią tenkina t. Tuomet šiuolaikinis **A** teoremos analogas turi tokį pavidalą [8].

B teorema [8]. *Tegul $\sigma > 1/2$. Tuomet erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ egzistuoja toks tikimybinis matas P_σ, į kurį, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja tikimybinis matas*

$$\nu_T(\zeta(\sigma + it) \in A), \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

Pirmąją ribinę teoremą funkcijai $\varphi(s, F)$ įrodė A. Kačėnas su A. Laurinčiku [6]. Tegul $D = \{s \in \mathbb{C} : \sigma > \kappa/2,\}$ o $H(D)$ yra analizinių srityje D funkcijų erdvė su tolygaus konvergavimo ant kompaktų topologija. Be to, tegul $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$ yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje ir

$$\Omega = \prod_p \gamma_p,$$

kur $\gamma_p = \gamma$ visiems pirminiams p. Su sandaugos topologija ir pataškinės daugybos operacija begaliniamatis toras Ω yra kompaktiška topologinė Abelio grupė. Todėl erdvėje

$(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ gali būti apibrėžtas tikimybinis Haro (Haar) matas m_H. Gauname tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Tegul $\omega(p)$ yra elemento $\omega \in \Omega$ projekcija į koordinatinę erdvę γ_p. Tikimybininėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ apibrėžiame $H(D)$-reikšmį atsitiktinį elementą $\varphi(s, \omega, F)$ formule

$$\varphi(s, \omega, F) = \prod_p \left(1 - \frac{\alpha(p)\omega(p)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\beta(p)\omega(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Tuomet minėta teorema turi pavidalą [6].

C teorema [6]. *Tikimybinis matas*

$$\nu_T(\varphi(s + i\tau, F) \in A, \qquad A \in \mathcal{B}(H(D)),$$

kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento $\varphi(s, \omega, F)$ skirstinį.

Šį rezultatą A. Laurinčikas ir K. Matsumotas (Macumoto) panaudojo **C** teoremą funkcijos $\varphi(s, F)$ universalumo įrodymui. Ribinėse teoremose dzeta funkcijoms kritinėje tiesėje arba šalia jos yra reikalingas normavimas. Rymano dzeta funkcijai A. Laurinčikas [8] įrodė tokį rezultatą. Tegul $l_T \to \infty$, kai $T \to \infty$,

$$\hat{\sigma}_T = \frac{1}{2} + \frac{1}{l_T}$$

ir

$$\hat{k}_T = \begin{cases} (2^{-1} \log l_T)^{-1/2}, & \text{jei } l_T \leq \log T, \\ (2^{-1} \log l_T)^{-1/2}, & \text{jei} l_T \geq \log T. \end{cases}$$

Be to, tegul

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

yra standartinio normaliojo dėsnio pasiskirstymo funkcija, o

$$G(x) = \begin{cases} \Phi(\log x), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

yra lognormalioji pasiskirstymo funkcija.

D teorema [8]. *Pasiskirstymo funkcija*

$$\nu_T(|\zeta(\hat{\sigma}_T + it)|^{(\sqrt{2^{-1} \log l_T})^{-1}} < x),$$

kai $T \to \infty$, pataškiui konverguoja į $G(x)$.

Magistro darbe gaunamas **D** teoremos analogas funkcijai $\varphi(s, F)$. Tegul

$$\sigma_T = \frac{\kappa}{2} + \frac{\psi_T \sqrt{\log\log T}}{\log T},$$

$\psi_T > 0, \psi_T \to \infty$ ir $\log \psi_T = o(\log\log T)$, kai $T \to \infty$. Be to, tegul

$$k_T = (2^{-1} \log\log T)^{-1/2}$$

ir

$$G_T(x) = \nu_T(|\varphi(\sigma_T + it, F)|^{k_T} < x).$$

Pagrindinė teorema *Tarkime, jog funkcijai $\varphi(s, F)$ galioja Rymano hipotezės analogas. Tuomet pasiskirstymo funkcija $G_T(x)$, kai $T \to \infty$, pataškiui konverguoja į pasiskirstymo funkciją $G(x)$.*

Darbo struktūra

Magistro darbą sudaro įvadas, du skyriai, išvados, literatūros sąrašas, santrauka anglų ir lietuvių kalbomis. Apibrėžimai, teoremos, lemos ir formulės numeruojamos skaičiais naudojant skyriaus, poskyrio bei objekto numerį skyriuje.

Aprobacija

Magistro darbo rezultatai pristatyti 13-ojoje Šiaulių universiteto *studentų mokslinių darbų konferencijoje* 2018 m. gegužės 17 dieną.

1 Naudojamos sąvokos ir rezultatai

Šiame skyriuje pateikiami darbe naudojamų sąvokų apibrėžimai, terminai bei pagalbiniai rezultatai.

1.1 Modulinės formos

Tegul, kaip įprasta, $\mathbb{Z}$ yra visų sveikųjų skaičių aibė, o

$$SL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \qquad ad - bc = 1 \right\}.$$

Matricų daugybos operacijos atžvilgiu aibė $SL(2, \mathbb{Z})$ yra grupė, nes:

1. Dviejų matricų su sveikaisiais elementais sandauga vėl yra matrica, kurios elementai

yra sveikieji skaičiai. Kadangi matricų sandaugos determinantas yra lygus sudauginamųjų matricų determinantų sandaugai, tai ir sandaugos determinantas yra lygus 1.

2. Vienetinis elementas yra matrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Kadangi $SL(2,\mathbb{Z})$ matricų determinantas lygus vienetui, tai kiekviena tokia matrica turi atvirkštinę, kurios elementai yra sveikieji skaičiai, o determinantas taip pat lygus vienetui.

4. Asociatyvumo dėsnis matricų daugybai taip pat galioja.

Taigi, $SL(2,\mathbb{Z})$ *pilnoji modulinė grupė.*

Tegul q yra sveikas teigiamas skaičius, o

$$\Gamma_0(q) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}) : c \equiv 0(\mathrm{mod} q) \right\}$$

yra *pilnosios modulinės grupės pogrupis, vadinamas Hekės (Hecke) pogrupiu* mod q.

Pažymėkime $U = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, \quad y > 0\}$ viršutinę kompleksinės plokštumos $\mathbb{C}$ pusplokštumę kartu su ∞. Priminsime, kad racionalūs taškai kartu su ∞ yra vadinami paraboliniais taškais.

Tegul κ yra lyginis teigiamas skaičius, o $F(z)$ yra analizinė pusplokštumėje U funkcija, visoms matricoms

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}),$$

tenkinanti funkcinę lygtį

$$F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{\kappa} F(z). \tag{1.1}$$

Tuomet, akivaizdu, kad $F(z)$ yra periodinė funkcija ir begalybėje turi Furjė skleidinį

$$F(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c(m) e^{2\pi i m z}.$$

1.1.1 apibrėžimas *Funkcija $F(z)$ yra vadinama analizine begalybėje, jei $c(m) = 0$ visiems $m < 0$, ir nuline, jeigu $c(m) = 0$ visiems $m \leq 0$.*

1.1.2 apibrėžimas *$F(z)$ vadinama analizine ir nuline paraboliniuose taškuose, jeigu funkcija*

$$(cz+d)^{-\kappa} F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$$

yra atitinkamai analizinė ir nulinė begalybėje visoms

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}).$$

1.1.3 apibrėžimas *Analizinė paraboliniuose taškuose funkcija $F(z)$ vadinama svorio κ moduline forma, o jos Furjė eilutė turi pavidalą*

$$F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c(m) e^{2\pi i m z}.$$

1.1.4 apibrėžimas *Jeigu svorio κ modulinė forma yra nulinė paraboliniuose taškuose, tai ji vadinama svorio κ paraboline forma. Tokia parabolinė forma begalybėje turi Furjė skleidinį*

$$F(z) = \sum_{m=1}^{\infty} c(m) e^{2\pi i m z}.$$

Jei (1.1) funkcinė lygtis yra teisinga visiems pilnosios modulinės Hekės pogrupio $\bmod q$ elementams, t.y.,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(q),$$

tuomet parabolinė forma $F(z)$ yra vadinama *svorio κ ir lygio q paraboline forma.*

Pavyzdžiui, funkcija

$$\Delta(z) = e^{2\pi i m z} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i m z})^{24} = \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) e^{2\pi i m z}$$

yra svorio 12 parabolinė forma pilnosios modulinės grupės atžvilgiu ir yra vadinama *Ramanudžano (Ramanujan) paraboline forma*, o $\tau(m)$ yra Ramanudžano funkcija.

Tegul, $S_\kappa(\Gamma_0(q))$ yra visų svorio κ ir lygio q parabolinių formų erdvė. Elementas $F \in S_\kappa(\Gamma_0(q))$ yra vadinamas *Hekės tikrine forma*, jei F yra visų Hekės operatorių tikrinė funkcija. Šiuo atveju formą $F(z)$ galima normuoti, t.y., jos Furjė skleidinys begalybėje turi pavidalą

$$F(z) = \sum_{m=1}^{\infty} c(m) e^{2\pi i m z}, \qquad c(1) = 1.$$

Tegul $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis. Kiekvienai normuotai tikrinei formai $F(z)$ galima apibrėžti dzeta funkciją $\varphi(s, F)$ Dirichlė eilute

$$\varphi(s, F) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c(m)}{m^s}.$$

1974 m. P. Delinis (Deligne) įrodė, jog

$$|c(m)| \le m^{\frac{\kappa-1}{2}} d(m),$$

kur $d(m)$ yra daliklių funkcija

$$d(m) = \sum_{d|m} 1.$$

Iš čia išplaukia, jog funkcijos $\varphi(s,F)$ Dirichlė eilutė konverguoja absoliučiai srityje $\sigma > \frac{\kappa+1}{2}$. Be to, funkcija $\varphi(s,F)$ yra analiziškai pratęsiama į visą s-plokštumą (yra sveikoji funkcija) ir tenkina funkcinę lygtį:

$$(2\pi)^{-s}\Gamma(s)(\varphi(s,F)) = (-1)^{\kappa/2}(2\pi)^{s-\kappa}\Gamma(\kappa-s)\varphi(\kappa-s,F),$$

čia, kaip paprastai, $\Gamma(s)$ – Oilerio (Euler) gama funkcija.

Žinoma, jog $\varphi(s,F)$ netrivialūs nuliai guli juostoje

$$\{s \in \mathbb{C} : (\kappa-1)/2 < \sigma < (\kappa+1)/2\}.$$

Jie yra išsidėstę simetriškai realiosios ašies ir kritinės tiesės $\sigma = \kappa/2$ atžvilgiu. Rymano hipotezės analogas funkcijai $\varphi(s,F)$ teigia, kad visi jos netrivialūs nuliai yra kritinėje tiesėje $\sigma = \kappa/2$.

Kadangi nagrinėjama aritmetinė funkcija $c(m)$ yra *multiplikatyvi*, t.y., $c(1)=1, c(mn) = c(m)c(n)$ visiems $(m,n)=1$, $m,n \in \mathbb{N}$, ir pirminiams p

$$c(p^{m+1}) = c(p)c(p^m) - p^{\kappa-1}c(p^{m-1}), \quad m \in \mathbb{N}\ \{1\},$$

tuomet srityje $\sigma > \frac{\kappa+1}{2}$ funkciją $\varphi(s,F)$ galima užrašyti Oilerio sandauga pagal pirminius skaičius

$$\varphi(s,F) = \prod_p \left(1 - \frac{c(p)}{p^2} + \frac{1}{p^{2s-\kappa+1}}\right)^{-1} = \prod_p \left(1 - \frac{\alpha(p)}{p^s}\right)^{-1}\left(1 - \frac{\beta(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Čia $\alpha(p)$ ir $\beta(p)$ yra tokie jungtiniai kompleksiniai skaičiai, kad $c(p) = \alpha(p) + \beta(p)$ ir

$$|\alpha(p)| \le p^{\frac{\kappa-1}{2}}, \qquad |\beta(p)| \le p^{\frac{\kappa-1}{2}}.$$

Multiplikatyvių funkcijų $g(m)$ vidurkių

$$\sum_{m \le x} g(m)$$

tyrimai turi ilgą ir įdomią istoriją. Paminėsime Delianžo (H. Delange), Selbergo (A. Sellberg), Erdiošo (P. Erdos), Halazo (G. Halasz), Virzingo (E. Wirsing), J. Kubiliaus, Levino (B. V. Levin), Fainleibo (A. S. Fainleib), Timofejevo (N. M. Timofeev), E. Manstavičiaus, Tenenbomo (G. Tenenbaum) pavardes, kurių fundamentalūs darbai įtakojo tyrimus šioje srityje.

Tegul $\omega \ne 0$ yra bet koks kompeksinis skaičius ir, kai $\sigma > \frac{\kappa+1}{2}$,

$$\varphi^{\omega}(s,F) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_\omega(m)}{m^s}.$$

Funkcija $g_\omega(m)$ yra multiplikatyvi ir

$$g_\omega(p^k) = \sum_{l=0}^{k} d_\omega(p^l)\alpha^l(p)d_\omega(p^{k-l})\beta^{k-l}(p),$$

$$d_\omega(p^k) = \frac{\Gamma(\omega+k)}{\Gamma(\omega)k!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Tegul $h(m) = h_\omega(m; F) = g_\omega^2(m)m^(1-\kappa)$. R. Ivanauskaitės disertacijoje [5] nagrinėtas vidurkis

$$M(x) = \sum_{m \le x} h(m), \quad x \to \infty,$$

kuris panaudotas $\varphi(s, F)$ asimptotikai gauti. Magistro darbe pasinaudosime R. Ivanauskaitės rezultatais ir įrodysime funkcijos $\varphi(s, F)$ ribinę teoremą šalia kritinės tiesės.

1.2 Pasiskirstymo funkcijų konvergavimas

Kad suprastume magistro darbe nagrinėjamus silpnojo tikimybinių matų konvergavimo bei pasiskirstymo funkcijų pataškinio konvergavimo klausimus, pateikiame pagrindinius šios teorijos aspektus.

Tegul X yra atsitiktinis dydis, apibrėžtas tam tikroje tikimybinėje erdvėje $(\Omega$, $\mathcal{A}$, $P)$. Tuomet šio dydžio pasiskirstymo funkcija $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$, yra apibrėžiama formule

$$F(x) = P(\omega \in \Omega : X(\omega) < x).$$

Jei nagrinėjama pasiskirstymo funkcijų seka $F_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, sakome, kad $F_n(x)$, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į pasiskirstymo funkciją $F(x)$, jei su kiekviena tolydžia aprėžta realia funkcija $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, yra teisinga lygybė

$$\lim_{x \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dF_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dF(x).$$

Panašiai yra apibrėžiamas ir tikimybinių matų silpnasis konvergavimas. Prieš pateikiant šį apibrėžimą, priminsime tikimybinio mato apibrėžimą.

Tarkime, kad S yra bet kuri metrinė arba net topologinė erdvė. Simboliu $\mathcal{B}(S)$ žymėsime erdvės S Borelio σ-kūną, t.y., mažiausią σ-kūną (σ-algebrą), kuriam priklauso atvirųjų aibių sistema. Pora $(S, \mathcal{B}(S))$ yra vadinama mačia erdve.

1.2.1 apibrėžimas *Tikimybiniu matu, apibrėžtu erdvėje* $(S, \mathcal{B}(S))$, *vadiname neneigiamą aibės funkciją* P, *tenkinančią aksiomas*:

1. $P(S) = 1$;

2. *Jei* $A_1, A_2, ... \in \mathcal{B}(S)$ *ir* $A_k \cap A_l = \varnothing, k \neq l$, *tai*

$$P(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m) = \sum_{m=1}^{\infty} P(A_m).$$

Pirmoji aksioma vadinama mato P normavimo, o antroji – mato σ-adityvumo.

1.2.2 apibrėžimas *Tarkime, kad* P_n, $n \in \mathbb{N}$, *ir* P *yra tikimybiniai matai erdvėje* $(S, \mathcal{B}(S))$. *Sakome, kad* P_n, *kai* $n \to \infty$, *silpnai konverguoja į matą* P, *jei kiekvienai realiai, aprėžtai, tolydžiai funkcijai* f *erdvėje* S *yra teisinga lygybė*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_S f dP_n = \int\limits_S f dP.$$

Priminsime, kad pasiskirstymo funkcijos $V(x)$ charakteristinė transformacija $\omega_k(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1$, apibrėžiama integralu

$$\omega_k(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^{i\tau} sgn^k x dV(x).$$

Be to, sakoma, kad pasiskirstymo funkcija $V_n(x)$, kai $n \to \infty$, $m-$silpnai konverguoja į $V(x)$, jei pasiskirstymo funkcija $V_n(x)$, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į $V(x)$ ($\lim_{n\to\infty} V_n(x) = V(x)$ visuose $V(x)$ tolydumo taškuose) ir $\lim_{n\to\infty} V(0) = V(0)$ bei $\lim_{n\to\infty} V(+0) = V(+0)$.

Žinoma [3], kad tokioms trasfomacijoms yra teisingi žemiau pateikti tvirtinimai.

1.2.3 lema *Tarkime, kad pasiskirtsymo funkcija* $V_n(x)$, *kai* $n \to \infty$, $m-$*silpnai konverguoja į pasiskirstymo funkciją* $V(x)$ *ir* $\omega_{nk}(\tau)$ *bei* $\omega_k(\tau)$ *atitinkamai yra, charakteristinės funkcijų* $V_n(x)$ *ir* $V(x)$ *transformacijos. Tuomet*

$$\lim_{n\to\infty} \omega_{nk}(\tau) = \omega_k(\tau), \quad k = 0, 1,$$

konvergavimas yra tolygus τ *atžvilgiu kiekviename baigtiniame intervale.*

1.2.4 lema *Tarkime, kad*

$$\lim_{n\to\infty} \omega_{nk}(\tau) = \omega_k(\tau), \quad k = 0, 1,$$

o funkcja $\omega_k(\tau)$ yra tolydi taške $\tau = 0$. Tuomet $V_n(x)$, kai $n \to \infty$, $m-$silpnai konverguoja, į pasiskirstymo funkciją $V_n(x)$, turinčią charakteristinę transformaciją $\omega_k(\tau)$, $k = 0, 1$.

Šių lemų įrodymus galima rasti [3].

2 Konvergavimas į lognormalųjį dėsnį

Tegul, kaip visada, $\Phi(x)$ žymi standartinio normaliojo dėsnio pasiskirstymo funkciją

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\frac{-u^2}{2}} du,$$

o

$$G(x) = \begin{cases} \Phi(\log(x)), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

lognormaliąją pasiskirstymo funkciją.

Šiame skyriuje įrodysime ribinę teoremą apie konvergavimą į lognormalųjį dėsnį parabolinių formų dzeta funkcijoms $\varphi(s, F)$, t.y. įrodysime ribinę teoremą apie konvergavimą į pasiskirstymo funkciją $G(x)$ arti kritinės tiesės. Tam naudosime Rymano hipotezės analogą funkcijai $\varphi(s, F)$.

Tegul, kaip ir [5],

$$\sigma_T = \frac{\kappa}{2} + \frac{\psi_T \sqrt{\log\log T}}{\log T},$$

čia $\psi_T > 0$, $\psi_T \to \infty$ ir $\log \psi_{\log T} = o(\log\log T)$, kai $T \to \infty$. Kaip minėjome įvade, tegul $\mathrm{meas}\{A\}$ žymi mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matą, o

$$\nu_T(...) = \frac{1}{T} \mathrm{meas}\left\{t \in [0, T] : ...\right\}, T > 0,$$

čia vietoje daugtaškio rašoma sąlyga, kurią tenkina t. A. Laurinčikas įrodė tokį rezultatą Rymano dzeta funkcijai (įvade ją žymėjome D raide).

D teorema [8]. *Pasiskirstymo funkcija*

$$\nu_T(|\zeta(\hat{\sigma}_T + it)|^{((\sqrt{2^{-1}\log l_T}))^{-1}} < x)$$

kai $T \to \infty$, *pataškiui konverguoja į* $G(x)$.

Čia $l_T \to \infty$, kai $T \to \infty$,

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{2} + \frac{1}{l_T}$$

ir

$$\hat{k}_T = \begin{cases} (2^{-1}\log l_T)^{-\frac{1}{2}}, & jei \quad l_T \leq \log T, \\ (2^{-1}\log l_T)^{-\frac{1}{2}}, & jei \quad l_T \geq \log T. \end{cases} \tag{2.2}$$

Šiame skyriuje įrodysime D teoremos analogą funkcijai $\varphi(s, F)$.

Pastaba. Pirmiausia yra įrodoma, jog funkcijai $\varphi(s, F)$ reikalingas normavimas.

2.1 Funkcijos $\varphi(s, F)$ normavimas

Pirmiausia įrodysime, jog pasiskirstymo funkcija

$$\nu_T(|\varphi(\sigma_T + it, F)| < x),$$

kai $T \to \infty$, negali silpnai konverguoti į jokią pasisirstymo funkciją. Funkcijai $\varphi(s, F)$ reikalingas normavimas.

Pažymėkime $E_0(x)$ tokią pasiskirstymo funkciją,

$$E_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{kai } x > 0, \\ 0, & \text{kai } x \leq 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Tegul $B_T > 0$ ir

$$\hat{G}(x) = \nu_T((B_T|\varphi(\sigma_T + it, F)|)^{\frac{1}{\sqrt{\log\log T}}} < x).$$

2.1.1 teorema *Tegul funkcijai $\varphi(s, F)$ galioja Rymano hipotezės analogas. Pasiskirstymo funkcija $\hat{G}(x)$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į funkciją $E_0(s)$ tada ir tik tada, kai*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\log B_T}{\sqrt{\log\log T}} = -\infty.$$

2.1.1 teoremos įrodymui naudojama Frečeto-Sohato (Frechet-Shohat) teorema, kurią pateiksime kaip lemą. Tegul $F(x)$ yra pasiskirstymo funkcija ir

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x), \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad \text{bei} \quad \beta_r = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^r dF(x), \quad r \in \mathbb{R}^+, \quad r \geq 0,$$

atitinkamai yra pasiskirstymo funkcijos $F(x)$ k-osios eilės momentas ir m-tosios eilės absoliutus momentas.

Pasiskirstymo funkcijos $F_n(x)$ atitinkamus momentus pažymėkime $\alpha_{n,k}$ ir $\beta_{n,k}$.

2.1.2 lema [11]. *Tarkime, jog pasiskirstymo funkcija $F(x)$ vienareikšmiškai nusakoma jos momentais. Jei funkcijos $F_n(x)$ momentai $\alpha_{n,k}$, $k \in \mathbb{N}_0$, konverguoja į atitinkamus funkcijos $F(x)$ momentus, tuomet $F_n(x)$, kai $n \to \infty$, silnai konverguoja į $F(x)$.*

Remiantis šiais bei 1.2 poskiryje pateiktais pagalbiniais tvirtinimais, įrodysime 2.1.1 teoremą.

2.1.1 teoremos įrodymas.

Pakankamumas. Pasinaudoję Čebyševo nelygybe, randame, kad su kiekvienu ε, teisinga nelygybė

$$\nu_T((B_T|\varphi(\sigma_T + it, F)|)^{\frac{1}{\sqrt{\log\log T}}} \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 T} B_T^{\frac{2}{\sqrt{\log\log T}}} \int_0^T |\varphi(\sigma_T + it, F)|^{\frac{2}{\sqrt{\log\log T}}} dt. \tag{2.4}$$

Remiantis R. Ivanauskaitės disertacijoje [5] įrodyta 2.1 teorema, gauname, kad

$$\int_0^T |\varphi(\sigma_T + it, F)|^{\frac{2}{\sqrt{\log\log T}}} dt \ll T, \quad u = \sqrt{2}.$$

Ši ir (2.4) nelygybės bei teoremoje pateikta sąlyga duoda, kad su kiekvienu $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{T\to\infty} \nu_T((B_T|\varphi(\sigma_T + it, F)|)^{\frac{1}{\sqrt{\log\log T}}} \geq \varepsilon) = 0.$$

Gerai žinoma, kad tai yra ekvivalentu funkcijos $\hat{G}_T(x)$, kai $T \to \infty$ silpnam konvergavimui į $E_0(x)$.

Būtinumas. Tarkime, kad pasiskirstymo funkcija $\hat{G}_T(x)$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į $E_0(x)$. Be to, tegul negalioja teoremoje pateikta sąlyga. Tuomet egzistuoja tokia seka T_1, kad, kai $T_1 \to \infty$,

$$\frac{\log B_{T_1}}{\sqrt{\log\log T_1}}$$

yra aprėžta arba tolsta į begalybę.

Pirmiausia, tarkime, kad

$$|\frac{\log B_{T_1}}{\sqrt{\log\log T_1}}| \leq c_1, \quad c_1 > 0) \tag{2.5}$$

Tuomet, remiantis 2.1 teorema iš [5], gauname, kad

$$\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} (B_{T_1}|\varphi(\sigma_{T_1} + it, F)|)^{\frac{2}{\sqrt{\log\log T_1}}} dt \leq c_2, \quad c_2 > 0. \tag{2.6}$$

Kita vertus, $E_0(x)$ momentams galioja lygybė

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r dE_0(x) = 0, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Todėl, remiantis (2.6) ir 2.1.2 lema gauname, kad

$$\lim_{T_1\to\infty} \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} (B_{T_1}|\varphi(\sigma_{T_1} + it, F)|)^{\frac{2}{\sqrt{\log\log T_1}}} dt = 0.$$

Tačiau, ši lygybė kartu su (2.5) nelygybe prieštarauja minėtai 2.1 teoremai iš [5].

Dabar, tegul

$$\lim_{T_1\to\infty} \frac{\log B_{T_1}}{\sqrt{\log\log T_1}} = +\infty.$$

Tuomet, kai $T_1 \to \infty$, su kiekvienu $\varepsilon > 0$,

$$\nu_{T_1}(B_{T_1}|\varphi(\sigma_{T_1} + it, F)|)^{\frac{1}{\sqrt{\log\log T_1}}} \geq \varepsilon) \geq \nu_{T_1}((|\varphi(\sigma_{T_1} + it, F)|)^{\frac{2}{\sqrt{\log\log T_1}}} \geq \varepsilon) \nrightarrow 0.$$

Tokiu atveju, gauname, kad $\hat{G}_T(x)$ negali konverguoti į $E_0(x)$. Teorema įrodyta.

2.1.3 teorema *Tarkime, kad funkcijai $\varphi(s, F)$ galioja Rymano hipotezės analogas. Tuomet pasiskirstymo funkcija*

$$\nu_T(|\varphi_T + it, F)| < x,) \tag{2.7}$$

kai $T \to \infty$, negali silpnai konverguoti į jokią pasiskirstymo funkciją.

Įrodymas. Tarkime priešingai, kad (2.7) pasiskirstymo funkcija, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į tam tikrą pasiskirstymo funkciją. Tegul

$$B_T = e^{-\sqrt{\log\log T}}.$$

Tuomet, akivaizdu, kad pasiskirstymo funkcija,

$$\nu_T(B_T|\sigma_T + it, F)| < x), \tag{2.8}$$

kai $T \to \infty$, $m-$silpnai konverguoja į $E_0(x)$. Pasiskirstymo funkcijos (2.8) charakteristinės tranformacijos $\omega_k(\tau)$, $k = 0, 1$, yra lygios nuliams, todėl pagal 1.2.3 lemą, kai $T \to \infty$,

$$\frac{1}{T}\int_0^T (B_T|\varphi(\sigma_T + it, F)|)^{i\tau} dt \to 0$$

konverguoja tolygiai τ atžvilgiu kiekviename baigtiniame intervale. Taip pat, kiekvienam $\tau \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T (B_T|\varphi(\sigma_T + it, F)|)^{\frac{i\tau}{\sqrt{\log\log T}}} dt = 0.$$

Tuomet, pagal 1.2.4 lemą, pasiskirstymo funkcija

$$\nu_T(B_T|\varphi(\sigma_T + it, F)|)^{\frac{i}{\sqrt{\log\log T}}} < x),$$

kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į $E_0(x)$. Be to, kadangi

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\log B_T}{\sqrt{\log\log T}} = \lim_{T\to\infty} \frac{\sqrt{\log\log T}}{\sqrt{\log\log T}} = -1,$$

tai prieštarauja 2.1.1 teoremai. Teorema įrodyta.

2.2 Pagrindinės teoremos įrodymas

Dar kartą suformuosime pagrindinį rezultatą. Tegul

$$k_T = (2^{-1}\log\log T)^{-1/2},$$

ir

$$G_T(x) = \nu_T(|\varphi(\sigma_T + it, F)|^{k_T} < x.$$

Pagrindinė teorema *Tarkime, kad funkcijai $\varphi(s, F)$ galioja Rymano hipotezės analogas. Tuomet pasiskirstymo funkcija $G_T(x)$, kai $T \to \infty$, pataškiui konverguoja į pasiskirstymo funkciją $G(x)$*

Akcentuotina tai, kad pagrindinė teorema yra panašaus rezultato Rymano dzeta funkcijai $\zeta(s)$ analogas. Tegul

$$\hat{\sigma}_T = \frac{1}{2} + \frac{\psi_T \sqrt{\log\log T}}{\log T},$$

čia funkcija ψ_T yra ta pati, kaip ir σ_T apibrėžime. A. Laurinčiko monografijoje [8] įrodyta, kad pasiskirstymo funkcija

$$(\nu_T(|\zeta(\hat{\sigma}_T + it)|^{k_T} < x),$$

kai $T \to \infty$, pataškiui konverguoja į pasiskirstymo funkciją $G(x)$. Tačiau funkcija $\varphi(s, F)$ yra kur kas sudėtingesnė nei $\zeta(s)$, todėl reikalingas Rymano hipotezės analogas.

Pagrindinės teoremos įrodymui taikysime momentų metodą. Nesunku patikrinti, kad skaičiai $e^{k^2/2}$, $k \in \mathbb{N}_0$, yra pasiskirstymo funkcijos $G(x)$ momentai, kitaip tariant,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k dG(x) = e^{\frac{k^2}{2}}.$$

Iš tiesų, remiantis funkcijos $G(x)$ apibrėžimu guname, kad

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k dG(x) = \int\limits_{0}^{\infty} x^k d\Phi(\log x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{kx} d\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{kx} d\left(\int\limits_{-\infty}^{x} e^{\frac{-u^2}{2}} du \right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2} + kx} dx = \frac{e^{\frac{k^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x-k)^2}{2}} dx = \frac{e^{\frac{k^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-u^2}{2}} du = e^{\frac{k^2}{2}}.$$

Be to, Leipniko (R. Leipnik) straipsnyje [10] įrodytas ir žemiau pateiktas tvirtinimas.

2.2.1 lema *Pasiskirstymo funkcija $G(x)$ nėra vienareikšmiškai apibrėžiama jos momentais.*

Ši lema parodo, kad 2.1.2 lemos ir 2.1 teoremos [5] negalime naudoti pagrindinės teoremos įrodymui. Dėl šios priežasties išnagrinėsime pasiskirstymo funkcijos $\Phi(x)$ momentus.

Tegul u_T, kai $T \to \infty$, artėja į nulį pakankamai lėtai. Be to, tegul, $\tau_T > 0$, kai $\tau_T \to \infty$ ir $\tau_T^{-1} > u_T$. Pažymėkime

$$A_T = \{t \in [0, T] : |\varphi(\sigma_T + it, F)| \geq e^{-\tau_T \sqrt{2^{-1} \log\log T}}\},$$

$$B_T = \{t \in [0, T] : 1 \geq |\varphi(\sigma_T + it, F)| \geq e^{-\tau_T \sqrt{2^{-} \log\log T}}\},$$

$$C_T = \{t \in [0, T] : |\varphi(\sigma_T + it, F)| > 1\}.$$

Kadangi funkcija $\varphi(\sigma_T + it, F)$ yra tolydi, visos šios aibės yra išmatuojamos. Pažymėkime

$$\hat{m}_T(u) = \frac{1}{T} \int\limits_{A_T} |\varphi(\sigma_T + it, F)|^{\frac{u}{\sqrt{2^{-1} \log\log T}}} dt.$$

2.2.2 lema *Tegu $u_0 > 0$ yra tam tikras fiksuotas skaičius. Tuomet, kai $T \to \infty$,*

$$\hat{m}_T(u) = e^{\frac{u^2}{2}}(1 + o(1))$$

tolygiai u atžvilgiu, $u \in [u_T, u_0]$.

Įrodymas. Pasinaudosime 2.1 teorema iš [5]. Tegul $u = \frac{k}{\tau_T}$, $k \in \mathbb{N}$, tuomet

$$\frac{1}{T}\int_0^T |\varphi(\sigma_T + it, F)|^{\frac{u}{\sqrt{2^{-1}\log\log T}}} dt = \frac{1}{T}\int_0^T |\varphi(\sigma_T + it, F)|^{\frac{2u}{\sqrt{2\log\log T}}} dt =$$

$$= e^{\frac{k^2}{2\tau_T^2}}(1 + o(1)) = 1 + o(1)$$

su kiekvienu $k \in \mathbb{N}$. Atsižvelgę į 2.1.2 lemą, nesunkiai matome, kad, kai $T \to \infty$, pasiskirstymo funkcija

$$V_T(x) \stackrel{\text{def}}{=} \nu_T(|\varphi(\sigma_T + it, F)|^{\frac{1}{\tau_T\sqrt{2^{-1}\log\log T}}} < x$$

silpnai konverguoja į $E_1(x)$. Čia

$$E_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{kai } x > 1, \\ 0, & \text{kai } x \leq 1. \end{cases}$$

Gauname, jog

$$\lim_{T\to\infty} V_T(e^{-1}) = 0.$$

Iš čia seka, kad

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\text{meas}\{A_T^c\}}{T} = \lim_{T\to\infty} V_T(e^{-1}) = 0. \tag{2.9}$$

Remdamiesi (2.9) ir 2.1 teorema [5], gauname, kad

$$\hat{m}(u) = \frac{1}{T}\int_0^T |\varphi(\sigma_T + it, F)|^{\frac{2u}{\sqrt{2\log\log T}}} dt - \frac{1}{T}\int_{A_T^c} |\varphi(\sigma_T + it, F)|^{\frac{u}{\sqrt{2^{-1}\log\log T}}} dt = e^{\frac{u^2}{2}}(1 + o(1))$$

$$+ o(e^{-\tau_T^u}) = e^{\frac{u^2}{2}}(1 + o(1))$$

tolygiai u atžvilgiu, $u \in [u_T, u_0]$.

Kadangi funkcijai $\varphi(s, F)$ naudojame Rymano hipotezės analogą, galime apibrėžti

$$K_T(t, F) = \frac{\log|\varphi(\sigma_T + it, F)|}{\sqrt{2^{-1}\log\log T}}.$$

Be to, μ_m pažymėkime pasiskirstymo funkcijos $\Phi(x)$ m-tąjį momentą.

2.2.3 lema *Visiems $m \in \mathbb{N}_0$,*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{A_T} K_T^m(t, F)dt = \mu_m.$$

Įrodymas. Pagal 2.2.2 lemą,

$$\hat{m}_T(u) = e^{\frac{u^2}{2}} + R_T(u), \tag{2.10}$$

kur, kai $T \to \infty$, $R_T(u) = o(1)$ tolygiai u atžvilgiu, $u \in [u_T, u_0]$. Remiantis tolygumo savybe, kai $T \to \infty$,

$$r_T \stackrel{\mathsf{def}}{=} \sup_{u \in [u_T, u_0]} R_T(0) \to 0.$$

Parinkime $v_T > 0$ tokį, kad $\lim_{T\to\infty} v_T = 0$ ir $\sigma_T > 2u_T$ su visais $u \in [u_T, u_0]$ ir $k \in \mathbb{N}$,

$$R_T(u) = o(v_T^k), \qquad T \to \infty. \tag{2.11}$$

Pavyzdžiui, $v_T = \max((\log \frac{1}{r_T})^{-1}, 3u_T)$.

Dabar įrodysime, kad kiekvienam $m \in \mathbb{N}$ egzistuoja toks taškas $u_{m,T} \in [v_T, 2v_T]$, kad

$$R_T^{(m)}(u_{m,T}) = o(v_T^k), \qquad T \to \infty, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{2.12}$$

Tam padalinkime intervalą $[v_T, 2v_T]$ į $2^m - 1$ vienodo ilgio dalinius intervalus. Kiekvienam sekančiam daliniam intervalui pritaikę vidurkių teoremą ir atsižvelgę į (2.11) reikalavimus, gauname, jog egzistuoja 2^{m-1} taškai $u_{1,T}$, tokie, kad

$$R_T^{'}(u_{1,T}) = o(v_T^k), \qquad T \to \infty, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{2.13}$$

Dabar pritaikome vidurkių teoremą daliniams intervalams, sugeneruotiems pagal $u_{1,T}$ taškus. Tai kartu su (2.13) parodo, jog egzistuoja 2^{m-2} taškai $u_{2,T} \in [v_T, 2v_T]$ tokie, kad

$$R_T^{''}(u_{2,T}) = o(v_T^k) \qquad T \to \infty, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Tęsdami šį procesą, gauname (2.12) lygybę.

Tokiu atveju, iš (2.10) ir (2.12) išplaukia, kad

$$\hat{m}_T^{(m)}(u_{m,T}) \ll_m 1. \tag{2.14}$$

Pagal $\hat{m}_T(u)$ apibrėžimą,

$$\hat{m}_T(u_{m,T}) = \frac{1}{T}\Bigg(\int\limits_{B_T} + \int\limits_{C_T}\Bigg) e^{u_{m,T}K_T(t,F)} K_T^m(t,F)dt.$$

Jei m yra lyginis skaičius, tada iš šio bei (2.14) įverčių seka, jog

$$\frac{1}{T}\int\limits_{C_T} e^{u_{m,T}K_T(t,F)} K_T^m(t,F)dt \ll_m 1. \tag{2.15}$$

Parinkime $u_{m,T}$ taip, kad $u_{m-1,T} \le u_{m,T}$. Iš čia ir (2.15) gauname, kad

$$\frac{1}{T}\int\limits_{C_T} e^{u_{m-1,T}K_T(t,F)}K_T^{m-1}(t,F)dt \ll_m 1.$$

Taigi, (2.15) yra teisinga su visais $m \in \mathbb{N}$.

Dabar pasirinkime $\tau_T = cv_T^{-1}$, $0 < c < 1$. Tuomet, jei $0 \le u \le u_{m,T}$, iš (2.14) ir (2.15) seka, kad

$$\left|\frac{1}{T}\int\limits_{B_T} e^{uK_T(t,F)}K_T^m(t,F)dt\right| \le \left|\frac{1}{T}\int\limits_{B_T} K_T^m(t,F)dt\right| \ll \left|\frac{1}{T}\int\limits_{B_T} e^{u_{m,T}K_T(t,F)}K_T^m(t,F)dt\right|$$
$$\ll \hat{m}_T^{(m)}(u_{m,T})| + \left|\frac{1}{T}\int\limits_{C_T} e^{u_{m,T}K_T(t,F)}K_T^m(t,F)dt\right| \ll_m 1.$$

Pastarasis ir (2.15) įverčiai bei aibių A_T, B_T ir C_T apibrėžimai leidžia gauti įvertį

$$R_T^{(m)}(u) \ll_m 1, \quad 0 \le u \le u_{m,T}. \tag{2.16}$$

Tam, kad užbaigtume lemos įrodymą, liko patikrinti, ar

$$\lim_{T\to\infty} R_T^{(m)}(0) = 0 \tag{2.17}$$

su visais $m \in \mathbb{N}$. Tarkime, priešingai, kad egzistuoja toks $m_0 \in \mathbb{N}$, kad (17) nėra teisinga. Tada, atsižvelgę į (16) įvertį, gauname, jog egsiztuoja tokia seka $T_1 \to \infty$, kad

$$\lim_{T_1\to\infty} R_{T_1}^{(m_0)}(0) \ne 0. \tag{2.18}$$

Vėl pasinaudoję vidurkių teorema, turime, kad

$$R_{T_1}^{(m_0)}(u_{m_0,T_1}) - R_{T_1}^{(m_0)}(0) = u_{m_0,T_1}R_{T_1}^{(m_0+1)}(u), \quad 0 \le u \le u_{m_0,T_1}. \tag{2.19}$$

Kaip jau minėjome anksčiau, galime imti $u_{m_0,T_1} \le u_{m_0+1,T_1}$. Tada, remiantis (2.16) gauname, jog visiems $0 \le u \le u_{m_0,T_1}$,

$$R_{T_1}^{(m_0+1)}(u) \ll_{m_0+1} 1.$$

Tuomet dešinioji (2.19) lygybės pusė, kai $T_1 \to \infty$, artėja į nulį. Tačiau tai ir (2.12) prieštarauja (2.18). Taigi, (2.17) sąryšis galioja.

Nesunku pastebėti, kad ir

$$(e^{\frac{u^2}{2}})^{(m)}\Big|_{u=0} = \mu_m = \begin{cases} 0 & \text{kai } m = 2k-1, \\ \frac{(2k-1)!2^{1-k}}{(k-1)!}, & \text{kai } m = 2k. \end{cases}$$

Iš čia ir (2.17) gauname lemos įrodymą.

Pagrindinės teoremos įrodymas. Apibrėžkime

$$\frac{1}{\text{meas}\{A_T\}}\text{meas}\{t \in A_T : K_T(t, F) < x\}. \tag{2.20}$$

Remiantis (2.9),

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\text{meas}\{A_T\}}{T} = 1. \tag{2.21}$$

Todėl, atsižvelgę į 2.2.3 lemą gauname, kad, visiems $m \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{\text{meas}\{A_T\}} \int\limits_{A_T} K_T^m(t, F)dt = \mu_m.$$

Iš čia ir 2.1.2 lemos seka, kad (2.20) pasiskirstymo funkcija, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į funkciją $\Phi(x)$. Atsižvelgę į (2.21) ribos įvertį, gauname, kad pastaroji lygybė yra ekvivalenti teoremos tvirtinimui. Teorema įrodyta.

Išvados

Magistro darbe nagrinėtas parabolinių formų dzeta funkcijų $\varphi(s, F)$ konvergavimo šalia kritinės tiesės klausimas ir įrodytas A. Laurinčinko [8] gautos ribinės teoremos apie konvergavimą į lognormąlųjį dėsnį Rymano dzeta funkcijai $\zeta(s)$ analogas.

Svarbu akcentuoti tai, jog ribinė teorema apie konvergavimą į lognormalųjį dėsnį teisinga tik parabolinių formų dzeta funkcijos moduliui. Be to, šiai funkcijai turi galioti Rymano hipotezės analogas, teigiantis, jog visi netrivialūs $\varphi(s, F)$ nuliai yra kritinėje tiesėje $\sigma = \frac{\kappa}{2}$.

Gauti rezultatai gali būti panaudoti tolimesniam parabolinių formų dzeta funkcijų tyrimui.

Literatūros sąrašas

[1] P. Billingsley, *Convergence of probability measures*, John Willey and Sons. Inc., New York-London-Sydney-Toronto, 1968.

[2] H. Bohr, B. Jessen, Uber die Werverteilung der Riemannschen Zeta function, *Acta Math.*, 54, 1–35, 1930.

[3] P. D. T. A. Elliott, *Probabilistic Number Theory I.* Springer, New York, 1979.

[4] H. Heyer, *Probability Measures on Locally Compact Groups.* Springer-Verlag, 1977.

[5] R. Ivanauskaitė, *Value distribution theorems for zeta-functions of certain cusp forms.* Doctoral Dissertation, Vilnius, 2007.

[6] A. Kačėnas, A. Laurinčikas, On Dirichlet series related to certain cusp forms. *Lith-Math.* J., 38, 64–76, 1998.

[7] A. Kolupajeva, *Value distribution of twisted L- functions of normalized cusp forms.* Doctoral Dissertation, Vilnius, 2011.

[8] A. Laurinčikas, *Limit Theorems of the Riemann Zeta-Function.* Kluwer, Dordrecht, Boston, London, 1996.

[9] A. Laurinčikas, R. Macaitienė. *Įvadas į Dirichlė eilučių teoriją.* ŠU, 2008.

[10] R. Leipnik, The lognormal distribution and strong nonuniqueness of the moment problem. *Teor. Verojatn. Primenen.*, 26(4), 863-865, 1981

[11] R. Loeve. *Probability theory.* Moscow, 1962.

[12] R. Macaitienė. *Silpnas tikimybinių matų konvergavimas.* Paskaitų konspektas: mk.distance.su.lt/silpnasmatukonvergavimas.

Santrauka

Normuotų parabolinių formų dzeta funkcijų reikšmių pasiskirstymas

Magistro darbe nagrinėtas normuotų parabolinių formų dzeta funkcijų reikšmių pasiskirstymas.

Tegul $S_\kappa(\Gamma_0(q))$ yra visų svorio κ ir lygio q parabolinių formų erdvė. Elementas $F \in S_\kappa(\Gamma_0(q))$ yra vadinamas *Hekės tikrine forma*, jei F yra visų Hekės operatorių tikrinė funkcija. Šiuo atveju, formą $F(z)$ galima normuoti, t.y. jos Furjė skleidinys begalybėje turi pavidalą

$$F(z) = \sum_{m=1}^{\infty} c(m)e^{2\pi imz}, \qquad c(1) = 1.$$

Kiekvienai normuotai tikrinei formai $F(z)$ galima apibrėžti dzeta funkciją $\varphi(s, F)$ Dirichlė eilute

$$\varphi(s, F) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c(m)}{m^s}, \quad s = \sigma + it.$$

Magistro *darbo tikslas*– įrodyti ribinę teoremą apie konvergavimą į lognormalųjį dėsnį parabolinių formų dzeta funkcijoms arti kritinės tiesės.

Tegul, kaip visada, $\Phi(x)$ žymi standartinio normaliojo dėsnio pasiskirstymo funkciją

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-u^2}{2}} du,$$

o, $G(x)$– lognormaliąją pasiskirstymo funkciją

$$G(x) = \begin{cases} \Phi(\log(x)), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

A. Laurinčikas įrodė tokį rezultatą.

A teorema [8]. *Pasiskirstymo funkcija*

$$\nu_T(|\zeta(\hat{\sigma}_T + it)|^{(\sqrt{2^{-1}\log l_T})^{-1}} < x), \quad \hat{\sigma}_T = \frac{1}{2} + \frac{1}{l_T},$$

kai $T \to \infty$, *pataškiui konverguoja į* $G(x)$.

Magistro darbe įrodomas **A** teoremos analogas funkcijai $\varphi(s, F)$. Tegul

$$\sigma_T = \frac{\kappa}{2} + \frac{\psi_T\sqrt{\log\log T}}{\log T},$$

čia $\psi_T > 0, \psi_T \to \infty$ ir $\log\psi_T = o(\log\log T)$, kai $T \to \infty$. Be to, tegul

$$k_T = (2^{-1}\log\log T)^{-1/2}$$

ir

$$G_T(x) = \nu_T(|\varphi(\sigma_T + it, F)|^{k_T} < x).$$

Pagrindinė teorema *Tarkime, jog funkcijai $\varphi(s, F)$ galioja Rymano hipotezės analogas. Tuomet pasiskirstymo funkcija $G_T(x)$, kai $T \to \infty$, pataškiui konverguoja į pasiskirstymo funkciją $G(x)$.*

Summary

Value Distribution of Zeta-functions of Normalized Cusp Forms

In the Master thesis, the value distribution of zeta-functions of normalized cusp forms is investigated.

Denote the space of all cusp forms of weight κ and level q by $S_\kappa(\Gamma_0(q))$. An element $F \in S_\kappa(\Gamma_0(q))$ is called Hecke eigenform if F is an eigenfunction for all Hecke operators. In this case, $F(z)$ can be normalized, i.e.

$$F(z) = \sum_{m=1}^{\infty} c(m)^{2\pi imz}, \quad c(1) = 1,$$

is its Fourier series expansion at ∞.

To any normalized eigenform we can attach the zeta–function $\varphi(s, F)$ defined by

$$\varphi(s, F) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c(m)}{m^s}, \quad \hat{\sigma}_T = \frac{1}{2} + \frac{1}{l_T}.$$

It is known that Dirichlet series $\varphi(s, F)$ converges absolutely for $\sigma > \frac{\kappa+1}{2}$. Moreover, $\varphi(s, F)$ is analytically continual to an entire function.

The aim of the master work was to prove a limit theorem for the function $\varphi(s, F)$ near the critical line.

In the case of the Riemann zeta-function, the following result is true [8]. Let

$$\hat{\sigma}_T = \frac{1}{2} + \frac{1}{l_T}.$$

Let, as usual,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

denote the standard normal distribution function and

$$G(x) = \begin{cases} \Phi(\log x) & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

The function $G(x)$ usually is called the lognormal distribution function. A. Laurinčikas proved the following result.

Theorem A [8]. *The distribution function*

$$\nu_T(|\zeta(\hat{\sigma}_T + it)|^{(\sqrt{2^{-1}\log l_T})^{-1}} < x)$$

converges pointwise to the function $G(x)$ as $T \to \infty$.

In the Master thesis, an analogue of Theorem A is obtained. Let

$$\sigma_T = \frac{\kappa}{2} + \frac{\psi_T \sqrt{\log\log T}}{\log T},$$

where $\psi_T > 0, \psi_T \to \infty$ and $\log \psi_T = o(\log\log T)$ as $T \to \infty$.

Moreover, let

$$\kappa_T = (2^{-1} \log\log T)^{-1/2}$$

and

$$G_T(x) = \nu_T(|\varphi(\sigma_T + it, F)|^{k_T} < x).$$

The main theorem *Suppose that the analogue of the Riemann hypothesis for the function $\varphi(s, F)$ is true. Then the distribution function $G_T(x)$ converges pointwise to the distribution function $G(x)$ as $T \to \infty$.*