Liet. matem. rink., T. 41, spec. nr., 53–57

Pastaba apie Lerch'o dzeta funkcijos nulius

Ramūnas GARUNŠKTIS (VU)
el. paštas: ramunas.garunkstis@maf.vu.lt

1. Įvadas

Tegu $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis. Lerch'o dzeta funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$, kai $\sigma > 1$, apibrėžiama Dirichlet eilute

$$L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda m}}{(m+\alpha)^s},$$

kur $0 < \lambda, \alpha \leqslant 1$. Ši funkcija pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, gal būt išskyrus tašką $s = 1$, ir, kai λ nėra sveikasis skaičius, tenkina funkcinę lygtį

$$L(\lambda, \alpha, 1-s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)\biggl(\exp\left\{\frac{\pi i s}{2} - 2\pi\alpha\lambda\right\}L(-\alpha, \lambda, s) + \exp\left\{-\frac{\pi i s}{2} + 2\pi\alpha(1-\lambda)\right\}L(\alpha, 1-\lambda, s)\biggr). \tag{1}$$

Lerch'o dzeta funkcijos laisvos nuo nulių sritys buvo nagrinėtos darbuose [1] ir [2]. Šio darbo tikslas yra patikslinti šias sritis. Tegu l yra tiesė kompleksinėje plokštumoje C, $\varrho(s, l)$ yra taško s atstumas iki l, ir apibrėžkime

$$L_\epsilon(l) := \{s \in C :\ \varrho(s, l) < \epsilon\},$$

čia $\epsilon > 0$. Darbe [1] buvo įrodyta

1 teorema. *Tegu* $0 < \lambda < 1$ *ir* $\lambda \neq 1/2$. *Tuomet egzistuoja konstantos* $\sigma_0 \leqslant 0$ *ir* $\epsilon_0 > 0$ *tokios, kad* $L(\lambda, \alpha, s) \neq 0$, *kai* $\sigma < \sigma_0$ *ir*

$$s \notin L_{\epsilon_0}\left(\sigma = \frac{\pi t}{\log\frac{1-\lambda}{\lambda}} + 1\right).$$

Mes surasime konkrečias σ_0 ir ϵ_0 reikšmes.

2 teorema. *1 teoremoje galima imti* $\sigma_0 = -2$ *ir* $\epsilon_0 = \frac{\log 2}{\pi}$.

Pastebėsime, kad atvejis $\lambda = 1$ išnagrinėtas straipsnyje [2], o atvejis $\lambda = 1/2$ – straipsnyje [1].

2. 2 teoremos įrodymas

Mums bus naudinga

1 lema. *Tegu* $0 < \lambda < 1/2$ *ir* $\sigma \leqslant -2$. *Tada*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\left(\frac{\lambda+m}{\lambda}\right)^{\sigma-1}+\left(\frac{1-\lambda+m}{1-\lambda}\right)^{\sigma-1}\right)<\frac{1}{2}. \tag{2}$$

Įrodymas Įvertinę sumą integralu, gauname kad kairė nelygybės (2) pusė yra mažesnė už

$$\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^{\sigma-1}+\left(\frac{2-\lambda}{1-\lambda}\right)^{\sigma-1}+\int_1^{\infty}\left(\frac{\lambda+x}{\lambda}\right)^{\sigma-1}\mathrm{d}x+\int_1^{\infty}\left(\frac{1-\lambda+x}{1-\lambda}\right)^{\sigma-1}\mathrm{d}x.$$

Suintegravę ir pasinaudoję nelygybėmis

$$\frac{\lambda}{1+\lambda}<\frac{1}{3},\quad \frac{1-\lambda}{2-\lambda}<\frac{1}{2},$$

kai $0 < \lambda < 1/2$, gauname lemos tvirtinimą.

1 teoremos įrodymas. Kai $\sigma < 0$, tai iš funkcinės lygties (1) gauname

$$\begin{aligned}L(\lambda,\alpha,s) &= \Gamma(1-s)(2\pi)^{s-1}\mathrm{e}^{-2\pi i\lambda\alpha}\Bigg(\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{2}(1-s)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-2\pi i\alpha m}}{(\lambda+m)^{1-s}}\\ &\quad+\mathrm{e}^{-\frac{\pi i}{2}(1-s)+2\pi i\alpha}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{2\pi i\alpha m}}{(1-\lambda+m)^{1-s}}\Bigg).\end{aligned}$$

Iš pradžių įrodysime teoremą atveju $\lambda < 1/2$. Turime

$$\begin{aligned}&\left|\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{2}(1-s)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-2\pi i\alpha m}}{(\lambda+m)^{1-s}}+\mathrm{e}^{-\frac{\pi i}{2}(1-s)+2\pi i\alpha}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{2\pi i\alpha m}}{(1-\lambda+m)^{1-s}}\right|\\ &\geqslant \mathrm{e}^{\frac{\pi t}{2}}\lambda^{\sigma-1}-\mathrm{e}^{-\frac{\pi t}{2}}(1-\lambda)^{\sigma-1}-\sum_{m=1}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi t}{2}}(\lambda+m)^{\sigma-1}+\mathrm{e}^{-\frac{\pi t}{2}}(1-\lambda+m)^{\sigma-1}\right)\\ &\geqslant \mathrm{e}^{\frac{\pi t}{2}}\lambda^{\sigma-1}\Bigg(1-\mathrm{e}^{-\pi t}\mathrm{e}^{(\sigma-1)\log\frac{1-\lambda}{\lambda}}-\sum_{m=1}^{\infty}\Bigg(\left(\frac{\lambda+m}{\lambda}\right)^{\sigma-1}\\ &\quad+\mathrm{e}^{-\pi t}\left(\frac{1-\lambda+m}{\lambda}\right)^{\sigma-1}\Bigg)\Bigg).\end{aligned}$$

Tegu taškas $s_1 = \sigma_1 + it_1, \sigma_1 < 0$, yra virš tiesės

$$l\colon \sigma = \frac{\pi t}{\log\frac{1-\lambda}{\lambda}}+1,$$

t.y.

$$\sigma_1 \leqslant \frac{\pi t_1}{\log \frac{1-\lambda}{\lambda}} + 1, \quad \sigma_1 < 0.$$

Tuomet

$$-\pi t_1 \leqslant (1-\sigma_1) \log \frac{1-\lambda}{\lambda} \tag{3}$$

ir

$$\begin{aligned}
F_1(s_1) :&= \exp\left\{ -\pi t_1 + (\sigma_1 - 1) \log \frac{1-\lambda}{\lambda} \right\} \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\left(\frac{\lambda+m}{\lambda} \right)^{\sigma_1 - 1} + \mathrm{e}^{-\pi t_1} \left(\frac{1-\lambda+m}{\lambda} \right)^{\sigma_1 - 1} \right) \\
&\leqslant \exp\left\{ -\pi t_1 + (\sigma_1 - 1) \log \frac{1-\lambda}{\lambda} \right\} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\left(\frac{\lambda+m}{\lambda} \right)^{\sigma_1 - 1} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \right)^{1-\sigma_1} \left(\frac{1-\lambda+m}{\lambda} \right)^{\sigma_1 - 1} \right) \\
&= \exp\left\{ -\pi t_1 + (\sigma_1 - 1) \log \frac{1-\lambda}{\lambda} \right\} \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\left(\frac{\lambda+m}{\lambda} \right)^{\sigma_1 - 1} + \left(\frac{1-\lambda+m}{1-\lambda} \right)^{\sigma_1 - 1} \right).
\end{aligned}$$

Dabar parinksime s_1 taip, kad būtų patenkintos nelygybės (3) ir $F_1(s_1) < 1$. Pasinaudoję 1 lema gauname, kad tinkama reikšmė yra

$$s_1 = -2 - i \left(\frac{3}{\pi} \log \frac{1-\lambda}{\lambda} - \frac{\log 2}{\pi} \right).$$

Dabar tegu

$$A(s_1) := \left\{ s \in C : \sigma \leqslant \sigma_1,\ \sigma - \sigma_1 \leqslant \frac{\pi(t - t_1)}{\log \frac{1-\lambda}{\lambda}} \right\},$$

t.y. sritis $A(s_1)$ yra virš tiesės

$$\sigma = \sigma_1 + \frac{\pi(t-t_1)}{\log \frac{1-\lambda}{\lambda}}$$

ir kairiau tiesės $\sigma = \sigma_1$. Jei $s = \sigma + it \in A(s_1)$, tai

$$F_1(s) = \exp\left\{ -\pi t + (\sigma - 1) \log \frac{1-\lambda}{\lambda} \right\}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\left(\frac{\lambda+m}{\lambda}\right)^{\sigma-1}+\mathrm{e}^{-\pi t}\left(\frac{1-\lambda+m}{\lambda}\right)^{\sigma-1}\right)\\
&\leqslant \exp\left\{-\pi t_1+(\sigma_1-1)\log\frac{1-\lambda}{\lambda}\right\}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\left(\frac{\lambda+m}{\lambda}\right)^{\sigma_1-1}\right.\\
&\left.+\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)^{\sigma_1-\sigma}\mathrm{e}^{-\pi t_1}\left(\frac{1-\lambda+m}{\lambda}\right)^{\sigma-1}\right)\\
&=\exp\left\{-\pi t_1+(\sigma_1-1)\log\frac{1-\lambda}{\lambda}\right\}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\left(\frac{\lambda+m}{\lambda}\right)^{\sigma_1-1}\right.\\
&\left.+\mathrm{e}^{-\pi t_1}\left(\frac{1-\lambda+m}{1-\lambda}\right)^{\sigma}\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)^{\sigma_1}\left(\frac{1-\lambda+m}{\lambda}\right)^{-1}\right)\\
&\leqslant \exp\left\{-\pi t_1+(\sigma_1-1)\log\frac{1-\lambda}{\lambda}\right\}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\left(\frac{\lambda+m}{\lambda}\right)^{\sigma_1-1}\right.\\
&\left.+\mathrm{e}^{-\pi t_1}\left(\frac{1-\lambda+m}{1-\lambda}\right)^{\sigma_1}\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)^{\sigma_1}\left(\frac{1-\lambda+m}{\lambda}\right)^{-1}\right)=F_1(s_1).
\end{aligned}
$$

Kadangi $\Gamma(1-s)(2\pi)^{s-1}\neq 0$ srityje $A(s_1)$, tai iš pastarųjų samprotavimų gauname, kad $L(\lambda,\alpha,s)\neq 0$ kai $s\in A(s_1)$.

Dabar nagrinėsime sritį esančią žemiau tiesės l ir kairiau menamosios ašies. Tegu

$$
\begin{aligned}
F_2(s) &:= \exp\left\{\pi t-(\sigma-1)\log\frac{1-\lambda}{\lambda}\right\}\\
&+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{\pi t}\left(\frac{\lambda+m}{1-\lambda}\right)^{\sigma-1}+\left(\frac{1-\lambda+m}{1-\lambda}\right)^{\sigma-1}\right).
\end{aligned}
$$

Tada, kai $\sigma<0$, turime

$$
\begin{aligned}
&\left|\exp\left\{\frac{\pi i}{2}(1-s)\right\}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-2\pi i\alpha m}}{(\lambda+m)^{1-s}}\exp\left\{-\frac{\pi i}{2}(1-s)+2\pi i\alpha\right\}\right.\\
&\times\left.\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{2\pi i\alpha m}}{(1-\lambda+m)^{1-s}}\right|\geqslant \mathrm{e}^{-\frac{\pi t}{2}}(1-\lambda)^{\sigma-1}-\mathrm{e}^{\frac{\pi t}{2}}\lambda^{\sigma-1}\\
&-\sum_{m=1}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi t}{2}}(\lambda+m)^{\sigma-1}+\mathrm{e}^{-\frac{\pi t}{2}}(1-\lambda+m)^{\sigma-1}\right)\\
&=\mathrm{e}^{-\frac{\pi t}{2}}(1-\lambda)^{\sigma-1}\left(1-F_2(s)\right).
\end{aligned}
$$

Panašiai kaip ankščiau, parenkame tašką $s_2=\sigma_2+it_2$, $\sigma_2<0$, esantį žemiau tiesės l, t.y.

$$
\sigma_2>\frac{\pi t_2}{\log\frac{1-\lambda}{\lambda}}+1,\quad \sigma_2<0,
$$

tokį kuriam $F_2(s_2) < 1$. Šias sąlygas tenkina taškas

$$s_1 = -2 - i\left(\frac{3}{\pi}\log\frac{1-\lambda}{\lambda} + \frac{\log 2}{\pi}\right).$$

Tegu

$$B(s_2) := \left\{s \in C : \sigma \leqslant \sigma_2, \sigma - \sigma_2 \geqslant \frac{\pi(t-t_2)}{\log\frac{1-\lambda}{\lambda}}\right\}.$$

Tuomet nesunku pastebėti, kad $F_2(s) \leqslant F_2(s_2) < 1$ kai $s \in B(s_2)$. Taigi gauname, kad $L(\lambda, \alpha, s) \neq 0$ kai $s \in B(s_2)$.

Akivaizdu, kad galime parinkti $\sigma_0 = -2$. Iš $A(s_1)$ ir $B(s_2)$ apibrėžimų matome, kad ϵ_0 galime imti didesnį iš atstumų tarp tiesės l ir taškų s_i, $i = 1, 2$. Lengva suskaičiuoti, kad abu atstumai sutampa ir yra lygūs dydžiui

$$\frac{\log 2}{\sqrt{\pi^2 + \log^2\frac{1-\lambda}{\lambda}}}$$

Todėl, nepriklausomai nuo $0 < \lambda < 1/2$, galime imti $\epsilon_0 = \log 2/\pi$.

Jei $\lambda > 1/2$, tai teoremos tvirtinimas išplaukia iš atvejo $\lambda < 1/2$, pasinaudojus lygybe

$$L(\lambda, \alpha, s) = \overline{L(1-\lambda, \alpha, \overline{s})}.$$

Tuo teorema įrodyta.

Literatūra

[1] R. Garunkštis, A. Laurinčikas, On zeros of the Lerch zeta-function, Kanemitsu, Shigeru *et al.* (eds.), *Number Theory and its Applications. Proceedings of the Conference Held at the RIMS*, Kyoto, Japan, November 10-14, 1997. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 129–143 (1999).

[2] R. Spira, Zeros of Hurwitz zeta-functions, *Math Comput.*, **30** (136), 863–866 (1976).

A note on the zeros of the Lerch zeta-function

R. Garunkštis

In the paper we obtain the effective zero free regions for the Lerch zeta-function.