

Суммирование по Чезаро и мультипликативные функции на симметрической группе

Витас ЗАХАРОВАС (VU)

1. Результаты

Пусть S_n – множество подстановок степени n . Каждый элемент $\sigma \in S_n$ однозначно, с точностью до порядка множителей, разлагается в произведение независимых циклов

$$\sigma = \kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_\omega.$$

Функцию $f: S_n \rightarrow C$ будем называть мультипликативной, если имеет место равенство $f(\sigma) = f(\kappa_1)f(\kappa_2)\dots f(\kappa_n)$. Далее будем считать, что значение f на циклах зависит только от их порядка, то есть $f(\kappa) = \hat{f}(|\kappa|)$, где $|\kappa|$ – порядок цикла κ . Пусть $m_k(\sigma)$ равняется числу циклов, входящих в разложение σ , порядок которых равняется k . Тогда, очевидно $m_1(\sigma) + 2m_2(\sigma) + \dots + nm_n(\sigma) = n$. Таким образом n величин $\hat{f}(1), \hat{f}(2), \dots, \hat{f}(n)$ полностью определяют значение функции f на любой подстановке $\sigma \in S_n$

$$f(\sigma) = \hat{f}(1)^{m_1(\sigma)} \hat{f}(2)^{m_2(\sigma)} \dots \hat{f}(n)^{m_n(\sigma)}.$$

На группе S_n определим так называемую меру Эванса $\nu_{n,\theta}$ с помощью формулы

$$\nu_{n,\theta}(\sigma) = \frac{\theta^{k(\sigma)}}{\theta_{(n)}},$$

где $k(\sigma) = m_1(\sigma) + m_2(\sigma) + \dots + m_n(\sigma)$, а $\theta_{(n)} = \theta(\theta + 1) \dots (\theta + n - 1)$.

Далее будем исследовать средние мультипликативных функций по отношению к мере Эванса.

$$M_n(f) = \sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma) \nu_{n,\theta}(\sigma).$$

Поскольку количество σ таких, что $m_k(\sigma) = s_k$, равняется $n! \prod_{j=1}^n \frac{1}{s_j! j^{s_j}}$, то

$$\nu_{n,\theta}(m_1(\sigma) = s_1, \dots, m_n(\sigma) = s_n) = \frac{n!}{\theta^{(n)}} \prod_{j=1}^n \left(\frac{\theta}{j}\right)^{s_j} \frac{1}{s_j!}.$$

Поэтому

$$M_n(f) = \binom{n+\theta-1}{n}^{-1} \sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n} \prod_{j=1}^n \left(\frac{\theta \hat{f}(j)}{j}\right)^{k_j} \frac{1}{k_j!}.$$

Нетрудно видеть, что $M_n(f)$ равняется $\binom{n+\theta-1}{n}^{-1} N_n$, где N_n определяются соотношением

$$F(z) = \exp \left\{ \theta \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\hat{f}(j)}{j} z^j \right\} = \sum_{m=0}^{\infty} N_m z^m.$$

Поскольку коэффициенты $\hat{f}(j)$ при $j > n$ не влияют на величину коэффициента при z^n , то далее будем считать, что $\hat{f}(j) = 1$, при $j > n$. Поэтому

$$F(z) = \exp \left\{ \theta \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\hat{f}(j)}{j} z^j \right\} = \sum_{j=0}^{\infty} N_j z^j = \frac{\exp\{\theta L_n(z)\}}{(1-z)^\theta},$$

здесь и далее $L_n(z) = \sum_{j=1}^n \frac{\hat{f}(j)-1}{j} z^j$, и $L_0(z) = 0$.

Функция $F(z)$ есть произведение двух аналитических функции $\exp\{\theta L_n(z)\} = \sum_{k=0}^{\infty} m_k z^k$ и $\frac{1}{(1-z)^\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+\theta-1}{n} z^n$, поэтому

$$M_n(f) = \binom{n+\theta-1}{n}^{-1} \sum_{j=0}^n m_j \binom{n-j+\theta-1}{n-j}. \quad (1)$$

Асимптотику суммы, стоящей в правой части равенства (1), оценим с помощью следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$ — аналитическая в круге $|z| < 1$ функция. Пусть

$$S_\theta(f; n) = \sum_{k=1}^n k a_k \binom{n-k+\theta-1}{n-k},$$

тогда при фиксированном $\theta > 0$ имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\binom{n+\theta-1}{n}} \sum_{k=0}^n a_k \binom{n-k+\theta-1}{n-k} - f(e^{-1/n}) - \frac{S_\theta(f; n)}{n \binom{n+\theta-1}{n}} \\ & \ll \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|S_\theta(f; j)|}{j^\theta} e^{-j/n} + \frac{1}{n^\theta} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{|S_\theta(f; j)|}{j} e^{-j/n}. \end{aligned}$$

Константа в символе \ll зависит только от θ .

Сумма, стоящая в правой части равенства (1), называется чезаровским средним с параметром $p = \theta - 1$. Если для некоторого фиксированного формального ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ чезаровские средние с параметром p сходятся к некоторому числу A , то пишется, что ряд $\sum_{j=0}^{\infty} a_k$ суммируем (C, p) к числу A , или $(C, p) \sum_{j=0}^{\infty} a_j = A$.

Из теоремы 1 можно вывести следующую, возможно уже известную теорему.

Теорема 2. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ суммируем (C, p) к A с $p > -1$ тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = A, \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{p+1}(f; n)}{n^{p+1}} = 0, \quad (3)$$

где $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$.

Если $\theta = 1$, то теорема 2 превращается в хорошо известную теорему Таубера (см., напр., [6],[7]). Для этого частного случая доказательство теоремы 1 получается несколько изменив доказательство теоремы Таубера. Определим

$$\mu_n(p) = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\hat{f}(k) - 1|^p \right)^{1/p}.$$

С помощью теоремы 1 легко доказывается следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $p > \max \{1, \frac{1}{\theta}\}$, тогда

$$M_n(f) = \exp \left\{ \theta \sum_{k=1}^n \frac{\hat{f}(k) - 1}{k} \right\} + O(\mu_n(p)),$$

здесь константа в символе $O(\dots)$ зависит только от θ и p .

В работах [2],[3],[4] и [5] варианты теоремы 3 были доказаны с менее точными остаточными членами.

2. Доказательства

Лемма 1. Пусть $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f_n z^n$ — аналитическая функция в области $\Delta(\eta, \phi) = \{z \mid |z| < 1 + \eta, |\arg(z-1)| > \phi\}$, где $\eta > 0$ и $0 < \phi < \pi/2$. Если

$$|f(z)| \leq K_1 |1-z|^{\alpha_1} + K_2 |1-z|^{\alpha_2},$$

при $z \in \Delta(\eta, \phi)$, то существует такая константа $c = c(\alpha_1, \alpha_2, \eta, \phi)$, независящая от K_1, K_2 , что

$$|f_n| \leq c(K_1 n^{-\alpha_1-1} + K_2 n^{-\alpha_2-1}).$$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 1 работы [1].

Пусть

$$c_{m,j} = \sum_{s=0}^m \frac{\binom{m-s+\theta-1}{m-s} \binom{s-\theta-1}{s}}{s+j},$$

при $j \geq 1$. Тогда производящая функция величин $c_{m,j}$ будет

$$F_j(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{m,j} z^m = \frac{1}{(1-z)^\theta} \int_0^1 (1-xz)^\theta x^{j-1} dx.$$

Лемма 2. Для величин $c_{m,j}$ справедливы оценки

$$(i) \quad 0 \leq c_{m,j} \leq \frac{\theta}{j^2} e^{\theta m/j}, \quad m \geq 1, \quad c_{0,j} = \frac{1}{j};$$

$$(ii) \quad c_{m,j} = \binom{m+\theta-1}{m} \int_0^1 (1-y)^\theta y^{j-1} dy + O\left(\frac{m^{\theta-2}}{j^\theta} + \frac{1}{m^2}\right).$$

Доказательство. Дифференцируя функцию $F_j(z)$ получим

$$zF_j'(z) = \frac{\theta z F_j(z)}{1-z} + 1 - jF_j(z).$$

Разлагая в степенной ряд обе стороны полученного выражения и приравнявая коэффициенты при соответствующих степенях, получим

$$c_{m,j} = \frac{\theta}{m+j} \sum_{s=0}^{m-1} c_{s,j}, \quad m \geq 1,$$

и $c_{0,j} = \frac{1}{j}$. Из этого рекуррентного уравнения следует

$$0 < c_{m,j} \leq \frac{\theta}{j} \sum_{s=0}^{m-1} c_{s,j}, \quad m \geq 1.$$

Тогда

$$0 \leq c_{m,j} \leq b_{m,j},$$

где $b_{m,j}$ являются решениями рекуррентного уравнения

$$b_{m,j} = \frac{\theta}{j} \sum_{s=0}^{m-1} b_{s,j}, \quad m \geq 1,$$

с начальным условием $b_{0,j} = 1/j$. Не трудно проверить, что

$$b_{m,j} = \frac{\theta}{j^2} \left(1 + \frac{\theta}{j}\right)^{m-1}, \quad m \geq 1.$$

Поэтому применяя неравенство $1 + x \leq e^x$ получаем оценку (i)

$$a_{m,j} \leq \frac{\theta}{j^2} \left(1 + \frac{\theta}{j}\right)^{m-1} \leq \frac{\theta}{j^2} e^{\theta m/j}, \quad m \geq 1.$$

При доказательстве оценки (ii) воспользуемся леммой 1 с $\eta = 1/2$, и $\phi = \pi/4$. Представим $F_j(z)$ в виде суммы двух аналитических функций

$$F_j(z) = \frac{1}{(1-z)^\theta} \int_0^1 (1-x)^\theta x^{j-1} dx + G_j(z). \quad (4)$$

Пусть $z \in \Delta(1/2, \pi/4)$, $|z-1| < 1/2$. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (1-zy)^\theta y^{j-1} dy - \int_0^1 (1-y)^\theta y^{j-1} dy \\ &= \int_0^{1-|1-z|} (1-y)^\theta \left(\left(1-y \frac{z-1}{1-y}\right)^\theta - 1 \right) y^{j-1} dy \\ &+ \int_{1-|1-z|}^1 \left((1-y-y(z-1))^\theta - (1-y)^\theta \right) y^{j-1} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \ll \int_0^{1-|1-z|} (1-y)^\theta \frac{y^j |1-z|}{1-y} dy + \int_{1-|1-z|}^1 y^{j-1} |1-z|^\theta dy \\ & \ll |1-z| \int_0^1 (1-y)^{\theta-1} y^{j-1} dy + |1-z|^{\theta+1} \ll \frac{|1-z|}{j^\theta} + |1-z|^{\theta+1}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что полученная оценка справедлива во всей области $\Delta(\eta, \phi)$. Поэтому при $z \in \Delta(\eta, \psi)$

$$G_j(z) = \frac{1}{(1-z)^\theta} \int_0^1 ((1-yz)^\theta - (1-y)^\theta) y^{j-1} dy \ll |1-z| + \frac{|1-z|^{1-\theta}}{j^\theta}. \quad (5)$$

Применяя лемму 1 с $f(z) = G_j(z)$ в виду (4), (5), получаем оценку (ii). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Поскольку

$$\sum_{k=1}^{\infty} S_\theta(f; k) z^k = \frac{z f'(z)}{(1-z)^\theta},$$

то

$$n a_n = \sum_{k=1}^n S_\theta(f; k) \binom{n-k-\theta-1}{n-k}, \quad n \geq 1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} R_n & := \sum_{k=0}^n a_k \binom{n-k+\theta-1}{n-k} - f(e^{-1/n}) \binom{n+\theta-1}{n} \\ & = \sum_{k=1}^n \binom{n-k+\theta-1}{n-k} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k S_\theta(f; j) \binom{k-j-\theta-1}{k-j} \\ & \quad - \binom{n+\theta-1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k/n} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k S_\theta(f; j) \binom{k-j-\theta-1}{k-j} \\ & = \sum_{j=1}^n S_\theta(f; j) c_{n-j, j} - \binom{n+\theta-1}{n} \sum_{j=1}^{\infty} S_\theta(f; j) \sum_{k=j}^{\infty} \frac{\binom{k-j-\theta-1}{k-j}}{k} e^{-k/n}. \end{aligned}$$

Пусть $j > n/2$, тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{\binom{k-j-\theta-1}{k-j} e^{-k/n}}{k} &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\binom{s-\theta-1}{s} e^{-\frac{j+s}{n}}}{j+s} = \int_0^{e^{-1/n}} (1-x)^\theta x^{j-1} dx \\ &= \int_{1/n}^{\infty} (1-e^{-y})^\theta e^{-jy} dy \leq \int_{1/n}^{\infty} y^\theta e^{-jy} dy \ll \frac{e^{-j/n}}{jn^\theta}. \end{aligned}$$

Применяя полученную оценку и лемму 2, имеем

$$\begin{aligned} R_n - \frac{S_\theta(f; n)}{n} &\ll \sum_{j \leq n/2} |S_\theta(f; j)| \left| c_{n-j, j} - \binom{n+\theta-1}{n} \right| \\ &\quad \times \sum_{k=j}^{\infty} \frac{\binom{k-j-\theta-1}{k-j} e^{-k/n}}{k} + \sum_{n/2 < j < n} |S_\theta(f; j)| c_{n-j, j} \\ &\quad + \binom{n+\theta-1}{n} \sum_{j > n/2} |S_\theta(f; j)| \left| \sum_{k=j}^{\infty} \frac{\binom{k-j-\theta-1}{k-j} e^{-k/n}}{k} \right| \\ &\ll \binom{n+\theta-1}{n} \sum_{j \leq n/2} S_\theta(f; j) \int_0^1 (1-y)^\theta y^{j-1} dy \left| \frac{\binom{n-j+\theta-1}{n-j}}{\binom{n+\theta-1}{n}} - 1 \right| \\ &\quad + \binom{n+\theta-1}{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{j \leq n/2} \frac{|S_\theta(f; j)|}{j^\theta} + \frac{1}{n} \sum_{n/2 < j < n} \frac{|S_\theta(f; j)|}{n^\theta} \right) \\ &\quad + \frac{1}{n^\theta} \sum_{j > n} \frac{|S_\theta(f; j)|}{j} e^{-j/n} \ll \binom{n+\theta-1}{n} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|S_\theta(f; j)|}{j^\theta} e^{-j/n} \\ &\quad + \binom{n+\theta-1}{n} \frac{1}{n^\theta} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{|S_\theta(f; j)|}{j} e^{-j/n}, \end{aligned}$$

здесь мы воспользовались тем, что $\binom{n+\theta-1}{n} = \frac{n^{\theta-1}}{\Gamma(\theta)} (1 + O(\frac{1}{n}))$.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Достаточность условий (2) и (3) следует непосредственно из теоремы 1. То, что суммируемость ряда по Чезаро влечет за собой (2) и (3) доказано в [7].

Доказательство теоремы 3. Применим теорему 1 с $f(z) = \exp\{L_n(z)\} = \sum_{k=0}^{\infty} m_k z^k$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} S_{\theta}(f; k) z^k = \frac{z f'(z)}{(1-z)^{\theta}} = F(z) \theta \sum_{k=1}^n (\hat{f}(k) - 1) z^k,$$

поэтому

$$S_{\theta}(f; m) = \sum_{k=1}^m (\hat{f}(k) - 1) N_{m-k}.$$

Поскольку $|N_k| \leq \binom{k+\theta-1}{k}$, то применяя неравенство Коши с $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, получим

$$|S_{\theta}(f; m)| \ll \left(\sum_{k=1}^m |\hat{f}(k) - 1|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^m k^{(\theta-1)q} \right)^{1/q} \ll m^{\theta} \left(\frac{n}{m} \right)^{1/p} \mu_n(p).$$

Из теоремы 1, применяя оценку $\exp\{\theta L_n(e^{-1/n})\} = \exp\{\theta L_n(1)\} (1 + O(\mu_n(p)))$, получим

$$\begin{aligned} \frac{N_n}{\binom{n+\theta-1}{n}} - \exp \left\{ \theta \sum_{k=1}^n \frac{\hat{f}(k) - 1}{k} \right\} &\ll \mu_n(p) + \frac{\mu_n(p)}{n} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{n}{m} \right)^{1/p} e^{-m/n} \\ &+ \mu_n(p) \frac{1}{n^{\theta}} \sum_{m=n}^{\infty} m^{\theta-1} \left(\frac{n}{m} \right)^{1/p} e^{-m/n} \ll \mu_n(p). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Литература

- [1] P. Flajolet, A. Odlyzko, Singularity analysis of generating functions, *SIAM J. Discrete Math.*, **32**, 216–240 (1990).
- [2] E. Manstavičius, The Berry-Essen bound in the theory of random permutations, *The Ramanujan Journal*, **2**, 185–199 (1998).
- [3] E. Manstavičius, A Tauber theorem and multiplicative functions on permutations, *Number Theory in Progress*, Eds K. Gubry et al., Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1025–1038 (1999).
- [4] E. Manstavičius, Decomposable mappings on combinatorial structures, Analytic approach, *Preprint 98–15*, VU Department of Mathematics (1999).
- [5] Э. Манставичюс, Аддитивные и мультипликативные функции на случайных подстановках, *Liet. matem. rink.*, **36**, 501–511 (1996).
- [6] G. Tenenbaum, *Introduction to Analytic and Probabilistic Number Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **46**, University Press, Cambridge (1995).
- [7] Г. Харди, *Расходящиеся ряды*, Москва, Изд. иностр. лит. (1951).

Čezaro sumavimas ir multiplikatyvios funkcijos, apibrėžtos simetrinėje grupėje

V. Zacharovas

Straipsnyje nagrinėjamas Čezaro sumavimo metodas bei jo taikymas multiplikatyvių funkcijų, apibrėžtų simetrinėje grupėje, vidurkių asimptotikos įvertinimui.