Liet. matem. rink., T. 41, spec. nr., 200–205

Sistemos nestabilumo srities nustatymas, naudojant n-tos eilės determinanto išreiškimą per k-tos eilės determinantus

Algis KAVALIAUSKAS (VU, VGTU)
el. paštas: daliute@mail.std.lt

1. Įvadas

Staripsnyje yra nustatomos žemiau pateiktos elektro-mechaninės sistemos Zomerfeldo efekto nestabilumo srities ribos. Elektro-mechaninės sistemos stacionariosios reikšmės priklauso nuo parametro ω_s ir yra stabilios beveik visoms šio parametro reikšmėms. Šiam tyrimui atlikti įrodoma determinanto išreiškimo per žemesnės eilės determinantus formulė. Pastarosios formulės pagalba galima išreikšti pakankamą nestabilimo sąlygą patogia analizei forma, bei įrodyti, kad egzistuoja nestabilumo sritis ir pavaizduoti ją grafiškai. Ši formulė, matyt, būtų efektyvi ir skaičiuojant matricų, turinčių daug nulių, determinantus.

2. Elektro-mechaninės sistemos nestabilumo srities nustatymas

Nagrinėkime platformos svyravimus, sužadintus prie pastovios elektros srovės variklio ekscentriškai pritvirtintos spyruoklės. Šios sistemos diferencialinės lygtys yra [1, 2]:

$$\begin{cases} \dot{a} = -\frac{r}{2m}a + \frac{c_1 e}{2m\omega_0}\sin\alpha =: F_1(a,\alpha), \\ \dot{\alpha} = \omega - \omega_0 + \frac{c_1 e}{2m\omega_0 a}\cos\alpha =: F_2(a,\alpha,\omega), \\ \dot{\omega} = I^{-1}\left(-\frac{c_1 e}{2}\sin\alpha - Ri + U\right) =: F_3(a,\alpha,\omega,i), \\ \dot{i} = L^{-1}\left(-\varkappa\omega i - Ri + U\right) =: F_4(\omega,i). \end{cases} \tag{1}$$

Čia kintamieji a, α atspindi platformos judesį, ω – variklio kampinis greitis, i – variklio apvijose esantis elektros srovės dydis. Visos kitos (1) raidės – tai mechaninių ir elektrinių procesų parametrai. Pilnai išspręsti per parametrus stacionarias (1) reikšmes ($\dot{a}_s = \dot{\alpha}_s = \dot{\omega}_s = \dot{i}_s = 0$) nepavyksta, todėl patogu jas išreikšti per vieną kintamąjį ω_s [4]:

$$a_s = \frac{c_1 e}{\omega_0\sqrt{4m^2\xi^2 + r^2}}; \quad \cos\alpha_s = \frac{-2m\xi}{\sqrt{4m^2\xi^2 + r^2}};$$
$$\sin\alpha_s = \frac{r}{\sqrt{4m^2\xi^2 + r^2}}; \quad \xi = \omega_s - \omega_0; \quad i_s = \frac{U}{R + \varkappa\omega_s}; \tag{2}$$

$$M_{EM} = \frac{\varkappa U^2}{(R+\varkappa\omega_s)^2}; \quad M_p = \rho\omega_s + \frac{rc_1^2e^2}{2\omega_0(4m^2\xi^2+r^2)};$$
$$M_{EM} + M_p = 0.$$

Iš paskutinės (2) lygties randamas ω_s dydis. Keisdami vieną iš sistemos parametrų, pvz. U, praktiškai įsitikiname, kad stacionarios reikšmės yra beveik visur stabilios, išskyrus nedidelę užrezonansinę sritį [3].

Tegul sistemos (1) charakteristinė lygtis stacionariame taške $s = (a_s, \alpha_s, \omega_s, i_s)$ bus

$$\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0,$$

čia

$$a_4 = (-1)^4 \left.\frac{\partial(F_1,F_2,F_3,F_4)}{\partial(a,\alpha,\omega,i)}\right|_s =: \Delta_4.$$

Šią nestabilią užrezonansinę sritį gana gerai aprašo viena iš pakankamų nestabilumo sąlygų $a_4 < 0$ [3]. Apskaičiuokime ją, pritaikydami ketvirto laipsnio determinanto išreiškimą per antro laipsnio determinantus, t.y., panaudokime (6), kai $n = 4$, $k = 2$.

$$\left.\frac{\partial(F_1,F_2,F_3,F_4)}{\partial(a,\alpha,\omega,i)}\right|_s =$$
$$= \left.\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a} & \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a} & \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} \end{vmatrix}^{-1}_s \cdot \left.\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a} & \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_1}{\partial \omega} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a} & \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_2}{\partial \omega} \\ \frac{\partial F_3}{\partial a} & \frac{\partial F_3}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_3}{\partial \omega} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a} & \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_1}{\partial i} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a} & \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_2}{\partial i} \\ \frac{\partial F_3}{\partial a} & \frac{\partial F_3}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_3}{\partial i} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a} & \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_1}{\partial \omega} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a} & \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_2}{\partial \omega} \\ \frac{\partial F_4}{\partial a} & \frac{\partial F_4}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_4}{\partial \omega} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a} & \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_1}{\partial i} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a} & \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_2}{\partial i} \\ \frac{\partial F_4}{\partial a} & \frac{\partial F_4}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_4}{\partial i} \end{vmatrix} \end{vmatrix}\right|_s.$$

Apskaičiavę šiuos determinantus stacionariame taške (2), gauname:

$$\Delta_4 = \frac{4m^2\xi^2+r^2}{4m^2}\left(-\frac{\varkappa\omega_s+R}{L}\right)\frac{1}{I}\left[\frac{\xi c_1^2e^2r4m^2}{\omega_0(4m^2\xi^2+r^2)^2} - \rho - \frac{2\varkappa^2U^2}{(R+\varkappa\omega_s)^3}\right].$$

Ir pastebėję, kad

$$\frac{\partial M_{EM}}{\partial\omega_s} = -\frac{2\varkappa^2U^2}{(R+\varkappa\omega_s)^3}; \quad \frac{\partial M_p}{\partial\omega_s} = \rho - \frac{4rc_1^2e^2\xi m^2}{\omega_0(4m^2\xi^2+r^2)^2},$$

galime užrašyti pakankamą nestabilumo sąlygą

$$\frac{\partial(M_{EM}-M_p)}{\partial\omega_s} > 0.$$

Šią nelygybę patogu išspręsti grafiškai, nubrėžiant kreives $M_{EM}(\omega_s)$ ir $M_p(\omega_s)$. Jų susikirtimai bus sistemos stacionarūs taškai. Nestabilūs bus tie iš jų, kuriuose grafikas $M_{EM}(\omega_s)$ stacionaraus taško kairėje bus žemiau $M_p(\omega_s)$, o dešinėje – atvirkščiai. Toliau sustosime ties (6) formulės įrodymu.

3. Determinanto išreiškimas per bet kurį elementą

Sistemos

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \tag{3}$$

koeficientų matricos $\|a_{ij}\|$ determinantą pažymėsime simboliu Δ_n arba tiesiog Δ. Tada galioja formulė, išreiškianti determinantą per bet kurį matricos $\|a_{ij}\|$ elementą a_{ij}:

$$\Delta_n = (-1)^{i+j} a_{ij}^{-(n-2)} \Delta_{n-1}^{i;j}, \quad n \geqslant 3, \quad a_{ij} \neq 0. \tag{4}$$

Čia $\Delta_{n-1}^{i;j}$ yra $n-1$ eilės determinantas, kurio elementai yra antros eilės determinantai:

$$\Delta_{n-1}^{i;j} = \det \|e_{km}\|, \quad e_{km} = \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{im} \\ a_{kj} & a_{km} \end{vmatrix}, \tag{5}$$
$$k = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n; \quad m = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n.$$

1 pavyzdys. Tegul formulėje (4) $n = 4, i = 2, j = 3$:

$$\Delta_4 = -a_{23}^{-2} \cdot \Delta_3^{2;3} \quad \text{arba}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = -\frac{1}{a_{23}^2} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{23} & a_{12} \\ a_{13} & a_{12} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{14} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{23} & a_{32} \\ a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{43} & a_{41} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{23} & a_{22} \\ a_{43} & a_{42} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

Determinanto $\Delta_{n-1}^{i;j}$ interpretacija gali būti tokia: iš lygčių sistemos (3) paimkime i-tąją lygtį ir iš jos išspręskime j-tąjį kintamąjį x_j per likusius ($a_{ij} \neq 0$). Eliminuokime x_j iš likusių $n-1$ lygčių, įstatant į jas gautąją išraišką. Sutvarkę koeficientus prie likusių $n-1$ nežinomųjų kiekvienoje iš $n-1$ lygčių ir padauginę kiekvieną jų iš a_{ij}, gausime sistemą, kurios koeficientų matricos determinantas bus $\Delta_{n-1}^{i;j}$.

4. Formulės (4) apibendrinimas

Determinantą Δ_n galima išskaidyti per bet kuriuos jo elementų determinantus tokiu būdu:

$$\Delta_n = (-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k} \cdot \Delta_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_k}^{-(n-k-1)} \cdot \Delta_{n-k}^{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_k}. \tag{6}$$

Čia indeksai i_s ir j_s turi būti užrašyti didėjimo tvarka, $\Delta_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_k} \neq 0$ ir $1 \leqslant k \leqslant n-2$.

Indeksai $i_1, \ldots, i_k; j_1, \ldots, j_k$ simbolio Δ apačioje reiškia, kad čia yra determinantas, gautas iš Δ determinanto matricos, palikus tik tuos elementus, kurie yra $i_1, \ldots, i_k$ eilučių ir $j_1, \ldots, j_k$ stulpelių sankirtose. Tokiu būdu, $\Delta_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_k}$ yra k-tos eilės determinantas.

Indeksai $i_1, \ldots, i_k; j_1, \ldots, j_k$ simbolio Δ viršuje reiškia, kad šis determinantas gaunamas iš Δ išbraukus $i_1, \ldots, i_k$ eilutes ir $j_1, \ldots, j_k$ stulpelius. Apatinis indeksas patikslina determinanto eilę. Šio determinanto elementai savo ruožtu yra $k+1$ eilės determinantai.

Jeigu $\Delta_{n-k}^{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_k} = \det \|b_{ij}\|_{i,j=1,n-k}$, tai

$$b_{ij} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_k} & a_{i_1 j} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_k} & a_{i_2 j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \cdots & a_{i_k j_k} & a_{i_k j} \\ a_{i j_1} & a_{i j_2} & \cdots & a_{i j_k} & a_{ij} \end{vmatrix}, \quad \begin{array}{l} 1 \leqslant i \leqslant n, \\ 1 \leqslant j \leqslant n, \\ i \notin \{i_1, \ldots, i_k\}, \\ j \notin \{j_1, \ldots, j_k\}. \end{array}$$

5. Formulės (4) įrodymas

Padauginkime kiekvieną Δ_n eilutę, išskyrus i-tąją iš elemento a_{ij}. Paverskime j-tajame stulpelyje elementus nuliais (išskyrus tik elementą a_{ij}). Tam padauginkime i-tąją eilutę iš a_{kj} ir atimkime nuo k-tosios eilutės (čia $k = 1, \ldots, n$ ir $k \neq i$). Tada gausime:

$$a_{ij}^{(n-1)} \cdot \Delta_n =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{ij}a_{11} - a_{i1}a_{1j} & \cdots & a_{ij}a_{1j-1} - a_{ij-1}a_{1j} & 0 & a_{ij}a_{1j+1} - a_{ij+1}a_{1j} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \\ a_{ij}a_{n1} - a_{i1}a_{nj} & \cdots & a_{ij}a_{nj-1} - a_{ij-1}a_{nj} & 0 & a_{ij}a_{nj+1} - a_{ij+1}a_{nj} & \cdots \end{vmatrix}.$$

Dešinėje pusėje esantis determinantas, išskleistas pagal j-tąjį stulpelį, bus lygus $(-1)^{i+j} \cdot \Delta_{n-1}^{i;j} a_{ij}$. Tokiu būdu formulė (4) įrodyta.

6. Formulės (6) įrodymas

Nenusižengiant bendrumui, įrodymą pateiksime atveju, kai $i_1 = 1; i_2 = 2; \ldots, i_k = k$, $j_1 = 1, j_2 = 2, \ldots, j_k = k$. Tada (6) įgis pavidalą:

$$\Delta_n = \Delta_{1,\ldots,k;1,\ldots,k}^{-(n-k-1)} \cdot \Delta_{n-k}^{1,\ldots,k;1,\ldots,k}. \tag{7}$$

(6) formulę galima gauti iš (7), sukeičiant eilutes ir stulpelius vietomis. Tada dešinėje esantys determinantai nepasikeis, o prieš determinantą Δ_n teks iškelti ženklą $(-1)^{i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_k}$, kuris ir yra galutinėje (6) formulėje.

Šios formulės įrodymo esmę sudarys matematinės indukcijos metodas, pritaikytas indeksui k. Kai $k = 1$, ji virsta (4) ir yra įrodyta punkte 3. Tegul galioja indukcinė prielaida:

$$\Delta_n = \Delta_{1,\ldots,k-1;1,\ldots,k-1}^{-(n-k)} \cdot \Delta_{n-k+1}^{1,\ldots,k-1,1,\ldots,k-1}. \tag{8}$$

Pakeisime (7) ir (8) formulių dešiniąsias puses taip, kad jos sutaptų ir tokiu būdu įrodysime (7) formulės teisingumą.

Sutrumpinsime pažymėjimus (7), (8) formulėse:

$$\Delta_k := \Delta_{1,\ldots,k;1,\ldots,k} \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Pažymėkime formulėje (8) antrojo determinanto elementus b_{ij}, t.y.:

$$\Delta_{n-k+1}^{1,\ldots,k-1;1,\ldots,k-1} = \det ||b_{ij}||_{i,j=1,n-k+1}, \tag{9}$$

$$b_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k-1} & a_{1k-1+j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k-1,1} & a_{k-1,2} & \ldots & a_{k-1,k-1} & a_{k-1,k-1+j} \\ a_{k-1+i,1} & a_{k-1+i,2} & \ldots & a_{k-1+i,k-1} & a_{k-1+i,k-1+j} \end{vmatrix}.$$

Pritaikę formulę (4), išsklaidykime determinantą (9) pagal pirmąjį elementą:

$$\Delta_{n-k+1}^{1,\ldots,k-1;1,\ldots,k-1} = \Delta_k^{-(n-k-1)} \cdot \widetilde{\Delta}; \tag{10}$$

čia $\widetilde{\Delta} = \det ||c_{ij}||_{i,j=1,n-k}$. Įstatę (10) į (8) turėsime

$$\Delta_n = \Delta_{k-1}^{-(n-k)} \cdot \Delta_k^{-(n-k-1)} \widetilde{\Delta}. \tag{11}$$

Dabar pertvarkysime formulės (7) dešiniąją pusę:

$$\Delta_{n-k}^{1,\ldots,k;1,\ldots,k} = \det ||d_{ij}||_{i,j=1,n-k}, \quad \text{čia}$$

$$d_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} & a_{1\,k+j} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} & a_{2\,k+j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} & a_{k\,k+j} \\ a_{k+i,1} & a_{k+i,2} & \ldots & a_{k+i,k} & a_{k+i\,k+j} \end{vmatrix}.$$

Išskaidykime kiekvieną iš elementų d_{ij} pagal pirmas $k-1$ eilutes ir pirmus $k-1$ stulpelius. Pagal indukcinę prielaidą (8):

$$d_{ij} = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k-1} & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k-1} & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk-1} & a_{kk} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k-1} & a_{1k+j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k-1} & a_{2k+j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk-1} & a_{kk+j} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k-1} & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k-1} & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k+i,1} & a_{k+i,2} & \dots & a_{k+i,k-1} & a_{k+i,k} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k-1} & a_{1k+j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k-1} & a_{2k+j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k+i,1} & a_{k+i,2} & \dots & a_{k+i,k-1} & a_{k+i,k+j} \end{vmatrix} \end{vmatrix} \cdot \Delta_{k-1}^{-1}.$$

Iš kiekvienos determinanto $|d_{ij}|$ eilutės iškeliame pastovų daugiklį Δ_{k-1}^{-1} prieš determinanto ženklą ir, pastebėję, kad $c_{ij} = d_{ij}\Delta_{k-1}$, turime

$$\Delta_{n-k}^{1,\dots,k;1,\dots,k} = \Delta_{k-1}^{-(n-k)} \cdot \widetilde{\Delta}.$$

Iš (7) turime $\Delta_n = \Delta_k^{-(n-k-1)} \cdot \Delta_{k-1}^{-(n-k)} \cdot \widetilde{\Delta}$. Formulių (11) ir (12) dešiniosios pusės sutampa, o tai ir reikėjo įrodyti.

Literatūra

[1] А.Ю. Львович, *Электро-механические системы*, изд. ЛГУ, (1989).

[2] П.С. Ланда, *Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы*, М. (1989).

[3] А.А. Алифов, *Взаимодействие нелинейных колебательных систем с источниками энергии*, М. (1985).

[4] А.П. Каваляускас, К задаче о синхронизации двух дебалансных вибраторов, *Вестник ЛГУ*, **2**(8), 107–109 (1988).

Determination of an unstability area of a system by using the expansion of a nth order determinant by kth order determinants

A. Kavaliauskas

The article deals with a proof of a firmula, devoted to expansion of a determinant by any of k rows and k columns. By its help the area of unstability in a electromechanical system can be determined.