

Об одной системе эллиптических уравнений в частных производных второго порядка

Гинтарас ПУРЮШКИС (VU)

e-mail: gintaras.puriuskis@maf.vu.lt

Рассмотрим систему уравнений

$$-\Delta u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\lambda \sum_{k=1}^n \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^n a_k \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_{l_k}} - \frac{\partial u_{l_k}}{\partial x_k} \right) \right] = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

в полупространстве $H_l = \{b_1x_1 + \dots + b_nx_n > 0\}$ с граничным условием

$$u_i|_{\Gamma} = f_i. \quad (2)$$

Здесь $\lambda \neq 1$, λ , a_i , b_i константы, $l_1 = n$, $l_k = k - 1$, $k = 2, \dots, n$, Δ – оператор Лапласа, Γ – гиперплоскость $\{b_1x_1 + \dots + b_nx_n = 0\}$. Обозначим $C^{2,0}$ класс функций из $C^2(H_l) \cap C(H_l \cup \Gamma)$ и стремящихся к нулю на бесконечности. Система (1) обобщает эллиптическую систему трех уравнений в трехмерном пространстве [1]

$$\begin{aligned} -\Delta u + \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \alpha \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \gamma \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] &= 0, \\ -\Delta v + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \alpha \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \gamma \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] &= 0, \\ -\Delta w + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \alpha \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \gamma \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] &= 0. \end{aligned}$$

Решения системы будем искать в виде

$$u_i = \phi_i + (b_1x_1 + \dots + b_nx_n) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

где ϕ_i и ψ гармонические в полупространстве H_l функции, связанные соотношением

$$(\lambda - 2) \sum_{k=1}^n b_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} (a_k b_{l_k} - a_{k+1} b_{k+1}) + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} (a_n b_{n-1} - a_1 b_1)$$

$$+ \lambda \sum_{k=1}^n \frac{\partial \phi_k}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^n a_k \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial x_{l_k}} - \frac{\partial \phi_{l_k}}{\partial x_k} \right) = 0. \quad (4)$$

Из граничных условия (2) и равенств (3) следует граничные условия

$$\phi_i \Big|_{\Gamma} = f_i,$$

из которых единственным образом определяются гармонические в полупространстве H_l функции ϕ_i . Обозначая

$$A_k = a_k b_{l_k} - a_{k+1} b_{k+1}, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad A_n = a_n b_{n-1} - a_1 b_1, \\ F = \left[-\lambda \sum_{k=1}^n \frac{\partial \phi_k}{\partial x_k} - \sum_{k=1}^n a_k \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial x_{l_k}} - \frac{\partial \phi_{l_k}}{\partial x_k} \right) \right] \Big|_{\Gamma},$$

равенство (4) перепишем

$$\left[(\lambda - 2) \sum_{k=1}^n b_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^n A_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right] \Big|_{\Gamma} = F. \quad (5)$$

Последнее равенство представляет собой задачу о наклонной производной для гармонической в полупространстве H_l функции ψ . Для коэффициентов a_i , b_i выполнено равенство

$$\sum_{k=1}^n b_k A_k = \sum_{k=1}^{n-1} b_k (a_k b_{l_k} - a_{k+1} b_{k+1}) + b_n (a_n b_{n-1} - a_1 b_1) = 0. \quad (6)$$

Известно, что решения задачи о наклонной производной

$$\Delta \psi = 0, \quad x \in D, \\ \sum \alpha_i(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = f, \quad x \in \partial D$$

существуют и отличаются на постоянную при любом $n \geq 2$, если векторное поле $(\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x))$ ни в одной точке поверхности ∂D не выходит в касательную плоскость к ∂D плоскость (см. [2] стр. 3, [3] теорема 5 V).

В нашем случае касательная плоскость совпадает с Γ . Из равенства (6) следует, что векторное поле

$$((\lambda - 2)b_1 + A_1, \dots, (\lambda - 2)b_n + A_n) \quad (7)$$

лежит в Γ во всех точках, если $\lambda = 2$. Если $\lambda \neq 2$, то векторное поле (7) ни в одной точке не выходит в Γ , поскольку не все числа b_i равны

нулю. Отсюда следует, что частные производные $\partial\psi/\partial x_i$ гармонической функции ψ с граничным условием (5) определяются единственным образом. Таким образом, доказана теорема.

Теорема. Если $\lambda \neq 2$, $\lambda \neq 1$, f_i , $i = 1, \dots, n$ дифференцируемы и, то задача Дирихле для системы (1) разрешима и ее решение единственно.

Литература

- [1] A. V. Bitsadze, *Some Classes of Equations in Partial Derivatives*, Nauka, Moscow (1981).
- [2] А. Янушаускас, Об одной эллиптической системе трех уравнений в частных производных второго порядка, *Liet. matem. rink.*, 35(2), 190–197 (1995).

Apie vieną antros eilės elipsinių lygčių su dalinėmis išvestinėmis sistemą

G. Puriuškis

n -matėje puserdvėje nagrinėjama antros eilės elipsinių n lygčių sistema, priklausanti nuo parametro λ . Įrodytas sprendinio egzistavimas ir vienatis, kai $\lambda \neq 2$.