

Diskrečioji jungtinė ribinė teorema Epšteino dzeta funkcijų rinkiniui

A Discrete Limit Theorem for a Collection of Epstein Zeta-Functions

Martynas Šiupienis

Vilniaus universiteto Šiaulių akademija
E. p.: martynas.siuipienis@sa.stud.vu.lt
<https://ror.org/03nadee84>

Renata Macaitienė

Vilniaus universiteto Šiaulių akademija
E. p.: renata.macaitiene@sa.vu.lt
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0609-7088>
<https://ror.org/03nadee84>

Santrauka. Straipsnyje pristatoma diskrečioji Boro-Jeseno tipo ribinė teorema Epšteino dzeta funkcijų rinkiniui. Pateikiamas išreikštinis ribinio mato pavidalas, kuriam gauti būtina papildoma sąlyga. Gauta teorema apibendrina vienmatę diskrečiąją ribinę teoremą [16] ir papildo jungtinių atvejų tyrimus [17] diskrečiuoju rezultatu.
Pagrindiniai žodžiai: Epšteino dzeta funkcija, ribinė teorema, silpnasis tikimybinių matų konvergavimas, Haro matas.

Summary. In this paper, the discrete limit theorem of Bohr-Jessen type with an explicitly given limit measure for a collection of Epstein zeta-functions is given. An extra condition is required to specify the form of the limit measure. This theorem generalizes one-dimensional discrete limit theorem [16] and extends the joint case studies [17] with a discrete result.

Keywords: Epstein zeta-function, limit theorem, weak convergence of probability measures, Haar measure.

Įvadas

Dzeta funkcijos yra vieni reikšmingiausių objektų šiuolaikinėje analizinėje skaičių teorijoje. Jų tyrimai ne tik suteikia įrankių pirminių skaičių pasiskirstymo, grafų teorijos ar geometrijos uždaviniams nagrinėti, bet ir taikomi sprendžiant kitų mokslo sričių problemas. Nors gerai žinoma Rymano dzeta funkcija išlieka matematinių tyrinėjimų

Received: 2025-11-30. Accepted: 2025-12-18

Copyright © 2026 Martynas Šiupienis, Renata Macaitienė. Published by Vilnius University Press. This is an Open Access article distributed under the terms of the [Creative Commons Attribution Licence](#), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original author and source are credited.

centre, pastaraisiais dešimtmečiais vis didesnis dėmesys skiriamas apibendrintoms dzeta funkcijoms, kaip Hurvico (Hurwitz), Dedekind (Dedekind) ar Epšteino (Epstein), atskleidžiančioms naujų dėsnų bei gilesnių sąsajų tarp analizinės ir algebrinės skaičių teorijos. Dažnai tai lemia ir praktinių pritaikymų svarba. Pavyzdžiui, sudėtinga Epšteino dzeta funkcijos, kuri yra Rymano dzeta funkcijos apibendrinimas, struktūra ir sąsajos su gardelių (lattice) sumomis, lemia nuolatinį domėjimąsi jos savybėmis. Ši funkcija yra teorinių matematinių koncepcijų ir praktinių jų pritaikymų pavyzdys. Epšteino dzeta funkcija atlieka svarbų vaidmenį įvairiuose fizikos [5] bei chemijos [10] tyrimuose – taikoma Casimiro energijos skaičiavimams kvantinės lauko teorijos modeliuose [3], [6], molekulių gardelių energijos tyrimuose [13] ir kitur.

Tarkime, kad Q yra teigiamai apibrėžta kvadratinė $n \times n$ matrica. Pažymėkime $Q[\underline{x}]$ ją atitinkančią kvadratinę formą $\underline{x}^T Q \underline{x}$, visiems $\underline{x} \in \mathbb{Z}^n$. Dzeta funkcija $\zeta(s; Q)$, $s = \sigma + it$, $s \in \mathbb{C}$, susieta su $Q[\underline{x}]$, apibrėžiama eilute

$$\zeta(s; Q) = \sum_{\underline{x} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} (Q[\underline{x}])^{-s}, \quad \sigma > \frac{n}{2},$$

vadinama Epšteino dzeta funkcija. P. Epšteinas apibrėžė šią funkciją [7] ir įrodė jos analizinį pratęsimą į visą kompleksinę plokštumą. Jis taip pat pateikė funkcijos $\zeta(s; Q)$ Rymano tipo funkcinę lygtį bei nurodė tam tikrus ryšius su teta funkcijomis. Vėliau $\zeta(s; Q)$ savybes ir elgseną nagrinėjo daug kitų matematikų: Batemanas [1], Fomenko [8], Heckė [11], Ivaničec [12], Pankovskis ir Nakamura [18], Selbergas ir Chovla [19], Teiloras [22] ir kiti. Pavyzdžiui, naują rezultatą dzeta funkcijų reikšmių sumų virš netrivialių Rymano dzeta funkcijos nulių tyrimuose pritaikė Garunkštis, Kondratavičius ir Putrius [9]. Jie nagrinėjo sumą

$$\sum_{1 < \gamma < T} \zeta(\rho; Q),$$

kur $\rho = \beta + i\gamma$ yra netrivialūs Rymano dzeta funkcijos nuliai, o T – pakankamai didelis teigiamas skaičius, ir pateikė išreikštinę jos formulę specialiam Epšteino dzeta funkcijos atvejui, kai $Q[\underline{x}]$ yra teigiamai apibrėžta binarinė kvadratinė forma, t. y.,

$$Q[\underline{x}] = Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

Epšteino dzeta funkcijos reikšmių pasiskirstymo tam tikrose kompleksinės plokštumos srityse klausimus nagrinėja Laurinčikas ir Macaitienė, kurie pateikė Boro-Jeseno tipo tikimybinės ribinės teoremas, kai $Q[\underline{x}] = \underline{x}^T Q \underline{x} \in \mathbb{Z}$, visiems $\underline{x} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$. Tam, kad galima būtų suformuluoti jų rezultatus, pažymėkime $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ erdvės $\mathbb{X}$ Borelio σ -klasę, „meas A “ – mačiosios aibės $A \in \mathbb{R}$ Lebegeo matą ir

$$P_{T,Q,\sigma}(A) = \frac{1}{T} \text{meas}\{t \in [0, T]: \zeta(\sigma + it; Q) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

Pirmoji tolydaus tipo ribinė teorema funkcijai $\zeta(s; Q)$ pateikta 2018 m. Įrodyta [15], kad erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ egzistuoja toks išreikštinis pavidalą turintis tikimybinis matas $P_{Q,\sigma}$, kad $P_{T,Q,\sigma}$, fiksuotam $\sigma > \frac{n-1}{2}$, kai $T \rightarrow \infty$, silpnai konverguoja į $P_{Q,\sigma}$. Laurinčikas ir Macaitienė nagrinėjo ir sudėtingesnę – diskretųjį minėtos teoremos atvejį [16]. Pažymėkime $\#A$ aibės A elementų skaičių ir $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Jie įrodė, kad erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ egzistuoja tikimybinis matas $P_{Q,\sigma,h}$, jog fiksuotiems $\sigma > \frac{n-1}{2}$ ir $h > 0$,

$$P_{N,Q,\sigma,h}(A) = \frac{1}{N+1} \#\{0 \leq k \leq N: \zeta(\sigma + ikh; Q) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

kai $N \rightarrow \infty$, silpnai konverguoja į $P_{Q,\sigma,h}$. Straipsnyje taip pat pateiktas išreikštinis ribinio mato pavidalas. Siekdami apibendrinti vienmatį tolydųjį atvejį, autoriai ištyrė ir jungtinį Epšteino dzeta funkcijų rinkinio reikšmių pasiskirstymą. Straipsnyje [17] įrodyta tolydaus tipo jungtinė ribinė teorema Epšteino dzeta funkcijoms. Diskrečiojo atvejo apibendrinimas iki šiol nėra išnagrinėtas.

Tyrimo tikslas – įrodyti diskrečiąją ribinę teoremą Epšteino dzeta funkcijų rinkiniui.

Tyrimo metodai. Diskrečiųjų ribinių teoremų įrodymai remiasi Epšteino dzeta funkcijos savybėmis, silpnojo tikimybinių matų konvergavimo principais, Prochorovo (Prokhorov) sąryšiais bei ergodinės teorijos elementais.

Epšteino dzeta funkcijos apibrėžimas ir savybės

Epšteino dzeta funkcija $\zeta(s; Q)$ teigiamai apibrėžtai kvadratinei $n \times n$ matricai Q ($\underline{x}^T Q \underline{x} > 0$, visiems rinkiniams $\underline{x} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$) apibrėžiama eilute

$$\zeta(s; Q) = \sum_{\underline{x} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} (\underline{x}^T Q \underline{x})^{-s}, \quad \sigma > \frac{n}{2}, \quad s = \sigma + it \in \mathbb{C}.$$

Funkcijos $\zeta(s; Q)$ analizinio pratęsimo galimybė bei Rymano tipo funkcinės lygties egzistavimas priklauso nuo kvadratinės matricos: jei Q teigiamai apibrėžta, $\zeta(s; Q)$ yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastąjį polių taške $s = \frac{n}{2}$ su reziduumu $\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)\sqrt{\det Q}}$ (čia $\Gamma(s)$ yra Oilerio gama funkcija), ir turi funkcinę Rymano tipo lygtį:

$$\pi^{-s} \Gamma(s) \zeta(s; Q) = (\det Q)^{-\frac{1}{2}} \pi^{s-\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2} - s\right) \zeta\left(\frac{n}{2} - s; Q^{-1}\right).$$

Tačiau jei Q nėra teigiamai apibrėžta, tuomet $\zeta(s; Q)$ nagrinėjimas tampa itin sudėtingu dėl jos sąsajų su automorfinėmis formomis, tokiomis kaip Maso (Maass) formos.

Funkcinė lygtis leidžia identifikuoti Epšteino dzeta funkcijos trivialiuosius nulius, esančius taškuose $s = -m$. Apie kitų, netrivialiųjų, nulių išsidėstymą žinoma nedaug, todėl jų nagrinėjimas yra viena iš aktualiausių problemų tiriant šios funkcijos savybes. Pavyzdžiui, žinoma, kad su tam tikromis matricomis Rymano hipotezės

analogas funkcija $\zeta(s; Q)$ negalioja – egzistuoja nuliai už kritinės tiesės. Be to, įrodyta [21], jog skirtingai nuo $\zeta(s)$ funkcijos, $\zeta(s; Q)$ nuliai nėra simetriški kritinės tiesės $\sigma = \frac{n}{4}$ atžvilgiu. Tačiau egzistuoja ir tokie atvejai, kai Epšteino dzeta funkcija išreiškiama kitomis funkcijomis, kurių savybės atskleidžia jos elgseną. Tegul $Q = I_n$ yra n -matė vienetinė matrica. Tuomet tam tikroms n reikšmėms Epšteino dzeta funkcija išreiškiama Rymano dzeta bei Dirichlė L funkcijų $L(s, \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$, $\sigma > 1$, tiesine kombinacija. Pavyzdžiui,

$$\begin{aligned}\zeta(s; I_1) &= 2\zeta(2s), & \zeta(s; I_2) &= 4\zeta(s)L(s, \chi_4), \\ \zeta(s; I_4) &= 8(1 - 2^{2-s})\zeta(s)\zeta(s-1),\end{aligned}$$

čia $L(s, \chi_4)$ yra Dirichlė L funkcija su ne pagrindiniu Dirichlė charakteriu moduliui 4. Jei teisinga Rymano hipotezė, tai visi netrivialūs $\zeta(s; I_1)$ nuliai išsidėsto kritinėje tiesėje $\sigma = \frac{1}{4}$. Jei Rymano hipotezės analogas galioja Dirichlė L funkcijai, tuomet visi netrivialūs $\zeta(s; I_2)$ nuliai yra ant tiesių $\sigma = \frac{1}{2}$ ir $\sigma = \frac{1}{4}$. Beje, ši funkcija yra specialus Dedekind dzeta funkcijos atvejis. Analogiškai, jei teisinga Rymano hipotezė ir jos analogas Dirichlė L funkcijai, tuomet netrivialūs $\zeta(s; I_4)$ nuliai yra ant tiesių $\sigma = \frac{1}{2}$ bei $\sigma = \frac{3}{2}$ ir be galo daug nulių ant tiesės $\sigma = 2$. Tiesės $\sigma = \frac{1}{2}$ ir $\sigma = \frac{n-1}{2}$ vadinamos kritinėmis $\zeta(s; Q)$ tiesėmis. Tačiau sudėtingesnių matricų atveju apie nulių pasiskirstymą žinoma labai mažai. Pavyzdžiui, nieko nežinoma apie funkcijos, susijusios su modulinėmis formomis

$$\zeta(s; \mathcal{L}_{24}) = \frac{65\,520}{691} \{ \zeta(s)\zeta(s-11) - L(s; \Delta) \},$$

nulių pasiskirstymą. Čia $L(s, \Delta) = \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m)m^{-s}$ yra Dirichlė L funkcija, susieta su Ramanujano τ -funkcija, apibrėžiama žemiau pateikta suma bei išreiškiama sandauga:

$$\Delta(q) = \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m)q^m = q \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^m)^{24},$$

kur $q = \exp(2\pi i\tau)$ ir τ yra iš viršutinės pusplokštumos, o $\mathcal{L}_{24}$ yra su Lecho (Leech) gardele susijusi matrica

$$\mathcal{L}_{24} = \begin{pmatrix} 4 \cdot I_{12} & \mathcal{A} - 2 \cdot I_{12} \\ \mathcal{A}^t - 2 \cdot I_{12} & 4 \cdot I_{12} \end{pmatrix}, \quad \text{kur } \mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & e^t \\ -e & C \end{pmatrix},$$

čia $e = (1, \dots, 1)^T$, $C = \left(\binom{k-l}{11} \right)_{1 \leq k, l \leq 11}$, o $\binom{*}{11}$ yra Lagranžo simbolis $\binom{*}{11}$.

$\zeta(s; Q)$ gali būti užrašoma paprastąja Dirichlė eilute, jei tenkinamos papildomos sąlygos. Pažymėkime $\mathbb{H}$ viršutinę kompleksinės plokštumos pusplokštumą, o pilnos modulinės grupės

$$SL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$$

Hekės pogrupį pažymėkime

$$\Gamma_0(q) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : SL(2, \mathbb{Z}), c \equiv 0 \pmod{q} \right\},$$

kuris vadinamas kongruenčiuoju pogrupiu $\pmod{q}$, $q \in \mathbb{Z}_+$. Jeigu visoms $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(q)$ funkcija F srityje $\mathbb{H}$ tenkina funkcinę lygtį

$$F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^\kappa F(z), \quad \kappa \in \mathbb{N},$$

ir yra analizinė paraboliniuose Γ_0 taškuose, tuomet F vadinama svorio κ ir lygio q moduline forma.

Kaip jau žymėjome įvade, tegul $Q[\underline{x}] = \underline{x}^T Q \underline{x}$ ir tarkime, kad $Q[\underline{x}]$ yra sveikasis skaičius su kiekvienu sveikųjų skaičių rinkiniu $\underline{x} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$. Tegul $r_Q(m) = \#\{\underline{x} \in \mathbb{Z}^n : Q[\underline{x}] = m, n \in \mathbb{N}_0\}$. Tuomet, pusplokštumėje $\sigma > \frac{n}{2}$, Epšteino dzeta funkcija gali būti užrašoma paprastąja Dirichlė eilute

$$\zeta(s; Q) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_Q(m)}{m^s}.$$

Epšteino dzeta funkcijos išraiškai nagrinėti pasinaudosime žinomais rezultatais. Prieš tai primename, jog eilutės $E_\kappa(z) = \sum_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(q)} (cz+d)^{-\kappa}$, $\kappa > 2$, vadinamos Eisenšteino eilutėmis. Fomenko įrodė [8], jog eilutė

$$\theta(z; Q) = \sum_{m=0}^{\infty} r_Q(m) e^{2\pi i m z},$$

yra svorio $\frac{n}{2}$ modulinė forma ir gali būti išreiškiama Eisenšteino eilutės $E_Q(z) = \sum_{m=0}^{\infty} e_Q(m) e^{2\pi i m z}$ ir parabolinės formos $F_Q(z) = f_Q(m) e^{2\pi i m z}$ suma, t. y. $\theta(z; Q) = E_Q(z) + F_Q(z)$. Iš čia seka, kad pusplokštumėje $\sigma > \frac{n}{2}$ Epšteino dzeta funkcija gali būti išreiškiama dzeta funkcijų $\zeta(s; E_Q) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_Q(m)}{m^s}$ ir $\zeta(s; F_Q) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_Q(m)}{m^s}$ suma. Šis išskaidymas vaidina ypatingai svarbų vaidmenį nagrinėjant $\zeta(s; Q)$ reikšmių pasiskirstymą. Ivaniec įrodė [12], jog lyginiams $n \geq 4$, Eisenšteino eilutė $E_Q(z)$ yra svorio $\frac{n}{2}$ ir lygio $q \in \mathbb{N}$ modulinė forma, o q yra toks, kad $q(2Q)^{-1}$ yra integrali matrica. Dar anksčiau Hekė įrodė [11], jog $\zeta(s; E_Q)$ gali būti išreiškiama elementų $(kl)^{-s} L(s, \chi_k) L\left(s - \frac{n}{2} + 1, \varphi_l\right)$ tiesine kombinacija, kur k ir l yra teigiami q dalikliai, χ_k ir φ_l yra atitinkami Dirichlė charakteriai modulių $\frac{q}{k}$ ir $\frac{q}{l}$, o $L(s, \chi_k)$ ir $L(s, \varphi_l)$ – Dirichlė L funkcijos. Iš čia ir sumos $\zeta(s; Q) = \zeta(s; E_Q) + \zeta(s; F_Q)$ seka, jog Epšteino dzeta funkcija pusplokštumėje $\sigma > \frac{n-1}{2}$ išreiškiama atitinkamų Dirichlė L funkcijų tiesine kombinacija

$$\zeta(s; Q) = \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L \frac{a_{kl}}{k^s l^s} L(s, \chi_k) L\left(s - \frac{n}{2} + 1, \varphi_l\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_Q(m)}{m^s}.$$

Čia a_{kl} yra kompleksiniai skaičiai, o χ_k , $1 \leq k \leq K$ bei φ_l , $1 \leq l \leq L$ – tarpusavyje neekvivalentūs Dirichlė charakteriai (moduliais $\frac{q}{k}$ ir $\frac{q}{l}$), $K, L \in \mathbb{N}_0$. Be to, jei lyginiams n

$$f_Q(m) = O\left(m^{\frac{n}{4} - \frac{1}{2} + \varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0,$$

tai eilutė $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_Q(m)}{m^s}$ konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > \frac{n-1}{2}$.

Kvadratinų formų pavyzdžiai. Tarkime, kad $n = 2$. Imkime simetrinę matricą $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ir sveikųjų skaičių rinkinį $\underline{x} = (x_1, x_2)$. Tuomet

$$\begin{aligned} Q[\underline{x}] &= (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (2x_1 + x_2 \ x_1 + 3x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= 2x_1^2 + x_2x_1 + x_1x_2 + 3x_2^2 = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2. \end{aligned}$$

Tarkime, kad $n = 3$. Tuomet matricą $Q = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ atitinka kvadratinė forma

$$Q[\underline{x}] = (x_1 \ x_2 \ x_3) Q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 8x_2x_3.$$

Diskrečioji jungtinė ribinė teorema

Laurinčikas ir Macaitienė nagrinėjo diskretųjį vienmatį atvejį ir įrodė ribinę teoremą [16], kai postūmiai yra iš aritmetinės progresijos $\{kh: k \in \mathbb{Z}_0\}$, $h > 0$. Šiame straipsnyje analizuojamas jungtinis diskretusis atvejis.

Pažymėkime $\underline{h} = (h_1, \dots, h_r)$, $h_j > 0$. Tegul Q_j , $j = 1, \dots, r$, yra teigiamai apibrėžta kvadratinė $n_j \times n_j$ matrica ir $\zeta(s_j; Q_j)$ atitinkamai – Epšteino dzeta funkcija. Naudosime žymėjimus

$$\underline{Q} = (Q_1, \dots, Q_r), \quad \underline{s} = (s_1, \dots, s_r), \quad \underline{\zeta}(\underline{s}; \underline{Q}) = (\zeta(s_1; Q_1), \dots, \zeta(s_r; Q_r)).$$

Kaip minėjome, Epšteino dzeta funkcija gali būti išreiškiama atitinkamų dzeta funkcijų suma, t. y.

$$\zeta(s_j; Q_j) = \zeta(s_j; E_{Q_j}) + \zeta(s_j; F_{Q_j}), \quad j = 1, \dots, r,$$

kur $\zeta(s_j; E_{Q_j})$ yra tam tikra dzeta funkcija, susieta su Eisenšteino eilute, o $\zeta(s_j; F_{Q_j})$ – dzeta funkcija, susieta su paraboline forma. Pastaroji išraiška bei Hekės [11] ir Ivaniec [12] rezultatai leidžia teigti, kad fiksuotiems $\sigma_j > \frac{n_j-1}{2}$ Epšteino dzeta funkcija išreiškiama Dirichlė L funkcijų tiesine kombinacija

$$\zeta(s_j; Q_j) = \sum_{k=1}^{K_j} \sum_{l=1}^{L_j} \frac{a_{klj}}{k^s l^s} L(s_j, \chi_{kj}) L\left(s_j - \frac{n_j}{2} + 1, \varphi_{lj}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{Q_j}(m)}{m^{s_j}}, \quad (1)$$

kur $L(s_j, \chi_{kj})$ ir $L(s_j, \varphi_{lj})$ yra atitinkamos Dirichlė L funkcijos, a_{klj} kompleksiniai koeficientai, $K_j, L_j \in \mathbb{N}_0$. Be to, eilutė

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{Q_j}(m)}{m^{s_j}},$$

kai $\sigma_j > \frac{n_j-1}{2}$, absoliučiai konverguoja. Detalės, susijusios su (1) išraiška, yra pateiktos [15], [16] bei [18] straipsniuose.

Tegul γ yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje. Apibrėžkime begaliniamatį erdvinį torą

$$\Omega = \prod_{p \in \mathbb{P}} \gamma_p,$$

kur $\mathbb{P}$ yra visų pirminių skaičių aibė, o $\gamma_p = \gamma = \{s \in \mathbb{C}: |s| = 1\}$ yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje, $p \in \mathbb{P}$. Remiantis Tichonovo (Tikhonov) teorema, toras Ω yra kompaktiška topologinė Abelio grupė, todėl erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ egzistuoja tikimybinis Haro matas m_H . Taigi, turime tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Pažymėkime $\omega(p)$, $p \in \mathbb{P}$, p -ąją elemento $\omega \in \Omega$ komponentę, o funkcijos $\omega(p)$ apibrėžimo sritį išplėskime į natūraliųjų skaičių aibę $\mathbb{N}$:

$$\omega(m) = \prod_{\substack{p^\alpha | m \\ p^{\alpha+1} \nmid m}} \omega^\alpha(p), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Tegul

$$\Omega^r = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_r,$$

kur $\Omega_j = \Omega$ visiems $j = 1, \dots, r$. Tokiu atveju, Ω^r taip pat yra kompaktinė topologinė Abelio grupė, todėl galime apibrėžti tikimybinę erdvę $(\Omega^r, \mathcal{B}(\Omega^r), \underline{m}_H)$, kur $\underline{m}_H$ yra tikimybinis Haro matas erdvėje $(\Omega^r, \mathcal{B}(\Omega^r))$. Pažymėkime $\omega_j(p)$ p -ąją elemento $\omega_j \in \Omega_j$, $p \in \mathbb{P}$, $j = 1, \dots, r$, komponentę ir išplėskime $\omega_j(p)$ apibrėžimo sritį į natūraliųjų skaičių aibę $\mathbb{N}$ (analogiškai kaip ir vienmačiu atveju [16]). Toro Ω elementus pažymėkime $\underline{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_r)$ ir tikimybinėje erdvėje $(\Omega^r, \mathcal{B}(\Omega^r), \underline{m}_H)$ apibrėžkime $\mathbb{C}^r$ -reikšmį atsitiktinį elementą

$$\underline{\zeta}(\underline{\sigma}, \underline{\omega}; \underline{Q}) = (\zeta(\sigma_1, \omega_1; Q_1), \dots, \zeta(\sigma_r, \omega_r; Q_r)),$$

kur

$$\zeta(\sigma_j, \omega_j; Q_j) = \sum_{k=1}^{K_j} \sum_{l=1}^{L_j} \frac{a_{klj} \omega_j(k) \omega_j(l)}{k^{\sigma_j} l^{\sigma_j}} L(\sigma_j, \omega_j, \chi_{kj}) L\left(\sigma_j - \frac{n_j}{2} + 1, \omega_j, \varphi_{lj}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{Q_j}(m) \omega_j(m)}{m^{\sigma_j}}, \quad j = 1, \dots, r,$$

ir

$$L(\sigma_j, \omega_j, \chi_{kj}) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{\chi_{kp}(p) \omega_j(p)}{p^{\sigma_j}}\right)^{-1},$$

$$L\left(\sigma_j - \frac{n_j}{2} + 1, \omega_j, \varphi_{lj}\right) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{\varphi_{lj}(p) \omega_j(p)}{p^{\sigma_j - \frac{n_j}{2} + 1}}\right)^{-1}.$$

Atsitiktinio elemento $\underline{\zeta}(\underline{\sigma}, \underline{\omega}; \underline{Q})$ skirstinį pažymėkime

$$P_{\underline{\zeta}; \underline{\sigma}, \underline{\omega}} = m_H \left\{ \underline{\omega} \in \Omega^r : \underline{\zeta}(\underline{\sigma}, \underline{\omega}; \underline{Q}) \in A \right\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^r).$$

Be to, $L(\mathbb{P}, \underline{h}, \pi)$ pažymėkime aibę

$$L(\mathbb{P}, \underline{h}, \pi) = \{(h_1 \log p : p \in \mathbb{P}), \dots, (h_r \log p : p \in \mathbb{P}), 2\pi\}.$$

Dabar galime suformuoti pagrindinę diskrečiaus tipo ribinę teoremą, kurią įrodysime kitame skyriuje.

Teorema. Tarkime, kad $n_j \geq 4$, aibė $L(\mathbb{P}, \underline{h}, \pi)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$ ir $\sigma_j > \frac{n_j-1}{2}$, $j = 1, \dots, r$, yra fiksuoti. Tuomet

$$P_{N, \underline{Q}, \underline{\sigma}, \underline{h}}(A) = \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leq k \leq N : \underline{\zeta}(\underline{\sigma} + ik\underline{h}; \underline{Q}) \in A \right\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^r),$$

kai $N \rightarrow \infty$, silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento $\underline{\zeta}(\underline{\sigma}, \underline{\omega}; \underline{Q})$ skirstinį.

Diskrečiosios teoremos įrodymas

Diskrečiosios teoremos įrodymui būtina pagalbinė lema ant toro $\Omega^r = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_r$. Apibrėžkime

$$Q_N^r(A) = \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leq k \leq N : \left((p^{-ikh_1} : p \in \mathbb{P}), \dots, (p^{-ikh_r} : p \in \mathbb{P}) \right) \in A \right\}, \quad A \in \mathcal{B}(\Omega^r).$$

1 lema. Tarkime, kad aibė $L(\mathbb{P}, \underline{h}, \pi)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$. Tuomet Q_N^r , kai $N \rightarrow \infty$, silpnai konverguoja į Haro matą $\underline{m}_H$.

Įrodymas. Pažymėkime $g_N(l_1, \dots, l_r)$, kur $l_j = (l_{jp} : l_{jp} \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{P})$, $j = 1, \dots, r$, mato Q_N^r Furje transformaciją, t. y.,

$$\begin{aligned}
g_N(\underline{l}_1, \dots, \underline{l}_r) &= \int_{\Omega^r} \left(\prod_{p \in \mathbb{P}}^* \omega_1^{l_{1p}}(p) \cdots \prod_{p \in \mathbb{P}}^* \omega_r^{l_{rp}}(p) \right) dQ_N^r = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \prod_{j=1}^r \prod_{p \in \mathbb{P}}^* p^{-ikh_j l_{jp}} \\
&= \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \exp \left(-ik \sum_{j=1}^r \sum_{p \in \mathbb{P}}^* h_j l_{jp} \log p \right), \tag{2}
\end{aligned}$$

čia simbolis $*$ žymi, kad tik baigtinis skaičius sveikųjų l_{jp} skiriasi nuo nulio. Akivaizdu, kad

$$g_N(\underline{0}, \dots, \underline{0}) = 1. \tag{3}$$

Tarkime, kad $(\underline{l}_1, \dots, \underline{l}_r) \neq (\underline{0}, \dots, \underline{0})$. Tuomet

$$A(\underline{h}; \underline{l}_1, \dots, \underline{l}_r) \stackrel{\text{def}}{=} \exp \left(-i \sum_{j=1}^r \sum_{p \in \mathbb{P}}^* h_j l_{jp} \log p \right) \neq 1, \tag{4}$$

jei bent vienas iš l_{jp} yra ne nulis. Iš tiesų, jeigu (4) nėra teisinga, tuomet

$$A(\underline{h}; \underline{l}_1, \dots, \underline{l}_r) = e^{2\pi i v}$$

su tam tikra $v \in \mathbb{Z}$ reikšme. Taigi, iš čia seka, kad

$$\sum_{j=1}^r \sum_{p \in \mathbb{P}}^* h_j l_{jp} \log p + 2\pi i v = 0$$

su tam tikra $v_1 \in \mathbb{Z}$, tačiau tai prieštarauja sąlygai, jog aibė $L(\mathbb{P}, \underline{h}, \pi)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Taigi, gauname prieštarą, kas rodo, jog (4) yra teisinga. Vadinas, iš (2) seka, kad

$$g_N(\underline{l}_1, \dots, \underline{l}_r) = \frac{1 - \left(A(\underline{h}; \underline{l}_1, \dots, \underline{l}_r) \right)^{N+1}}{(N+1) \left(1 - A(\underline{h}; \underline{l}_1, \dots, \underline{l}_r) \right)}.$$

Iš čia bei (3) gauname, kad

$$\lim_{N \rightarrow \infty} g_N(\underline{0}, \dots, \underline{0}) = \begin{cases} 1, & \text{jei } (\underline{l}_1, \dots, \underline{l}_r) = (\underline{0}, \dots, \underline{0}), \\ 0, & \text{jei } (\underline{l}_1, \dots, \underline{l}_r) \neq (\underline{0}, \dots, \underline{0}). \end{cases} \tag{5}$$

Pastebime, kad dešinioji (5) lygybės pusė yra mato $\underline{m}_H$ Furje transformacija, kas ir įrodo lemą.

Ši lema sudaro sąlygas kitos pagalbinės lemos, būtinos pagrindinei teoremai įrodyti, formulavimui. Apibrėžkime matus

$$P_{N,M,\underline{Q},\underline{\sigma}}^r(A) = \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leq k \leq N : \underline{\zeta}_M(\underline{\sigma} + ik\underline{h}; \underline{Q}) \in A \right\},$$

ir

$$P_{N,M,\underline{Q},\underline{\sigma},\underline{\omega}}^r(A) = \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leq k \leq N : \underline{\zeta}_M(\underline{\sigma} + ik\underline{h}, \underline{\omega}; \underline{Q}) \in A \right\},$$

kur $A \in \mathcal{B}(C^r)$, o $\underline{\zeta}_M(\underline{s}, \underline{\omega}; \underline{Q})$ yra konstruojama analogiškai kaip ir $\zeta_M(s, \omega; Q)$ jungtiniu tolydžiuoju atveju [17], funkcijas $\zeta_M(s_j, \omega; Q_j)$ keičiant funkcijomis $\zeta_M(s_j, \omega_j; Q_j)$, $j = 1, \dots, r$.

Tegul $u_M^r: \Omega^r \rightarrow \mathbb{C}^r$ apibrėžiamas funkcija

$$u_M^r(\underline{\omega}) = \underline{\zeta}_M(\underline{s}, \underline{\omega}; \underline{Q}),$$

o $V_{M, \underline{Q}, \underline{\sigma}}^r = \underline{m}_H(u_M^r)^{-1}$. Tuomet, remiantis 1 lema, galime formuluoti žemiau pateiktą diskretųjį tolydžiosios lemos iš [17] analogą. Šios lemos įrodymas yra analogiškas minėtos lemos iš [17] įrodymui, todėl nepateikiamas.

2 lema. Tarkime, kad aibė $L(\mathbb{P}, \underline{h}, \pi)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$, $\sigma_j > \frac{n_j-1}{2}$ yra fiksuota ir $\underline{\omega} \in \Omega^r$, $j = 1, \dots, r$. Tuomet $P_{N, M, \underline{Q}, \underline{\sigma}}^r$ ir $P_{N, M, \underline{Q}, \underline{\sigma}, \underline{\omega}}^r$, kai $N \rightarrow \infty$, silpnai konverguoja į $V_{M, \underline{Q}, \underline{\sigma}}^r$.

Kaip jau žymėjome ankstesniame skyriuje, tegul

$$\underline{\zeta}(\underline{s}, \underline{\omega}; \underline{Q}) = (\zeta(s_1, \omega_1; Q_1), \dots, \zeta(s_r, \omega_r; Q_r)).$$

3 lema. Tarkime, kad $\sigma_j > \frac{n_j-1}{2}$ yra fiksuoti, $j = 1, \dots, r$. Tuomet

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \rho\left(\underline{\zeta}(\underline{\sigma} + ik\underline{h}; \underline{Q}), \underline{\zeta}_M(\underline{\sigma} + ik\underline{h}; \underline{Q})\right) = 0$$

ir, beveik visiems $\underline{\omega} \in \Omega^r$,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \rho\left(\underline{\zeta}(\underline{\sigma} + ik\underline{h}, \underline{\omega}; \underline{Q}), \underline{\zeta}_M(\underline{\sigma} + ik\underline{h}, \underline{\omega}; \underline{Q})\right) = 0.$$

Įrodymas. Remiantis vienmačiu diskrečiuoju atveju, žr. 3 lemą iš [16], turime, kad

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N |\zeta(\sigma_j + ikh_j; Q) - \zeta_M(\sigma_j + ikh_j; Q)| = 0, \quad j = 1, \dots, r.$$

Iš čia seka pirmasis lemos tvirtinimas.

Analogiškai, remiantis 8 lema iš [16], gauname, kad Haro mato m_{jH} , apibrėžto $(\Omega_j, \mathcal{B}(\Omega_j))$, $j = 1, \dots, r$, atžvilgiu, beveik visiems $\omega_j \in \Omega_j$,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N |\zeta(\sigma_j + ikh_j, \omega_j; Q) - \zeta_M(\sigma_j + ikh_j, \omega_j; Q)| = 0. \quad (6)$$

Tarkime, kad pastaroji lygybė galioja tam tikrai aibei $\widehat{\Omega}_j \subset \Omega_j$, t. y. $m_{jH}(\widehat{\Omega}_j) = 1$, kiekvienam $j = 1, \dots, r$. Apibrėžkime torą $\widehat{\Omega}^r = \widehat{\Omega}_1 \times \dots \times \widehat{\Omega}_r$. Kadangi Haro matas $\underline{m}_H$ yra Haro matų m_{jH} sandauga, $j = 1, \dots, r$, tai

$$\underline{m}_H(\widehat{\Omega}^r) = m_{1j}(\widehat{\Omega}_1) \cdots m_{rj}(\widehat{\Omega}_r) = 1.$$

Iš čia ir (6) lygybės seka antrasis lemos tvirtinimas.

Kita lema skirta transformacijos aibėje Ω^r ergodiškumui įrodyti. Pažymėkime

$$\underline{a}_h = \left((p^{-ih_1}: p \in \mathbb{P}), \dots, (p^{-ih_r}: p \in \mathbb{P}) \right)$$

ir apibrėžkime toro Ω^r transformaciją

$$\Psi_h(\underline{\omega}) = \underline{a}_h \underline{\omega}, \quad \underline{\omega} \in \Omega^r,$$

kuri yra mačioji, matą išsauganti transformacija tikimybinėje erdvėje $(\Omega^r, \mathcal{B}(\Omega^r), \underline{m}_H)$. Kaip žinoma, aibė $A \in \mathcal{B}(\Omega^r)$ vadinama invariantine Ψ_h atžvilgiu aibe, jeigu aibės A ir $A_h = \Psi_h(A)$ viena nuo kitos skiriasi nulinio mato aibe, t. y. $\underline{m}_h(A \Delta A_h) = 0$. Transformacija Ψ_h vadinama ergodine, jeigu jos invariantinių aibių σ -kūnas yra sudarytas iš aibių, kurių matas $\underline{m}_H$ lygus 0 arba 1.

4 lema. Tarkime, kad aibė $L(\mathbb{P}, \underline{h}, \pi)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$. Tuomet transformacija Ψ_h yra ergodinė.

Įrodymas. Grupės Ω^r charakteriai χ apibrėžiami sandauga

$$\chi(\underline{\omega}) = \prod_{j=1}^r \prod_{p \in \mathbb{P}}^* \omega_j^{l_{jp}}(p).$$

Pažymėkime $\hat{g}$ funkcijos g , apibrėžtos Ω^r , Furjė transformaciją. Pirmiausia, tarkime, kad χ yra netrivialusis charakteris (t. y. su visais $\omega_j \in \Omega_j$, charakteris $\chi(\omega_j) \neq 1$). Taigi, jei χ yra netrivialusis charakteris, tuomet $(l_1, \dots, l_r) \neq (0, \dots, 0)$. Be to, tarkime, kad A yra invariantinė Ψ_h atžvilgiu aibė ir I_A – jos indikatorius. Tuomet

$$I_A(\underline{a}_h \underline{\omega}) = I_A(\underline{\omega}) \quad (7)$$

beveik visiems $\underline{\omega} \in \Omega^r$. Be to, atsižvelgiant į (4),

$$\chi(\underline{a}_h) \neq 1. \quad (8)$$

Pasinaudoję Haro mato $\underline{m}_H$ invariantiškumu ir (7) lygybe, gauname, kad

$$\begin{aligned} \widehat{I}_A(\chi) &= \int_{\Omega^r} \chi(\underline{\omega}) I_A(\underline{\omega}) d\underline{m}_H = \int_{\Omega^r} \chi(\underline{a}_h \underline{\omega}) I_A(\underline{a}_h \underline{\omega}) d\underline{m}_H \\ &= \chi(\underline{a}_h) \int_{\Omega^r} \chi(\underline{\omega}) I_A(\underline{\omega}) d\underline{m}_H = \chi(\underline{a}_h) \widehat{I}_A(\chi). \end{aligned} \quad (9)$$

Iš čia ir (8) seka, kad $\widehat{I}_A(\chi) = 0$.

Lieka išnagrinėti trivialaus charakterio atvejį. Tarkime, kad χ_0 yra trivialusis grupės Ω^r charakteris ir $\widehat{I}_A(\chi_0) = \tau$. Tuomet iš charakterių ortogonalumo ir (9) lygybės gauname, kad atitinkamam charakteriui χ ,

$$\widehat{I}_A(\chi) = \tau \int_{\Omega^r} \chi(\underline{\omega}) d\underline{m}_H = \widehat{I}(\chi)\tau = \widehat{\tau}(\chi).$$

Gera žinoma, kad funkciją visiškai apibrėžia jos Furjė transformacija. Taigi, $I_A(\underline{\omega}) = \tau$ su beveik visais $\underline{\omega} \in \Omega^r$. Kadangi $I_A(\underline{\omega})$ yra indikatorius, tai $\tau = 0$ arba 1 . Kitaip tariant, su beveik visais $\omega \in \Omega$ gauname, kad $\underline{m}_H(A) = 0$ arba $\underline{m}_H(A) = 1$. Vadinasi, $\Psi_{\underline{h}}$ yra ergodinė. Lema įrodyta.

Dabar nagrinėkime matą $V_{M,\underline{Q},\underline{\sigma}}^r$. Iš funkcijos u_M^r apibrėžimo ($u_M(\omega_j) = \zeta_M(\sigma_j, \omega_j; Q_j)$) turime, kad

$$\begin{aligned} & V_{M,\underline{Q},\underline{\sigma}}^r \left(\underbrace{\mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C}}_{j-1} \times A \times \mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C} \right) \\ &= \underline{m}_H\{\underline{\omega} \in \Omega^r: \zeta_M(\sigma_1, \omega_1; Q_1) \in \mathbb{C}, \dots, \zeta_M(\sigma_{j-1}, \omega_{j-1}; Q_{j-1}) \in \mathbb{C}, \\ & \quad \zeta_M(\sigma_j, \omega_j; Q_j) \in A, \zeta_M(\sigma_{j+1}, \omega_{j+1}; Q_{j+1}) \in \mathbb{C}, \dots, \zeta_M(\sigma_r, \omega_r; Q_r) \in \mathbb{C}\} \\ &= m_{1H}(\Omega_1) \dots m_{j-1,H}(\Omega_{j-1}) m_{jH}\{\omega_j \in \Omega_j: \zeta_M(\sigma_j, \omega_j; Q_j) \in A\} \\ & \quad \times m_{j+1,H}(\Omega_{j+1}) \dots m_{rH}(\Omega_r) \\ &= m_{jH}(u_{jM}^{-1}A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}). \end{aligned}$$

Vadinasi, marginalieji $V_{M,\underline{Q},\underline{\sigma}}^r$ matai V_{M,Q_j,σ_j}^r sutampa su vienetinmačiais matais, nagrinėtais [15] ir [16] (kai h yra toks, kad $\exp\{\frac{2\pi m}{h}\}$ yra iracionalusis skaičius). 2 teoremos [15] įrodyme buvo gauta, kad V_{M,Q_j,σ_j}^r , kai $M \rightarrow \infty$, silpnai konverguoja į tam tikrą matą, apibrėžtą $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$. Taigi, šeima $\{V_{M,Q_j,\sigma_j}^r: M \in \mathbb{N}\}$ yra reliatyviai kompaktiška, todėl pagal atvirkštinę Prochorovo teoremą [2] ji yra suspausta.

Taigi, pasinaudoję 3 lemos iš [17] įrodymu, galime formuluoti tvirtinimą tikimybinių matų šeimai $\{V_{M,\underline{Q},\underline{\sigma}}^r\}$.

5 lema. *Tarkime, kad aibė $L(\mathbb{P}, \underline{h}, \pi)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$ ir $\sigma_j > \frac{n_j-1}{2}$ yra fiksuoti, $j = 1, \dots, r$. Tuomet tikimybinių matų šeima $\{V_{M,\underline{Q},\underline{\sigma}}^r: M \in \mathbb{N}\}$ yra suspausta.*

Pagrindinės teoremos įrodymas. Tegul η_N yra atsitiktinis dydis, apibrėžtas tam tikroje tikimybiniame erdvėje, kurio skirstinys yra

$$\mu\{\eta_N = k\} = \frac{1}{N+1}, \quad k = 0, 1, \dots, N,$$

ir $\underline{X}_M^r = \underline{X}_M^r(\underline{\sigma}, \underline{Q})$ yra $\mathbb{C}^r$ -reikšmis atsitiktinis elementas su skirstiniu $V_{M,\underline{Q},\underline{\sigma}}^r$. Tuomet, pasinaudojus silpnojo tikimybinių matų konvergavimo ekvivalentu skirstiniams, 2 lemos tvirtinimas matui $P_{N,M,\underline{Q},\underline{\sigma}}^r$ gali būti išreikštas sąryšiu

$$\underline{X}_{N,M,\underline{h}}^r \xrightarrow{\mathcal{D}} \underline{X}_M^r, \quad N \rightarrow \infty, \quad (10)$$

kur $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ žymi konvergavimą į skirstinį, o

$$\underline{X}_{N,M,\underline{h}}^r = \underline{X}_{N,M,\underline{h}}^r(\underline{\sigma}, \underline{Q}) = \underline{\zeta}_M(\underline{\sigma} + i\eta_N \underline{h}; \underline{Q}).$$

Kadangi, remiantis 5 lema, šeima $\{V_{M,\underline{Q},\underline{\sigma}}^r\}$ yra suspausta, pagal klasikinę Prochorovo teoremą ji yra reliatyviai kompaktiška. Todėl egzistuoja tokia seka $\underline{X}_{M_k}^r = \underline{X}_{M_k}^r(\underline{\sigma}, \underline{Q})$, kad

$$\underline{X}_{M_k}^r \xrightarrow{\mathcal{D}} P_{\underline{Q},\underline{\sigma}}^r, \quad k \rightarrow \infty, \quad (11)$$

tam tikram tikimybiniam matui $P_{\underline{Q},\underline{\sigma}}^r$ iš $(\mathbb{C}^r, \mathcal{B}(\mathbb{C}^r))$. Dabar tegul

$$\underline{Y}_N^r = \underline{Y}_N^r(\underline{\sigma}, \underline{Q}) = \underline{\zeta}(\underline{\sigma} + i\eta_N \underline{h}; \underline{Q}).$$

Tuomet, atsižvelgus į 3 lemą, kiekvienam $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} & \lim_{M \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \mu\{\rho(\underline{Y}_N^r, \underline{X}_{N,M}^r) \geq \epsilon\} \\ & \leq \lim_{M \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(N+1)\epsilon} \sum_{k=0}^N \rho(\underline{\zeta}(\underline{\sigma} + ik\underline{h}; \underline{Q}), \underline{\zeta}_M(\underline{\sigma} + ik\underline{h}; \underline{Q})) \\ & = 0. \end{aligned}$$

Iš čia, (10) ir (11) sąryšių bei 4.2 teoremos iš [2] gauname, kad $P_{N,\underline{Q},\underline{\sigma},\underline{h}}^r$, kai $N \rightarrow \infty$, silpnai konverguoja į $P_{\underline{Q},\underline{\sigma}}^r$. Taigi,

$$\underline{X}_M^r \xrightarrow{\mathcal{D}} P_{\underline{Q},\underline{\sigma}}^r, \quad M \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Apibrėžkime dar vieną pagalbinį matą

$$P_{N,\underline{Q},\underline{\sigma},\underline{h},\underline{\omega}}^r(A) = \frac{1}{N+1} \# \{0 \leq k \leq N : \underline{\zeta}(\underline{\sigma} + ik\underline{h}, \underline{\omega}; \underline{Q}) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^r).$$

Tuomet, pasinaudoję 3 lema ir (12), gauname, kad $P_{N,\underline{Q},\underline{\sigma},\underline{h},\underline{\omega}}^r$, kai $N \rightarrow \infty$, taip pat silpnai konverguoja į $P_{\underline{Q},\underline{\sigma}}^r$.

Lieka identifikuoti ribinį matą $P_{\underline{Q},\underline{\sigma}}^r$. Naudosime silpnąjį tikimybinių matų konvergavimo ekvivalentą tolydumo aibių terminais. Tegul A yra fiksuota ribinio mato $P_{\underline{Q},\underline{\sigma}}^r$ tolydumo aibė, t. y.

$P_{\underline{Q},\underline{\sigma}}^r(\delta A) = 0$, čia δA žymi aibės A sieną. Tuomet

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_{N,\underline{Q},\underline{\sigma},\underline{h},\underline{\omega}}^r(A) = P_{\underline{Q},\underline{\sigma}}^r(A). \quad (13)$$

Erdvėje apibrėžkime atsitiktinį dydį

$$\xi^r(\underline{\omega}) = \begin{cases} 1, & \text{jei } \underline{\zeta}(\underline{\sigma}, \underline{\omega}; \underline{Q}) \in A, \\ 0, & \text{kitais atvejais.} \end{cases}$$

Tuomet turime, kad

$$\mathbb{E}\xi^r = \int_{\Omega^r} \xi^r(\underline{\omega}) d\underline{m}_H = \underline{m}_H \left\{ \underline{\omega} \in \Omega^r : \underline{\zeta}(\underline{\sigma}, \underline{\omega}; \underline{Q}) \in A \right\} \stackrel{\text{def}}{=} P_{\underline{\zeta}; \underline{Q}, \underline{\sigma}}^r(A). \quad (14)$$

Kadangi grupė $\Psi_{\underline{h}}$ yra ergodinė (žr. 4 lemą), tai ir procesas ξ^r yra ergodinis. Iš diskrečiosios Birchofo-Chintčino (Birkhoff-Khintchine) teoremos versijos [22] seka, kad beveik visiems $\underline{\omega} \in \Omega^r$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \xi^r(\Psi_{\underline{h}}^k(\underline{\omega})) = E\xi^r. \quad (15)$$

Tačiau iš ξ^r ir $\Psi_{\underline{h}}$ apibrėžimų turime, kad

$$\begin{aligned} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \xi^r(\Psi_{\underline{h}}^k(\underline{\omega})) &= \frac{1}{N+1} \# \{0 \leq k \leq N : \underline{\zeta}(\underline{\sigma} + ik\underline{h}, \underline{\omega}; \underline{Q}) \in A\} \\ &= P_{N, \underline{Q}, \underline{\sigma}, \underline{h}, \underline{\omega}}^r(A). \end{aligned}$$

Šis faktas ir (15) bei (14) įverčiai patvirtina, kad

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_{N, \underline{Q}, \underline{\sigma}, \underline{h}, \underline{\omega}}^r(A) = P_{\underline{\zeta}; \underline{Q}, \underline{\sigma}}^r(A).$$

Taigi, atsižvelgus į (13) gauname, jog $P_{\underline{Q}, \underline{\sigma}}^r(A) = P_{\underline{\zeta}; \underline{Q}, \underline{\sigma}}^r(A)$ su visomis mato $P_{\underline{Q}, \underline{\sigma}}^r$ tolydumo aibėmis A . Kadangi šios aibės sudaro determinuojančią klasę, gauname, kad visoms aibėms $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^r)$,

$$P_{\underline{Q}, \underline{\sigma}}^r(A) = P_{\underline{\zeta}; \underline{Q}, \underline{\sigma}}^r(A).$$

Teorema yra įrodyta.

Išvados

Straipsnyje pateikiamas diskrečiaus tipo jungtinis tikimybinis rezultatas, kad fiksuotiems $\sigma_j > \frac{n_j-1}{2}$, $j = 1, \dots, r$, matas

$$\frac{1}{N+1} \# \{0 \leq k \leq N : \underline{\zeta}(\underline{\sigma} + ik\underline{h}, \underline{\omega}; \underline{Q}) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^r),$$

kai $N \rightarrow \infty$, silpnai konverguoja į tam tikro atsitiktinio elemento skirstinį.

Akcentuotina tai, kad priešingai nei tolydžiuoju atveju, ribinio mato išraiškai nurodyti būtinas aibės $L(\mathbb{P}, \underline{h}, \pi) = \{(h_1 \log p : p \in \mathbb{P}), \dots, (h_r \log p : p \in \mathbb{P}), 2\pi\}$ tiesinis nepriklausomumas virš $\mathbb{Q}$. Be šio reikalavimo galima įrodyti tik ribinio mato egzistavimą.

Dubicko ir Laurinčiko straipsnyje [4] įrodyta (1.5 teiginys), kad visiems vektoriams $(h_1, \dots, h_r) \in \mathbb{R}_{>0}^r$, išskyrus aibes, kurių Lebego matas lygus nuliui, $L(\mathbb{P}, h_1, \dots, h_r; \pi)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių aibės $\mathbb{Q}$. Kita vertus, yra ganėtinai sunku rasti konkretų $h_1, \dots, h_r$ rinkinį, kad $L(\mathbb{P}, h_1, \dots, h_r; \pi)$ būtų

tiesiškai nepriklausoma. Nesterenko įrodė [14], kad aibė $L(\mathbb{P}, h_1, \dots, h_r; \pi)$, kai $h_1 = 1$, $h_2 = \sqrt{2}, \dots$, $h_j = \sqrt{p_{j-1}}, \dots$, $h_r = \sqrt{p_{r-1}}$, kur p_j žymi j -ąjį pirminį skaičių, yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$.

Literatūra

1. Bateman, P. T., Grosswald, E. (1964). On Epstein's zeta function, *Acta Arithmetica*, 9(4), 365–373.
2. Billingsley, P. (1968). *Convergence of Probability Measures*. Wiley, New York.
3. Chen, H.-B., Li, X.-Z. (2005). Casimir energies on a twisted two-torus. *Chinese Physics Letters*, 18(9), 1163–1166. <https://doi.org/10.1088/0256-307X/18/9/303>
4. Dubickas, A., Laurinčikas, A. (2015). Joint discrete universality of Dirichlet L-functions. *Archiv der Mathematik*, 104(1), 25–35. <https://doi.org/10.1007/s00013-014-0721-6>
5. Elizalde, E. (1995). *Ten Physical Applications of Spectral Zeta Functions*. Berlin, New York: Springer.
6. Elizalde, E., Romeo, A. (1992). Epstein-function analysis of the Casimir effect at finite temperature for massive fields. *International Journal of Modern Physics A*, 7(229), 7365–7399. <https://doi.org/10.1142/S0217751X92003379>
7. Epstein, P. (1903). Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen, *Mathematische Annalen*, 56, 615–644. <https://doi.org/10.1007/BF01444309>
8. Fomenko, O. M. (2002). Order of the Epstein zeta-function in the critical strip. *Journal of Mathematical Sciences*, 110(6), 3150–3163. <https://doi.org/10.1023/A:1015432614102>
9. Garunkštis, A., Konratavičius, T., Putrius, J. (2025). Sum of the Epstein zeta function over the Riemann zeta function zeros. *Lithuanian Mathematical Journal*, 65, 240–253. <https://doi.org/10.1007/s10986-025-09678-y>
10. Glasser, M. L., Zucker, I. J. (1980). Lattice Sums in Theoretical Chemistry. In *Theoretical Chemistry: Advances and Perspectives*, 5. (Eds. H. Eyring, D. Henderson). London, Toronto, Sydney, San Francisco: Academic Press. Pp. 67–139.
11. Hecke, E. (1937). Über Modulfunctionen und die Dirichlet'schen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung. I. *Mathematische Annalen*, 114, 1–28. <https://doi.org/10.1007/BF01594160>
12. Iwaniec, H. (1997). *Topics in Classical Automorphic Forms*: Graduate Studies in Mathematics, 17. American Mathematical Society.
13. Jiang, T. (1996). Epstein zeta function and heavy-quark potential at finite temperature from Nambu-Goto string. *Physics Letters*, 371(3/4), 298–302. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(96\)00004-4](https://doi.org/10.1016/0370-2693(96)00004-4)
14. Korsakienė, D., Laurinčikas, A., Šiaučiušas, D. (2015). Joint discrete universality of Dirichlet L-functions. II. *Chebyshevskii Sbornik*, 16(1), 205–218.
15. Laurinčikas, A., Macaitienė, R. (2018). A Bohr-Jessen type theorem for the Epstein zeta-function. *Results in Mathematics*, 73. <https://doi.org/10.1007/s00025-018-0909-3>
16. Laurinčikas, A., Macaitienė, R. (2020). A Bohr-Jessen type theorem for the Epstein zeta-function. II. *Results in Mathematics*, 75. <https://doi.org/10.1007/s00025-019-1151-3>
17. Laurinčikas, A., Macaitienė, R. (2021). A Bohr-Jessen type theorem for the Epstein zeta-function. III. *Results in Mathematics*, 76. <https://doi.org/10.1007/s00025-021-01422-5>
18. Nakamura, T., Pankowski, L. (2013). On zeros and c-values of Epstein zeta-functions, *Siauliai Mathematical Seminar*, 8(16), 181–195. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1501.02045>
19. Selberg, A., Chowla, S. (1967). On Epstein's Zeta function. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 227, 86–110. <http://eudml.org/doc/150803>
20. Shiryaev, A. N. (1996). *Probability*. (Graduate Texts in Mathematics, 95). 2nd ed. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.
21. Steuding, J. (2005). On the zero-distribution of Epstein zeta-functions. *Mathematische Annalen*, 333, 689–697. <https://doi.org/10.1007/s00208-005-0695-6>
22. Taylor, P. R. (1940). The Functional Equation for Epstein's Zeta-Function. *Quarterly Journal of Mathematics*, 1 (11), 177–182. <https://doi.org/10.1093/qmath/os-11.1.177>