Liet. matem. rink., T. 41, spec. nr., 395–397

Tikimybių teorijos dėstymo klausimu

Eugenijus STANKUS (VU)
el. paštas: eugenijus.stankus@mif.vu.lt

Dėstant tikimybių teoriją vidurinėje mokykloje ar gimnazijoje iškyla daugybė problemų apibrėžiant tikimybių teorijos sąvokas, kurios, lyginant jas su algebros ir geometrijos sąvokomis, yra gana abstrakčios. Todėl dažnai laviruojama tarp griežtų apibrėžimų formulavimo ir sąvokų aiškinimo pavyzdžiais. Priklausomai nuo mokytojo darbo stiliaus, nuo mokinių sugebėjimų nukrypstama ir į vieną, ir kitą pusę.

Čia pagvildensime vienas iš svarbiausių tikimybių teorijos sąvokų – įvykių priklausomumą ir nepriklausomumą. Tradiciškai (žr. [1]) pirmiau pateikiama įvykių nepriklausomumo sąvoka (kaip lengviau suvokiama intuityviai), o po to apibrėžiami priklausomi įvykiai. Pastebima, kad kai kada įvykių sankirtos tikimybė yra lygi šių įvykių tikimybių sandaugai. Tuomet du įvykiai A ir B, tenkinantys lygybę

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \tag{1}$$

pavadinami nepriklausomais. Žinoma, šis apibrėžimas sutampa su įprastu gyvenimiško nepriklausomumo įvaizdžiu, kaip rašoma [1]. Ir vis dėlto, ar šis apibrėžimas jau toks natūralus, kodėl turi būti tenkinama (1) lygybė, o ne kokia nors kitokia?

Šiame straipsnelyje siūlome minėtąsias sąvokas įvesti kitokia tvarka – pirmiau apibrėžti sąlyginę tikimybę ir priklausomus įvykius, o po to – nepriklausomus. Tuomet faktas, kad nepriklausomiems įvykiams galioja (1) lygybė išplauktų tiesiog iš tikimybių daugybos teoremos.

Pateiksime išsamesnius samprotavimus. Kalbant apie sąlyginės tikimybės apibrėžimą

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0, \tag{2}$$

formalus jo pateikimas, aišku, nesuformuotų aiškaus šios sąvokos supratimo. Todėl geriausia prie jo prieiti analizuojant pavyzdžius, kaip ir daroma [1].

Tikimybių daugybos teorema yra paprasta (2) formulės išvada:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A). \tag{3}$$

Dabar apibrėšime įvykių nepriklausomumą tokiu būdu.

1 apibrėžimas. Įvykis B priklauso nuo įvykio A, jeigu

$$P(B|A) \neq P(B|\overline{A}), \tag{4}$$

t.y., jeigu įvykio B sąlyginė tikimybė priklauso nuo to ar įvyko, ar ne įvykis A.

Tuomet nesunkiai įrodomi tokie teiginiai.

1 teorema. *Jei* $P(A|B) = P(A|\overline{B})$, *tai*

$$P(A|B) = P(A|\overline{B}) = P(A).$$

Įrodymas. Panagrinėkime įvykio $A \cap \overline{B}$ tikimybę:

$$\begin{aligned} P(A \cap \overline{B}) &= P(\overline{B}) \cdot P(A|\overline{B}) = P(\overline{B}) \cdot P(A|B) \\ &= (1 - P(B)) \cdot P(A|B) = P(A|B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

Iš čia gauname, kad

$$P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) = P(A|B),$$

t.y.,

$$P(A) = P(A|B).$$

2 teorema. *Jei* $P(B|A) \neq P(B|\overline{A})$, *tai ir*

$$P(A|B) \neq P(A|\overline{B}).$$

Įrodymas. Tarus priešingai, pagal 1 teoremą turėsime:

$$P(A|B) = P(A|\overline{B}) = P(A).$$

Tačiau tuomet

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)} = P(B)$$

ir

$$\begin{aligned} P(B|\overline{A}) &= \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(\overline{A})} \\ &= \frac{P(B) - P(B) \cdot P(A|B)}{P(\overline{A})} = \frac{P(B) \cdot (1 - P(A))}{P(\overline{A})} = P(B). \end{aligned}$$

Gavome prieštarą teoremos sąlygai, taigi teoremos tvirtinimas teisingas.

Vadinasi, jei įvykis B priklauso nuo A, tai ir A priklauso nuo B, t.y., įvykiai A ir B yra priklausomi.

Po šitokių samprotavimų labai natūralus toks įvykių nepriklausomumo apibrėžimas.

2 apibrėžimas. Įvykiai A ir B vadinami nepriklausomais, jeigu

$$P(A|B) = P(A|\overline{B}). \tag{5}$$

Iš ankstesnių samprotavimų išplaukia, kad nepriklausomiems įvykiams A ir B galioja lygybės

$$P(A|B) = P(A|\overline{B}) = P(A),$$

$$P(B|A) = P(B|\overline{A}) = P(B),$$

o tuomet ir (1) lygybė – įvykių neprilausomumo apibrėžimo ekvivalentas.

Literatūra

[1] A. Plikusas, *Kombinatorikos, tikimybių teorijos ir statistikos pradmenys, mokomoji knyga XI–XII klasei,* Kaunas, Šviesa (2000).

On teaching the probability theory

E. Stankus

The teaching problems of independence of events are considered. In the paper the another that traditional method of teaching of independence of events is proposed.