Liet. matem. rink., T. 41, spec. nr., 125–127

Vienos modifikuotosios L-eilutės analiziškumo srities korekcija

Eugenijus STANKUS (VU)
el. paštas: eugenijus.stankus@maf.vu.lt

Apibendrintaisiais pirminiais skaičiais vadinama neaprėžtai didėjanti realiųjų skaičų seka $1, q_1, q_2, \ldots$, tenkinanti sąlygą

$$1 < q_1 \leqslant q_2 \leqslant \ldots.$$

Multiplikacinės pusgrupės $\mathcal{B}$, generuotos apibendrintaisiais pirminiais, elementai vadinami Berlingo apibendrintaisiais skaičiais [1]:

$$\mathcal{B} = \{1 = n_1 < n_2 \leqslant n_2 \leqslant \ldots\}.$$

Kai apibendrintieji pirminiai yra racionalieji sveikieji skaičiai, gali būti formuluojami uždaviniai apie apibendrintųjų sveikųjų skaičių pasiskirstymą aritmetinėse progresijose. Čia taikant analizinius metodus susiduriame su įvairiomis L-funkcijomis, kurių analiziškumo ir augimo greičių tyrimai ir šiaip įdomūs. Šiame darbe apžvelgiami tokių L-funkcijų analiziškumo tyrimai, o taip pat pakoreguojamas vieno ankstesnio darbo šia tema rezultatas.

Jei apibendrintieji pirminiai yra pavidalo vp (čia p – racionalieji pirminiai, o v – natūralusis skaičius), tai atitinkamos L-funkcijos

$$L(s; v, \chi) = \prod_p \left(1 - \chi(vp)(vp)^{-s}\right)^{-1} \tag{1}$$

analiziškai pratęsiamos į pusplokštumę $\sigma > 0$ su „iškarpytomis" atkarpomis pagal Dirichlė L-funkcijų $L(s, \chi)$ ir jų laipsnių nulius. Pasinaudojus šiuo faktu ir tam tikrais $L(s; v, \chi)$ įverčiais [2] išvesta apibendrintųjų sveikųjų, priklausančių primityviajai progresijai, skaičiaus asimptotinė formulė.

Dar įdomesni apibendrintųjų pirminių sekų $\{p-1\}$ ir $\{p+1\}$, kai p perbėga racionaliuosius pirminius, atvejai. Pirmoji apibendrintųjų skaičių sistema tiesiogiai susieta su Oilerio funkcija $\varphi(n)$, o antroji – su daliklių skaičiumi $\sigma(n)$. Kalbant apie šių funkcijų pasiskirstymą aritmetinėse progresijose, vėlgi galima nagrinėti dvi problemas:

1) kaip kinta funkcijų $\varphi(n)$ ir $\sigma(n)$ reikšmės, kai n priklauso progresijai, t.y., surasti sumų

$$\sum_{\substack{\varphi(n) \leqslant x \\ n \equiv l \pmod k}} 1 \quad \text{ir} \quad \sum_{\substack{\sigma(n) \leqslant x \\ n \equiv l \pmod k}} 1 \tag{2}$$

asimptotines formules;

2) tirti sumų

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ \varphi(n)\equiv l(\mathrm{mod}\,k)}} 1 \quad \text{ir} \quad \sum_{\substack{n\leqslant x\\ \sigma(n)\equiv l(\mathrm{mod}\,k)}} 1 \tag{3}$$

asimptotinį elgesį.

Pirmoji problema taikant analizinius metodus susisieja su L-eilučių

$$\Phi(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\varphi(n)^{-s} \quad \text{ir} \quad \Sigma(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\sigma(n)^{-s}, \tag{4}$$

o antroji – su L-eilučių (jas patogiau užrašyti Oilerio sandaugomis)

$$\tilde{\Phi}(s,\chi)=\prod_{p>2}\left(1-\chi(p-1)(p-1)^{-s}\right)^{-1} \tag{5}$$

ir

$$\tilde{\Sigma}(s,\chi)=\prod_{p>2}\left(1-\chi(p+1)(p+1)^{-s}\right)^{-1} \tag{6}$$

($s=\sigma+it$, $\sigma>1$) nagrinėjimu. Funkcijos $\Phi(s,\chi)$ ir $\Sigma(s,\chi)$ palyginus lengvai pratęsiamos į pusplokštumę $\sigma>0$. Tačiau sandaugos $\tilde{\Phi}(s,\chi)$ ir $\tilde{\Sigma}(s,\chi)$ dėl postūmių $p\pm 1$ šiuo požiūriu yra žymiai sudėtingesnės, todėl ir (3) sumų asimptotinės formulės nėra žinomos. Funkcijų $\tilde{\Phi}(s,\chi)$ ir $\tilde{\Sigma}(s,\chi)$ analizinis pratęsimas susiveda į eilutės

$$\sum_{p}\left(\chi(p\mp 1)-\chi(p)\right)p^{-s}$$

nagrinėjimą. Žinoma, antrajam šios eilutės dėmeniui galioja lygybė

$$\sum_{p}\chi(p)p^{-s}=\ln L(s,\chi)-\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\chi(p^m)}{mp^{ms}},$$

kuria ir gali būti pratęstas šios funkcijos analiziškumas į sritį $\sigma>\frac{1}{2}$, kai $L(s,\chi)\neq 0$ ir $L(s,\chi)\neq\infty$ (imant pagrindinę logaritmo šaką). Eilutės

$$\sum_{p}\chi(p\mp 1)p^{-s} \tag{7}$$

konvergavimo sritis gali būti nustatyta nagrinėjant jos dalinę sumą

$$S(N)=\sum_{p\leqslant N}\chi(p\mp 1)p^{-s}.$$

Pritaikę jai dalinį integravimą ir pasinaudoję I.M. Vinogradovo įverčiu [4]

$$\sum_{p\leqslant N}\chi(p+k) << Nq^{\epsilon}\left(q^{\frac{1}{4}}N^{-\frac{1}{3}}+N^{-0,1}\right),$$

(čia χ – nepagrindinis charakteris mod$q$, q – pakankamai didelis pirminis skaičius, k – sveikasis skaičius, $(k,q)=1$), gausime, jog

$$S(N) << N^{0,9-\sigma}.$$

Vadinasi, (7) eilutė tolygiai konverguoja kiekviename pusplokštumės $\sigma > 0,9$ su išpjautomis atkarpomis $\{s:\ s=\sigma+it,\ 0,9<\sigma\leqslant 1,\ t=0\}$ ir $\{s:\ s=\sigma+i\gamma,\ 0,9<\sigma\leqslant 1\}$, kai $L(\beta+i\gamma,\chi)=0$ su $\beta>0,9$, kompakte.

Taigi turime pakoreguoti [3] darbo apie funkcijų $\tilde{\Phi}(s,\chi)$ ir $\tilde{\Sigma}(s,\chi)$ analiziškumo sritį rezultatą: iš pusplokštumės $\sigma>0,9$ reikia išpjauti atkarpas $\{s:\ s=\sigma+it,\ 0,9<\sigma\leqslant 1,\ t=0\}$ ir $\{s:\ s=\sigma+i\gamma,\ 0,9<\sigma\leqslant 1,\ L(\beta+i\gamma)=0,\ \beta>0,9\}$.

Literatūra

[1] A. Beurling, Analyse de la loi asymptotic de la distribution des nombres premièrs généralisés I, *Acta Math.*, **68**, 225–291 (1937).

[2] E. Stankus, Analytic continuation of modified L-function, *Lith. Math. J.*, **24**, 176–181 (1984).

[3] E. Stankus, The generalized numbers and modified L-functions, *Lietuvos Matematikų Draugijos Darbai*, **3**, spec. „Liet. matem. rink.“ priedas, Vilnius, Technika, 100–103 (1999).

[4] И.М. Виноградов, Оценка одной суммы, распространенной на простые числа арифметической прогрессии, *Изв. АН СССР, Сер. Матем.* **30**, 481–496 (1966).

The correction of analyticity domain of some modified L-series

E. Stankus

The reseaches in analyticity of the modified L-functions are surveyed in the paper. The correction of earlier result is made.