Lietuvos matematikos rinkinys. LMD darbai
52 tomas, 2011, 262–267

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

Poligonų ir aplinkinių miškų medžių pažeidimų kulkomis ir skeveldromis tyrimas

Gintautas Misevičius[1], **Stasys Puškorius**[2], **Valentina Vilutienė**[3]

[1] *Vilniaus Universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas*
Naugarduko 24, LT-03225 Vilnius
[2] *Mykolo Riomerio universitetas, Politikos ir vadybos fakultetas*
Valakupių 5, LT-10101, Vilnius
[3] *Generolo Jono Žemaičio karo akademija, Inžinierinės vadybos katedra*
Šilo 5A, LT-10322 Vilnius
E. paštas: gintautas.misevicius@mif.vu.lt; spusk@mruni.lt; valentina.vilutiene@mil.lt

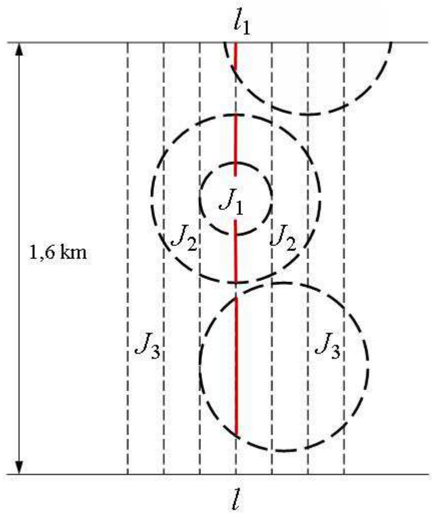
Santrauka. Poligonuose dalis šovinių ir sprogmenų skeveldrų perskrenda apsauginius pylimus, kelia grėsmę saugumui, bei gadina ir žaloja vertingus išteklius. Darbe matematiniais metodais atlikta Kairių poligono aplinkinių miškų medžių pažeidimų kulkomis ir skeveldromis analizė. Pateiktos matematinės formulės kulkos nukrypimo nuotoliui nuo taikymo centro tikimybėms apskaičiuoti, saugaus pylimo aukščiui nustatyti, zonų, kuriose kulkų skridimo greitis gali būti pavojingas, pasiskirstymo modeliavime.

Raktiniai žodžiai: sklaidos elipsė, Puasono skirstinys, Veibulo skirstinys, tankio funkcija, tikimybė.

Įvadas

Karinės veiklos daroma įtaka aplinkai yra viena aktualiausių dabarties aplinkosauginių problemų. Lietuvos aplinkosaugininkų atlikti darbai – buvo tiriamos vertingos ir saugomos teritorijos, analizuojamai kraštovaizdžio antropogeniniai pažeidimai [4], eksperimentiškai nustatyta neigiama sprogdinimų įtaka dirvožemio kokybei [2], dirvožemio ir gruntinio vandens tarša naftos produktais [7], dirvožemio tarša sunkiaisiais metalais [8], kuriami karinių poligonų aplinkosauginiai vadybos planai [1, 6].

Dažniausiai poligonai būna įsikūrę unikaliose aplinkosauginiu požiūriu vietose. Kairių poligonas – vienintelis Lietuvos kariuomenės poligonas, kuriame gali būti vykdomi trijų karinių pajėgų elementų – sausumos, oro ir jūrų – mokymai. Todėl labai svarbu žinoti ir valdyti šios teritorijos aplinkosaugines problemas. Poligonuose dalis šovinių ir sprogmenų skeveldrų, net ir tose vietovėse, kur yra naudojami apsauginiai pylimai, juos perskrenda, kelia grėsmę saugumui bei įsmigdami į aplinkinių miškų medžius gadina ir žaloja vertingus išteklius. Darbų, skirtų poligonų miškų medžių pažeidimų situacijai spręsti, daromo poveikio miško medžiams mokslinėje literatūroje stokoja. Šis darbas yra bandymas matematiniais metodais atlikti poligono aplinkinių miškų medžių pažeidimo kulkomis ir skeveldromis analizę, apskaičiuoti kulkos įstrigimo medžiuose tikimybę, neįrengus pylimo, pateiktos matematinės formulės, taikytinos kulkos nukrypimo nuotoliui nuo taikymo taško tikimybėms apskaičiuoti, saugaus pylimo aukščiui nustatyti ir pavojingų zonų nustatymui.



1 pav. Medžių išsidėstymo išilgai kulkų skriejimo linijos schema.

1 Kairių poligono aplinkinių miškų medžių pažeidimų kulkomis ir skeveldromis analizė

Šaudant iš ginklo, kiekviena kulka turi savo trajektoriją ir kritimo tašką.

Medžių išsidėstymas miške šalia Kairių poligono sudaro Puasono lauką su intensyvumu λ (pastoviu). Tegul X – fiksuotas miško taškas. Pažymėsime: R_1 – atstumas iki artimiausio medžio, R_n – atstumas ik n-jo pagal artumą medžio. Užrašysime šių atsitiktinių dydžių pasiskirstymo funkcijas $F_1(r), \ldots, F_n(r)$:

$$F_1(r) = 1 - \mathrm{e}^{-\pi r^2 \lambda}, \quad (r > 0),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$F_n(r) = P(R_n < r) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\pi r^2 \lambda)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\pi r^2 \lambda}.$$

Teorinis vidurkis: $MR_1 = \frac{1}{2\lambda\pi}$; dispersija: $DR_1 = \frac{(4-\pi)}{4\pi\lambda}$.

Darome prielaidą, kad šaudykloje nėra apsauginio pylimo. Poligono miško juostos plotis yra 1,6 km. Apskaičiuosime tikimybę, kad tam tikra kryptimi kulka savo kelyje kirs medžius, kurių suminis storis mažesnis negu 0,45 m. Laikysime, kad vidutinis medžio diametras kulkos skrydžio aukštyje – 0,3 m. Jei kulkos skrydžio tiesė ll_1, tuomet sudarome 3 atstumo nuo skrydžio linijos juostas. Jose esantys medžių kamienų centrai nutolę nuo tiesės ll_1 taip: juostoje J_1 – iki 5 cm, juostoje J_2 – nuo 5 iki 10 cm, J_3 – nuo 10 iki 15 cm (1 pav.). Juostų plotai lygūs 1,6 aro. Toliau laikysime, kad vidutinis medžių skaičius, tenkantis vienam arui yra $\lambda = 6,25$.

Yra tikslinga laikyti, kad medžiai miško plotuose pasiskirstę pagal Puasono dėsnį, tuomet medžių skaičiaus m, patenkančių į masyvą, kurio plotas s, tikimybė lygi $P_m = \frac{a^m \mathrm{e}^{-a}}{m!}$, kur $a = s\lambda$, tai tikimybės patekti į juostas J_1, J_2, J_3 yra vienodai lygios $P_m = 10^{10} \frac{\mathrm{e}^{-10}}{m!}$. Medžiai, kurių kamieno centras patenka į juostą J_1, uždengia vidutiniškai 0,29 m tiesės ilgio, į juostą J_2 – 0,25 m tiesės ilgio, į juostą J_3 – 0,11 m tiesės ilgio. Tegul k, l, m – medžių skaičiai, kurių kamieno centras patenka į juostas J_1, J_2, J_3 atitinkamai. Tuomet kulka praskries linija ll_1, jei galios nelygybė $0{,}29k + 0{,}25k + 0{,}11m < 4,5$. Pagal funkcijų reikšmių lentelę [5] suradę Puasono dydžio reikšmes, kai $\lambda = 10$ ir atlikę skaičiavimus randame, kad ši tikimybė neviršija 0,06, tuomet tikimybė, kad susidaręs medžių sluoksnis bus „storesnis" negu 4,5 m yra 0,94.

Kairių poligono šaudyklos siauriausia miško vieta tesiekia 100 m. Vidutinis medžių kiekis viename miško ploto are yra 9. Žinant, kad atsimušdama į medžius kulka keičia kryptį, jos kelias laikomas pailgėjusiu 1,4 karto [3], tad kulkos kelią per miško masyvą laikysime lygiu 139 m.

Apskaičiuosime tikimybę, kad kulka praskries linija ll_1. Jei vidutinis medžio diametras 60 cm, $r = 30$ cm, todėl kulkos skrydžiui turės įtakos medžiai, kurių kamieno centras nutolęs nuo linijos ll_1 ne daugiau kaip 30 cm.

Rasime Puasono parametrą: $a = 2{,}502$.

Pagal Puasono tikimybių reikšmių lentelę [5] rasime tikimybių reikšmes. Kai medžio kamieno centras patenka į juostą J_1 arba J_2 medžio dalys kulkos kelyje yra atitinkamai 0,592 m ir 0,52 m ilgio, t. y. minėtos medžio dalys sulaiko kulką. Kai kamieno centras yra juostoje J_3, tai kamienas užstoja 0,332 m kulkos kelio. Pagal Puasono lentelės duomenis rasime, kad kulka pralėks su tikimybe 0,0019. Tad kulka įstrigs medžiuose su tikimybe 0,9981, kuomet nėra apsauginio pylimo. Praktiškai, kulka skrosdama medžius keis skrydžio kryptį ir nutols nuo tiesios linijos, tuomet tikimybė perskrosti miško masyvą gali tik sumažėti.

2 Zonų, kuriose iššautų kulkų skridimo greitis gali būti pavojingas žmonėms, pasiskirstymo modeliavimas

Kulkos judėjimą veikia oro pasipriešimmo jėga, proporcinga greičio kvadratui. Tuomet laikas T, per kurį kulka nuskrieja atstumą R, randamas iš lygties $x(T, k) = R$, čia k – pasipriešinimo koeficientas. Kai R fiksuotas, T yra k funkcija: $T = T(k)$. Kai $k = 0$, tai $T = T_0 = R/v_0$). Diferencijuodami pagal k, gauname:

$$\frac{\partial x}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial k} + \frac{\partial x}{\partial k} = 0.$$

Pažymėję $-\left(\frac{dT}{dk}\right)_{k=0} = \delta T$, turėsime išraišką: $\delta T = -\frac{\delta x}{\dot{x}} = \frac{-\frac{1}{2}v_0^2T_0^2}{v_0} = \frac{R^2}{2v_0}$ ir, tuomet, T tiesinis artinys bus $T = \frac{R}{v_0} + \frac{R^2}{2v_0}k$.

Rasime greičio formulę, atsižvelgdami į oro pasipriešinimą. Kulkos greitis tenkina lygtį:

$$\ddot{X} = -k\dot{x}^2. \tag{1}$$

Sprendinys yra t ir k funkcija, t. y. $x = x(t; k)$, artutinio sprendinio pavidalas:

$$x = x(t,0) + \left[\frac{\partial x(t,k)}{\partial k}\right]_{k=0} \cdot k. \tag{2}$$

Diferencijuodami (1) lygtį pagal k, turėsime:

$$\frac{\partial}{\partial k}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}x(t,k)\right] = -\left[\frac{\partial}{\partial t}x(t,k)\right]^2 - 2k\left[\frac{\partial}{\partial t}x(t,k)\right]\cdot\left[\frac{\partial^2}{\partial k\partial t}x(t,k)\right]. \tag{3}$$

Pažymėję $\delta x = \left[\frac{\partial x(t,k)}{\partial k}\right]_{k=0}$, gausime: $\delta \ddot{x} = -[\dot{x}(t,0)]^2$.

Žinant, kad $\dot{x}(t,0) = v_0$,

$$\delta \ddot{x} = -v_0^2. \tag{4}$$

Kai $t = 0$, turime $x(0,k) = \dot{x}(0,k) = 0$, todėl, kai $t = 0$, $\delta x = \delta \dot{x} = 0$, ir sprendinys yra $\delta x = -\frac{1}{2}v_0^2 t_0^2$, ir (2) lygties sprendinys bus $x = v_0 t - \frac{1}{2}v_0^2 t^2 k$. Tikslus (1) lygties sprendinys $x = \frac{1}{k}\log(1 + kv_0 t) = v_0 t - \frac{1}{2}v_0^2 t^2 + \cdots$, kur, esant $|kv_0 t| < 1$, pasinaudojome Teiloro eilutės skleidiniu. Rasime šovinio atstumo nuo taikymo centro pasiskirstymo funkciją.

1 atvejis. $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, kur σ – vidutinis kvadratinis nuokrypis.

Tankio funkcija: $f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\{-\frac{(x-a)^2+(y-b)^2}{2\sigma^2}\}$.

Pažymėsime $\zeta = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, tai nukrypimo nuo taikinio centro pasiskirstymo funkcija bus Veibulo skirstinys:

$$\begin{aligned} F_\zeta(x) =& P(\zeta < x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\iint_{(u-v)^2+(v-b)^2<x^2} \mathrm{e}^{-\frac{(u-a)^2+(v-b)^2}{2\sigma^2}}\,du\,dv \\ =& \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^x r\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\,dr = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}. \end{aligned}$$

2. Bendras atvejis. $\sigma_x \neq \sigma_y$.

Nukrypimo nuo taikinio centro pasiskirstymo funkcija bus:

$$F_\zeta(x) = P(\eta < x) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\iint_{(u-v)^2+(v-b)^2<x^2} \mathrm{e}^{-(\frac{(u-a)^2}{2\sigma_x^2}+\frac{(v-b)^2}{2\sigma_y^2})}\,du\,dv.$$

Integralui apskaičiuoti naudojamas keitinys $u - a = \sigma_x r\cos\theta$, $v - b = \sigma_y \sin\theta$, $\sigma_x^2 r^2\cos^2\theta + \sigma_y^2 r^2 \sin^2\theta < x^2$. Funkcija įgaus išraišką:

$$\begin{aligned} F_\zeta(x) =& \frac{1}{2\pi}\iint_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{x}{\sqrt{\sigma_x^2\cos^2\theta+\sigma_y^2\sin^2\theta}}} r\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\,dr \\ =& -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\frac{x}{\sqrt{\sigma_x^2\cos^2\theta+\sigma_y^2\sin^2\theta}}}\,d\theta. \end{aligned} \tag{5}$$

3. Rasime kulkos kritimo nuotolį nuo koordinačių pradžios. ζ *ir* η *nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, pasiskirstę pagal* $n(a,\sigma)$ *ir* $v(b,\sigma)$.

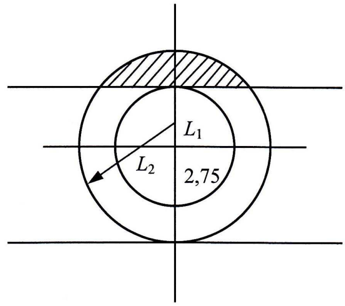
Tuomet atstumo $r = \sqrt{\zeta^2 + \eta^2}$ pasiskirstymo funkcija:

$$\begin{aligned} F_r(x) =& \frac{1}{2\pi\sigma^2}\iint \mathrm{e}^{-\frac{(u-a)^2+(v-b)^2}{2\sigma^2}}\,du\,dv \\ =& \frac{\mathrm{e}^{-\frac{a^2+b^2}{2\sigma^2}}}{2\pi\sigma^2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{\rho^2-2\rho(a\cos\theta+b\sin\theta)}{2\sigma^2}}\rho\,d\rho, \end{aligned} \tag{6}$$

$u = \rho\cos\theta$, $v = \rho\sin\theta$.

Integralai (6) ir (7) apskaičiuojami artutiniais metodais.

Šios matematinės formulės taikomos kulkos nukrypimo nuotoliui nuo taikymo centro tikimybėms apskaičiuoti, saugaus pylimo aukščiui nustatyti ir zonų, kuriose iššautų kulkų skridimo greitis gali būti pavojingas žmonėms, pasiskirstymo modeliavime.



2 pav. Kulkų sklaidos apskritimai.

3 Atskirų atvejų analizė

Kariai nustatė taikiklį 2 ant automatinių šautuvų, nesąmoningai daro taikymosi klaidas. Panaudojame tikslius automatinio šautuvo AKM šaudymo trajektorijų duomenis ir darbe pateiktas formules. Taikymo klaidas skaičiuojame atsižvelgdami į galimą klaidingą ginklo kampą šūvio metu. Skaičiuodami pasirenkame ginklo kampus atitinkančius taikiklį 5 ir maksimalų taikiklį 8.

Tegul ν – kulkos nuotolis nuo sklaidos elipsės centro. Kai $\sigma_x = \sigma_y$, tai sklaidos elipsė tampa apskritimu. Kai taikiklis nustatytas į padėtį 5, centro koordinatė bus $y = 0{,}65$ m, tuomet $3\sigma = 0{,}65$, $\sigma = 0{,}22$. Pagal Veibulo formulę (5), ($h = 0{,}65 + \nu$) $P(\nu_n < 0{,}65 + 3\sigma) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{9\sigma^2}{2\sigma^2}} = 1 - 0{,}011 = 0{,}989$, t. y. kulka su tikimybe 0,989 turi nepakilti aukščiau 1,3 m.

Kai taikiklis nustatytas į padėtį 8, elipsės centro koordinatės šioje vietoje yra $y = 2{,}75$ m. Tuomet $3\sigma = 2{,}75$, $\sigma = 0{,}92$.

Jei apsauginio pylimo aukštis 4,5 m ir kulkos trajektorijos aukščiausias taškas nutolęs nuo sklaidos elipsės centro 1,75 m, tai pagal Veibulo formulę kulkos atstumas nuo sklaidos elipsės centro neviršys 1,75 m su tikimybe $P(\nu < 1{,}75) = 0{,}836$.

Kulkos skries už skritulio L_1 (2 pav.), kurio spindulys $R_1 = 1{,}75$ su tikimybe 0,164.

Į užštrichuotą skritulio L_2 dalį patekusios kulkos skries aukščiau pylimo. Jų skaičius proporcingas žiedo dalies plotui, todėl galima laikyti, kad tikimybė lygi plotų santykiui, t. y. 0,03.

Jei pylimo aukštis būtų 5,5 m, tai tikimybė kulkai nutolti nuo elipsės centro mažiau negu 2,75 m būtų 0,989.

Tikimybė, kad iššauta kulka nutols nuo elipsės centro daugiau, negu 2,75 m lygi 0,011, tuomet tikimybė, kad kulka skries virš 5,5 m pylimo bus 100 kartų mažesnė ir lygi 0,00011. Darome išvadą, kad ankščiau aprašytomis sąlygomis, t. y. esant maksimaliai taikiklio reikšmei „8", kulkos virš pylimo neskries. Tačiau dėl rikošetavusių kulkų pylimas turėtų būti paaukštintas dar trim metrais. Tokiu būdu, Kairių poligono šaudykloje Nr. 2 iššautoms kulkoms sulaikyti būtų tikslinga įrengti ne mažiau 8,5 metrų apsauginį smėlio pylimą. Esant kitokiems kulkų ir šaunamųjų ginklų parametrams, saugų smėlio pylimo aukštį reikėtų perskaičiuoti.

4 Išvados

1. Teoriškai apskaičiuota, kad neįrengus šaudykloje apsauginio pylimo, iššauta kulka įstrigs aplinkiniame miško masyvo medžiuose su tikimybe 0,9981. Praktiškai kulka nutols nuo tiesios linijos, jos tikimybė perskrosti miško masyvą sumažės.
2. Pagal pateiktas matematines formules ir automatinio šautuvo šaudymo duomenis apskaičiuota tikimybė, kad iššauta kulka skries virš 5,5 m pylimo lygi 0,00011, t. y. kulkos virš 5,5 m aukščio pylimo neskries.
3. Dėl rikošetavusių kulkų pylimas turėtų būti paaukštintas iki 8,5 m.

Literatūra

[1] *Aplinkos apsaugos vadybos planas, Lietuvos kariuomenės centrinis poligonas.* Krašto apsaugos ministerija, Ataskaita. Vilnius, 2002.

[2] P. Baltrėnas, S. Vasarevičius, K. Greičiūtė and V. Vilutienė. Vliyaniye voyennyh uchenij na sostav i strukturu pochvy. *Ekologiya i promyshlennost Rosii*, (6):36–40, 2003 (rusų k.).

[3] *Balistika.* Krašto apsaugos mokykla, Vilnius, 1993.

[4] R.L. Irzelis, P. Vaitiekūnas and O. Survilaitė. Investigation and modelling of damage of landscape and its evaluation in military training ground. In *Proceedings of 6th International conference "Environmental Engineering",* Vilnius, 2005, pp. 103–108, 2005.

[5] G. Misevičius, A. Pincevičius, R.J. Rakauskas and R. Eidukevičius. *Aukštoji matematika.* TEV, Vilnius, 1999.

[6] S. Puškorius. *Sprendimų priėmimo teorija. Kiekybiniai metodai.* LTU, Vilnius, 2001.

[7] V. Vilutienė, K. Greičiūtė and S. Vasarevičius. Investigation into the bombing impact on the quantity of soil organic matter on firing grounds of lithuania. In *Sbornik z mezinarodni konferenci CATE 2007 "Ekonomika, logistika a ekologie v ozbrojenych silach",* Brno, 2007, pp. 293–299, 2007.

[8] V. Vilutienė and G. Ignatavičius. Environmental pollution hazard as a result of intensive military activities. In *Sbornik z mezinarodni konferenci CATE 2005 "Ekonomika, logistika a ekologie v ozbrojenych silach",* Brno, 2005, pp. 352–365, 2005.

SUMMARY

An investigation of the damage of polygons and surrounding forests caused by the splinters and bullets

G. Misevičius, S. Puškorius, V. Vilutienė

Trees surrounding a training ground are damaged by bullets during shooting practice. A part of splinters of cartridges and explosives fly over the protective ramparts, thus causing a threat for safety and damaging trees of surrounding forests deteriorating the valuable resources. In the paper, an analysis of damage caused by bullets and splinters to trees of forests surrounding Kairiai training ground is carried out by applying mathematical methods. The mathematical formulas for calculation of the probabilities of the distance of deviation of a bullet from the center of the target, for identification of the safe height of the rampart and simulation of distribution of the zones where the speed of shot bullets can be dangerous for humans are provided.

Keywords: Poisson distribution, Weibull distribution, density function, probability.