

Vilniaus universitetas
Fizikos fakultetas
Lazerinių tyrimų centras

Tomas Latvys

**SIAURAJUOSČIO SIGNALO GENERACIJOS ATGALINĖS BANGOS ŠVIESOS
PARAMETRINIAME OSCILIATORIJE KAUPINAMAME PLAČIAJUOSČIA BANGA
TEORINIS MODELIAVIMAS**

MAGISTRO STUDIJŲ BAIGIAMASIS DARBAS

Lazerinės fizikos ir optinių technologijų studijų programa

Studentas

Tomas Latvys

Leista ginti

2026-05-22

Darbo vadovė

dr. Viktorija Tamulienė

Recenzentas

dr. Vygandas Jarutis

Centro vadovė

dr. Dalia Kaškelytė

Vilnius, 2026

Turinys

Įvadas	5
1. Teorinis įvadas	6
1.1. Parametriniai šviesos generatoriai ir osciliatoriai	6
1.2. Fazinio sinchronizmo sąlygų tipai	8
1.2.1. Fazinis sinchronizmas, pagrįstas dvejopalaūžiškumu	8
1.2.2. Fazinis kvazisinchronizmas	10
1.3. Atgalinės bangos šviesos parametriniai osciliatoriai (ABŠPO)	12
1.3.1. ABŠPO principai	12
1.3.2. Pagrindinės ABŠPO savybės	12
1.3.3. PPKTP kristalas	14
1.4. Nekoherentiškai kaupimos parametrinės sąveikos teorijos apžvalga	16
1.4.1. Sąlygos koherentinio signalo generacijai	16
1.4.2. Teoriniai modeliai ŠPG	18
1.4.3. Teoriniai modeliai ŠPO	20
1.4.4. Teoriniai modeliai ABŠPO	22
1.4.5. Teorinių modelių palyginimas	24
1.4.6. Eksperimentai ABŠPO	25
2. Tyrimo metodika	28
2.1. Sumodeliuoto eksperimento schema	28
2.2. Tribangės sąveikos lygtys	29
2.3. Modeliavimo metodai	30
2.3.1. Baigtinių skirtumų metodas	30
2.3.2. Dalinių žingsnių metodas	32
2.4. Kraštinės sąlygos	33
2.5. Rymano integravimo metodas	34
3. Rezultatai ir duomenų aptarimas	38
3.1. Pagrindinės ir antrosios kaupinio harmonikų palyginimas	38
3.1.1. Fazinio sinchronizmo kreivė	38
3.1.2. Grupinio greičio dispersijos kreivė	39
3.1.3. Keitimo efektyvumai	39
3.1.4. Fazės	42
3.1.5. Laikiniai profiliai	43
3.1.6. Spektriniai profiliai	45
3.1.7. Impulso trukmės ir spektro pločio sandauga	47
3.2. Baigtinių skirtumų ir dalinių žingsnių metodų palyginimas	48
3.2.1. Laikiniai profiliai	48
3.2.2. Spektriniai profiliai	50

3.2.3.	Impulso trukmės ir spektro pločio sandauga	52
3.2.4.	Plačiajuosčio kaupinimo analizė	52
3.3.	ABŠPO sprendiniai Rymano integravimo metodu	55
3.3.1.	ABŠPO lygčių paruošimas Rymano integravimo metodui	55
3.3.2.	Rymano funkcijų nustatymas	57
3.3.3.	Sprendiniai priekinei ir atgalinei bangoms	59
3.3.4.	Sprendinių patikrinimas	63
Išvados		65
Literatūra		66
Aprobacija		69
Santrauka		70
Summary		71

Pagrindinės darbe vartojamos santrumpos ir žymėjimai

ABŠPO – atgalinės bangos šviesos parametrinis osciliatorius

ŠPG – šviesos parametrinis generatorius

ŠPO – šviesos parametrinis osciliatorius

PPKTP – periodiškai poliuotas kalio titano fosfato kristalas

PPLN – periodiškai poliuotas ličio niobato kristalas

Nd:YAG – neodimio jonais legiruotas itrio aliuminio granato kristalas

PH – pagrindinė harmonika

AH – antroji harmonika

Indeksai $j = p, s, i$ – kaupinimo, signalinė ir šalutinė bangos

Indeksai $j = p, f, b$ – kaupinimo, priekinė ir atgalinė bangos

λ_{j0} – centrinis bangos ilgis

ω_{j0} – centrinis kampinis dažnis

k_{j0} – centrinis bangos skaičius

A_{j0} – pradinė bangos amplitudė

I_{j0} – pradinis bangos intensyvumas

S_{j0} – pradinės bangos amplitudės Furjė vaizdas

η – keitimo efektyvumas

$\sigma_t^{(j)}$ – impulso vidutinė kvadratinė trukmė

$\sigma_f^{(j)}$ – impulso vidutinis kvadratinis spektro plotis

K – kristalo gardelės vektorius

Λ – kristalo poliavimo periodas

d_{eff} – efektinis netiesiškumo koeficientas

T – kristalo temperatūra

z – išilginė koordinatė

t – laikas

Įvadas

Šviesos parametriniai generatoriai ir osciliatoriai leidžia generuoti derinamo bangos ilgio lazerinę spinduliuotę plačiame infraraudonajame diapazone. Tradiciškai šiems prietaisams kaupinti naudojami koherentiniai lazeriai, tačiau koherentinę spinduliuotę netiesiniuose kristaluose įmanoma generuoti ir naudojant nekoherentinius kaupinimo šaltinius, kurių fazė laike kinta atsitiktinai. Tokiam procesui įgyvendinti būtina tinkamai suderinti sąveikaujančių bangų grupinius greičius. Vis dėlto įprastuose parametriniuose prietaisuose šių sąlygų išpildymas tiesiogiai priklauso nuo kristalo dispersinių savybių, todėl jos įgyvendinamos tik specifiniuose bangos ilgių taškuose. Tai stipriai apriboja sugeneruotos koherentinės spinduliuotės derinimo diapazoną.

Šį apribojimą leidžia įveikti atgalinės bangos šviesos parametriniai osciliatoriai (ABŠPO), kurių veikimas paremtas netiesiniais kristalais su submikrometriniais poliavimo periodais. Kitaip nei įprastose parametrinėse sistemose, ABŠPO generuojamos signalinė ir šalutinė bangos sklinda priešingomis kryptimis viena kitos atžvilgiu. Tokia sąveika lemia fundamentalius skirtumus tarp sugeneruotų bangų spektrų: kartu su kaupinimu sklindančios bangos spektro plotis išlieka panašus į kaupinimo, o atgalinės bangos spektras tampa keliomis eilėmis siauresnis. Ši savybė pasireiškia dar ryškiau, kai kaupinimo šaltinis yra nekoherentinis. ABŠPO schemoje viena iš koherentinės bangos generavimo sąlygų yra tenkinama automatiškai, todėl koherentinės spinduliuotės generacija yra įmanoma žymiai platesniame kaupinimo bangos ilgių diapazone.

Tačiau praktinis nekoherentiškai kaupinamų parametrinių reiškinių įgyvendinimas išlieka sudėtingas, nes tokie šaltiniai pasižymi ne tik mažu laikiniu, bet ir ribotu erdviniu koherentiškumu. Dėl šios priežasties yra sunku pasiekti spinduliuotės intensyvumus, kurių reikia parametrinės šviesos generacijos slenksčiui peržengti. Todėl šio **darbo tikslas** – teoriškai ištirti koherentinės spinduliuotės generacijos mechanizmą nekoherentiškai kaupinamame atgalinės bangos šviesos parametriniame osciliatoriuje. Tikslui pasiekti išsikelti šie darbo uždaviniai:

1. Sumodeliuoti netiesinę sąveiką baigtinių skirtumų metodu ir palyginti atgalinių impulsų koherentiškumą, kai ABŠPO kaupinamas nekoherentiškais pagrindine bei antrąja Nd:YAG mikrolazerio harmonikomis.
2. Sukurti modelį, paremtą dalinių žingsnių metodu, ir ištirti plataus kaupinimo spektro įtaką priekinei ir atgalinei bangoms.
3. Rymano integravimo metodu išvesti analitines iteracines išraiškas priekinės ir atgalinės bangų amplitudėms bei paaiškinti stebimus reiškinius.

1. Teorinis įvadas

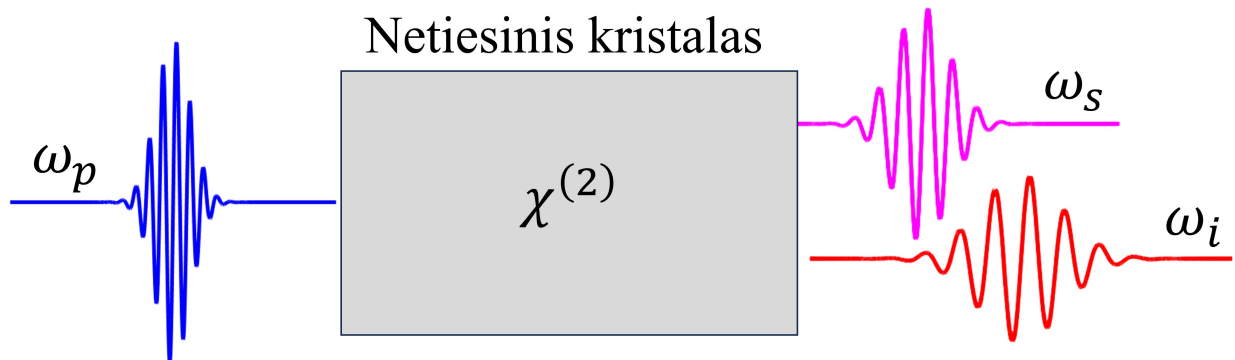
Šiame skyriuje susipažinsime su parametriniais šviesos generatoriais ir osciliatoriais, aptarsime fazinio synchronizmo tipus ir atgalinės bangos šviesos parametrinių osciliatorių (ABŠPO) principus bei savybes. Tada panagrinėsime koherentinės bangos generavimo sąlygas nekoherentiškai kaupinamuose netiesiniuose kristaluose ir apžvelgsime keletą teorinių modelių, nagrinėjančių šį procesą šviesos parametriniuose generatoriuose (ŠPG), osciliatoriuose (ŠPO) ir ABŠPO. Pabaigoje aptarsime ir keletą eksperimentinių realizacijų ABŠPO kristaluose, kaupinamuose čirpuotais plataus spektro impulsais.

1.1. Parametriniai šviesos generatoriai ir osciliatoriai

Šviesos parametriniuose generacija yra antrosios eilės netiesinis optinis reiškiny, pasireiškiantis tik necentrosimetrinėse terpėse, kurių netiesinis jautris $\chi^{(2)} \neq 0$. Jos metu aukšto dažnio ω_p kaupinimo fotonas, sąveikaudamas su netiesine terpe, skyla į du mažesnės energijos fotonus (1 pav.). Didesnės energijos fotonas vadinamas signaliniu (ω_s), o mažesnės – šalutiniu (ω_i). Šis virsmas privalo tenkinti energijos tvermės dėsni:

$$\omega_p = \omega_s + \omega_i, \quad (1)$$

čia ω_j yra kampinis dažnis, o $j = p, s, i$ atitinkamai žymi kaupinimo, signalinę ir šalutinę bangas (angl. *pump, signal, idler*).



1 pav. Šviesos parametrinė generacija netiesiniame kristale.

Signalinė ir šalutinė bangos yra generuojamos iš kvantinio triukšmo (parametrinės fluorescencijos) ir sustiprinamos sklindant kristalu. Šie pradiniai fotonai, sąveikaudami su didelio intensyvumo kaupinimo banga, inicijuoja savaiminio stiprinimo procesą: augantis signalinės bangos intensyvumas skatina šalutinės bangos generaciją, o ši, savo ruožtu, lemia tolimesnį signalinės bangos intensyvumo augimą [1]. Esant pakankamam kaupinimo intensyvumui, ši parametrinė sąveika sąlygoja eksponentinį abiejų bangų energijos augimą vieno praėjimo per kristalą metu. Tai leidžia pasiekti energijos keitimo efektyvumus, viršijančius 40 % [2]. Prietaisas, sudarytas iš kaupinimo šaltinio,

netiesinio kristalo ir spinduliuotės valdymui reikalingų optinių elementų, vadinamas šviesos parametriniu generatoriumi (ŠPG).

Jei netiesinį kristalą patalpiname į rezonatorių, gauname kitą parametrinį prietaisą – šviesos parametrinį osciliatorių (ŠPO). Priklausomai nuo to, ar ŠPO viduje rezonuoja viena ar abi sugeneruotos bangos, jie skirstomi į vienbangius ir dvibangius osciliatorius. Dvibangiai ŠPO pasižymi maždaug šimtą kartų žemesniu generacijos slenksčiu, tačiau yra mažiau stabilūs, o jų derinimo diapazonas paprastai yra siauresnis dėl ribotų veidrodžių atspindžio koeficientų spektrinių savybių [3].

Lyginant ŠPG ir ŠPO prietaisus, būtina paminėti, kad ŠPG konstrukcija yra paprastesnė ir patikimesnė, kadangi nenaudoja rezonatoriaus veidrodžių. Be to, ŠPG pasižymi ir platesniu bangos ilgio derinimo diapazonu, kurį riboja tik kristalo sugertis ir fazinio sinchronizmo sąlygos. Kita vertus, ŠPO parametrinės generacijos slenkstis yra žemesnis. Kadangi rezonatoriuje signalinė (ir/arba šalutinė) banga per netiesinį kristalą pereina daugybę kartų, efektyviai generacijai pasiekti nereikia didelio stiprinimo per vieną praėjimą, todėl gali būti naudojami mažesnio intensyvumo kaupinimo šaltiniai. Dar vienas ŠPO privalumas – aukštesnė generuojamų pluoštų kokybė. Rezonatoriuje vykstant skersinių modų atrankai, išeinančio pluošto profilis paprastai yra artimas Gauso pluoštui [4].

Šviesos parametrinės generacijos procese signalinės bangos stiprinimas vieno praėjimo metu kaupinimo nuskurdinimo atveju gali būti užrašytas taip [1]:

$$G_s(L) = \frac{I_s(L)}{I_s(0)} - 1 = \Gamma^2 L^2 \text{sinc}^2(\Delta k L/2), \quad (2)$$

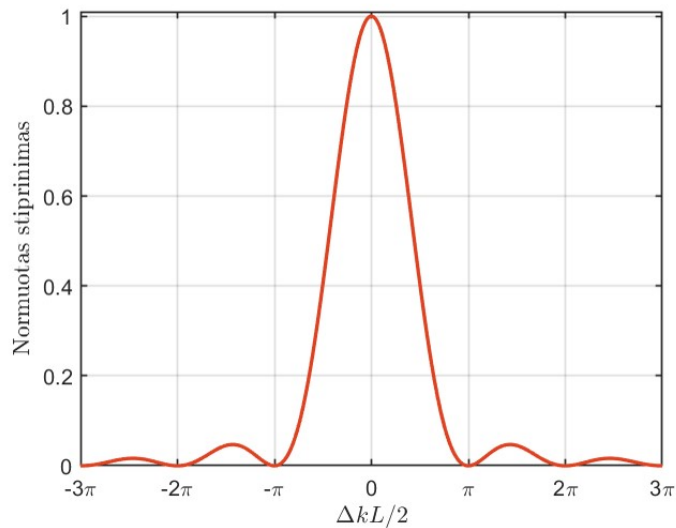
kur I_s yra signalinės bangos intensyvumas, L – sąveikos ilgis, $\Delta k = k_p - k_s - k_i$ yra fazinis išderinimas (k_j yra bangos vektoriai), o Γ – stiprinimo koeficientas, kuris priklauso nuo medžiagos ir kaupinimo parametrų:

$$\Gamma^2 = \frac{8\pi^2 d_{\text{eff}}}{c \varepsilon_0 n_1 n_2 n_3 \lambda_s \lambda_i} I_p(0), \quad (3)$$

čia n_j yra atitinkamų bangų lūžio rodikliai, λ_j – jų bangos ilgiai vakuume, d_{eff} – efektyvus netiesiškumo koeficientas, c – šviesos greitis, o ε_0 – vakuumo dielektrinė skvarba. $I_p(0)$ žymi pradinį kaupinimo intensyvumą. Signalinės bangos stiprinimo priklausomybė nuo $\Delta k L/2$ yra grafiškai pavaizduota 2 pav. Stiprinimas mažėja, kai $|\Delta k L/2|$ tolsta nuo nulio. Sąveikaujantys laukai sklisdami terpe periodiškai išsifazuoja ir energija periodiškai cirkuliuoja tarp kaupinimo ir sugeneruotų bangų, o sugeneruotos spinduliuotės intensyvumas osciliuoja erdvėje. Atstumas, per kurį įvyksta viena energijos mainų ciklo fazė, vadinamas koherentiškumo ilgiu:

$$L_{koh} = \frac{\pi}{\Delta k}. \quad (4)$$

Tipinės koherentiškumo ilgio vertės daugumoje netiesinių kristalų kinta nuo maždaug 5 μm registruojamame diapazone iki 50 μm infraraudonojoje srityje [1].



2 pav. Signalinės bangos mažo signalo stiprinimo priklausomybė nuo fazinio išderinimo parametro $\Delta kL/2$.

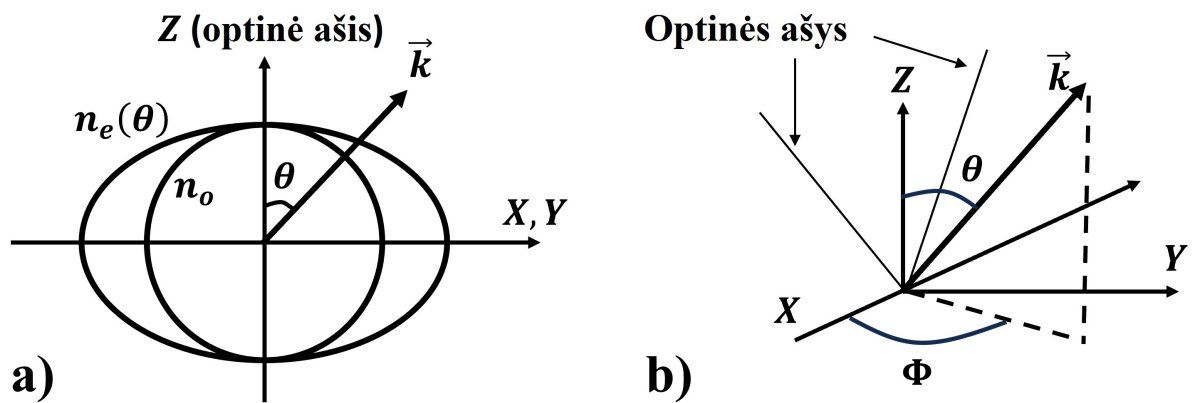
1.2. Fazinio sinchronizmo sąlygų tipai

Siekiant pakankamai sustiprinti generuojamas bangas, visų sąveikaujančių bangų faziniai greičiai turi būti suderinti per visą kristalo ilgį, kuris turi būti gerokai didesnis nei tipinis koherentiškumo ilgis. Tai galima pasiekti tik išpildant fazinio sinchronizmo sąlygą: kai $\Delta k = 0$, koherentiškumo ilgis tampa begalinis. Tada signalinės ir šalutinės bangų intensyvumas gali augti per visą kristalo ilgį iki praktiniam taikymui reikalingų verčių [1]. Fazinio sinchronizmo sąlygai išpildyti dažniausiai taikomi du metodai: fazinis sinchronizmas, pagrįstas dvejopalaūžiškumu, arba fazinis kvazisinchronizmas.

1.2.1. Fazinis sinchronizmas, pagrįstas dvejopalaūžiškumu

Fazinis sinchronizmas, pagrįstas dvejopalaūžiškumu, remiasi kristalo anizotropinėmis savybėmis, leidžiančiomis suderinti skirtingos poliarizacijos bangų fazinius greičius keičiant jų sklaidimo kampą arba kristalo temperatūrą. Dvejopalaūžiuose kristaluose lūžio rodikliai skirtingų poliarizacijų bangoms skiriasi. Paprastoji banga yra poliarizuota statmenai plokštumai, kurioje yra kristalo optinė ašis ir bangos sklaidimo vektorius. Ši banga sklinda pagal paprastąjį lūžio rodiklį n_o , kuris nepriklauso nuo sklaidimo krypties. Nepaprastoji banga yra poliarizuota lygiagrečiai minėtai plokštumai ir sklinda pagal nepaprastąjį lūžio rodiklį $n_e(\theta)$, kurio vertė priklauso nuo kampo θ tarp kristalo optinės ašies ir bangos sklaidimo krypties [3].

Vienaašiuose kristaluose egzistuoja viena simetrijos ašis (dažniausiai sutapatinama su koordinatinių sistemos Z ašimi), kuri kartu yra ir pagrindinė optinė ašis (3a pav.). Tokiu atveju kristalo optinės savybės X ir Y ašių kryptimis yra identiškos, todėl lūžio rodikliai šioms ašims sutampa: $n_X = n_Y = n_o$, o $n_Z = n_e$. Remiantis šiais rodikliais, kristalai skirstomi į dvi grupes: jei $n_o < n_e$, kristalas laikomas teigiamu, o jei $n_e > n_o$ – neigiamu vienaašiu kristalu [5].



3 pav. Kristalo koordinatinių sistema: a) vienaašiam, ir b) dviašiam kristalui. Pritaikyta pagal [5].

Sudėtingesne optine anizotropija pasižymi dviašiai kristalai, turintys dvi optines ašis, esančias XZ plokštumoje (3b pav.). Šiuo atveju visi trys pagrindiniai lūžio rodikliai yra skirtingi, o skaičiavimuose įprasta laikyti, kad $n_z > n_y > n_x$. Šviesai sklindant išilgai optinių ašių, lūžio rodiklis nepriklauso nuo poliarizacijos, tačiau bet kuria kita kryptimi jis tampa priklausomas nuo dviejų erdvinį kampų: polinio kampo θ (tarp sklidimo krypties ir Z ašies) bei azimutinio kampo Φ (tarp sklidimo krypties projekcijos XY plokštumoje ir X ašies) [5]. Analizuojant fazinį synchronizmą tokiose terpėse, dažnai taikomas supaprastintas metodas, apribojant bangos vektorių sklidimą vienoje iš trijų pagrindinių kristalografinių plokštumų (XY , YZ arba XZ). Pasirinktoje plokštumoje banga, kurios poliarizacija yra statmena tai plokštumai, vadinama paprastąja, o poliarizuota pačioje plokštumoje – nepaprastąja. Priklausomai nuo pasirinktos plokštumos, dviašis kristalas gali elgtis kaip teigiamas arba neigiamas vienaašis kristalas [6].

Fazinį ainchronizmą galima suskirstyti į du tipus pagal sugeneruotų bangų poliarizacijas: I tipo sąveikoje signalinės ir šalutinės bangų poliarizacijos yra vienodos, o II tipo atveju – tarpusavyje statmenos. Konkrečios sąveikaujančių bangų poliarizacijų kombinacijos teigiamiems ir neigiamiems vienaašiams kristalams yra apibendrintos 1 lentelėje [6].

1 lentelė. I ir II tipo fazinio synchronizmo bangų poliarizacijų kombinacijos teigiamuosiuose ir neigiamuosiuose vienaašiuose kristaluose.

Tipas	Neigiamas vienaašis ($n_e < n_o$)	Teigiamas vienaašis ($n_e > n_o$)
I	$e \rightarrow o + o$	$o \rightarrow e + e$
II	$e \rightarrow e + o$ arba $e \rightarrow o + e$	$o \rightarrow e + o$ arba $o \rightarrow o + e$

Nors dvejetainiškumu pagrįstas fazinis synchronizmas yra plačiai taikomas, jis turi keletą esminių trūkumų [3]:

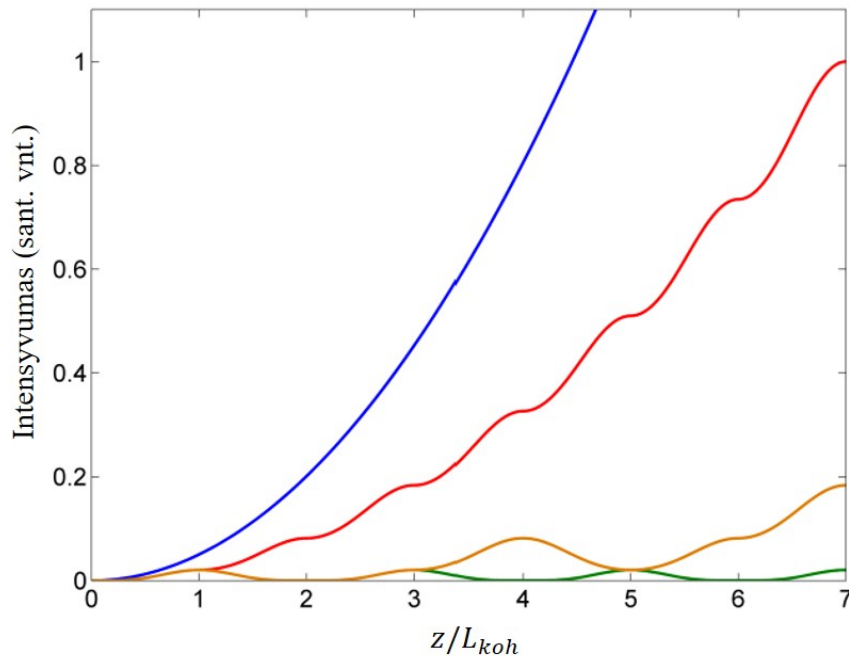
1. Erdvinis nunešimas. Kai synchronizmo kampas θ nėra lygus 0° arba 90° , nepaprastosios bangos sklidimo vektorius ir Pointingo vektorius, nurodantis energijos sklidimo kryptį, nėra lygiagretūs. Dėl šios priežasties paprastoji ir nepaprastoji bangos kristale atsiskiria erdvėje

ir nebersikloja, o tai ženkliai sumažina netiesinės sąveikos efektyvumą, ypač naudojant fokusuotus pluoštus.

2. Mažas netiesiškumo koeficientas. Efektinis netiesiškumo koeficientas priklauso nuo sąveikaujančių bangų poliarizacijų, todėl dvejetainiškumo pagrįstose schemose ne visada įmanoma išnaudoti didžiausius kristalo netiesiškumo tenzoriaus elementus. Pavyzdžiui, LiNbO_3 kristale $d_{31} \approx 4,35 \text{ pm/V}$, o $d_{33} \approx 27 \text{ pm/V}$, o KTP kristale $d_{31} \approx 2,54 \text{ pm/V}$ ir $d_{32} \approx 4,35 \text{ pm/V}$, tuo tarpu didžiausias elementas $d_{33} \approx 16,9 \text{ pm/V}$. Šiuose kristaluose didžiausius netiesiškumo koeficientus galima panaudoti tik tada, kai visų sąveikaujančių bangų poliarizacijos yra vienodos. Tačiau toks poliarizacijų derinys dvejetainiškumo pagrįsto fazinio sinchronizmo schemoje nėra įmanomas, nes bangų faziniai greičiai tokiu atveju nėra suderinti.

1.2.2. Fazinis kvazisinchronizmas

Fazinis kvazisinchronizmas išsprendžia anksčiau aptartas problemas. Šioje schemoje naudojamas periodiškai poliuotas netiesinis kristalas, kurio domenų struktūra suformuojama taip, kad netiesiškumo koeficientas keistų ženklą kiekviename koherentiškumo ilgyje. Tai leidžia kompensuoti fazinį išderinimą: kaskart, kai dėl fazių skirtumo energija turėtų pradėti tekėti atgal į kaupinimo bangą, netiesiškumo koeficiento ženklas apverčiamas ir generuojamų bangų intensyvumas gali monotoniškai augti per visą sąveikos ilgį, panašiai kaip idealaus fazinio sinchronizmo atveju (4 pav.) [5].



4 pav. Sugeneruotos bangos intensyvumo priklausomybė nuo sąveikos ilgio esant skirtingoms fazinio sinchronizmo sąlygoms: idealiam faziniam sinchronizmui ($\Delta k = 0$, mėlyna kreivė), pirmos ($m = 1$, raudona) bei trečios ($m = 3$, oranžinė) eilės kvazisinchronizmui ir nesinchronizuotai sąveikai (žalia). Adaptuota pagal [3].

Taikant fazinį kvazisinchronizmą, fazinis išderinimas kompensuojamas ne derinant bangų grupinius greičius, o į fazinio sinchronizmo sąlygą įvedant periodiškai poliuotos gardelės vektorių K :

$$\Delta k = k_p - k_s - k_i - K. \quad (5)$$

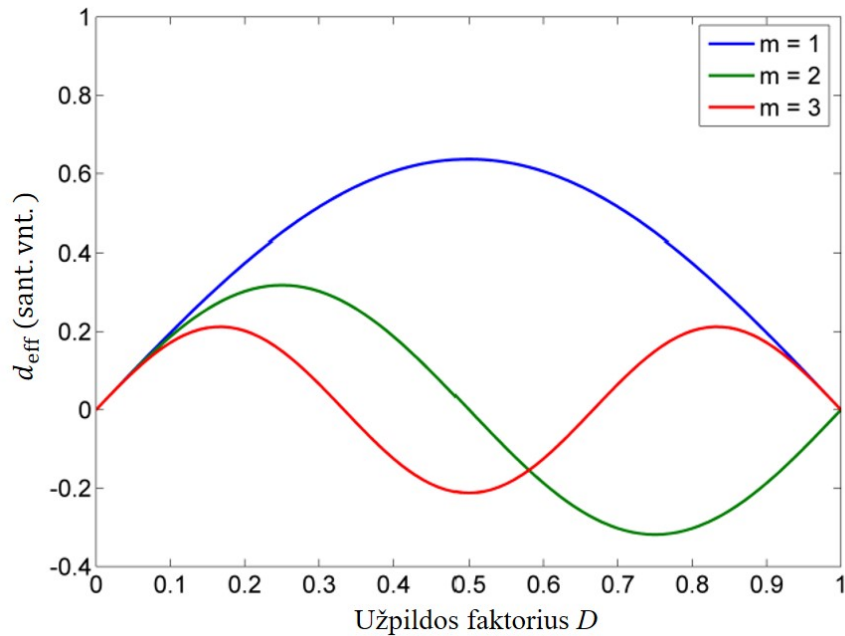
Gardelės vektorius yra atvirkščiai proporcingas poliovimo periodui Λ : $K = \frac{2\pi}{\Lambda}$. Šioje sąveikoje efektinis netiesiškumo koeficientas išreiškiamas taip [3]:

$$d_{\text{eff}} = d_{ij} G_m. \quad (6)$$

Čia d_{ij} yra atitinkamas kristalo netiesiškumo tenzorius elementas, o koeficientas G_m priklauso nuo sinchronizmo eilės m ir užpildos faktoriaus D :

$$G_m = \frac{2}{m\pi} \sin(m\pi D). \quad (7)$$

Užpildos faktorius lygus poliuoto domeno ilgio l ir viso poliovimo periodo santykiui: $D = l/\Lambda$. Efektinio netiesiškumo koeficiento priklausomybė nuo užpildos faktoriaus pirmosioms trimis eilėms ($m = 1, 2, 3$) yra pateikta 5 pav. Remiantis šiuo grafiku, akivaizdu, kad pirmos eilės sąveikai, kai užpildos faktorius $D = 0,5$, efektinio netiesiškumo koeficientas yra didžiausias ir lygus $d_{\text{eff}} = \frac{2}{\pi} d_{ij} \approx 0,64 d_{ij}$ [3]. Nors ši vertė yra mažesnė nei pasiekama idealaus fazinio sinchronizmo atveju, tačiau galimybė naudoti didžiausią d tenzorius elementą dažniausiai užtikrina, kad bendras sistemos keitimo efektyvumas yra didesnis nei dvejojpalaužio fazinio sinchronizmo atveju.



5 pav. Efektinio netiesiškumo koeficiento (sunormuoto į d_{ij}) priklausomybė nuo užpildos faktoriaus, kai $m = 1$ (mėlyna), $m = 2$ (žalia) ir $m = 3$ (raudona). Adaptuota pagal [3].

1.3. Atgalinės bangos šviesos parametriniai osciliatoriai (ABŠPO)

1.3.1. ABŠPO principai

Standartiniuose ŠPG ir ŠPO generuojamos signalinė ir šalutinė bangos sklinda ta pačia kryptimi kaip ir kaupinimo spinduliuotė. Periodiškai poliutuose kristaluose šios sąveikos metu sugeneruotų bangų ilgus aprašo energijos tvermės dėsnis ir fazinio kvazisinchronizmo sąlyga, kuri yra iliustruota 6a pav.:

$$\omega_{p0} = \omega_{s0} + \omega_{i0}, \quad (8)$$

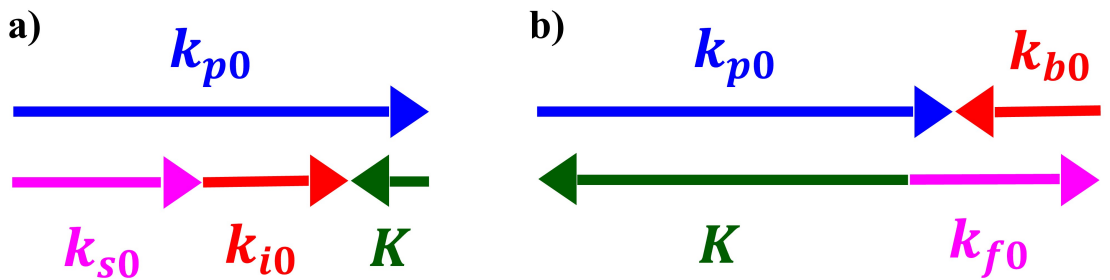
$$k_{p0} = k_{s0} + k_{i0} + K, \quad (9)$$

čia ω_{j0} yra sąveikaujančių bangų nešantieji kampiniai dažniai, o k_{j0} – jų bangos vektoriai. Bangos vektoriai priklauso nuo bangos ilgio λ_{j0} ir kristalo lūžio rodiklio $n(\lambda_{j0})$ tam bangos ilgiui: $k_{j0} = 2\pi n(\lambda_{j0})/\lambda_{j0}$, o nešantieji dažniai apibrėžiami kaip $\omega_{j0} = 2\pi c/\lambda_{j0}$.

Jeigu padarome taip, kad viena iš sugeneruotų bangų sklistų priešinga kryptimi negu kaupinimo spinduliuotė, tada fazinio kvazisinchronizmo sąlygą reikia perrašyti tokiu būdu:

$$k_{p0} + k_{b0} = k_{f0} + K, \quad (10)$$

čia k_{b0} ir k_{f0} žymi atgalinės ir priekinės bangų banginius vektorius. Ši situacija pavaizduota 6b pav. Matome, kad atgalinės bangos vektorius yra sudedamas su kaupinimo bangos vektoriumi, todėl fazinio kvazisinchronizmo sąlygos išpildymui reikalingas labai ilgas gardelės bangos vektorius K . Tai reiškia, kad kristalo poliavimo periodas Λ turi būti labai mažas – tik keli šimtai nanometrų. Palyginimui, standartiniuose ŠPG ir ŠPO kristaluose poliavimo periodas dažniausiai yra apie 30 μm . Prietaisas, kuriame realizuojama tokio tipo parametrinė sąveika, vadinamas atgalinės bangos šviesos parametriniu osciliatoriumi (ABŠPO).



6 pav. Fazinis kvazisinchronizmas: a) šviesos parametriniame generatoriuje, b) atgalinės bangos šviesos parametriniame osciliatoriuje.

1.3.2. Pagrindinės ABŠPO savybės

Kaip pamatėme anksčiau, ABŠPO skiriasi nuo įprastų ŠPG ir ŠPO, kadangi viena iš sugeneruotų bangų sklinda priešinga kaupinimui kryptimi. Aptarkime pagrindines ABŠPO savybes, kurios išskiria šiuos prietaisus iš tradicinių parametrinių sistemų.

Kiekvienam atgaliniam fotonui sklindant ABŠPO kristalu, jis nuolatos sąveikauja su kaupinio lauku ir lemia priverstinę naujų atgalinių ir priekinių fotonų generaciją. Kadangi šis procesas vyksta visame kristalo ilgyje, realizuojamas paskirstytasis netiesinis grįžtamasis ryšys. Nors šis principas primena ŠPO veikimą, tačiau dėl vidinio grįžtamojo ryšio ABŠPO nėra reikalingas rezonatorius. Tai leidžia kurti itin kompaktiškas ir patikimas sistemas, sudarytas tik iš kaupinimo lazerio, netiesinio kristalo ir pagalbinių optinių elementų [7].

Dėl šio priešpriešinio sklidimo sugeneruotų bangų kampinių dažnių priklausomybė nuo kaupinio kampinio dažnio yra labai įdomi. Ją galima apskaičiuoti diferencijuojant (10) išraišką [7]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega_f}{\partial \omega_p} &= \frac{u_f(u_b + u_p)}{u_p(u_b + u_f)} = 1 + \varepsilon, \\ \frac{\partial \omega_b}{\partial \omega_p} &= \frac{u_b(u_p - u_f)}{u_p(u_b + u_f)} = -\varepsilon,\end{aligned}\tag{11}$$

čia u_j yra grupiniai greičiai, o ε – bedimensinis parametras, nusakantis kaupinimo ir priekinės bangos grupinių greičių skirtumą. Esant toli nuo išsigimimo režimo, sąlyga $|\varepsilon| \ll 1$ gali būti patenkinta, todėl priekinės bangos dažnis gali kisti tiesiogiai su kaupinimo dažniu, o atgalinės bangos dažnis – išlikti beveik pastovus. Viena vertus, tai reiškia, kad ABŠPO atgalinės bangos bangos ilgis yra menkai jautrus kristalo temperatūros svyravimams ar kaupinimo bangos ilgio pokyčiams. Kita vertus, ši savybė lemia, kad platus kaupinimo spektras, kuris yra sudarytas iš daugelio spektrinių komponentų, suformuoja platų priekinės bangos spektrą, tačiau atgalinės bangos spektras išlieka siauras [7].

ŠPG ir ŠPO keitimo efektyvumai, didėjant kaupinimo energijai, pasiekia sotį ir pradeda mažėti. Taip yra dėl to, kad sustiprėjusios signalinė ir šalutinė bangos pradeda sąveikauti tarpusavyje, vėl suformuodamos kaupinimo dažnio fotonus. Priešingai nei minėtose sistemose, ABŠPO keitimo efektyvumas nemažėja net ir su didelėmis kaupinimo energijomis. Kadangi priekinės ir atgalinės bangų amplitudžių viršūnės erdvėje ir laike nepersikloja, nepasiekama kritinė galia, būtina efektyviam energijos perdavimui į kaupinimo bangą [7]. Dėl šios unikalios savybės ABŠPO sistemose įmanoma pasiekti labai aukštus keitimo efektyvumus. Pavyzdžiui, K. Mølster ir kt. neseniai pademonstravo ABŠPO, kurio keitimo efektyvumas viršijo 70 %. Šis rezultatas pasiektas naudojant 15 ns trukmės, 1030 nm bangos ilgio impulsus, sugeneruotus Yb:YAG stiprintuvu [8]. Palyginiui, įprastų ŠPG sistemų efektyvumas, naudojant panašios trukmės kaupinimo impulsus, siekia apie 47 % [9].

ŠPG sugeneruotų signalinio ir šalutinio pluoštų erdvinė kokybė paprastai yra žymiai prastesnė nei kaupinimo spinduliuotės. To priežastis yra ta, kad ŠPG procese egzistuoja platus kampinis spektras signalinės ir šalutinės bangų vektorių komponentų, tenkinančių vektorinio fazinio sinchronizmo sąlygą. Visos šios modos yra stiprinamos vieno praėjimo per kristalą metu, o tai lemia didelę spinduliuotės skėstį [10]. Net ir naujose ŠPG demonstracijose pluošto kokybės parametras M^2 siekia apie 2, o esant silpnam fokusavimui gali pakilti net iki 5,4 [2]. Nors ŠPO šios problemos išvengia naudodami rezonatorius, tai gerokai padidina sistemos sudėtingumą. Tuo tarpu ABŠPO pasižymi natūralia erdvinų modų atranka dėl itin griežtos fazinio kvazisinchronizmo sąlygos. Ji lemia, kad efektyvi šviesos parametrinė generacija galima tik labai siaurame kampiniame interva-

le išilgai kaupinimo sklaidimo ašies. Eksperimentiškai pademonstruota, kad ABŠPO generuojamų pluoštų kokybė siekia $M^2 \approx 1,2-1,6$ [11].

1.3.3. PPKTP kristalas

Periodiškai poliuotas kalio titanilo fosfatas (PPKTP) yra dažniausiai naudojamas ABŠPO kristalas. To priežastis yra susijusi su submikrometrinio periodo gamybos technologija. Dėl gana žemo kristalo joninio laidumo ($\sim 10^{-4}$ S/m) poliovimo metu domenai gali augti kryptingai pagal Z ašį, išvengiant jų plėtimosi į šonus. Tokiu būdu naudojant trumpus (mažiau nei 2 μ s trukmės) aukštos įtampos elektrinio lauko impulsus galima suformuoti kristalus su submikrometriniais poliovimo periodais [12]. Papildomai legiruoju KTP kristalą rubidžio (Rb) jonais, joninį laidumą galima sumažinti iki 10^{-7} S/m eilės, o tai leidžia pasiekti dar mažesnius poliovimo periodus (mažiau 500 nm) [3].

KTP kristalo netiesiškumo koeficientų matrica užrašoma taip [13]:

$$d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

su koeficientais pateiktais 2 lentelėje.

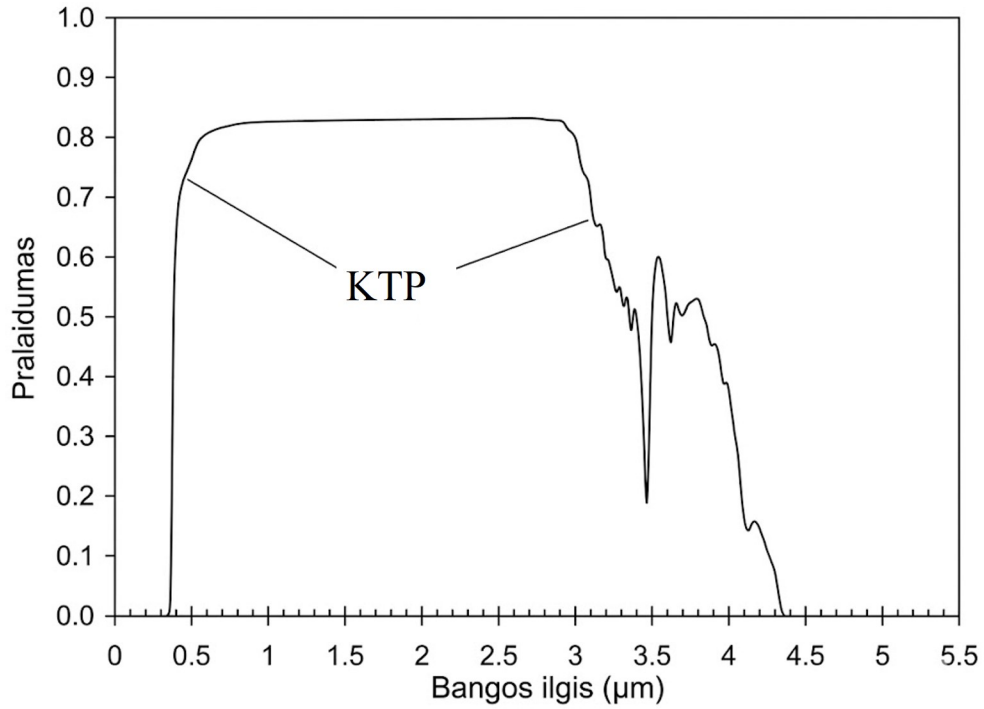
2 lentelė. PPKTP netiesiškumo koeficientai.

Koeficientas	d_{15}	d_{24}	d_{31}	d_{32}	d_{33}
Vertė, pm/V	1,91	3,64	2,54	4,35	16,9

Kai visos sąveikaujančios bangos yra poliarizuotos išilgai Z ašies, o tai įmanoma tik naudojant fazinį kvazisinchronizmą, netiesinė sąveika vyksta per $d_{33} = 16,9$ pm/V koeficientą, kuris yra didžiausias KTP kristalo netiesiškumo tenzorius elementas. Tačiau, kaip parodėme anksčiau, tada efektinis netiesiškumo koeficientas sumažėja maždaug pusantro karto: $d_{\text{eff}} = \frac{2}{\pi} d_{33} = 10,76$ pm/V. Vis dėlto praktikoje tokių verčių pasiekti kol kas nepavyksta dėl gamybos technologijos apribojimų. Pagrindinės problemos yra netolygus užpildos faktorius visame kristalo tūryje ir domenų sienelių nelygumai. Eksperimentinėse demonstracijose su kristalais, kurių poliovimo periodas $\Lambda \approx 800$ nm, apskaičiuotas d_{eff} paprastai siekia apie 9 pm/V [14, 15], o dar mažesnio periodo struktūrose jis krenta iki maždaug 5 pm/V [11].

Kitas svarbus privalumas, gaunamas naudojant spinduliuotę, kuri yra poliarizuota išilgai Z ašies, yra gerokai aukštesnis optinio pažeidimo slenkstis. Tyrimai rodo, kad KTP kristalų atsparumas lazerinei spinduliuotei pasižymi ryškia anizotropija: Z poliarizacijos šviesai pažeidimo slenkstis gali būti net kelis kartus didesnis nei X ar Y poliarizacijų atveju. Pavyzdžiui, [16] darbe nustatyta, kad Z poliarizacijos slenkstinė vertė siekia 8,3 GW/cm², kai tuo tarpu X ir Y poliarizacijoms ji yra tarp 2,3 GW/cm² ir 3,3 GW/cm² [16].

KTP kristalo pralaidumo spektras pateiktas 7 pav. Šis kristalas yra skaidrus plačiame diapazone: nuo 0,35 μm iki 4,3 μm . Spektre matoma ryški sugerties juosta ties 2,8 μm bangos ilgiu yra nulemta kristalo auginimo metu susidariusių hidroksilo grupės (OH^-) priemaišų [3].



7 pav. KTP kristalo pralaidumo spektras. Adaptuota iš [17].

Kristalo lūžio rodiklio priklausomybę nuo temperatūros ir bangos ilgio aprašo Selmejerio lygtys. Šiame darbe modeliuojamam PPKTP kristalui naudojami koeficientai paimti iš [18] knygos. Lūžio rodiklio priklausomybė nuo bangos ilgio užrašoma taip:

$$n_z^2(\lambda) = 1 + \frac{A\lambda^2}{\lambda^2 - B} + \frac{C\lambda^2}{\lambda^2 - D} + \frac{E\lambda^2}{\lambda^2 - F} - G\lambda^2. \quad (13)$$

Čia bangos ilgis λ nurodomas mikrometrais, o koeficientai A, B, C, D, E, F ir G pateikti 3 lentelėje.

3 lentelė. PPKTP Selmejerio koeficientai [18].

A	B	C	D	E	F	G
1,71645	0,013346	0,5924	0,06503	0,3226	67,1208	0,01133

PPKTP kristalo lūžio rodiklio pokytis dėl temperatūros įvertinamas pagal

$$\Delta n(T, \lambda) = n_1(\lambda) \cdot 10^{-6}(T - 25) + n_2(\lambda) \cdot 10^{-8}(T - 25)^2, \quad (14)$$

čia T – kristalo temperatūra laipsniais Celsijaus, o koeficientai n_1 ir n_2 apskaičiuojami pagal:

$$n_{1,2}(\lambda) = \sum_{m=0}^3 a_m \lambda^{-m} = a_0 + \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2}{\lambda^2} + \frac{a_3}{\lambda^3}. \quad (15)$$

Koeficientai a_m yra pateikti 4 lentelėje.

4 lentelė. PPKTP termooptiniai koeficientai z poliarizacijai [18].

	n_1	n_2
a_0	9,9587	-1,1882
a_1	9,9228	10,459
a_2	-8,9603	-9,8136
a_3	4,1010	3,1481

1.4. Nekoherentiškai kaupinimos parametrinės sąveikos teorijos apžvalga

Šviesos parametrinę generaciją galima realizuoti net ir tada, kai kaupinimo šaltinis yra nekoherentinis. Parametrinės fluorescencijos reiškinyje buvo eksperimentiškai pademonstruotas LiIO_4 , KDP ir BBO kristaluose naudojant mėlyną šviesos diodą, kurio galia siekė 0,53 mW. Detektoriumi užregistruoti jo metu sugeneruoti fotonai, tačiau pasiektas keitimo efektyvumas buvo labai mažas: iki $4 \cdot 10^{-7}\%$ [19]. Norint padidinti keitimo efektyvumą, reikėtų didinti kaupinimo intensyvumą, bet stipriai fokusuoti šviesos diodo spinduliuotę yra sunku dėl žemo erdvinio koherentiškumo. O išpildžius tam tikras sąlygas sąveikaujančių bangų grupiniams greičiams, būtų įmanoma sugeneruoti ir koherentinę signalinę bangą.

Šiame skyriuje susipažinsime su šiomis sąlygomis, išnagrinėsime teorinius modelius, įrodančius, kad šis reiškinyje gali būti stebimas ŠPG, ŠPO ir ABŠPO prietaisuose, bei palyginsime, kokie koherentiškumo prieaugiai gali būti pasiekiami. Galiausiai, apžvelgsime keletą eksperimentinių realizacijų ABŠPO, kurie yra kaupinami koherentiniais plataus spektro (faziškai moduluotais) impulsais.

1.4.1. Sąlygos koherentinio signalo generacijai

Jei nepaisytume grupinių greičių dispersijos netiesinėje terpėje, tribangės sąveikos lygtys kaupinimo, signalinės ir šalutinės bangų amplitudėms parametrinės šviesos generacijos metu galėtų būti užrašytos taip: [20]:

$$\begin{cases} \frac{\partial A_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial A_s}{\partial z} + \gamma_s A_s = \sigma_s A_p A_i^* \\ \frac{\partial A_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial A_i}{\partial z} + \gamma_i A_i = \sigma_i A_p A_s^* \\ \frac{\partial A_p}{\partial t} + u_p \frac{\partial A_p}{\partial z} + \gamma_p A_p = -\sigma_p A_i A_s \end{cases} \rightarrow \begin{cases} D_s A_s = \sigma_s A_p A_i^*, \\ D_i A_i = \sigma_i A_p A_s^*, \\ D_p A_p = -\sigma_p A_i A_s, \end{cases} \quad (16)$$

čia $D_j = \frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial z} + \gamma_j$ yra diferencialinis operatorius, γ_j yra nuostolių koeficientai, o σ_j – netiesinės sąveikos koeficientai. Jei pereisime prie koordinatinių sistemos, susietos su šalutine ir

kaupinimo bangomis: $z' = z - (u_i - u_p)(t - t_0)$ ir $t' = t$, kur t_0 yra laiko momentas, kai šalutinės ir kaupinimo bangų padėtis sutapo, tada (16) lygčių sistema tampa

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_s}{\partial t'} + (u_s - u_i) \frac{\partial A_s}{\partial z'} + \gamma_s A_s &= \sigma_s A_p A_i^*, \\ \frac{\partial A_i}{\partial t'} + \gamma_i A_i &= \sigma_i A_p A_s^*, \\ \frac{\partial A_p}{\partial t'} + (u_p - u_i) \frac{\partial A_p}{\partial z'} + \gamma_p A_p &= -\sigma_p A_i A_s.\end{aligned}\quad (17)$$

Laikant, kad kaupinimo nuskurdinimas yra nykstamai mažas, lygties šalutinei bangai sprendinį galima surasti panaudojus integravimo daugiklį $e^{\gamma_i t'}$:

$$A_i(z', t') = \sigma_i \int_0^{t'} e^{-\gamma_i(t' - \tau)} A_p(z') A_s^*(z', \tau) d\tau, \quad (18)$$

Ištačius šį sprendinį į (16) lygtį signalinei bangai, gauname

$$D_s A_s = \sigma_s \sigma_i \int_0^{t'} e^{-\gamma_i(t' - \tau)} A_p(z) A_p^*(z') A_s(z', \tau) d\tau. \quad (19)$$

Galime pastebėti, kad išraiškoje esantis narys $A_p(z) A_p^*(z')$ gali būti perrašytas kaip $|A_p(z)|^2$, jei šalutinės bangos ir kaupinimo grupiniai greičiai yra lygūs ($u_i = u_p$), nes tada $z' = z$. Tokiu atveju signalinės bangos evoliucija tampa neapriklausoma nuo kaupinimo fazės fliuktuacijų. Vadinas, netgi naudojant nekoherentinį kaupinimą galima sugeneruoti koherentinį signalą. Kita vertus, kai galioja sąlyga $u_i = u_p$, (18) išraiškoje šalutinės bangos amplitudei narys $A_p(z')$ tampa nepriklausomas nuo laiko ir gali būti iškeltas prieš integralą. Tada šalutinės bangos amplitudė tampa tiesiogiai proporcinga kaupinimo amplitudei ir kaupinimo fazės moduliacija gali būti perduota priekinei bangai. Apibendrinant, ši analizė leidžia teigti, kad koherentinė signalinė banga gali būti sugeneruota netiesiniame kristale, kuris yra kaupinamas nekoherentine spinduliuote, jei šalutinės bangos ir kaupinimo grupiniai greičiai sutampa. Tokiu atveju šalutinė banga perima kaupinimo fazės triukšmą, taip sudarydama sąlygas generuoti aukšto koherentiškumo signalinę bangą [20].

Iš tikrųjų, norint sugeneruoti koherentinę signalinę bangą, nereikia idealiai suderinti šalutinės bangos ir kaupinimo grupinių greičių. Pakanka patenkinti dvi nelygybes, kurios pateikiamos žemiau [21].

Pirmoji yra tokia:

$$\frac{u_p}{|u_p - u_s|} \tau_c \ll \tau_0, \quad (20)$$

čia τ_c yra kaupinimo koreliacijos trukmė, kuri yra atvirkščiai proporcinga kaupinimo spektro pločiui Δf_p ($\tau_c = (\pi \Delta f_p)^{-1}$), τ_0 yra charakteringa netiesinės sąveikos trukmė ($\tau_0 = 2/(E_0 \sigma_p)$, kur $E_0 = \sqrt{2I_p/(n_p \epsilon_0 c)}$ yra kaupinimo elektrinio lauko amplitudė), I_p yra kaupinimo intensyvumas, n_p terpės lūžio rodiklis kaupinimo bangai. Siekiant, kad ši nelygybė būtų patenkinta, kaupinimo ir signalinės grupiniai greičiai turi skirtis kuo labiau.

Antroji nelygybė yra tokia:

$$|u_p - u_i| \ll \tau_c u_p \gamma_i. \quad (21)$$

Ši nelygė teigia, kad kaupinio ir šalutinės bangų ilgiai turi būti kuo labiau panašūs.

Taigi, norint sugeneruoti koherentinę signalinę bangą netiesiniame kristale, kuris yra kaupinamas nekoherentiniu impulsu, signalinės bangos grupinis greitis turi kuo labiau skirtis nuo kaupinio, o šalutinės – sutapti su kaupinio greičiu.

ABŠPO atgalinė banga sklinda priešinga kryptimi nei kaupinimas, todėl (20) sąlygos vardiklyje esantis minuso ženklas gali būti pakeistas pliusu ir pirmoji sąlyga atrodytų taip:

$$\frac{u_p}{|u_p + u_b|} \tau_c \ll \tau_0. \quad (22)$$

Dabar vardiklis kairėje lygybės pusėje visada yra didelis ir ši sąlyga tampa tenkinama automatiškai. Vadinasi, norint generuoti koherentinę atgalinę bangą ABŠPO pakanka suderinti kaupinio ir priekinės bangos grupinius greičius [21].

Mokslinėje literatūroje išnagrinėta keletas netiesinių kristalų, kuriuose, parinkus tinkamą kaupinio bangos ilgį, įmanoma išpildyti (20) ir (21) sąlygas. Remiantis šiais kristalais, sukurti vienmačiai teoriniai modeliai, kurie nagrinėja impulsų sąveiką ir leidžia įvertinti generuojamos signalinės bangos laikinį koherentiškumą. Toliau apžvelgsime ir palyginsime literatūroje pateiktus ŠPG, ŠPO bei ABŠPO prietaisų modeliavimo rezultatus.

1.4.2. Teoriniai modeliai ŠPG

Modelių, skirtų ŠPG, rezultatai yra apibendrinti 5 lentelėje. Joje pateikiami kristalo, kaupinio, šalutinės ir signalinės bangų parametrai. Kristalas apibūdinamas, nurodant jo pavadinimą ir netiesinės sąveikos tipą, kristalo ilgį L , poliavimo periodą Λ ir netiesiškumo koeficientą d_{eff} . Visoms sąveikoje dalyvaujančioms bangoms nurodomi jų bangos ilgiai λ_j ir spektro pločiai Δf_j , kur $j = p, s, i$. Lentelėje nurodoma ir kaupinio impulsų trukmė τ_p bei intensyvumas I_p , ties kuriuo apskaičiuoti sugeneruotų bangų spektrų pločiai. Pažymėtina, kad visais atvejais procesas nagrinėjamas netoli generacijos slenksčio, kur keitimo efektyvumas yra nedidelis, todėl I_p vertės leidžia palyginti skirtingų kristalų ir parametrinių prietaisų generacijos slenksčius. Koherentinei signalinei bangai papildomai nurodomas koherentiškumo prieaugis – kaupinio ir signalinės bangos spektrų pločių santykis.

[22] darbe nagrinėtas 1 cm ilgio II tipo PPKTP kristalas, kurio poliavimo periodas yra 32 μm . Kaupinant kristalą 550 nm bangos ilgio spinduliuote, kuri yra poliarizuota išilgai Y ašies (Y -pol), sugeneruotos 1500 nm signalinė (Y -pol) ir 868 nm šalutinė (Z -pol) bangos. Kaupinio spektro plotis siekė 5 THz. Šalutinės bangos spektro plotis buvo panašus į kaupinio, o signalinės – tik apie 37 GHz. Tai atitinka 135 kartų koherentiškumo prieaugį signalinei bangai, lyginant su pradiniu kaupiniu.

Kitame A. Picozzi ir kolegų darbe [23] išsamiai ištirta grupinio greičio dispersijos įtaka koherentinės signalinės bangos generavimo procesui. Autoriai parodė, kad dispersija atlieka spektrinio filtravimo vaidmenį, kurio metu nekoherentinio kaupinio fliuktuacijos filtruoja signalinės bangos spektrinį stiprinimo kontūrą. Dėl šios priežasties sugeneruotos signalinės bangos koherentiškumas didėja, mažėjant kaupinio koherentiškumui, ir, galiausiai, ji gali tapti net didesnio koherentiš-

kumo nei naudojant koherentinius kaupinimo impulsus. Šiame darbe modeliavimai atlikti PPLN bangolaidyje, kurio poliavimo periodas $26,38\ \mu\text{m}$. Naudojant $1300\ \text{nm}$ bangos ilgio kaupinimo spinduliuotę, kurios spektro plotis siekė $16\ \text{THz}$, sugeneruotos $2973\ \text{nm}$ šalutinė ir $2310\ \text{nm}$ signalinė bangos. Signalinės bangos koherentiškumas gautas dviem eilėmis didesnis nei kaupinimo spinduliuotės, o šalutinės bangos koherentiškumas – panašus į kaupinimo.

S. Wabnitz ir kt. darbe [24] analizuotas PPLN bangolaidis, kurio periodas $30,68\ \mu\text{m}$. Autoriai parodė, kad nekoherentinis $1550\ \text{nm}$ kaupinimas, kurio spektro plotis $28\ \text{THz}$, sugeneruoja $2363\ \text{nm}$ šalutinę bangą, kurios spektro plotis yra netgi didesnis nei paties kaupinimo, ir $4506\ \text{nm}$ signalinę bangą, kurios spektro plotis tesiekia $0,7\ \text{THz}$. Tai atitinka 40 kartų didesnę signalinės bangos koherentiškumą. Be to, nustatyta, kad ženklus koherentiškumo padidėjimas išlieka net ir esant stipriam kaupinimo nuskurdimui. $4\ \text{cm}$ ilgio PPLN kristale signalinės bangos spektrinė amplitudė gauta net 3 kartus didesnė kaupinimo amplitudė. Sumažinus kaupinimo spektro plotį penkis kartus (iki $5\ \text{THz}$), signalinės bangos spektro plotis beveik nepakito, o keitimo efektyvumas išaugo 2,5 karto. Kita vertus, ištirtas atvejis ir be grupinių greičio derinimo, naudojant $34,03\ \mu\text{m}$ periodo PPLN kristalą. Dabar sugeneruotos signalinės bangos spektro plotis išaugo iki $4\ \text{THz}$, kas yra ~ 6 kartus daugiau nei suderinus grupinius greičius. Nepaisant to, bangų keitimo efektyvumas išliko panašus.

5 lentelė. Nekoherentiškai kaupinamų šviesos parametrinių generatorių modelių parametrai.

Parametrai	A. Picozzi ir kt. [22]	A. Picozzi ir kt. [23]	S. Wabnitz ir kt. [24]		
Kristalas	PPKTP, II tipas	PPLN	PPLN		
L	1 cm	-	1 cm		
Λ	32 μm	26,38 μm	30,68 μm	34,03 μm	
d_{eff}	5 pm/V	27 pm/V	27 pm/V		
λ_p	550 nm (Y -pol)	1300 nm	1550 nm		
Δf_p	5 THz (5 nm)	16 THz (90,1 nm)	28 THz (224,4 nm)	5 THz (40,1 nm)	28 THz (224,4 nm)
τ_p	4 ns	-	21 ps		
I_p	-	0,2 MW/cm ²	220 MW/cm ²		
λ_i	868 nm (Z -pol)	2973 nm	2363 nm	2800 nm	
Δf_i	~ 5 THz (12,6 nm)	~ 16 THz (471,6 nm)	-		
λ_s	1500 nm (Y -pol)	2310 nm	4506 nm	3472 nm	
Δf_s	~ 37 GHz (0,3 nm)	~ 160 GHz (2,9 nm)	700 GHz (47,4 nm)	800 GHz (54,2 nm)	4 THz (160,8 nm)
Koherentiškumo prieaugis	~ 135 kartai	~ 100 kartų	~ 40 kartų	~ 6 kartai	~ 7 kartai

1.4.3. Teoriniai modeliai ŠPO

Mokslinėje literatūroje aprašyti keli nuolatine veika kaupinami integruoti ŠPO, kurių veikimas paremtas šviesos sklidimu bangolaidyje. Šių modelių charakteristikos yra pateiktos 6 lentelėje. Visi lentelėje pateikti parametrai sutampa su nurodytais 5 lentelėje, tačiau vietoje kristalo ilgio L nurodomas viso rezonatoriaus ilgis L_R . Bangolaidinė geometrija leidžia padidinti parametrinės sąveikos ilgį ir pasiekti didesnius keitimo efektyvumus. Be to, tokiose struktūrose nepasireiškia difrakciniai reiškiniai, todėl jos laikomos perspektyviais kandidatais nagrinėjamam reiškiniui realizuoti eksperimentiškai.

C. Montes ir bendraautorių darbe [21] išnagrinėti du bangolaidiniai rezonatoriai, suformuoti iš

skirtingų netiesinių kristalų: II tipo Ti:LiNbO_3 ir II tipo PPKTP. Ti:LiNbO_3 kristale kaupinimo ir šalutinės bangos grupiniai greičiai gali būti suderinti, kai abi bangos yra poliarizuotos išilgai paprastosios ašies (o-ašis), o signalinės ir kaupinimo bangų grupinių greičių skirtumas galima ženkliai padidinti, kai signalinė banga poliarizuota pagal nepaprastąją ašį (e-ašis). Tokiu atveju, naudojant 1060 nm bangos ilgio kaupinimą 11,24 μm poliavimo periodo Ti:LiNbO_3 kristale, generuojama 3396 nm šalutinė banga ir 1541 nm signalinė banga. II tipo PPKTP kristale, kurio poliavimo periodas yra 32 μm , koherentinio signalo generacija gali būti realizuota naudojant 550 nm kaupinimą, poliarizuotą išilgai Y ašies (Y -pol). Šiuo atveju sugeneruojamos 868 nm šalutinė (Z -pol) ir 1500 nm signalinė (Y -pol) bangos. Abiem atvejais kaupinimo šaltinių spektrinis plotis siekė apie 16,4 GHz. Kiekvienu atveju sugeneruotos šalutinės bangos spektras gerai atkartojo kaupinimo spektrą, o signalinės bangos spektras gautas ženkliai siauresnis nei kaupinimo: Ti:LiNbO_3 kristale apie 2000 kartų, o PPKTP kristale apie 2500 kartų.

Sekančiame C. Montes ir bendraautorių darbe [25] pasiūlyta koherentinio signalo generacijai Ti:LiNbO_3 kristale naudoti sąveiką, kurioje visos bangos yra poliarizuotos išilgai nepaprastosios ašies, nes tokioje konfigūracijoje galima išnaudoti apie du kartus didesnę efektyvųjį netiesiškumo koeficientą ($d_{\text{eff}} = 12,4 \text{ pm/V}$) ir pasiekti aukštesnius keitimo efektyvumus. Atliktuose modeliavimuose 30,2556 μm poliavimo periodo kristalas buvo kaupinamas 1521 nm bangos ilgio spinduliuote, kurios spektro plotis siekė 86,1 GHz. Osciliavimo slenkstis pasiektas esant 4,03 MW/cm^2 kaupinimo intensyvumui, tačiau analizė atlikta ties 4,19 MW/cm^2 intensyvumu. Sugeneruota 2477 nm bangos ilgio šalutinė banga, kurios spektras atkartojo kaupinimo spektrą, ir 3941 nm signalinė banga, kurios spektro plotis siekė vos 1,7 MHz. Vidutinės signalinės bangos intensyvumo fliktuacijos, lyginant su kaupinimu, sumažėjo net trimis eilėmis. Be to, ištirta sugeneruoto signalo spektrinio pločio priklausomybė nuo kaupinimo intensyvumo. Padidinus intensyvumą iki 4,9 MW/cm^2 ir naudojant panašų kaupinimo spektro plotį 88,49 GHz, (20) nelygė nebetenkinama, todėl signalinės bangos spektras išplinta iki 3,63 GHz, kas yra net ~ 2100 kartų daugiau nei suderinus grupinius greičius. Šioje situacijoje, norint vėl patenkinti (20) nelygę, reikia didinti kaupinimo spektro plotį: su 140,36 GHz gaunamas panašus signalo spektro plotis kaip ir grupinių greičių derinimo atveju, o koherentiškumo prieaugis pasiekia net ~ 79000 kartų.

6 lentelė. Nekoherentiškai kaupinamų šviesos parametrinių osciliatorių modelių parametrai.

Parametrai	C. Montes ir kt. [21]		C. Montes ir kt. [25]		
Kristalas	Ti:LiNbO ₃ , II tipas	PPKTP, II tipas	Ti:LiNbO ₃		
L_R	8 cm	2,3 cm	8 cm		
Λ	11,24 μm	32 μm	30,2556 μm		
d_{eff}	6 pm/V	7,6 pm/V	12,4 pm/V		
λ_p	1060 nm (o-ašis)	550 nm (Y-pol)	1521 nm		
Δf_p	16,4 GHz (0,06 nm)	16,4 GHz (0,02 nm)	86,1 GHz (0,66 nm)	67,69 GHz (0,52 nm)	140,36 GHz (1,08 nm)
τ_p	Nuolatinė veika	Nuolatinė veika	Nuolatinė veika		
I_p	0,45 MW/cm ²	0,625 MW/cm ²	4,193 MW/cm ²	4,903 MW/cm ²	
λ_i	3396 nm (o-ašis)	868 nm (Z-pol)	2477 nm		
Δf_i	~ 16 GHz (0,62 nm)	~ 16 GHz (0,04 nm)	~ 86 GHz (1,76 nm)	~ 68 GHz (1,39 nm)	~ 140 GHz (2,87 nm)
λ_s	1541 nm (e-ašis)	1500 nm (Y-pol)	3941 nm		
Δf_s	~ 8,2 GHz (65 pm)	~ 6,6 GHz (49,5 pm)	1,72 MHz (0,09 pm)	3,59 GHz (186 pm)	<1,78 MHz (0,09 pm)
Koherentiškumo prieaugis	~ 2000 kartų	~ 2500 kartų	> 50000 kartų	~ 19 kartų	> 79000 kartų

1.4.4. Teoriniai modeliai ABŠPO

Nekoherentiškai kaupinami ABŠPO irgi pasižymi savybe generuoti koherentinę bangą. Priešingai nei ŠPG ir ŠPO, ši koherentinė banga visada yra generuojama priešinga kaupinimui kryptimi (atgalinė banga), todėl koherentinė gali būti tiek signalinė, tiek šalutinė banga. Modelių, nagrinėjančių šią sąveiką, rezultatai apibendrinti 7 lentelėje. Čia pateikti tie patys parametrai kaip ir 5 lentelėje, tačiau signalinės ir šalutinės bangų pavadinimai yra pakeisti į priekinę ir atgalinę.

G. Strömqvist ir kt. darbe [15] tirti du 6,5 mm ilgio PPKTP kristalai su skirtingais poliavimo periodais: 800 nm ir 456,7 nm. Pirmuoju atveju, kaupinant kristalą 862 nm bangos ilgio spinduliuote, kaupinimo ir priekinės bangos grupiniai greičiai nėra suderinti ($u_p/c = 0,5269$ ir $u_f/c = 0,5372$),

tuo tarpu antruoju atveju, parinkus 1060 nm kaupinimo bangos ilgį, šie greičiai yra beveik lygūs: $u_p/c \approx u_f/c = 0,5341$. Pirmame kristale buvo naudojami kaupinimo impulsai, kurių trukmė 54 ps, o spektro plotis 4,04 THz. Esant $3,5 \text{ GW/cm}^2$ kaupinimo intensyvumui, pasiekti 4 % priekinės ir 1,7 % atgalinės bangos keitimo efektyvumai. 1218 nm bangos ilgio priekinės bangos spektro plotis siekė 1,42 THz, o 2946 nm bangos ilgio atgalinės bangos – tik 33 GHz, t. y. apie 122 kartus siauresnis nei kaupinimo spektro plotis. Antrame kristale naudoti 50 ps impulsai, kurių spektro plotis buvo gerokai didesnis (23 THz). Esant tam pačiam kaupinimo intensyvumui, gauti šiek tiek mažesni keitimo efektyvumai: 1,5 % priekinei ir 2,5 % atgalinei bangai. Priekinės bangos spektro plotis siekė $\sim 10 \text{ THz}$, o atgalinės bangos – dar siauresnis nei pirmuoju atveju (23 GHz), kas atitinka apie 1000 kartų koherentiškumo prieaugį.

C. Montes ir kt. darbe [26] sukurtas modelis skirtas nagrinėti koherentinio signalo generacijai 1,25 cm PPGaN bangolaidyje, kurio periodas 335 nm. Esant tokiam periodui, kaupinimo ir priekinės bangos greičiai yra suderinti. Kadangi tokio mažo periodo struktūrų gamyba yra sudėtinga, modelyje įskaityti ir gamybos defektai. Naudoti 1060 nm bangos ilgio impulsai, kurių trukmė 150 ps, o spektro plotis 4,36 THz. Osciliavimo slenkstis pasiektas ties 2 GW/cm^2 kaupinimo intensyvumu. Tokiomis sąlygomis sugeneruotos 1562 nm bangos ilgio atgalinė ir 3298 nm priekinė bangos. Idealiu atveju, kai kristale nėra defektų, esant 15 % kaupinimo nusukdinimui, atgalinės bangos spektro plotis gaunamas $\sim 25 \text{ GHz}$, t. y. maždaug 173 kartų siauresnis nei kaupinimo. Įskaičius gardelės defektus, pastebėta, kad defektuotoms sritims didėjant, keitimo efektyvumas mažėja, o koherentiškumo prieaugis auga. Kai gardelės defektai atitinka ketvirtį poliavimo periodo (80 nm), pasiekiamas didžiausias koherentiškumo prieaugis atgalinei bangai: jos spektro plotis sumažėja iki 9,72 GHz, kas atitinka ~ 449 kartų koherentiškumo padidėjimą.

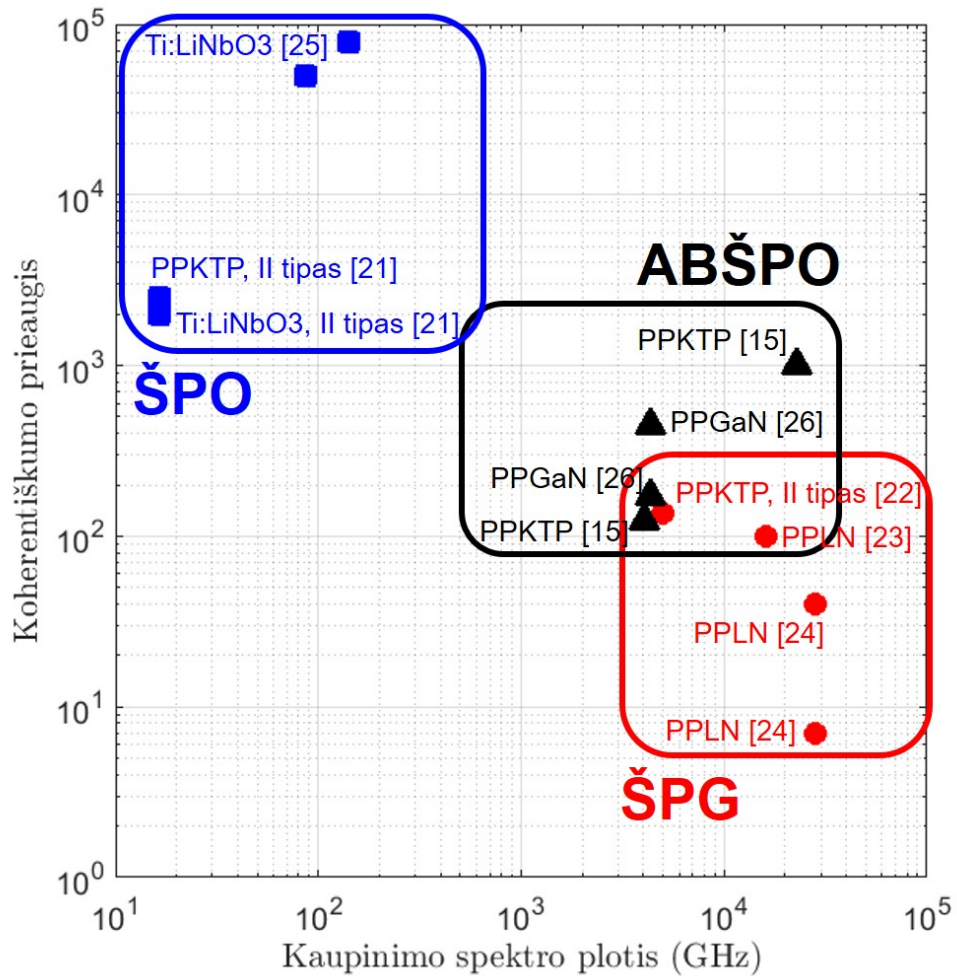
7 lentelė. Nekoherentiškai kaupinamų atgalinės bangos parametrinių šviesos osciliatorių modelių parametrai.

Parametrai	G. Strömqvist ir kt. [15]		C. Montes ir kt. [26]	
Kristalas	PPKTP		PPGaN	
L	6,5 mm		1,25 cm	
Λ	800 nm	456,7 nm	335 nm	
d_{eff}	9 pm/V		5 pm/V	
λ_p	862 nm	1060 nm	1060 nm	
Δf_p	4,04 THz (10 nm)	23 THz (86,2 nm)	4,36 THz (16,3 nm)	
τ_p	54 ps	50 ps	150 ps	
I_p	3,5 GW/cm ²		2 GW/cm ²	4 GW/cm ²
λ_f	1218 nm	2883 nm	3298 nm	
Δf_f	1,42 THz (7 nm)	~ 10 THz (277,2 nm)	-	4,62 THz (167,6 nm)
λ_b	2946 nm	1676 nm	1562 nm	
Δf_b	~ 33 GHz (955 pm)	~ 23 GHz (216 pm)	25,2 GHz (205 pm)	9,72 GHz (79 pm)
Koherentiškumo prieaugis	~ 122 kartai	~ 1000 kartų	~ 173 kartai	~ 449 kartai

1.4.5. Teorinių modelių palyginimas

Koherentiškumo prieaugis parodo, kiek siauresnis yra sugeneruotos koherentinės bangos spektro plotis, lyginant su kaupimu. Aptartiems prietaisams jį galima palyginti nubraižius grafiką logaritminiame mastelyje. Jis yra pateiktas 8 pav. Iš grafiko matyti, kad ŠPG kaupinimo spektras turi būti labai platus (kelių THz eilės), norint pasiekti apie 100 kartų koherentiškumo prieaugius signalinei bangai. Kita vertus, ŠPO gali pasiekti kelių dešimčių tūkstančių kartų koherentiškumo prieaugius, naudojant daug siauresnius kaupinimo spektrus (apie 100 MHz). Tuo tarpu ABŠPO, kurie yra vieno praėjimo, beveidrodiniai osciliatoriai, rezultatai pakliūna tarp šių prietaisų. Su

ABŠPO pasiekiami kelių šimtų kartų koherentiškumo prieaugiai, kai nekoherentinių kaupinimo impulsų spektro plotčiai siekia kelis THz.



8 pav. Koherentiškumo prieaugio priklausomybė nuo nekoherentinio kaupinimo spektro pločio apžvelgtuose straipsniuose.

1.4.6. Eksperimentai ABŠPO

Eksperimentinių tyrimų, kuriuose buvo realizuoti aptarti reiškiniai su tikrais nekoherentiniais kaupinimo šaltiniais, literatūroje rasti nepavyko. Tačiau dėl supaprastintų grupinio greičio derinimo sąlygų ABŠPO suteikė galimybes atlikti eksperimentus su plataus spektro, tiesiškai čirpuotais kaupinimo impulsais. Šiose demonstracijose buvo siekiama ištirti ABŠPO fazės perdavimo mechanizmą, kai kaupinimo fazinė moduliacija yra visiškai perduodama priekinei bangai. Tokiu atveju generuojama siauro spektro atgalinė banga, neturinti kaupinimo fazinės moduliacijos. Apibendrinti eksperimentų rezultatai yra pateikti 8 lentelėje.

G. Strömqvist ir kt. [14] eksperimentinėje demonstracijoje buvo naudojamas PPKTP kristalas, kurio ilgis yra 6,5 mm, o periodas 800 nm. Jis buvo kaupinamas čirpuotais 815 nm bangos ilgio ir 480 ps trukmės impulsais, kurių spektro plotis 1,21 THz, o čirpo parametras lygus 15,7 mrad/ps². Slenkstis pasiektas ties 0,8 GW/cm² kaupinimo intensyvumu ir sugeneruotos 1123 nm bangos ilgio priekinė ir 2952 nm atgalinė bangos. Kryžminės koreliacijos matavimai parodė, kad kaupinimo

čirpas buvo efektyviai perduotas priekinei bangai – jos čirpo parametras gautas 16 mrad/ps^2 . Šios bangos spektro plotis siekė 410 GHz , o impulso trukmė buvo 160 ps . Tuo tarpu atgalinė banga beveik neįgijo fazinės moduliacijos: jos spektro plotis tesiekė 13 GHz , o tai atitinka beveik 93 kartus siauresnį spektrą, lyginant su kaupinimo impulsu.

Kitame G. Strömqvist ir bendraautorių eksperimente [15] naudotas tas pats ABŠPO kristalas ir ištirtos dvi kaupinimo konfigūracijos. Pirmojoje naudoti 815 nm bangos ilgio kaupinimo impulsai, kurių trukmė siekė 66 ps , spektro plotis $1,1 \text{ THz}$, o čirpo parametras -100 mrad/ps^2 . Osciliavimo slenkstis pasiektas esant $1,4 \text{ GW/cm}^2$ kaupinimo intensyvumui. Kai intensyvumas buvo pusantro karto didesnis už slenkstį, kaupinimo nuskurdinimas siekė 28% . Sugeneruotos 1126 nm priekinės bangos spektro plotis buvo 320 GHz , o 2952 nm atgalinės – 27 GHz . Tai reiškia ~ 41 karto spektro susiaurinimą atgalinei bangai. Antrojoje konfigūracijoje išbandytas ABŠPO veikimas, kai kaupinimo impulsai turi stiprią fazinę moduliaciją: čirpo parametras lygus -490 mrad/ps^2 . Dėl jos kaupinimo spektras buvo maždaug keturis kartus platesnis nei pirmuoju atveju: 858 nm bangos ilgio impulso, kurio trukmė 50 ps , spektro plotis siekė $\sim 4 \text{ THz}$. Osciliavimo slenkstis išliko panašus kaip pirmojoje konfigūracijoje, tačiau, esant tam pačiam intensyvumui, kaupinimo nuskurdinimas buvo kiek mažesnis – 21% . Sugeneruotos priekinės bangos bangos ilgis buvo 1218 nm , o spektro plotis net $1,62 \text{ THz}$. Atgalinės bangos bangos ilgis buvo 2946 nm , o spektro plotis 59 GHz ; tai yra ~ 68 kartų siauresnis nei kaupinimo bangos spektras.

A. Viotti ir kt. [27] ištyrė sugeneruotos priekinės bangos impulsų suspaudimo galimybes. Eksperimente 509 nm periodo PPKTP kristalas, kurio ilgis $7,3 \text{ mm}$, buvo kaupinamas 800 nm bangos ilgio ir 240 ps trukmės impulsais, kurių spektro plotis buvo $3,58 \text{ THz}$, o čirpo parametras 59 mrad/ps^2 . Osciliavimo slenkstis pasiektas esant $0,72 \text{ GW/cm}^2$ intensyvumui ir sugeneruotos 1400 nm priekinė bei 1870 nm atgalinės bangos. Priekinės bangos spektro plotis buvo artimas kaupinimo ir siekė $1,91 \text{ THz}$, o atgalinės buvo maždaug 92 kartus siauresnis – tik 28 GHz . Sugeneruoto priekinio impulso trukmė siekė 150 ps . Šį impulsą suspaudus difraccinių gardelių pora, gautas vos $1,3 \text{ ps}$ trukmės impulsas, kurio maksimali galia siekė net $4,6 \text{ MW}$.

8 lentelė. Plataus spektro impulsais kaupinamų atgalinės bangos šviesos parametrinių osciliatorių eksperimentai.

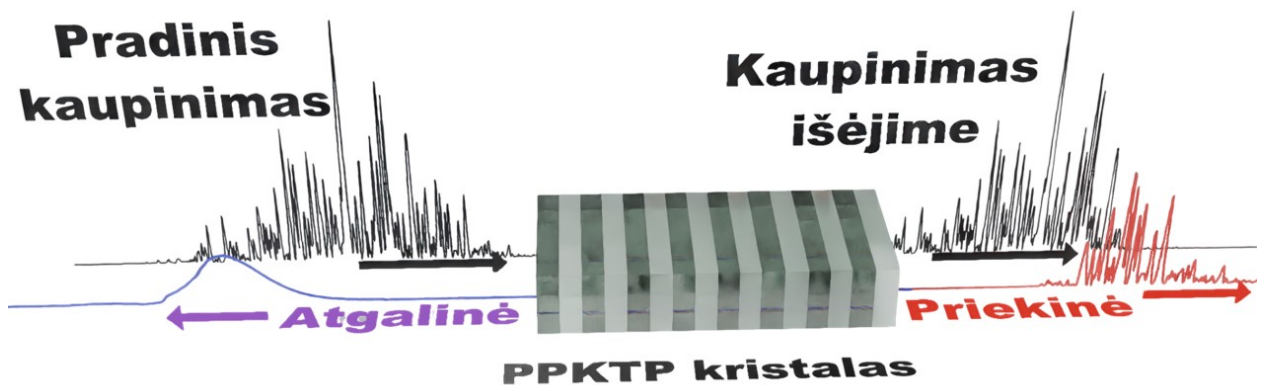
Parametrai	G. Strömqvist ir kt. [14]	G. Strömqvist ir kt. [15]		A. Viotti ir kt. [27]
Kristalas	PPKTP	PPKTP		PPKTP
L	6,5 mm	6,5 mm		7,3 mm
Λ	800 nm	800 nm		509 nm
d_{eff}	9 pm/V	9 pm/V		-
λ_p	815 nm	815 nm	858 nm	800 nm
Δf_p	1,21 THz (2,7 nm)	1,1 THz (2,4 nm)	4 THz (9,8 nm)	2,58 THz (5,5 nm)
τ_p	480 ps	66 ps	50 ps	240 ps
$d\omega_p/dt$	15,7 mrad/ps ²	-100 mrad/ps ²	-490 mrad/ps ²	59 mrad/ps ²
I_{th}	0,8 GW/cm ²	1,4 GW/cm ²	1,5 GW/cm ²	0,72 GW/cm ²
λ_f	1123 nm	1126 nm	1218 nm	1400 nm
Δf_f	410 GHz (2,7 nm)	320 GHz (1,3 nm)	1,62 THz (7,9 nm)	1,91 THz (12,5 nm)
$d\omega_p/dt$	16 mrad/ps ²	-	-	59,7 mrad/ps ²
λ_b	2952 nm	2952 nm	2946 nm	1870 nm
Δf_b	13 GHz (0,4 nm)	27 GHz (0,8 nm)	59 GHz (1,7 nm)	28 GHz (0,3 nm)
Spektro susiaurinimas	~ 93 kartai	~ 41 kartas	~ 68 kartai	~ 92 kartai

2. Tyrimo metodika

Šiame skyriuje pristatoma sumodeliuoto eksperimento koncepcija, tribangės sąveikos lygtys ir jų pradinės sąlygos, aptariami pritaikyti modeliavimo metodai ir Rymano integravimo metodo principas.

2.1. Sumodeliuoto eksperimento schema

Šio tyrimo metu modeliuotas eksperimentas, kurio schema pateikta 9 pav. 2 cm ilgio periodiškai poliuotas kalio titanilo fosfato (PPKTP) kristalas, kurio poliavimo periodas $\Lambda = 427$ nm buvo kaupinamas impulsais, kurių trukmė pusės intensyvumo maksimumo lygyje (angl. *full width at half maximum, FWHM*) yra 220 ps (atitinka $\sim 93,4$ ps vidutinę kvadratinę trukmę), pasikartojimo dažnis 1 kHz, o pluošto radiusas $1/e^2$ lygyje 125 μm . Tirti koherentiniai ir nekoherentiniai impulsai. Koherentiniai impulsai buvo artimi spektriškai ribotiems (jų vidutinis kvadratinis spektro plotis siekė 1 GHz), o nekoherentinių impulsų spektro plotis buvo 20 GHz. Darbe nagrinėti du kaupinimo bangos ilgiai: pagrindinė (1064 nm) ir antroji (532 nm) Nd:YAG mikrolazerio harmonikos. Kadangi osciliavimo slenksčiai priklauso nuo kaupinimo bangos ilgio, abiem harmonikoms kaupinimo energijos parinktos skirtingos: 70 μJ pagrindinei (PH) ir 19 μJ antrajai (AH) harmonikai. Jos maždaug 1,35 karto viršijo energijas, reikalingas pasiekti osciliavimo slenksčius koherentinio kaupinimo atveju. Visi modelio parametrai pateikti 9 lentelėje.



9 pav. Principinė sumodeliuoto eksperimento schema.

9 lentelė. Kaupinimo ir PPKTP kristalo parametrai.

Žymėjimas	Parametras	PH	AH
τ_p	kaupinimo impulso trukmė (FWHM)	220 ps	
r_p	kaupinimo pluošto radiusas ($1/e^2$)	125 μm	
E_p	kaupinimo bangos energija	19 μJ	70 μJ
L	kristalo ilgis	2 cm	
Λ	kristalo poliavimo periodas	427 nm	
T	kristalo temperatūra	25 °C	
d_{eff}	netiesiškumo koeficientas	3,18 pm/V	

2.2. Tribangės sąveikos lygtys

Netiesinė tribangė sąveika ABŠPO kristale aprašyta tribangėmis sąveikos lygtimis Dekarto koordinatų sistemoje:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial A_f}{\partial z} + \frac{1}{u_f} \frac{\partial A_f}{\partial t} &= i\kappa A_p A_b^*, \\
 \frac{\partial A_b}{\partial z} - \frac{1}{u_b} \frac{\partial A_b}{\partial t} &= -i\kappa A_p A_f^*, \\
 \frac{\partial A_p}{\partial z} + \frac{1}{u_p} \frac{\partial A_p}{\partial t} &= i\kappa A_f A_b,
 \end{aligned} \tag{23}$$

čia koordinatė z yra kryptis išilgai kristalo, o t žymi laiką. Parametrai u_j , kur $j = f, b, p$, yra atitinkamų bangų (A_f , A_b , A_p) grupiniai greičiai, kur f (angl. *forward*), b (angl. *backward*) ir p (angl. *pump*) žymi priekinę, atgalinę ir kaupinimo bangas. Netiesinės sąveikos koeficientas apibrėžiamas kaip

$$\kappa = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\omega_{p0}\omega_{f0}\omega_{b0}}{n_{p0}n_{f0}n_{b0}}} d_{\text{eff}},$$

kur c – šviesos greitis vakuume, ω_{j0} – bangų kampiniai dažniai, n_{j0} – lūžio rodikliai, d_{eff} – efektinis netiesiškumas. Lygtyse laikoma, kad fazinis nederinimas $\Delta k = k_{p0} - k_{f0} + k_{b0} - K$ yra lygus nuliui.

Šios lygtys aprašo bangų amplitudžių evoliuciją erdvėje ir laike, joms sklindant netiesiniu kristalu. Kairiosios lygčių pusės nariai nusako bangų sklidimą išilgai z ašies bei impulsų išsiskyrimą laike dėl grupinių greičių neatitikimo. Dešinėje lygybės pusėje esantis narys apibūdina netiesinę tribangę sąveiką.

Į grupinių greičių dispersijos reiškinį šiame darbe neatsižvelgta, kadangi jo įtaka nagrinėjamiems impulsams 2 cm PPKTP kristale yra maža. Dėl grupinių greičių dispersijos impulso, sklindančio netiesiniu kristalu, trukmė turėtų didėti, kadangi skirtingo dažnio spektrinės komponentės būtų verčiamos sklisti nevienodais grupiniais greičiais. Dispersijos įtaką galime įvertinti apskaičiuodami dispersinį ilgį, kuris parodo, kokį atstumą turi nusklisti Gausinis impulsas, kad jo trukmė padidėtų $\sqrt{2}$ karto [28]. Nekoherentiniams kaupinimo šaltiniams, dispersinį ilgį galime apibrėžti taip:

$$L_D = \frac{1}{|\beta_2|(2\pi\sigma_f)^2}, \quad (24)$$

čia β_2 yra antros eilės dispersijos koeficientas, o σ_f – vidutinis kvadratinis spektro plotis. Kadangi didžiausi šiame darbe nagrinėjami spektro pločiai siekia 200 GHz, 10 lentelėje pateikti dispersiniai ilgiai, laikant, kad kiekvienos sąveikaujančios bangos spektro plotis yra būtenk toks. Lentelės duomenys patvirtina, kad net ir esant plačiausiam spektrui, dispersinis ilgis išlieka gerokai didesnis už kristalo ilgį, todėl dispersijos sukelti impulso formos iškraipymai modelyje yra nereikšmingi.

10 lentelė. Antros eilės dispersijos koeficientai β_2 ir dispersiniai ilgiai L_D PPKTP kristale (spektro plotis $\sigma_f = 200$ GHz).

Banga	β_2	L_D
Kaupinimas	$1,715 \times 10^{-25} \text{ s}^2/\text{m}$	3,69 m
Priekinė	$-8,396 \times 10^{-25} \text{ s}^2/\text{m}$	0,75 m
Atgalinė	$5,486 \times 10^{-26} \text{ s}^2/\text{m}$	11,5 m

2.3. Modeliavimo metodai

Modelyje tribangės sąveikos lygtys, kurios yra pateiktos (23) išraiškoje, buvo sprendžiamos dviem modeliavimo metodais: baigtinių skirtumų ir dalinių žingsnių. Panagrinėkime, kuo jie skiriasi.

2.3.1. Baigtinių skirtumų metodas

Taikant baigtinių skirtumų metodą, laikinės ir erdvinės išvestinės (23) lygtyse diskretizuojamos – jos užrašomos kaip amplitudžių skirtumas per tam tikrą intervalą. Darbe naudota antros eilės tikslumo centrinių skirtumų schema, kurioje amplitudžių pokytis įvertinamas per du laiko ar erdvės žingsnius. Tai leidžia kiekvienos bangos amplitudes naujame taške apskaičiuoti pagal amplitudes gretimuose laiko ir erdvės taškuose.

Panagrinėkime baigtinių skirtumų metodo modeliavimo schemą. Iš (23) lygčių sistemos paimkime lygtį, kuri aprašo atgalinės bangos amplitudės evoliuciją:

$$\frac{\partial A_b}{\partial t} = u_b \frac{\partial A_b}{\partial z} + iku_b A_p A_f^*, \quad (25)$$

ir ją diskretizuokime centrinių skirtumų metodu:

$$\frac{A_b(t + \Delta t, z) - A_b(t - \Delta t, z)}{2\Delta t} = u_b \frac{A_b(t, z + \Delta z) - A_b(t, z - \Delta z)}{2\Delta z} + \hat{N}(A_p, A_f), \quad (26)$$

čia $\hat{N}(A_p, A_f) = iku_b A_p A_f^*$ žymi netiesinės sąveikos narius. Apibrėžkime amplitudes naujame, dabartiniame ir praeitame laiko žingsniuose: $A_b^{n+1}(z) = A_b(t + \Delta z)$, $A_b^n(z) = A_b(t, z)$ ir $A_b^{n-1}(z) = A_b(t - \Delta z)$. Tuomet gauname

$$\frac{A_b^{n+1}(z) - A_b^{n-1}(z)}{2\Delta t} = u_b \frac{A_b^n(z + \Delta z) - A_b^n(z - \Delta z)}{2\Delta z} + \hat{N}(A_p^n, A_f^n), \quad (27)$$

ir galime išreikšti ieškomą atgalinės bangos amplitudę A_b^{n+1} naujame laiko žingsnyje:

$$A_b^{n+1}(z) = A_b^{n-1}(z) - \frac{u_f \Delta t}{\Delta z} [A_b^n(z + \Delta z) - A_b^n(z - \Delta z)] + 2\Delta t \hat{N}(A_p^n, A_f^n). \quad (28)$$

Siekiant pagerinti modelio stabilumą, netiesiniuose nariuose $\hat{N}(A_p^n, A_f^n)$ naudojamos amplitudės skaičiuotos kaip vidurkiai gretimuose erdvės taške. Pavyzdžiui, kaupinimo amplitudė dabartiniu laiko momentu taške z skaičiuota kaip $A_p^n(z) = [A_p^n(z + \Delta z) - A_p^n(z - \Delta z)]/2$.

Būtina paminėti, kad taikant centrinių skirtumų schemą, amplitudės yra neapibrėžtos dviejuose taškuose: amplitudė $A_b^{n-1}(z)$ taške $t = 0$ ir amplitudė $A_b^n(z + \Delta z)$ paskutiniame žingsnyje $z = L$, kur L yra kristalo ilgis. Šiuose taškuose pritaikyta mažiau tiksli pirmos eilės skirtumų schema:

$$\frac{A_b^{n+1}(z) - A_b^n(z)}{\Delta t} = u_b \frac{A_b^n(z) - A_b^n(z - \Delta z)}{\Delta z} + \hat{N}(A_p^n, A_f^n). \quad (29)$$

Modelyje diskretizavimo žingsniai parinkti atsižvelgiant į kaupinimo impulso spektro plotį. Kai kaupinimas yra nekoherentinis, jo spektro plotis yra didesnis, todėl, siekiant išvengti nestabilumų, susijusių su spektrinio lango ribojimais, teko mažinti laikinį žingsnį Δt . Spektrinio lango plotis $2a_\omega$ yra atvirkščiai proporcingas laikiniam žingsniui: $a_\omega = \pi/\Delta t$. Kita vertus, smulkinant laikinį žingsnį, mažinamas ir erdvinis žingsnis, kuris yra parinktas taip, kad tenkintų Courant stabilumo sąlygą: $\Delta z = u_b \Delta t$. Toks žingsnių parinkimas pagerina modelio stabilumą ir neleidžia bangoms sklisti greičiau nei nurodytas grupinis greitis [29].

Modeliuojant koherentinį kaupinimą, 2 cm kristalas suskirstytas į 2299 dalis su išilginiu žingsniu $\Delta z = 8,7 \mu\text{m}$, o laiko intervalas $t \in [0, 5\tau_p)$ padalintas į 20480 dalių su $\Delta t = 53,7 \text{ fs}$. Ne-koherentinio kaupinimo atveju diskretizavimas buvo du kartus smulkesnis: kristalas suskirstytas į 4597 dalis su žingsniu $4,35 \mu\text{m}$, o laikinė erdvė į 40960 dalių su žingsniu $26,85 \text{ fs}$. Šie žingsniai parinkti taip, kad impulsų laikiniuose profiliuose nebūtų nefizikinių svyravimų, atsirandančių dėl diskretizavimo paklaidų.

Naudojant šešių branduolių Intel Core i5-8600K procesorių, tūkstančio simuliacijų atlikimas baigtinių skirtumų metodu užtrunka apie tris valandas koherentiniu ir apie vienuolika valandų nekoherentiniu atveju.

2.3.2. Dalinių žingsnių metodas

Taikant dalinių žingsnių metodą, kristalo ilgis L padalijamas į N smulkių žingsnių Δz , kuriuose tiesinė ir netiesinė tribangės sąveikos lygčių dalys sprendžiamos atskirai. Tiesiniame žingsnyje įskaitomas bangų sklaidimas išilgai z ašies, o netiesiniame – parametrinė bangų sąveiką. Modelyje sukuriamas laikinis ciklas, kurio kiekviename žingsnyje pirmiausia įskaitoma tiesinių narių įtaka per intervalą Δz , o gautos amplitudės naudojamos kaip pradinės sąlygos netiesinei lygčiai spręsti tame pačiame Δz intervale.

Detaliau aptarkime (23) lygčių sistemos sprendimą dalinių žingsnių metodu. Vėl nagrinėkime atgalinės bangos amplitudės A_b lygtį:

$$\frac{\partial A_b}{\partial t} = u_b \frac{\partial A_b}{\partial z} + i u_b \kappa A_p A_f^*. \quad (30)$$

Jei erdvinis žingsnis Δz yra pakankamai mažas, ši lygtis gali būti išskaidyta į dvi atskiras lygtis:

$$\begin{cases} \frac{\partial A_b}{\partial t} = u_b \frac{\partial A_b}{\partial z}, \\ \frac{\partial A_b}{\partial t} = i \kappa u_b A_p A_f^*. \end{cases} \quad (31)$$

Pirmoji šios sistemos lygtis yra bangos lygtis ir jos sprendinys laiko momentu $t + \Delta t$ yra tapatus ankstesnei amplitudės vertei, paslinktai erdvėje:

$$A_b(t + \Delta t, z) = A_b(t, z + \Delta z). \quad (32)$$

Vadinasi, norint išspręsti pirmąją lygtį, pakanka perstumti bangos amplitudę per dydį Δz į dešinę (priekinei ir kaupinimo bangoms) arba į kairę (atbulinei bangai) išilgai z ašies. Modelyje šis poslinkis įgyvendinamas MATLAB funkcija `circshift`. Tačiau erdvinis žingsnis $\Delta z = u_p \Delta t$ yra susietas su laikiniu žingsniu per kaupinimo bangos grupinį greitį, todėl visos bangos kiekviename žingsnyje yra perstumiamos per identišką atstumą Δz , t.y. sklinda kaupinimo bangos grupiniu greičiu.

Antroji lygtis išspręsta taikant kintamo žingsnio Runge-Kutta metodą, pasitelkiant MATLAB funkciją `ode45`. Jame užtikrinamas aukštas skaičiavimų tikslumas, automatiškai parenkant integravimo žingsnį. Integravimo žingsnis nustatomas lyginant ketvirtos ir penktos eilės Runge-Kutta metodų rezultatus [30].

Sukurtame ABŠPO dalinių žingsnių modelyje 2 cm ilgio kristalas irgi padalintas skirtingai, esant koherentiniam ir nekoherentiniam kaupinimo impulsui. Koherentiniu atveju kristalas padalintas į 94 lygias dalis su išilginiu žingsniu $\Delta z = 1000 \times \Lambda/2 = 213,5 \mu\text{m}$, o laikinė erdvė $t \in [0, 5\tau_p)$ padalinta į 1024 lygias dalis su žingsniu $\Delta t = 1,33 \text{ ps}$. Nekoherentiniam kaupimui modeliuoti panaudota du kartus smulkesnė diskretizacija. Kristalas padalintas į 188 dalis su žingsniu $\Delta z = 500 \times \Lambda/2 = 106,75 \mu\text{m}$, o laikinis intervalas į 2048 dalis su žingsniu $\Delta t = 0,67 \text{ ps}$.

Tuo pačiu kompiuteriu atlikti tūkstantį simuliacijų dalinių žingsnių metodu, kai kaupinimas yra nekoherentinis, užtrunka maždaug 105 minutes. Tai yra apie šešis kartus greičiau nei baigtinių

skirtumų metodu.

2.4. Kraštinės sąlygos

Kraštinės sąlygos priekinės bangos amplitudei kristalo pradžioje ($z = 0$) ir atgalinės bangos amplitudei kristalo pabaigoje ($z = L$) aprašytos kaip [31] darbe. Jos imituoja kvantinį triukšmą ir aprašomos šiomis išraiškomis:

$$\begin{aligned} A_f(t, z = 0) &= \sqrt{\frac{\hbar}{\varepsilon_0 L \pi r_p^2}} \sum_{q=-N_q}^{N_q} \exp\left(iq\Delta\omega t + i\varphi_q^{(f)}\right), \\ A_b(t, z = L) &= \sqrt{\frac{\hbar}{\varepsilon_0 L \pi r_p^2}} \sum_{q=-N_q}^{N_q} \exp\left(iq\Delta\omega(L/u + t) + i\varphi_q^{(b)}\right), \end{aligned} \quad (33)$$

čia $\varphi^{(f,b)}$ yra atsitiktinė fazė, q yra sveikieji skaičiai, nusakantys laikines harmonikas. Skaičiai $2N_q + 1$ atitinka harmonikų skaičių laikinių dažnių komponentėse. Šios harmonikos yra ekvidistanciškai išdėliotos intervalais $\Delta\omega$. $\hbar$ yra redukuota Planko konstanta, ε_0 yra vakuumo dielektrinė skvarba, o r_p yra kaupinimo pluošto radiusas.

Kaupinimo impulso amplitudė kristalo pradžioje aprašyta Gauso funkcija:

$$A_p(t, z = 0) = a_0 A_N(t) \exp\left(-2 \ln(2) \frac{(1,5\tau_p - t)^2}{\tau_p^2}\right), \quad (34)$$

čia pradinė amplitudė a_0 apskaičiuota pagal kaupinimo intensyvumą $a_0 = \sqrt{\frac{2I_p}{c\varepsilon_0 n_p}}$. Kaupinimo impulso trukmė τ_p (pusės intensyvumo maksimumo lygyje) ir kaupinimo pluošto radiusas r_p ($1/e^2$ lygyje) nurodyti 9 lentelėje. Poslinkis laike per $1,5\tau_p$ yra atliekamas tam, kad impulsas tolydžiai eitų į kristalą nuo jo krašto link vidaus. $A_N(t)$ yra triukšminė kaupinimo amplitudė. Koherentiniam kaupinimui $A_N(t) = 1$, o nekoherentiniam ji aprašo Gauso-Gauso triukšmą:

$$A_N(t) = \frac{1}{\sqrt{N_r}} \sum_{r=1}^{N_r} \exp(i\omega_r t + i\varphi_r), \quad (35)$$

čia N_r yra spektrinių modų skaičius. Normavimas užtikrina, kad nepriklausomai nuo to, kiek modų yra sudedama, bendras kaupinimo intensyvumo vidurkis išlieka lygus 1. ω_r yra atsitiktinis dažnis, pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį (standartinis nuokrypis $\Delta\omega_r/\sqrt{2}$), o φ_r yra atsitiktinė fazė, tolygiai pasiskirsčiusi intervale $[0, 2\pi]$. Keičiant $\Delta\omega_r$, galima valdyti kaupinimo spektro plotį.

2.5. Rymano integravimo metodas

Rymano metodas yra skirtas spręsti antros eilės hiperbolinėms lygtims su dalinėmis išvestinėmis [32]. Šiuo metodu ieškoma funkcijos $Z = Z(x,y)$, kuri tenktų šią lygtį:

$$P(Z) = \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial Z}{\partial x} + b \frac{\partial Z}{\partial y} + cZ = 0, \quad (36)$$

čia P yra diferencialinis operatorius, o $a = a(y)$, $b = b(x)$ ir $c = c(x,y)$. Jam galima surasti jungtinį diferencialinį operatorių Q , kuris tenkina panašią lygtį funkcijai $R = R(x,y)$:

$$Q(R) = \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - a \frac{\partial R}{\partial x} - b \frac{\partial R}{\partial y} + cR = 0. \quad (37)$$

Tada galima užrašyti tokį skirtumą ir sugrupuoti narius:

$$\begin{aligned} & \iint_s [RP(Z) - ZQ(R)] dx dy \\ &= \iint_s \left[R \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} - Z \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} + a \left(R \frac{\partial Z}{\partial x} + Z \frac{\partial R}{\partial x} \right) + b \left(R \frac{\partial Z}{\partial y} + Z \frac{\partial R}{\partial y} \right) \right] dx dy = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Du pirmuosius (38) išraiškos narius galima pakeisti diferencijuojant pagal x ir pagal y :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(R \frac{\partial Z}{\partial y} - Z \frac{\partial R}{\partial y} \right) = R \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} - Z \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial R}{\partial y} \right), \quad (39)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(R \frac{\partial Z}{\partial x} - Z \frac{\partial R}{\partial x} \right) = R \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} - Z \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial R}{\partial y} \right). \quad (40)$$

Šias lygtis sudėję ir padalinę iš dviejų, gauname

$$R \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} - Z \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(R \frac{\partial Z}{\partial y} - Z \frac{\partial R}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(R \frac{\partial Z}{\partial x} - Z \frac{\partial R}{\partial x} \right) \right] \quad (41)$$

O kiti du nariai atitinka sandaugų išvestines:

$$a \left(R \frac{\partial Z}{\partial x} + Z \frac{\partial R}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (aZR), \quad (42)$$

ir

$$b \left(R \frac{\partial Z}{\partial y} + Z \frac{\partial R}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (bZR). \quad (43)$$

Sudėję (41)-(43) išraiškas į (38) lygtį gauname

$$\begin{aligned} & \iint_s [RP(Z) - ZQ(R)] dx dy \\ &= \iint_s \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(R \frac{\partial Z}{\partial y} - Z \frac{\partial R}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(R \frac{\partial Z}{\partial x} - Z \frac{\partial R}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} (aZR) + \frac{\partial}{\partial y} (bZR) \right\} dx dy = 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Pažymėkime

$$M = \frac{1}{2} \left(R \frac{\partial Z}{\partial y} - Z \frac{\partial R}{\partial y} \right) + aRZ, \quad (45)$$

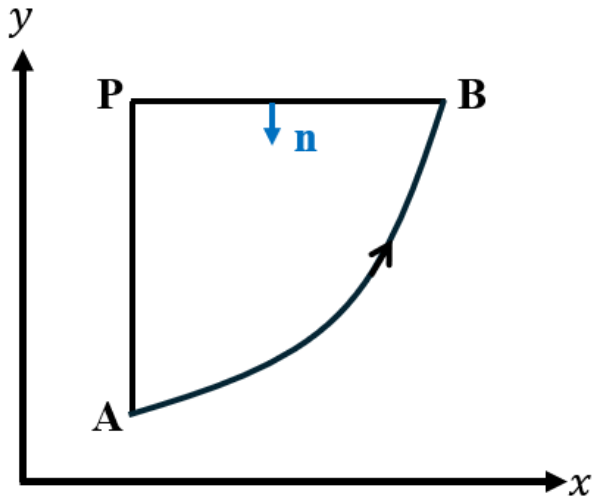
ir

$$N = \frac{1}{2} \left(R \frac{\partial Z}{\partial x} - Z \frac{\partial R}{\partial x} \right) + bZR. \quad (46)$$

Tada (44) išraiška atrodo gerokai paprasčiau ir jai galima pritaikyti Gryno teoremą:

$$\iint_S \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial S} (M dy - N dx) = 0. \quad (47)$$

Pasirinkime plotą S tokį, kurį ribotų taškai PABP ($PA \parallel x$ ašiai, o $PB \parallel y$ ašiai) kaip pavaizduota 10 pav.



10 pav. Integravimo kontūras Rymano metodui.

Tada integravimą kontūru galima išskaidyti į tris integralus:

$$\oint_{\partial S} (M dy - N dx) = \left(\int_P^A + \int_A^B + \int_B^P \right) (M dy - N dx) = 0. \quad (48)$$

Kelyje $P \rightarrow A$ y vertės nekinta, todėl $dy = 0$, o kelyje $B \rightarrow P$ x yra pastovus, todėl $dx = 0$. Vadinasi, (48) integralas tampa

$$\oint_{\partial S} (M dy - N dx) = - \int_P^A N dx + \int_A^B (M dy - N dx) + \int_B^P M dy = 0. \quad (49)$$

Suintegruokime kiekvieną dalį atskirai:

$$\begin{aligned}
& - \int_P^A N dx = - \int_P^A \left(\frac{1}{2} \left[R \frac{\partial Z}{\partial x} - Z \frac{\partial R}{\partial x} \right] + bZR \right) dx \\
& = - \int_P^A \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (ZR) dx - \int_P^A \left(-Z \frac{\partial R}{\partial x} + bZR \right) dx \\
& = - \frac{1}{2} (ZR)_A + \frac{1}{2} (ZR)_P + \int_P^A Z \left(\frac{\partial R}{\partial x} - bR \right) dx,
\end{aligned} \tag{50}$$

kadangi narius kvadratinuose skliaustuose galima išreikšti taip:

$$R \frac{\partial Z}{\partial x} - Z \frac{\partial R}{\partial x} = R \frac{\partial Z}{\partial x} + Z \frac{\partial R}{\partial x} - 2Z \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (ZR) - 2Z \frac{\partial R}{\partial x}. \tag{51}$$

Tokiu pat principu galime suintegruoti ir kitą integralą:

$$\begin{aligned}
& \int_B^P M dy = \int_B^P \left(\frac{1}{2} \left[R \frac{\partial Z}{\partial y} - Z \frac{\partial R}{\partial y} \right] + aZR \right) dy \\
& = \int_B^P \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (ZR) dy + \int_B^P \left(-Z \frac{\partial R}{\partial y} + aZR \right) dy \\
& = \frac{1}{2} (ZR)_P - \frac{1}{2} (ZR)_B + \int_P^B Z \left(\frac{\partial R}{\partial y} - aR \right) dy,
\end{aligned} \tag{52}$$

Taigi, viską sudėję į (48) integralą ir pertvarkę narius gauname:

$$\begin{aligned}
& (ZR)_P = \frac{1}{2} (ZR)_A + \frac{1}{2} (ZR)_B - \int_A^B (M dy - N dx) \\
& - \int_P^A Z \left(\frac{\partial R}{\partial x} - bR \right) dx - \int_P^B Z \left(\frac{\partial R}{\partial y} - aR \right) dy.
\end{aligned} \tag{53}$$

Jei pasirenkame (37) lygties sprendinį R tokį, kad jis tenkintų šias sąlygas:

$$\begin{aligned}
& R_P = 1, \\
& \frac{\partial R}{\partial x} - bR = 0, \text{ išilgai } P \rightarrow A, \\
& \frac{\partial R}{\partial y} - aR = 0, \text{ išilgai } P \rightarrow B,
\end{aligned} \tag{54}$$

tada galime rasti (36) lygties sprendinį taške P :

$$Z_P = \frac{1}{2} (ZR)_A + \frac{1}{2} (ZR)_B - \int_A^B (M dy - N dx), \tag{55}$$

kurį galima perrašyti atsižvelgiant į integravimo kreivės geometriją. Kreivė AB turi vidinę normalę n , kurios krypties kosinusai yra $\cos(n, x)$ (kampas tarp normalės ir x ašies) ir $\cos(n, y)$ (kampas

tarp normalės ir y ašies). Tada integralą galima užrašyti taip:

$$\int_A^B (M dy - N dx) = \int_A^B (M \cos(n,x) + N \cos(n,y)) ds. \quad (56)$$

ds žymi integravimą kreive AB . Įsistačius M ir N išraiškas ir pertvarkius narius, gaunamas toks sprendinys:

$$\begin{aligned} Z_P = & \frac{1}{2}(ZR)_A + \frac{1}{2}(ZR)_B - \frac{1}{2} \int_A^B \left(R \frac{\partial Z}{\partial y} - Z \frac{\partial R}{\partial y} \right) \cos(n,x) ds \\ & - \frac{1}{2} \int_A^B \left(R \frac{\partial Z}{\partial x} - Z \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos(n,y) ds - \int_A^B a R Z \cos(n,x) ds - \int_A^B b R Z \cos(n,y) ds \end{aligned} \quad (57)$$

Visi nariai dešinėje lygybės pusėje yra žinomi. Kreivę AB galima pasirinkti pagal žinomas funkcijos Z kraštinės sąlygas. Funkcija $R = R(x,y)$, kuri tenkina (54) sąlygas vadinama Rymano funkcija.

3. Rezultatai ir duomenų aptarimas

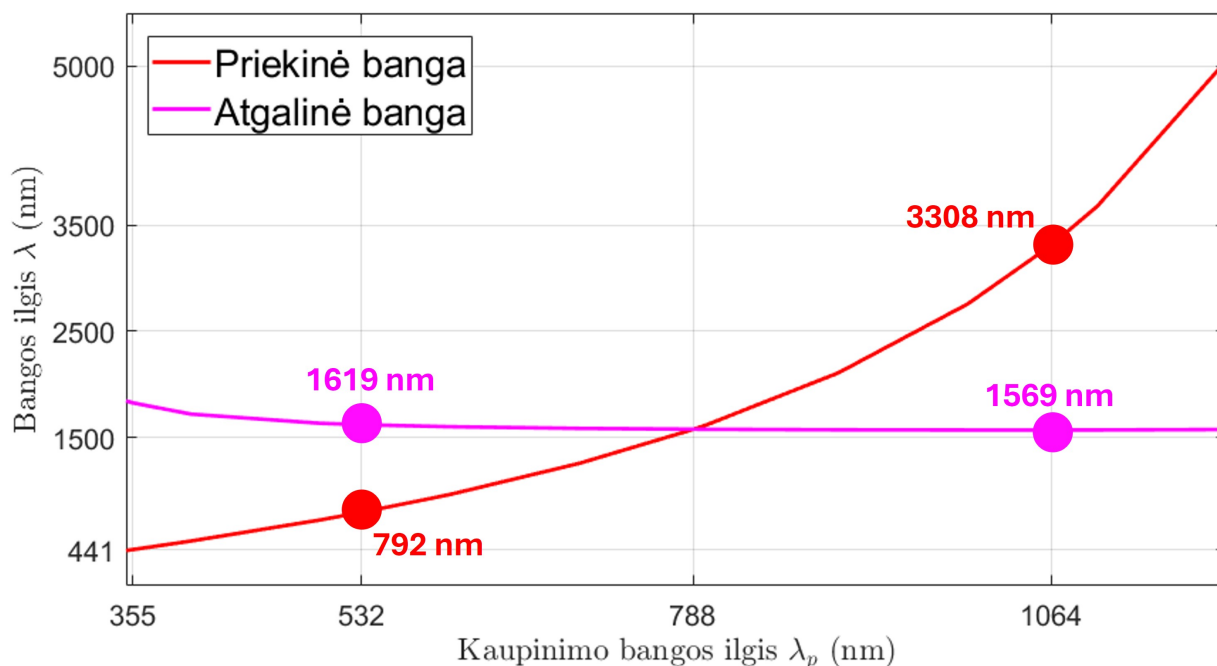
Šiame darbe skyriuje aptarsime modeliavimo rezultatus, gautus baigtinių skirtumų ir dalinių žingsnių metodais, bei išvesime iteracinius sprendinius priekinės ir atgalinės bangų amplitudėms, pritaikydami Rymano integravimo metodą.

3.1. Pagrindinės ir antrosios kaupinimo harmonikų palyginimas

Pradėsime sukurdami ABŠPO modelį baigtinių skirtumų metodu ir palygindami atgalinių impulsų koherentiškumą, kai PPKTP kristalas yra kaupinamas pagrindine ir antąja Nd:YAG mikrolazerio harmonikomis. Išstirsime koherentinio ir nekoherentinio kaupinimo atvejus.

3.1.1. Fazinio sinchronizmo kreivė

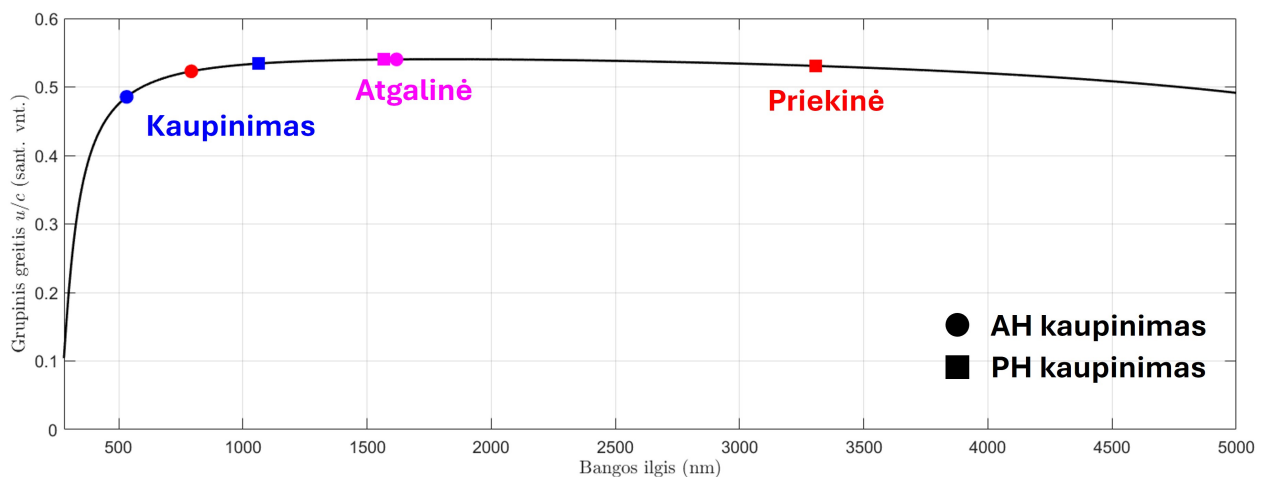
Fazinio sinchronizmo kreivė 427 nm periodo PPKTP kristalui kambario temperatūroje yra pavaizduota 11 pav. Skaičiavimams naudotos lūžio rodiklio priklausomybės nuo temperatūros ir bangos ilgio, kurios yra pateiktos (13) ir (14) formulėse. Kaip matome, keičiant kaupinimo bangos ilgį, atgalinės bangos ilgis kinta nežymiai (tik kelių dešimčių nanometrų diapazone), o priekinės pakinta plačiame intervale – nuo 441 nm iki ~ 5000 nm. Kai kaupinimo bangos ilgis yra 532 nm (antroji Nd:YAG mikrolazerio harmonika), priekinės bangos ilgis yra 792 nm, o atgalinės 1619 nm. Kai kaupinimo bangos ilgis yra 1064 nm (pagrindinė harmonika), priekinės bangos ilgis yra jau 3308 nm, o atgalinės 1569 nm. Vadinasi, pasikeičia banga, kuri sąveikos metu yra signalinė: AH kaupinimo atveju signalinė yra priekinė, o PH – atgalinė banga. Be to, kai kaupinimo bangos ilgis yra 788 nm, kambario temperatūroje galima pasiekti ir išsigimimo režimą, kuriame priekinės ir atgalinės bangų ilgiai sutampa.



11 pav. Fazinio sinchronizmo kreivė PPKTP kristale, keičiant kaupinimo bangos ilgį.

3.1.2. Grupinio greičio dispersijos kreivė

Grupinio greičio dispersijos kreivė PPKTP kristale pateikta 12 pav. Ji parodo sąveikaujančių bangų grupinių greičių priklausomybę nuo jų bangos ilgio. Iš grafiko matyti, kad kaupinant kristalą antrąja harmonika, kaupinimo ir priekinės bangų greičiai pastebimai skiriasi, tačiau kaupinant pagrindinę harmoniką, šių greičių sutapimas yra daug geresnis. Norint tai įvertinti kiekybiškai, galime panaudoti ε parametą, pateiktą (11) formulėje. AH jis lygus 0,039, o PH – net 12 kartų mažesnis (0,0033). Vadinasi, kaupinant pagrindinę harmoniką, kaupinimo ir priekinės bangos grupinių greičių suderinimas yra maždaug 12 kartų tikslesnis nei AH atveju. Toliau panagrinėsime, kokią įtaką šis skirtumas turi ABŠPO generuojamiems atgalinės bangos impulsams.

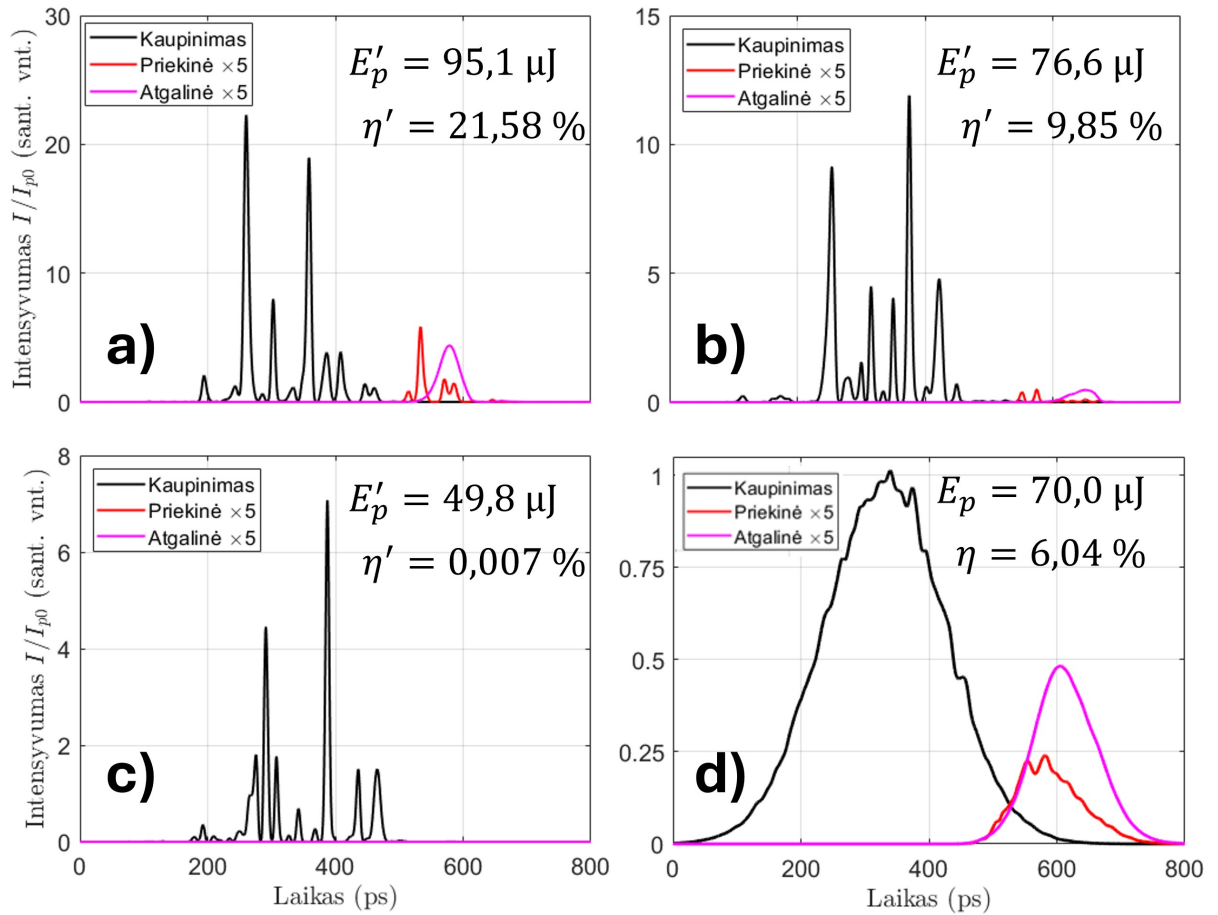


12 pav. Grupinio greičių dispersijos kreivė PPKTP kristale.

3.1.3. Keitimo efektyvumai

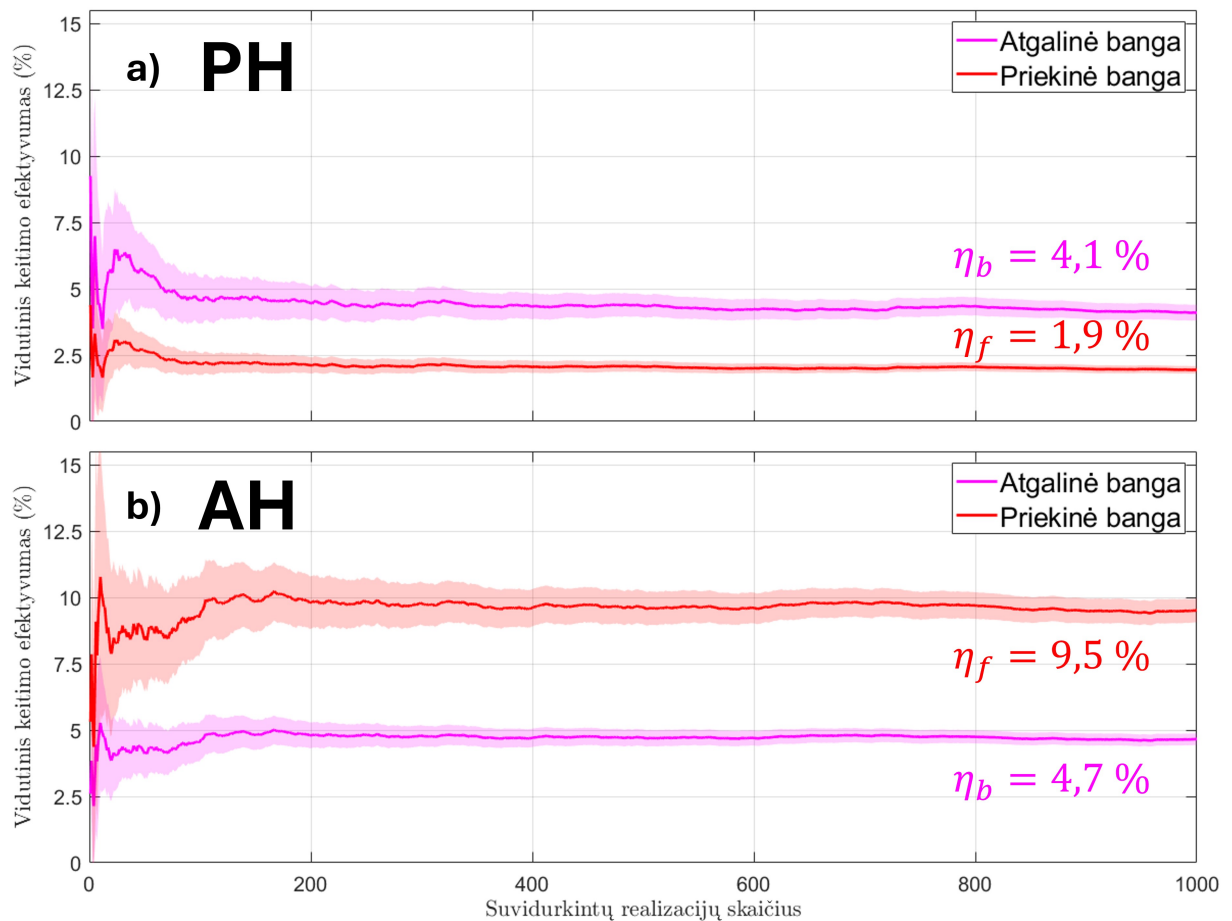
Pavienių realizacijų metu sugeneruotų bangų ir kaupinimo impulsų laikiniai profiliai pavaizduoti 13a-c pav. Šie paveikslėliai iliustruoja, kaip stipriai gali kisti bendras (priekinei ir atgalinei bangai) keitimo efektyvumas skirtingose realizacijose: nagrinėjama atvejais jis kinta nuo 21,58 % (13a pav.) iki 0,007 % (13c pav.). Tokia plati keitimo efektyvumų variacija atsiranda dėl to, kad tiek kaupinimo, tiek ir priekinės bei atgalinės bangų pradinės amplitudės yra atsitiktinės. Didžiausią įtaką efektyvumui turi kaupinimas: fliktuoja tiek jo amplitudė, tiek suminė energija, tačiau jos vidurkis yra pastovus, atitinkantis 70 μJ .

Dėl šių atsitiktinių vyksmų, siekiant tiksliai įvertinti sugeneruotų impulsų trukmes ir spektrų plotius, nutarta sumuoti kiekvienos realizacijos amplitudžių modulio kvadratus ir analizuoti vidutinį rezultatą. 13d pav. pateikti impulsų profiliai, gauti suvidurkinus tūkstantį realizacijų. Matyti, kad po vidurkinimo procedūros kaupinimo laikinis profilis įgyja Gauso pavidalo formą su nedaug liekamųjų triukšmų. Šį pavidalą atkartoja ir priekinis impulsas, tuo tarpu atgalinės bangos impulsas taip pat pasižymi Gausio forma, tačiau, priešingai nei kiti, yra netriukšmingas.



13 pav. Impulsų profiliai nekoherentinio PH kaupinimo atveju: a-c) pavienės realizacijos su skirtingais bendrais keitimo efektyvumais, ir d) 1000 simuliacijų vidurkis. Priekinio ir atgalinio impulsų amplitudės yra padidintos 5 kartus, kad būtų geriau matomos. η' yra vienos realizacijos keitimo efektyvumas, skaičiuotas su tos realizacijos kaupinimo energija E'_p , o η yra vidutinis 1000 realizacijų keitimo efektyvumas.

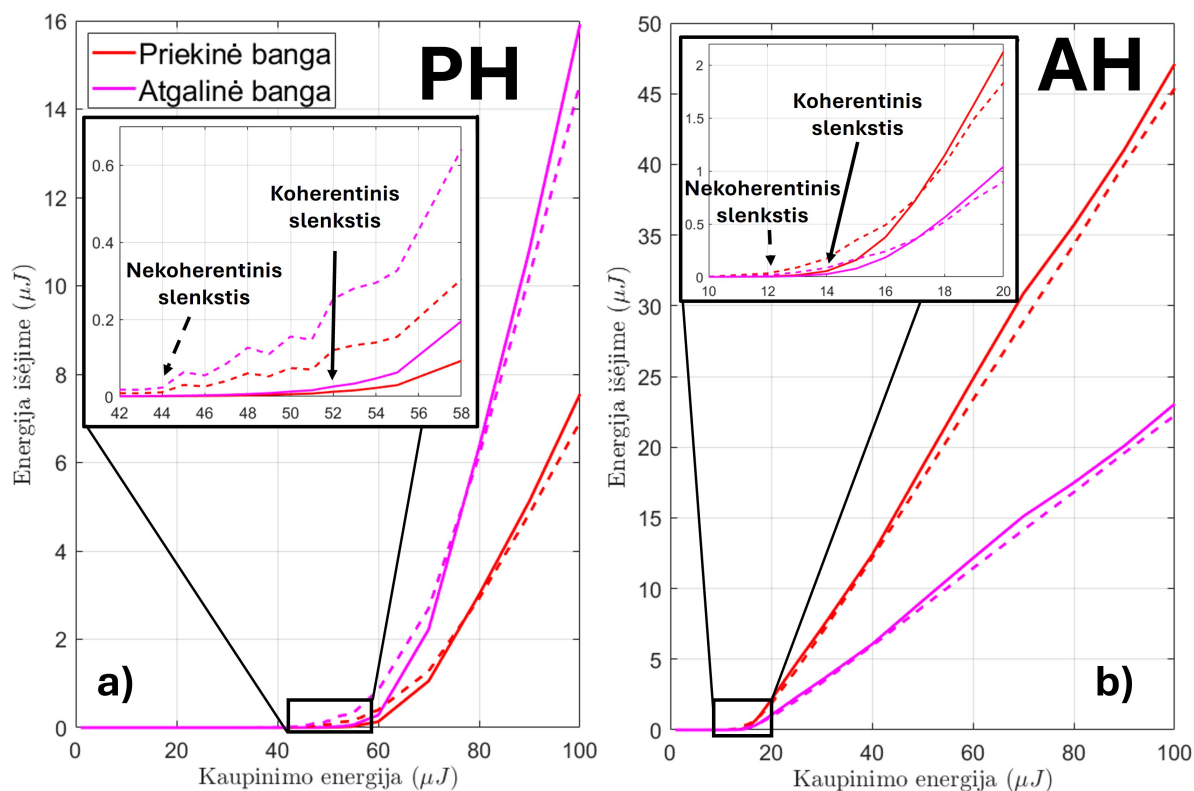
14 pav. pateikta vidutinių keitimo efektyvumų priekinei ir atgalinei bangoms priklausomybė nuo vidurkinimų skaičiaus kartu su 95 % pasiklojimo intervalais. Matyti, kad didinant imties tūrį, pasiklojimo intervalai mažėja, o galutinis vidurkis stabilizuojasi. Visgi net ir po tūkstančio simuliacijų pasiklojimo intervalas signalinei bangai išlieka gana platus. PH kaupinimui atgalinės bangos keitimo efektyvumas yra $(4,10 \pm 0,30) \%$, o priekinės $(1,94 \pm 0,14) \%$. AH kaupinimo atveju keitimo efektyvumas priekinei bangai yra $(9,52 \pm 0,45) \%$, o atgalinei $(4,66 \pm 0,22) \%$. Kadangi abiem atvejais keitimo efektyvumai atgalinei bangai yra panašūs, galima lyginti atgalinės bangos impulsus tarpusavyje.



14 pav. Priekinės ir atgalinės bangų keitimo efektyvumų priklausomybė nuo vidurkinamų realizacijų skaičiaus: a) PH kaupinimas, ir b) AH kaupinimas. Kaupinimo energijos kaip 9 lentelėje.

Energijos keitimo kreivės, gautos suvidurkinus tūkstantį realizacijų įvairioms kaupinimo energijoms, pateiktos 15 pav. Šios priklausomybės parodo sugeneruotų priekinės ir atgalinės bangų energijų kitimą didinant kaupinimo energiją. ABŠPO osciliavimo slenksčiai įvertinti taikant metodiką, artimą realaus eksperimento sąlygoms: pasirinkta 20 nJ detektoriaus jautrumo riba ir nustatyta kaupinimo energija, ties kuria signalinės bangos energija pirmą kartą viršija šią vertę. Kaip matyti 15 pav., PH ir AH kaupinimo atvejais nekoherentinio kaupinimo slenkstis yra žemesnis nei koherentinio kaupinimo slenkstis. PH atveju nekoherentinis kaupinimas lėmė $44 \mu\text{J}$ ($766 \text{ GW}/\text{cm}^2$ kaupinimo intensyvumas), o koherentinis – $52 \mu\text{J}$ ($905 \text{ GW}/\text{cm}^2$) slenkščio vertes. Tai atitinka 15,4 % santykinį slenkščio sumažėjimą. AH kaupinimo atveju slenksčiai gauti šiek tiek panašesni: nekoherentiniu atveju $12 \mu\text{J}$ ($209 \text{ GW}/\text{cm}^2$), o koherentiniu $14 \mu\text{J}$ ($244 \text{ GW}/\text{cm}^2$), t. y. 14,3 % santykinis sumažėjimas. Galima padaryti išvadą, kad siekiant generuoti koherentinę bangą iš nekoherentiškai kaupinamo ABŠPO kristalo, su AH kaupinimu pakaktų apie tris kartus mažesnio kaupinimo intensyvumo nei PH atveju.

Tolimesnėje darbo dalyje nagrinėsime režimą, kuriame kaupinimo nuskurdinimas nėra didelis. Koherentiniam ir nekoherentiniam kaupinimui naudosime energijas, pateiktas 9 lentelėje.

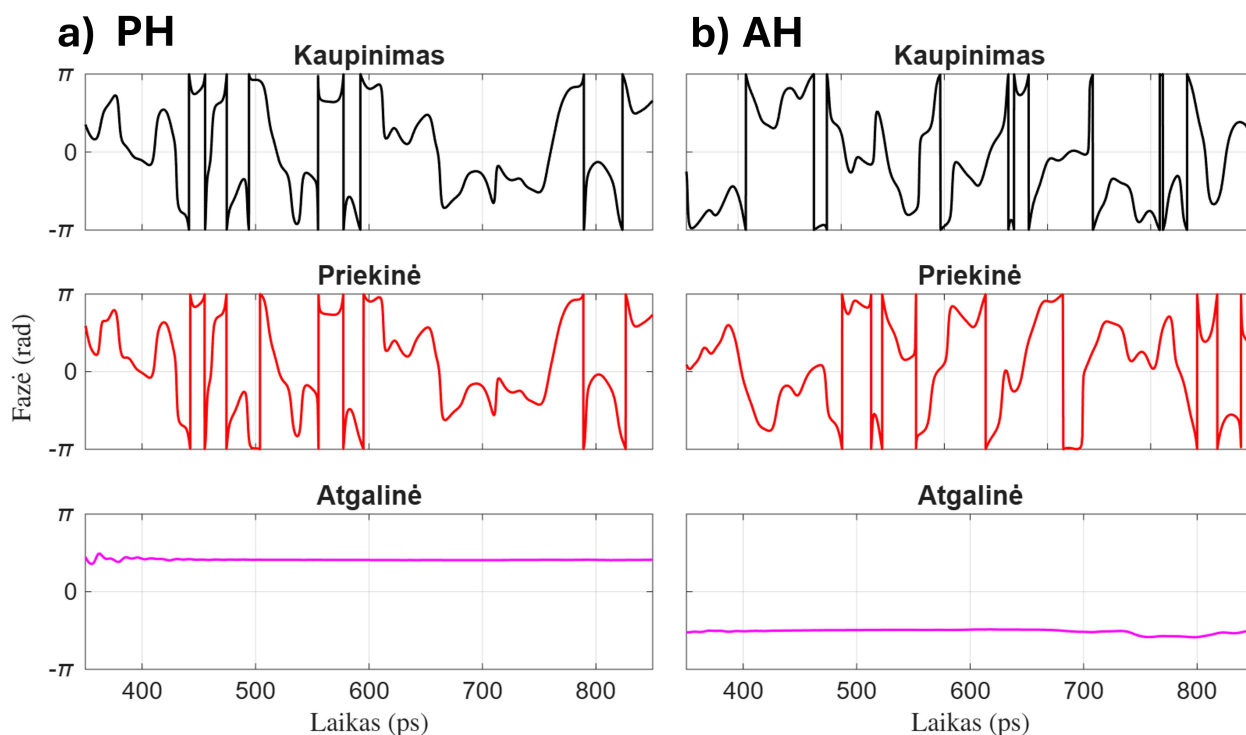


15 pav. Priekinės ir atgalinės bangų energinių keitimo efektyvumų priklausomybė nuo kaupinimo energijos: a) PH kaupinimas, ir b) AH kaupinimas. 1000 simuliacijų vidurkis. Intarpai išryškina koherentinio ir nekoherentinio kaupinimo osciliavimo slenksčius.

3.1.4. Fazės

Vienos atsitiktinės realizacijos metu gautos kaupinimo, priekinės ir atgalinės bangų impulsų fazės kristalo išėjime pateiktos 16 pav. Abiem nagrinėjamaais kaupinimo atvejais atgalinio impulso fazė išlieka beveik pastovi, o tai patvirtina, kad impulsas iš tiesų yra koherentinis. Tuo tarpu kaupinimo ir priekinio impulso fazės laike kinta atsitiktinai – jie yra nekoherentiniai.

Be to, galime pastebėti, kad PH atveju priekinio impulso fazė gana tiksliai atkartoja kaupinimo fazės kitimą, o AH atveju šis atkartojimas yra kiek mažiau tikslus. Tai galime paaiškinti prisiminę, kad parametrinės sąveikos metu kiekvienu laiko momentu turi būti tenkinama lygybė: $\phi_b(t) + \phi_f(t) - \phi_p(t) = \pi/2$ [14]. Jei atgalinio impulso fazė yra pastovi, tada priekinio impulso fazė turi sekti kaupinimo fazę. Iš tiesų, viskas turbūt yra atvirkščiai. Kai kaupinimo ir priekinės bangos grupiniai greičiai yra vienodi, kaupinimo fazė yra efektyviai perduodama priekinei bangai, todėl atgalinio impulso fazė lieka pastovi.

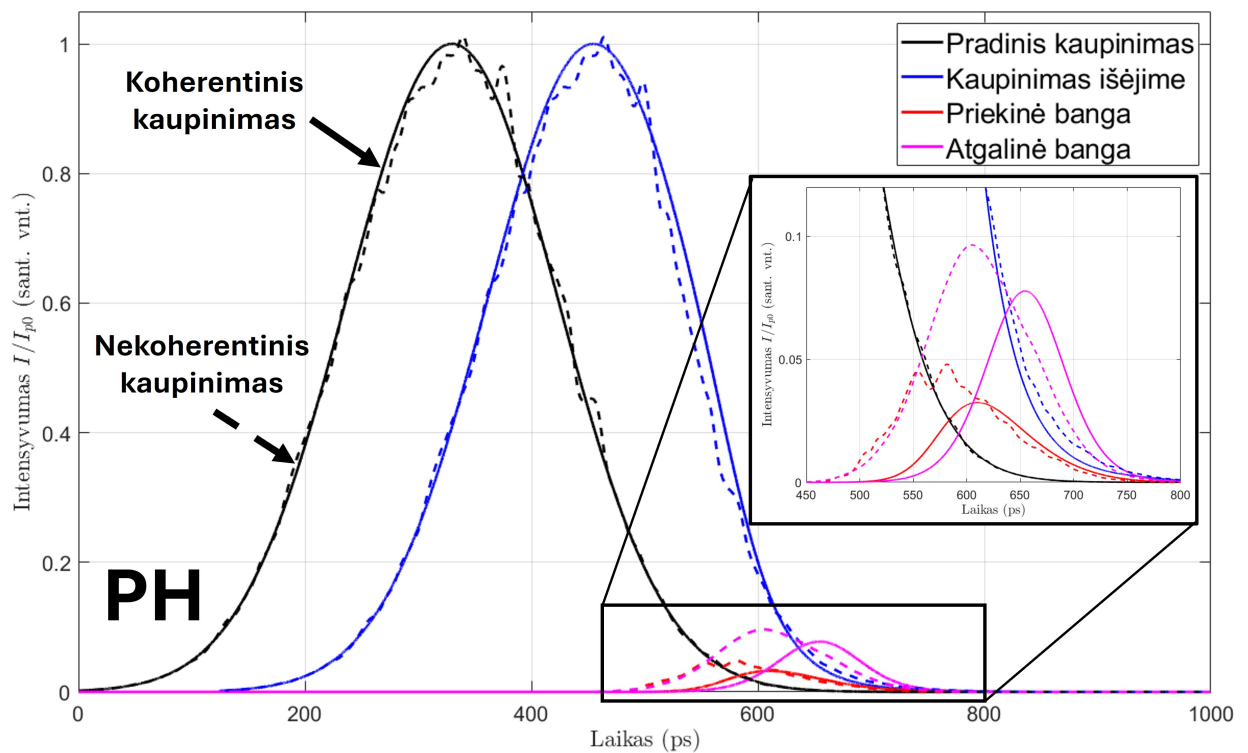


16 pav. Kaupinimo, priekinės ir atgalinės bangų fazės: a) PH kaupinimas, ir b) AH kaupinimas. Pavienė realizacija. Baigtinių skirtumų metodas.

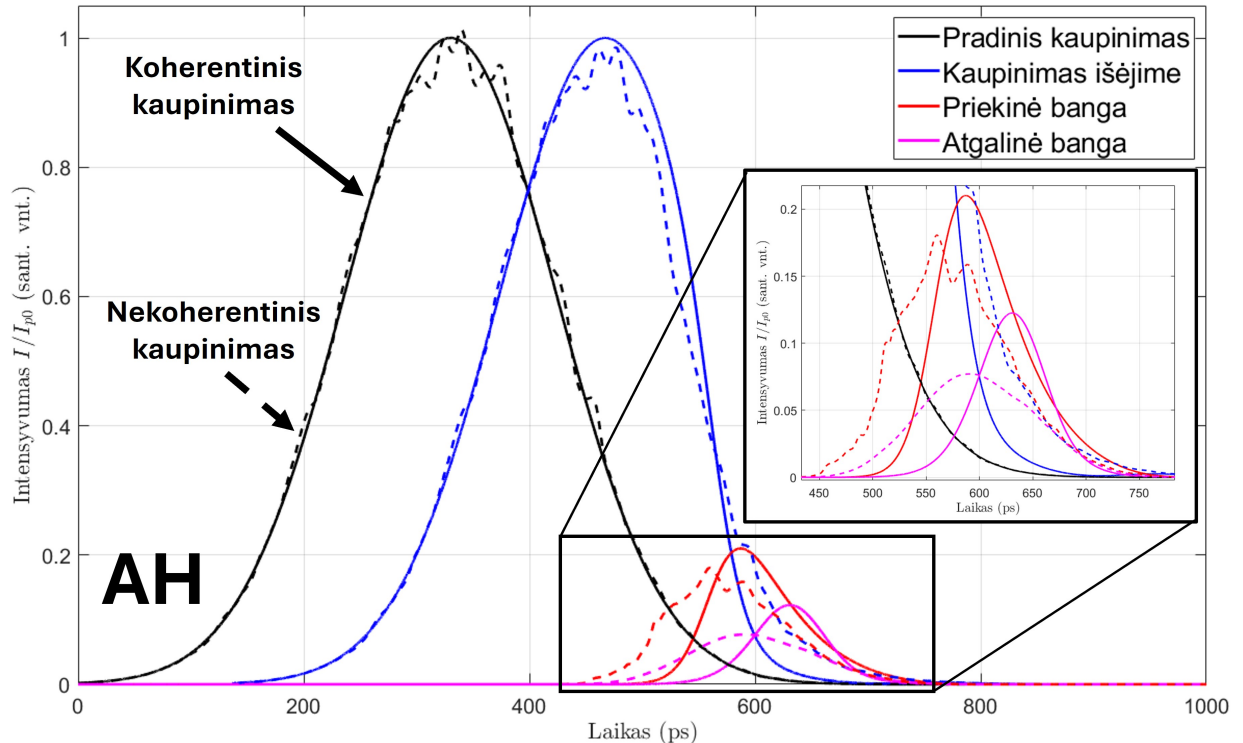
3.1.5. Laikiniai profiliai

Laikiniai intensyvumo profiliai, gauti naudojant koherentinį ir nekoherentinį kaupinimą, pateikti 17 pav. PH atveju ir 18 pav. AH atveju. Iš šių kreivių matyti, kad esant koherentiniam kaupinimui priekinio ir atgalinio impulsų generacija prasideda apie 50 ps vėliau nei nekoherentiniu atveju. Šis skirtumas gali būti aiškinamas didelėmis nekoherentinio kaupinimo amplitudės variacijomis, kurios šioms bangoms leidžia greičiau pasiekti generacijos slenkstį.

Čia svarbu pabrėžti, kad šiuose skaičiavimuose nagrinėjame tiesinį režimą, kuriame kaupinimas yra nuskurdinamas menkai. Dėl šios priežasties kaupinimo impulso laikinis pavidalas išėjime beveik nesiskiria nuo pradinio impulso formos.

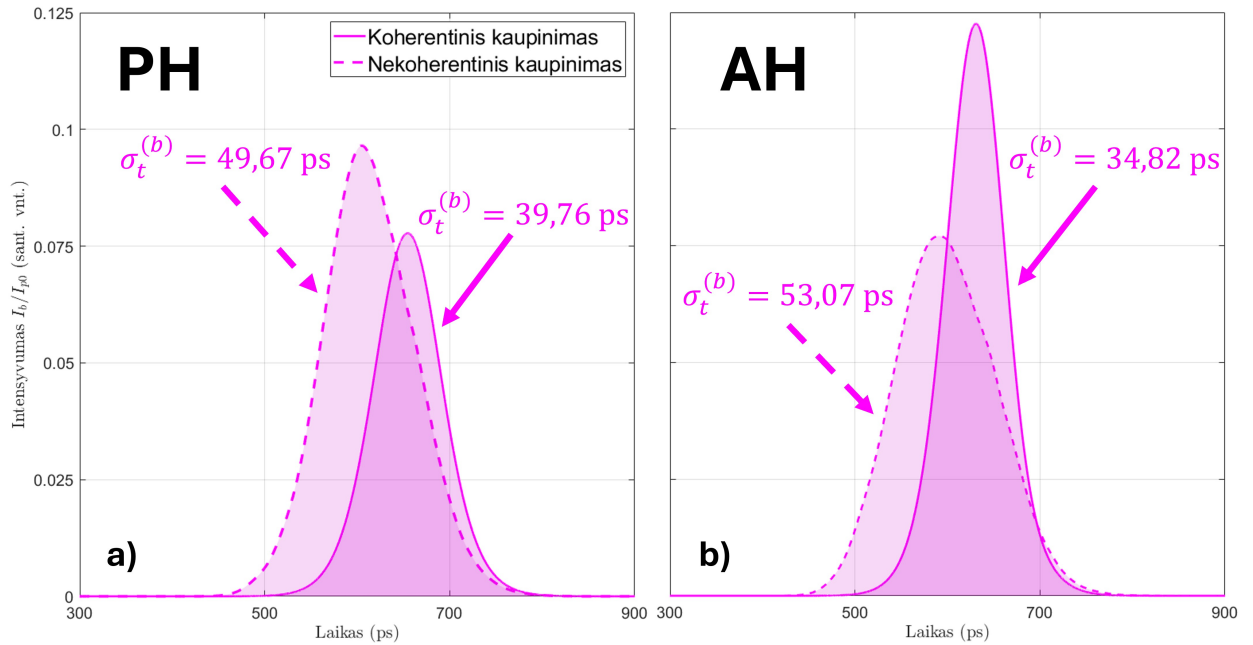


17 pav. Laikiniai intensyvumo profiliai, kaupinant koherentiniu (vientisa linija) ir nekoherentiniu (brūkšninė linija) PH impulsu. Intarpas išryškina sugeneruotus priekinės ir atgalinės bangos impulsus. Baigtinių skirtumų metodas.



18 pav. Laikiniai intensyvumo profiliai, kaupinant koherentiniu (vientisa linija) ir nekoherentiniu (brūkšninė linija) AH impulsu. Intarpas išryškina sugeneruotus priekinės ir atgalinės bangos impulsus. Baigtinių skirtumų metodas.

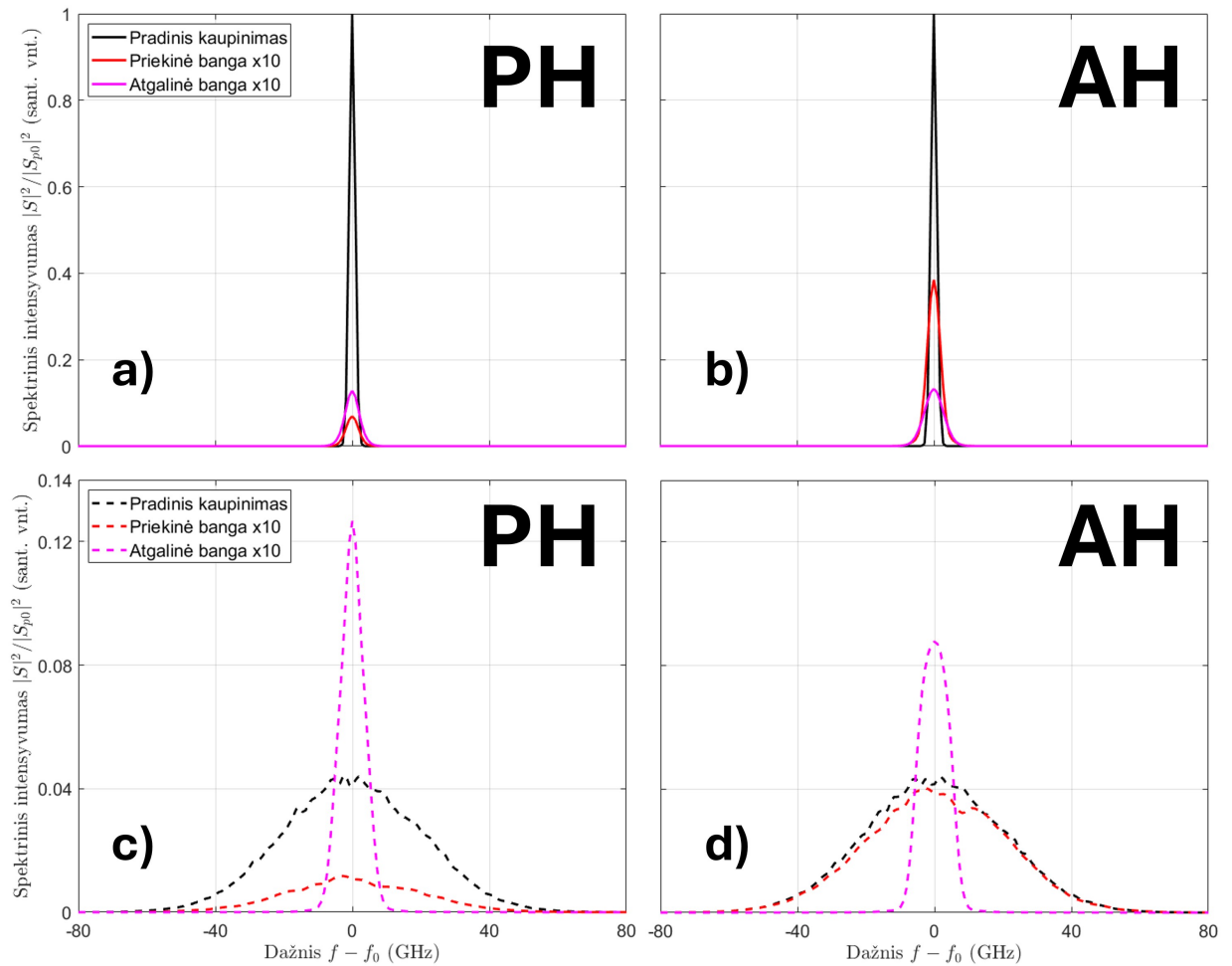
Atidžiau panagrinėkime koherentinius atgalinės bangos impulsus, kurie yra pavaizduoti 19 pav. Iš pirmo žvilgsnio matyti, kad naudojant PH kaupinimą, impulsų pavidalai koherentiniu ir nekoherentiniu atvejais yra panašesni nei AH atveju. Tam įvertinti apskaičiuotos impulsų vidutinės kvadratinės trukmės (angl. *root mean square, RMS*). PH atveju gautos ~ 40 ps impulso trukmė koherentiniu ir ~ 50 ps impulso trukmė nekoherentiniu atveju. Naudojant AH kaupinimą, impulsų trukmės skiriasi labiau: ~ 35 ps koherentiniu ir ~ 53 ps nekoherentiniu atveju.



19 pav. Atgalinės bangos laikiniai intensyvumo profiliai ir impulsų trukmės, kaupinant koherentiniu (vientisa linija) ir nekoherentiniu (brūkšninė linija) impulsu: a) PH kaupinimas, ir b) AH kaupinimas. $\sigma_t^{(b)}$ žymi impulsų vidutinės kvadratinės trukmės. Baigtinių skirtumų metodas.

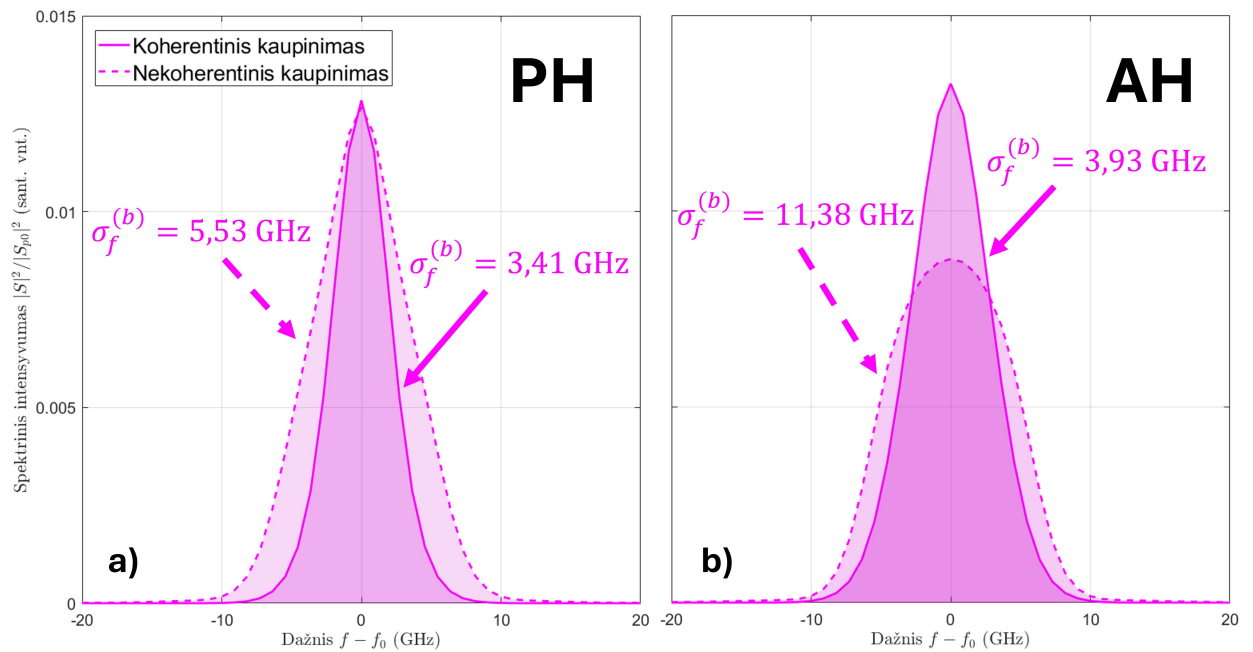
3.1.6. Spektriniai profiliai

Kaupinimo ir sugeneruotų bangų spektriniai intensyvumo profiliai pateikti 20 pav. Spektrai yra sunormuoti į koherentinio kaupinimo spektro amplitudės modulio kvadratą. Šiuose paveikslėliuose išryškėja ABŠPO būdinga savybė: tiek koherentinio, tiek nekoherentinio kaupinimo atvejais priekinės bangos spektro plotis yra artimas kaupinimo spektro pločiui, o atgalinės abiem atvejais išlieka palyginti siauras.



20 pav. Spektriniai intensyvumo profiliai PH ir AH kaupinimo atvejais, kai kaupinimas yra: a-b) koherentinis, ir c-d) nekoherentinis. Sugeneruotų impulsų amplitudės yra padidintos 10 kartų, kad būtų geriau matomos. Baigtinių skirtumų metodas.

Atgalinės bangos spektrus, pateiktus 21 pav., galime palyginti išsamiau. Matome, kad koherentinio ir nekoherentinio PH kaupinimo atvejais atgalinės bangos spektrų amplitudės yra panašaus dydžio, tačiau nekoherentinis kaupinimas lemia apie 1,6 karto spektro pločio padidėjimą: nuo 3,41 GHz (28,0 pm) iki 5,53 GHz (45,4 pm). Tuo tarpu spektrai koherentiniam ir nekoherentiniam AH kaupinimui skiriasi žymiai labiau: nesutampa nei jų amplitudės, nei jų spektro pločiai. Šiuo atveju jie skiriasi beveik 3 kartus: iš koherentinio kaupinimo gaunamas 3,93 GHz (34,4 pm), o iš nekoherentinio 11,38 GHz (99,5 pm) pločio spektrinis profilis.



21 pav. Atgalinės bangos spektriniai intensyvumo profiliai ir jų pločiai, kaupinant koherentiniu (vi-entisa linija) ir nekoherentiniu (brūkšninė linija) impulsu: a) PH kaupinimas, ir b) AH kaupinimas. $\sigma_f^{(b)}$ žymi vidutinius kvadratinis spektro pločius. Baigtinių skirtumų metodas.

3.1.7. Impulso trukmės ir spektro pločio sandauga

Gautus rezultatus galima apibendrinti apskaičiuojant priekinio ir atgalinio impulsų trukmės ir spektrinio pločio sandaugas $\sigma_t \sigma_\omega$. Jų vertės pateiktos 11 lentelėje. Spektriškai ribotam Gausiniam impulsui ši sandauga būtų lygi 0,5. Kaip matome iš lentelės duomenų, naudojant koherentinį abiejų harmonikų kaupinimą, generuojami impulsai yra artimi spektriškai ribotiems – jų sandaugos vertės yra apie 0,85. Kita vertus, nekoherentiniu atveju priekiniai impulsai stipriai nutolsta nuo spektriškai ribotų impulsų sąlygos. Nors atgaliniams impulsams trukmės ir pločio sandaugų vertės yra mažesnės, jos vis tiek ženkliai skiriasi nuo koherentinio režimo verčių: PH atveju gaunama $\sigma_t \sigma_\omega = 1,726$, o AH $\sigma_t \sigma_\omega = 3,796$. Pastebėtina, kad PH atveju ši sandauga yra $\sim 2,2$ karto mažesnė nei AH atveju. Todėl galime daryti išvadą, kad PPKTP kristalą kaupinant PH, sugeneruojamos atgalinė bangos koherentiškumas yra apie 2,2 karto didesnis nei kaupinant AH.

11 lentelė. Vidutinių kvadratinų trukmių ir spektro pločių sandaugos koherentinio ir nekoherentinio kaupinimo atvejais.

Kaupinimo harmonika	Banga	Koherentinis kaupinimas	Nekoherentinis kaupinimas
PH	Priekinė	0,856	6,390
	Atgalinė	0,852	1,726
AH	Priekinė	0,880	7,360
	Atgalinė	0,861	3,796

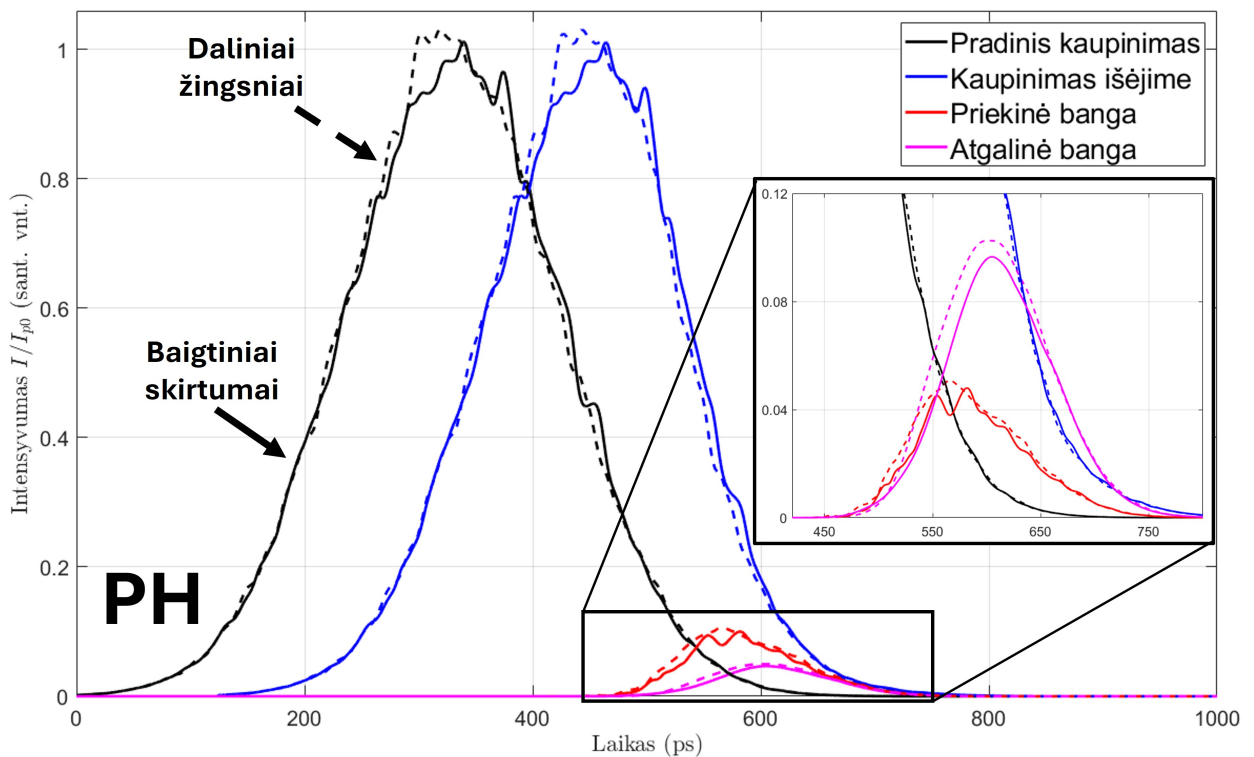
Apibendrinant šio skyriaus rezultatus, galima teigti, kad kaupinio bangos ilgio pasirinkimas yra labai svarbus veiksnys, lemiantis ABŠPO sugeneruotos atgalinės bangos koherentiškumą. Kaupinant pagrindine Nd:YAG mikrolazerio harmonika, pasiekiamas žymiai geresnis grupinių greičių suderinimas, dėl kurio kaupinio fazė yra efektyviai perduodama priekinei bangai ir leidžia atgalinės bangos fazei išlikti pastoviai. Priešingai, naudojant antrosios harmonikos kaupinimą, dėl prastesnio greičių derinimo stebimas žymus generuojamų impulsų parametrų pablogėjimas, lyginant su koherentiniu atveju: išplinta tiek impulsas, tiek ir jo spektras. Apskaičiuotos impulso trukmės ir jo spektro pločio sandaugos patvirtina, kad nekoherentinis PH kaupinimas leidžia generuoti maždaug 2,2 karto aukštesnio koherentiškumo atgalinę bangą nei AH kaupinimas.

3.2. Baigtinių skirtumų ir dalinių žingsnių metodų palyginimas

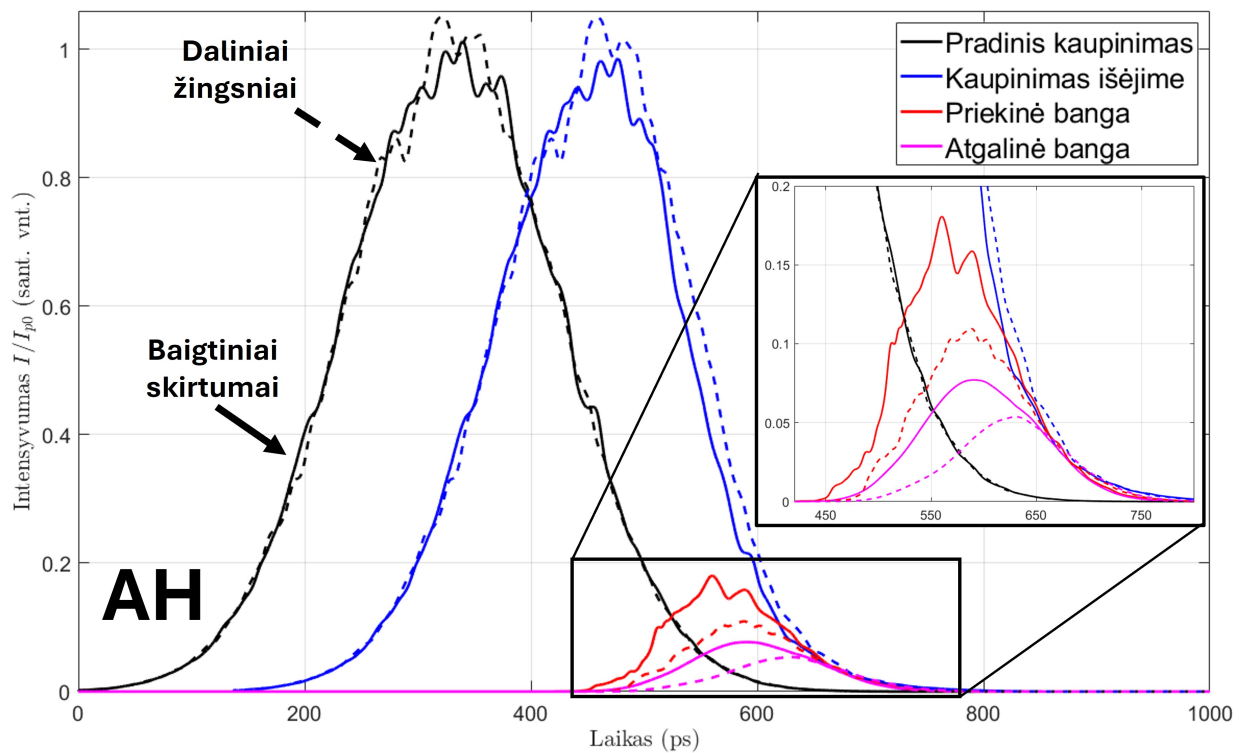
Dalinių žingsnių metodas leidžia netiesinę sąveiką ABŠPO nagrinėti apie šešis kartus greičiau. Tačiau jame daroma prielaida, kad visų sąveikaujančių bangų grupiniai greičiai yra vienodi. Šiame skyriuje patikrinsime, kiek teisinga yra tokia prielaida PH ir AH kaupinio atvejais, lygindami simuliacijų rezultatus tarp baigtinių skirtumų ir dalinių žingsnių metodų. Tada pabandysime padidinti kaupinio spektro plotį ir įvertinti, kaip kinta priekinės ir atgalinės bangų spektrinės charakteristikos.

3.2.1. Laikiniai profiliai

Kaupinio ir sugeneruotų bangų laikiniai intensyvumo profiliai, apskaičiuoti taikant baigtinių skirtumų ir dalinių žingsnių metodus, pateikti 22 pav. (PH atvejis) ir 23 pav. (AH atvejis). Lyginant abu metodus PH kaupinimui, matome, kad impulsų generacija prasideda maždaug tuo pačiu metu, o priekinio ir atgalinio impulsų pavidalai beveik sutampa. Tuo tarpu AH kaupinio atveju stebimi ryškūs skirtumai: taikant baigtinių skirtumų metodą, impulsų generacija prasideda anksčiau nei dalinių žingsnių metodu, o sugeneruotų impulsų profiliai labai skiriasi.

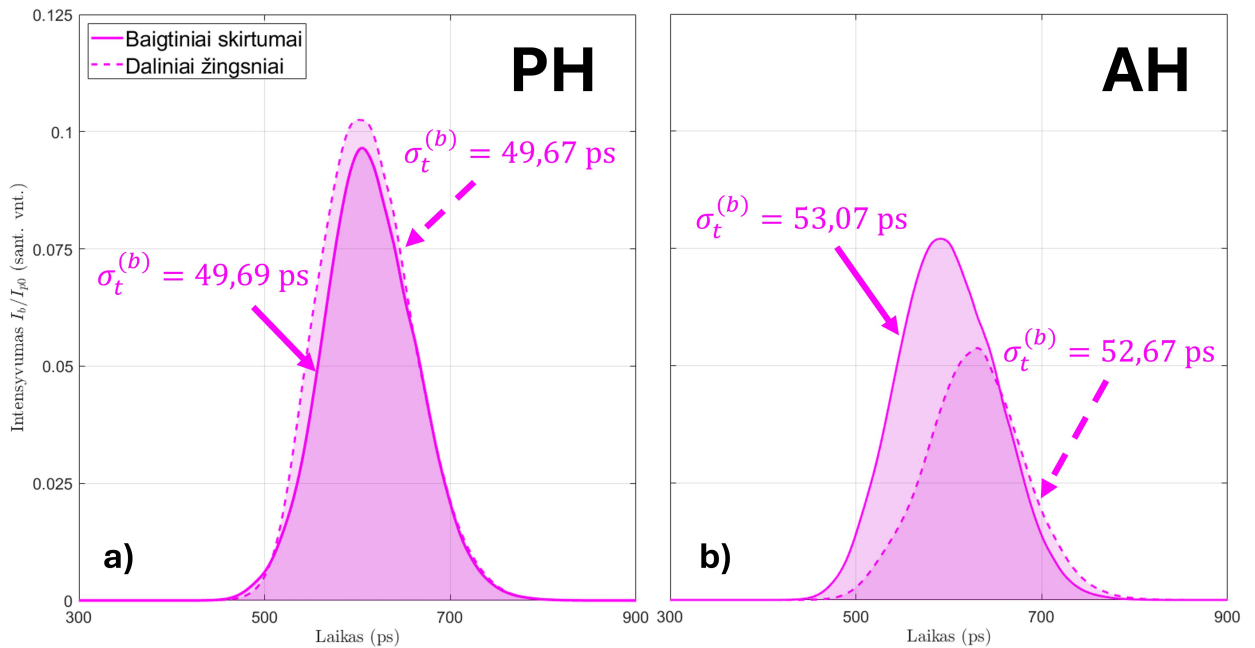


22 pav. Laikiniai intensyvumo profiliai, kaupinant nekoherentiniu PH impulsu. Gauti baigtinių skirtumų (vientisa linija) ir dalinių žingsnių (brūkšninė linija) modeliavimo metodais. Intarpas išryškina sugeneruotus priekinės ir atgalinės bangos impulsus.



23 pav. Laikiniai intensyvumo profiliai, kaupinant nekoherentiniu AH impulsu. Gauti baigtinių skirtumų (vientisa linija) ir dalinių žingsnių (brūkšninė linija) modeliavimo metodais. Intarpas išryškina sugeneruotus priekinės ir atgalinės bangos impulsus.

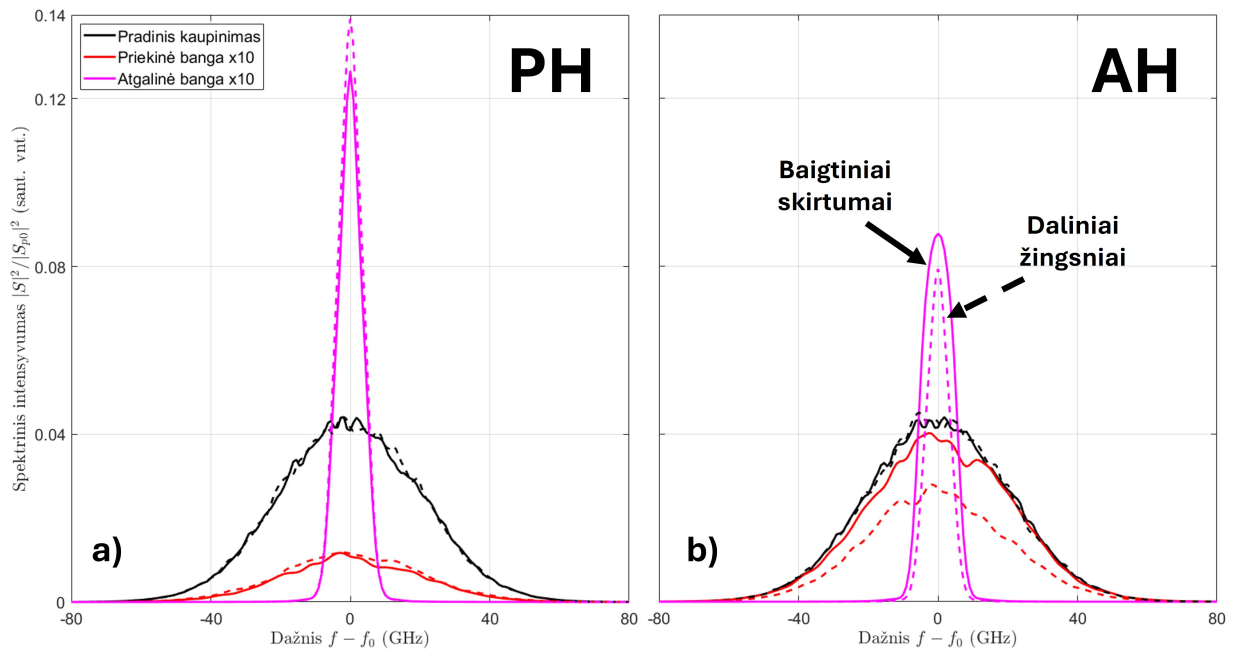
Panagrinėkime atgalinius impulsus detaliau. Jie yra pavaizduoti 24 pav. Matome, kad PH atveju impulsų profiliai iš tiesų yra beveik vienodi, o jų trukmės skiriasi tik antrame skaitmenyje po kablelio. Kita vertus, AH atveju impulsų pavidalai yra skirtingi, nors jų trukmės išlieka panašios – skiriasi tik per $\sim 0,5$ ps.



24 pav. Atgalinės bangos laikiniai intensyvumo profiliai ir impulsų trukmės, modeliuojant baigtinių skirtumų (vientisa linija) ir dalinių žingsnių (brūkšninė linija) metodais: a) PH kaupinimas, ir b) AH kaupinimas. $\sigma_t^{(b)}$ žymi impulsų vidutinės kvadratinės trukmės.

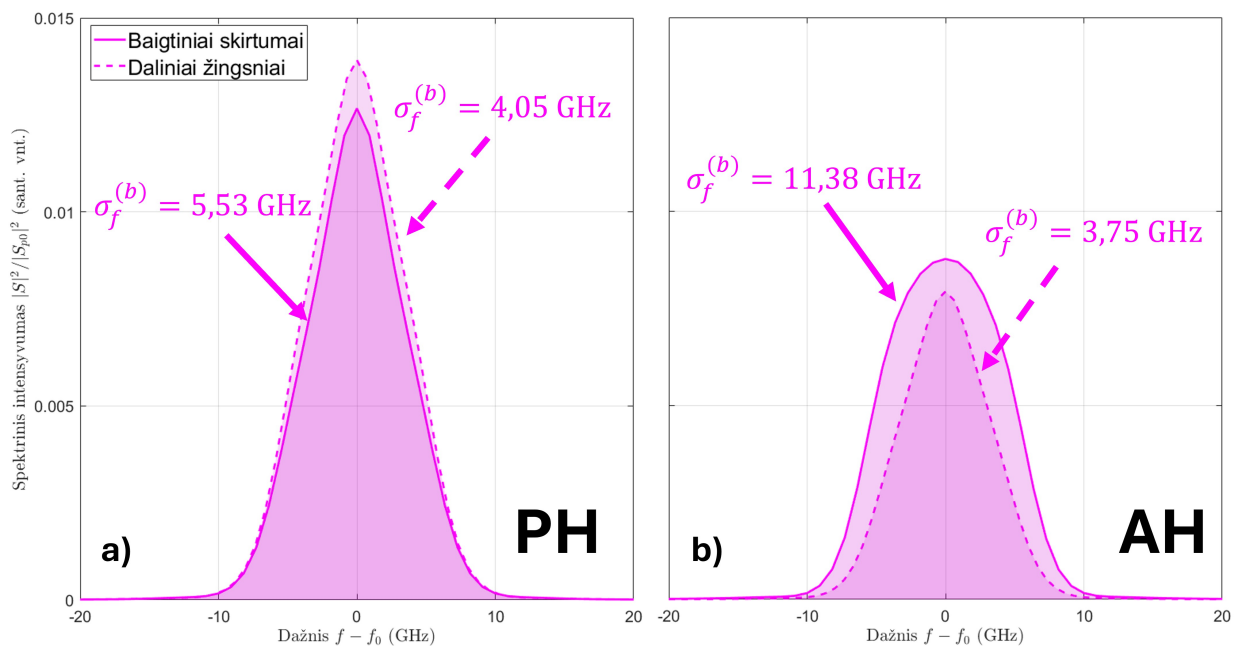
3.2.2. Spektriniai profiliai

Kaupinimo ir sugeneruotų bangų spektriniai intensyvumo profiliai pateikti 25 pav. Jie yra sunormuoti į atitinkamus koherentinio kaupinimo spektro maksimumus, apskaičiuotus baigtinių skirtumų ir dalinių žingsnių modeliavimo metodais. Paveikslėlyje matome, kad PH kaupinimo atveju abu modeliavimo metodai vėlgi duoda beveik identiškus rezultatus, o AH atveju reikšmingai skiriasi tiek priekinės, tiek atgalinės bangų spektrai.



25 pav. Kaupinimo ir sugeneruotų bangų spektriniai intensyvumo profiliai, modeliuojant baigtinių skirtumų (vientisa linija) ir dalinių žingsnių (brūkšninė linija) metodais, kai kaupinima nekoherentiniais: a) PH impulsais, ir b) AH impulsais. Priekinės ir atgalinės bangų amplitudės padidintos 10 kartų, kad būtų geriau matomos.

Detalesnė atgalinės bangos spektrų analizė pateikta 26 pav. Modeliavimas dalinių žingsnių metodu rodo, kad esant idealiam grupinių greičių suderinimui, atgalinės bangos spektro plotis galėtų siekti maždaug 4 GHz tiek PH, tiek AH atvejais. Tačiau greičių išderinimas lemia tai, kad PH atveju spektras išplinta apie 1,4 karto (iki 5,53 GHz), o AH atveju, kai kaupinimo ir priekinės bangų grupiniai greičiai skiriasi dar labiau, spektras išplinta net ~ 3 kartus (iki 11,38 GHz).



26 pav. Atgalinės bangos spektriniai intensyvumo profiliai ir jų pločiai, modeliuojant baigtinių skirtumų (vientisa linija) ir dalinių žingsnių (brūkšninė linija) metodais: a) PH kaupinimas, ir b) AH kaupinimas. $\sigma_f^{(b)}$ žymi vidutinius kvadratinus spektro pločius.

3.2.3. Impulso trukmės ir spektro pločio sandauga

Baigtinių skirtumų ir dalinių žingsnių metodais apskaičiuotų impulsų trukmės ir spektro pločių sandaugos $\sigma_t \sigma_\omega$ yra pateiktos 12 lentelėje. Matome, kad jei grupinių greičių suderinimas būtų idealus, naudojant abi kaupinimo harmonikas būtų įmanoma generuoti koherentinius atgalinės bangos impulsus, kurių $\sigma_t \sigma_\omega \approx 1,25$. Tačiau dėl greičių išderinimo PH atveju ši sandauga išauga iki 1,726 (padidėja $\sim 1,4$ karto), o AH atveju – net iki 3,796 (maždaug 3,1 karto). Toks žymus skirtingų modelių rezultatų neatitikimas AH leidžia daryti išvadą, kad dalinių žingsnių metodas nepakankamai tiksliai modeliuoja parametrinę sąveiką 427 nm periodo PPKTP kristale, kai naudojamas nekoherentinis kaupinimas. Dėl šios priežasties tolimesni modeliavimai su dalinių žingsnių metodu bus atliekami tik naudojant PH kaupinimą.

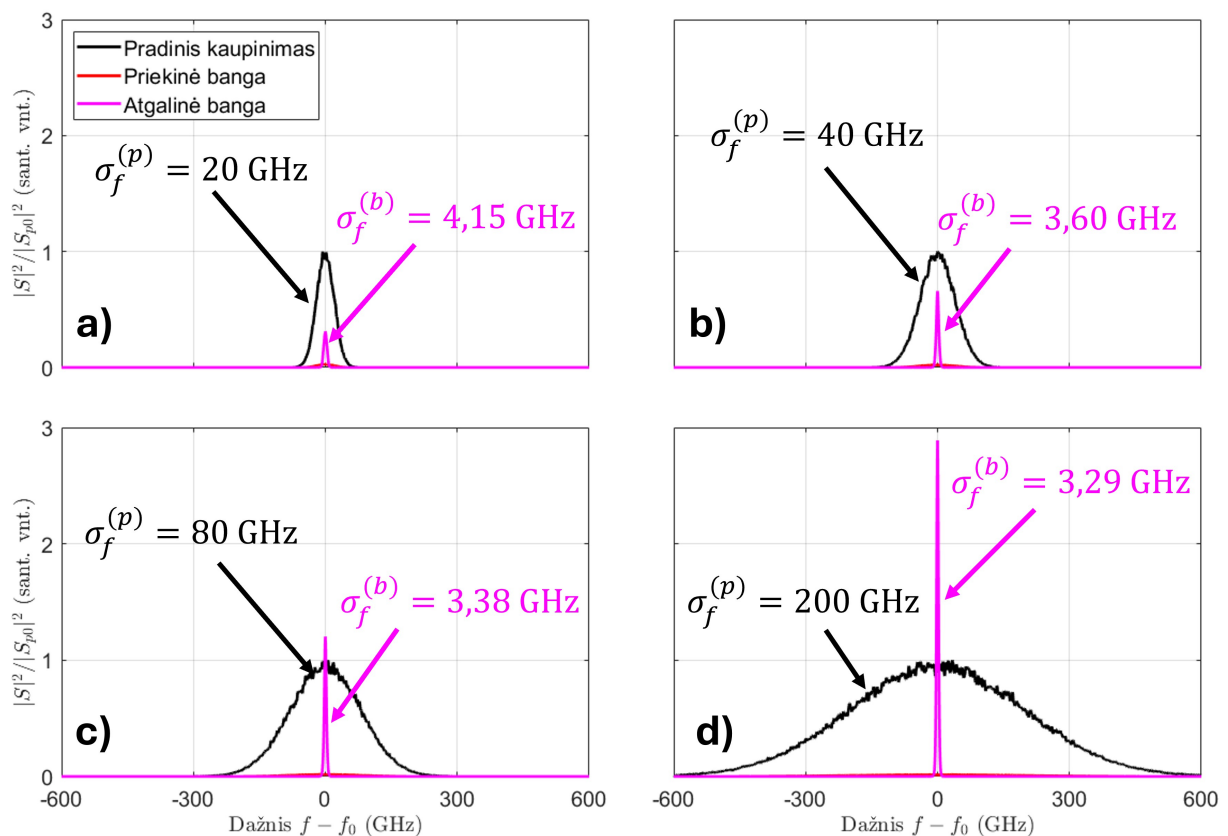
12 lentelė. Impulso trukmės ir jo spektro pločio sandauga baigtinių skirtumų ir dalinių žingsnių modeliavimo metodams.

Kaupinimo harmonika	Banga	Baigtiniai skirtumai	Daliniai žingsniai
PH	Priekinė	6,390	6,462
	Atgalinė	1,726	1,264
AH	Priekinė	7,360	6,699
	Atgalinė	3,796	1,241

3.2.4. Plačiajuosčio kaupinimo analizė

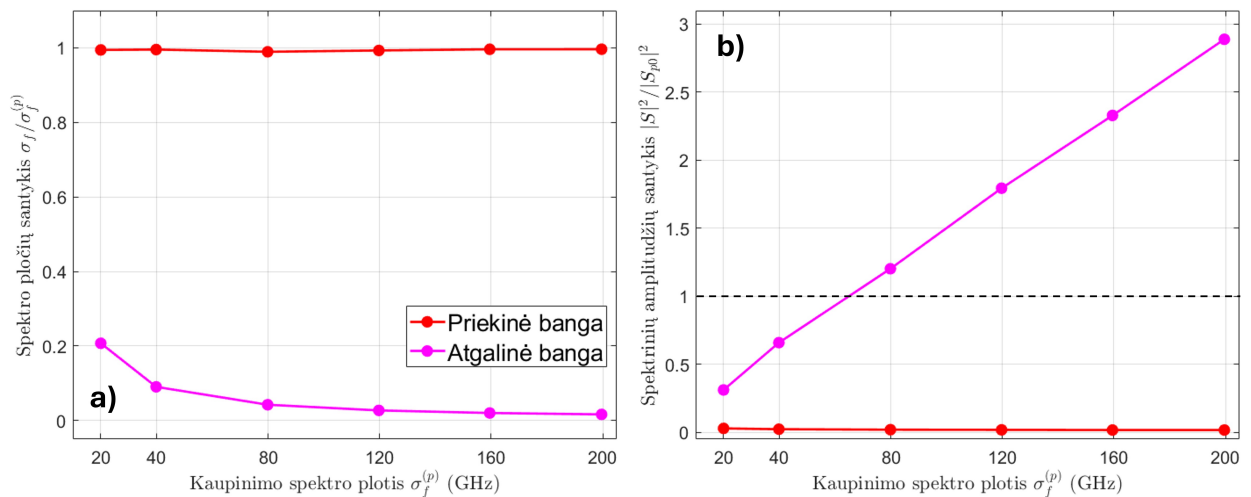
Nors dalinių žingsnių metodas leidžia nagrinėjimą netiesinę sąveiką modeliuoti sparčiau, tačiau didėjantis kaupinimo spektro plotis reikalauja plėsti ir spektrinį langą. Dėl šios priežasties sumažinus erdvinį žingsnį iki $\Delta z = 200 \times \Lambda/2 = 42,7 \mu\text{m}$, laikas, per kurį atliekama tūkstantis realizacijų dalinių žingsnių metodu, išauga iki maždaug penkių valandų, t. y. apie penkis kartus ilgiau nei tada, kai kaupinimo spektro plotis buvo 20 GHz.

27 pav. iliustruota, kaip kinta priekinės ir atgalinės bangų spektrai plečiant kaupinimo spektrą nuo 20 GHz iki 200 GHz. Šiuose paveikslėliuose visi spektrai yra sunormuoti atitinkamo nekoherentinio kaupinimo spektro amplitudės maksimumą. Matome, kad didinant kaupinimo spektro plotį, priekinės bangos spektrinė amplitudė nuosekliai mažėja ir šiame mastelyje tampa sunkiai įžiūrima. Tuo metu atgalinės bangos spektrinė amplitudė auga ir, kaupinimo spektro pločiui pasiekus maždaug 80 GHz, viršija kaupinimo bangos amplitudės maksimumą. Tai parodo, kad pasitelkiant parametrinę sąveiką netiesiniuose kristaluose, plačiame nekoherentiniame kaupinimo spektre pasiskirsčiusią energiją galima efektyviai sutelkti į itin siaurą atgalinės bangos spektrinį ruožą.



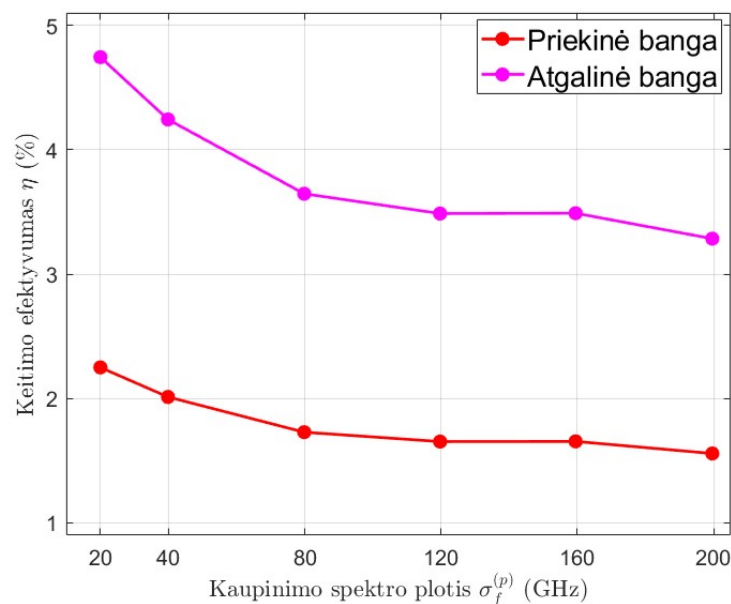
27 pav. Kaupinimo ir sugeneruotų bangų spektriniai intensyvumo profiliai, kai kaupinimo spektro plotis didėja nuo a) 20 GHz iki d) 200 GHz. Grafikuose pažymėti kaupinimo $\sigma_f^{(p)}$ ir atgalinės bangos $\sigma_f^{(b)}$ spektro pločiai. PH kaupinimas. Dalinių žingsnių metodas.

28 pav. yra pavaizduoti priekinės ir atgalinės bangų santykiniai spektrų pločiai ir amplitudės, lyginant su kaupinimo spektru. Iš grafiko matyti, kad plečiant kaupinimo spektrą, priekinės bangos spektro pločio santykis su kaupinimo spektro pločiu išlieka artimas vienetui. Tai rodo, kad priekinė banga spektriškai plečiasi tokia pat sparta kaip kaupinimas, todėl jos spektrinė amplitudė išlieka maža. Priešinga tendencija stebima analizuojant atgalinę bangą. Didėjant kaupinimo spektro pločiui, santykinis atgalinės bangos spektro plotis mažėja ir ima sotintis, o jos amplitudė auga tiesiškai. Kai kaupinimo spektro plotis buvo 200 GHz (755 pm), atgalinės bangos spektro plotis siekė tik 3,29 GHz (27 pm) ir pademonstruotas maksimalus koherentiškumo prieaugis, lygus ~ 61 kartui. Šiuo atveju atgalinės bangos spektrinė amplitudė buvo apie tris kartus didesnė nei kaupinimo amplitudė.



28 pav. Priekinės ir atgalinės bangų spektrinių savybių priklausomybė nuo kaupinimo spektro pločio: a) sugeneruotų bangų spektro pločiai, ir b) jų spektrinės amplitudės. Juoda punktyrinė linija žymi kaupinimo amplitudės maksimumą. PH kaupinimas. Dalinių žingsnių metodas.

Didinant kaupinimo spektro plotį, toli nuo centrinio dažnio esančios spektrinės komponentės nebetenkina fazinio synchronizmo sąlygos ir nebedalyvuoja energijos mainuose, todėl teoriniu požiūriu keitimo efektyvumas turėtų kristi. Kaip matome 29 pav., keitimo efektyvumas išties mažėja, tačiau gana nežymiai. Kaupinimo spektro plotį padidinus dešimt kartų (nuo 20 GHz iki 200 GHz), bendras keitimo efektyvumas sumažėja tik maždaug 1,44 karto.



29 pav. Keitimo efektyvumo priekinei ir atgalinei bangoms priklausomybė nuo kaupinimo spektro pločio. PH kaupinimas. Dalinių žingsnių metodas.

Apibendrinant šį skyrį, galime daryti išvadą, kad dalinių žingsnių metodo schema, kuri remiasi vienodais visų bangų grupiniais greičiais, nėra tinkama modeliuoti nekoherentine AH kaupinamam ABŠPO kristalui, tačiau pakankamai neblogai aprašo PH atvejį. Didesnė dalinių žingsnių metodo skaičiavimo sparta leido panagrinėti dešimt kartų didesnius kaupinimo spektro pločius nei baigtinių skirtumų metodas. Parodėme, kad didinant spektro plotį koherentinės atgalinės bangos spektro

plotis mažėja, o amplitudė tiesiškai auga. Ties maksimaliu nagrinėtu kaupinimo spektro pločiu (200 GHz), atgalinės bangos amplitudė apie 3 kartus viršijo kaupinimo amplitudę, o jos spektro plotis buvo apie 61 kartą mažesnis nei kaupinimo – siekė tik $\sim 3,3$ GHz.

3.3. ABŠPO sprendiniai Rymano integravimo metodu

Šiame skyriuje, pritaikydami Rymano integravimo metodą, išvesime iteracinius sprendinius priekinės ir atgalinės bangų amplitudėms. Visų pirma, suvesime ABŠPO lygtis į pavidalą, tinkamą Rymano metodo taikymui. Tada surasime Rymano funkcijas ir išvesime galutinius iteracinius sprendinius. Siekiant pagrįsti gautų rezultatų teisingumą, sukursime iteracinį modelį ir sugeneruotus impulsus palyginsime su impulsais, gaunamais iš dalinių žingsnių modeliavimo metodo.

3.3.1. ABŠPO lygčių paruošimas Rymano integravimo metodui

Tribangės sąveikos lygtys ABŠPO parametrinėje sąveikoje dalyvaujančių bangų amplitudėms pateiktos žemiau:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_f}{\partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial A_f}{\partial t} &= i\kappa A_p A_b^*, \\ \frac{\partial A_b}{\partial z} - \frac{1}{u} \frac{\partial A_b}{\partial t} &= -i\kappa A_p A_f^*, \\ \frac{\partial A_p}{\partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial A_p}{\partial t} &= i\kappa A_f A_b.\end{aligned}\tag{58}$$

Čia taikoma prielaida, kad visos bangos juda vienodu grupiniu greičiu $u = u_p = u_f = u_b$. Kai neįskaitome kaupinimo nuskurdinimo, trečiosios lygties sprendinys yra žinomas:

$$A_p(t, z) = A_{p0}(t - z/u).\tag{59}$$

Be to, žinome ir kraštines sąlygas priekinei bangai kristalo pradžioje $A_f(t, z = 0) = A_{f0}(t)$ ir atgalinei bangai kristalo pabaigoje $A_b(t, z = L) = A_{bL}(t)$.

Įveskime naujus kintamuosius $x = z$ ir $y = t - z/u$. Tada $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}$ ir $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial y}$. Tokiu atveju pradines lygtis galime perrašyti taip:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_f}{\partial x} &= i\kappa A_{p0}(y) A_b^*, \\ \frac{\partial A_b}{\partial x} - \frac{2}{u} \frac{\partial A_b}{\partial y} &= -i\kappa A_{p0}(y) A_f^*.\end{aligned}\tag{60}$$

Jas galime dar labiau supaprastinti įvesdami kintamuosius $p = -y\kappa u/2$ ir $q = x\kappa + y\kappa u/2$, o išvestines pakeisdami $\frac{\partial}{\partial x} = \kappa \frac{\partial}{\partial q}$ ir $\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\kappa u}{2} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\kappa u}{2} \frac{\partial}{\partial q}$. Dabar gauname:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_f}{\partial q} &= iA_{p0}(-2p/\kappa u) A_b^*, \\ \frac{\partial A_b}{\partial p} &= -iA_{p0}(-2p/\kappa u) A_f^*.\end{aligned}\tag{61}$$

Pažymėkime $A_{p0}(-2p/\kappa u) = \tilde{A}_{p0}(p)$ ir pritaikykime fazės transformacijas: $A_f e^{i\pi/4} \rightarrow A_f$ bei $A_b e^{i\pi/4} \rightarrow A_b$. Dabar gauname labai paprastas išraiškas:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_f}{\partial q} &= \tilde{A}_{p0} A_b^*, \\ \frac{\partial A_b}{\partial p} &= -\tilde{A}_{p0} A_f^*.\end{aligned}\tag{62}$$

Jas galima perrašyti į formą, tinkamą sprendimui pagal Rymano integravimo metodą. Pirmąją lygtį išdiferencijuokime pagal p , o antrąją pagal q :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial A_f}{\partial q} \right) &= \frac{\partial}{\partial p} \left(\tilde{A}_{p0} A_b^* \right) \rightarrow \frac{\partial^2 A_f}{\partial p \partial q} = \tilde{A}_{p0} \frac{\partial A_b^*}{\partial p} + A_b^* \frac{\partial \tilde{A}_{p0}}{\partial p}, \\ \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial A_b}{\partial p} \right) &= \frac{\partial}{\partial q} \left(-\tilde{A}_{p0} A_f^* \right) \rightarrow \frac{\partial^2 A_b}{\partial p \partial q} = -\tilde{A}_{p0} \frac{\partial A_f^*}{\partial q},\end{aligned}\tag{63}$$

kadangi $\tilde{A}_{p0}(p)$ nepriklauso nuo q . Pirmuosius dešiniųjų lygybės pusių narius galime pakeisti remdamiesi (62) išraiškomis ($\frac{\partial A_b^*}{\partial p} = -\tilde{A}_{p0}^* A_f$ ir $\frac{\partial A_f^*}{\partial q} = \tilde{A}_{p0}^* A_b$). Pagal jas galime pakeisti ir antrąjį narį pirmosios lygties dešinėje $A_b^* = \tilde{A}_{p0}^{-1} \frac{\partial A_f}{\partial q}$. Pertvarkę narius gauname tokias lygtis:

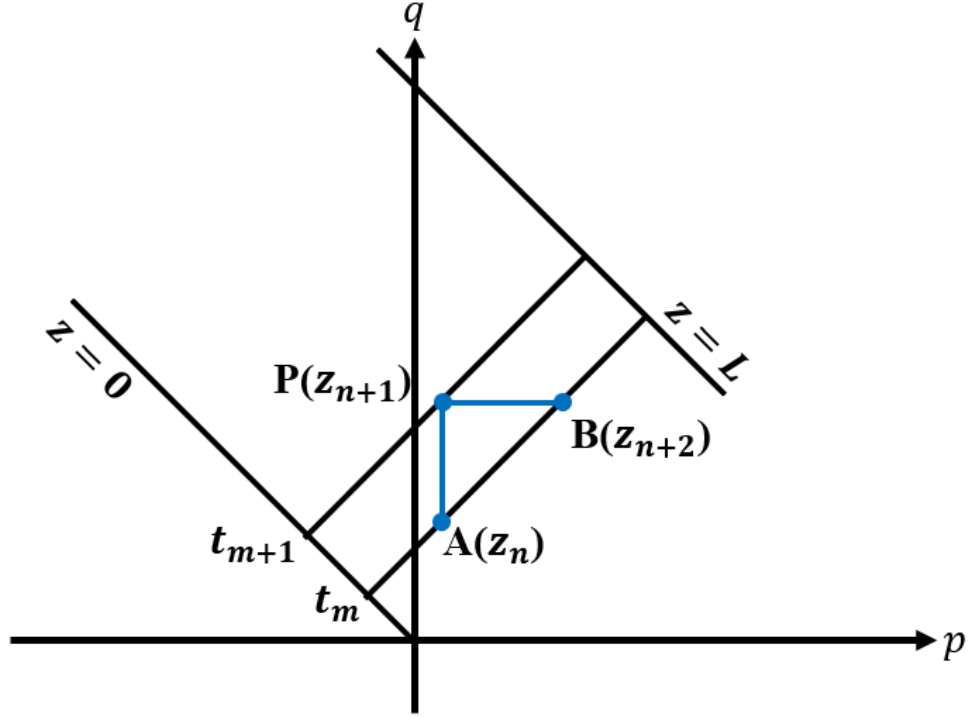
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 A_f}{\partial p \partial q} - \frac{1}{\tilde{A}_{p0}} \frac{\partial \tilde{A}_{p0}}{\partial p} \frac{\partial A_f}{\partial q} + \left| \tilde{A}_{p0} \right|^2 A_f &= 0, \\ \frac{\partial^2 A_b}{\partial p \partial q} + \left| \tilde{A}_{p0} \right|^2 A_b &= 0.\end{aligned}\tag{64}$$

Pervadinę konstantas, gauname bendras išraiškas, tinkamas sprendimui Rymano metodu:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 A_f}{\partial p \partial q} + b(p) \frac{\partial A_f}{\partial q} + c(p) A_f &= 0, \\ \frac{\partial^2 A_b}{\partial p \partial q} + c(p) A_b &= 0,\end{aligned}\tag{65}$$

čia $b(p) = -\frac{1}{\tilde{A}_{p0}} \frac{\partial \tilde{A}_{p0}}{\partial p}$ ir $c(p) = \left| \tilde{A}_{p0} \right|^2$.

Rymano integravimui kreivę AB pasirinkime iteracinį kontūrą, kuris yra pavaizduotas 30 pav. Integruojame nuo kristalo pradžios ($z = 0$) iki jo pabaigos ($z = L$). Taškuose A ir B amplitudės skaičiuojamos žinomu laiko momentu t_m , o taške P randamos laiko momentu t_{m+1} . Paveikslėlyje matome, kad $p_P = p_A$, todėl $t_{m+1} - z_{n+1}/u = t_m - z_n/u$. Taigi, $\Delta t = \Delta z/u$ ir Courant sąlyga galioja. Tačiau, kad galėtume pradėti spręsti lygtis, pirmiausia reikia surasti Rymano funkcijas priekinei ir atgalinei bangoms.



30 pav. ABŠPO integravimo kontūras Rymano metodu.

3.3.2. Rymano funkcijų nustatymas

Norint pritaikyti Rymano integravimo metodą, reikia atrasti Rymano funkciją, kuri tenkintų (37) lygtį jungtiniam diferencialiniam operatoriui Q bei (54) lygtis. Parametrinis stiprinimas amplitudiškai ir faziškai moduluotame lazerio lauke jau buvo išnagrinėtas Rymano integravimo metodu [33] darbe. Ten užrašytos Rymano funkcijos priekinei ir atgalinei bangoms. Pritaikius mūsų pažymėjimus, jos atrodytų taip:

$$R_f(p, q, p_P, q_P) = \frac{I_0(\xi)}{\tilde{A}_{p0}(p)}, \quad (66)$$

ir

$$R_b(p, q, p_P, q_P) = I_0(\xi), \quad (67)$$

čia

$$\xi(p, q, p_P, q_P) = 2\sqrt{q_P - q} \sqrt{\int_p^{p_P} |\tilde{A}_{p0}(p_1)|^2 dp_1}, \quad (68)$$

o $I_0(\xi)$ yra nulinės eilės modifikuota Beselio funkcija. Kad patikrintume, ar šios funkcijos yra teisingos, jos pirmiausia turi tenkinti lygtį operatoriui Q . Priekinei ir atgalinei bangoms ši lygtis atrodo taip:

$$\begin{aligned} Q(R_f) &= \frac{\partial^2 R_f}{\partial p \partial q} - b(p) \frac{\partial R_f}{\partial q} + c(p) R_f = 0, \\ Q(R_b) &= \frac{\partial^2 R_b}{\partial p \partial q} + c(p) R_b = 0. \end{aligned} \quad (69)$$

Pradėkime nuo lygties priekinei bangai. Apskaičiuojame Rymano funkcijos išvestines:

$$\frac{\partial R_f}{\partial q} = \frac{1}{\tilde{A}_{p0}(p)} \frac{\partial I_0}{\partial q}, \quad (70)$$

ir

$$\frac{\partial^2 R_f}{\partial p \partial q} = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{\tilde{A}_{p0}} \frac{\partial I_0}{\partial q} \right) = -\frac{1}{\tilde{A}_{p0}^2} \frac{\partial \tilde{A}_{p0}}{\partial p} \frac{\partial I_0}{\partial q} + \frac{1}{\tilde{A}_{p0}} \frac{\partial^2 I_0}{\partial p \partial q} = b(p) \frac{1}{\tilde{A}_{p0}} \frac{\partial I_0}{\partial q} + \frac{1}{\tilde{A}_{p0}} \frac{\partial^2 I_0}{\partial p \partial q}. \quad (71)$$

Jas įstatę į (69) pirmąją lygtį, galime daug ką supaprastinti ir gauname:

$$\frac{\partial^2 I_0(\xi(p, q))}{\partial p \partial q} + c(p) I_0(\xi(p, q)) = 0. \quad (72)$$

Kad įrodytume, jog kairė lygybės pusė tikrai yra lygi nuliui, reikia apskaičiuoti Beselio funkcijos išvestines. Pažymėkime $\xi(p, q) = 2\sqrt{q_P - q}\sqrt{J(p)}$, kur $J(p) = \int_p^{p_P} |\tilde{A}_{p0}(p_1)|^2 dp_1$. Be to, remiantis sąryšiu $\frac{\partial}{\partial p} \int_p^{p_P} f(p_1) dp_1 = -f(p)$, nesunku apskaičiuoti, kad $\frac{\partial J(p)}{\partial p} = -|\tilde{A}_{p0}|^2 = -c(p)$. Tada $\xi(p, q)$ išvestinės yra lygios:

$$\frac{\partial \xi}{\partial q} = -\frac{\sqrt{J}}{\sqrt{q_P - q}} \quad \text{ir} \quad \frac{\partial \xi}{\partial p} = -\frac{\sqrt{q_P - q}}{\sqrt{J}} c(p), \quad (73)$$

o mišri išvestinė:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial p \partial q} = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \xi}{\partial q} \right) = \frac{c(p)}{2\sqrt{q_P - q}\sqrt{J}} = \frac{c(p)}{\xi}. \quad (74)$$

Dabar galime apskaičiuoti Beselio funkcijos išvestinę:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I_0}{\partial p \partial q} &= \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial I_0}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial q} \right) = \frac{\partial^2 I_0}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial p} \frac{\partial \xi}{\partial q} + \frac{\partial I_0}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial p \partial q} \\ &= \frac{\partial^2 I_0}{\partial \xi^2} \left(-\frac{\sqrt{q_P - q}}{\sqrt{J}} c(p) \right) \left(-\frac{\sqrt{J}}{\sqrt{q_P - q}} \right) + \frac{\partial I_0}{\partial \xi} \left(\frac{c(p)}{\xi} \right) \\ &= c(p) \left(\frac{\partial^2 I_0}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial I_0}{\partial \xi} \right). \end{aligned} \quad (75)$$

Įstatę šią išraišką į (72) lygtį, gauname:

$$c(p) \left(\frac{\partial^2 I_0}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial I_0}{\partial \xi} \right) + c(p) I_0 = 0. \quad (76)$$

Padauginę abi lygties puses iš $\xi^2/c(p)$, gauname standartinę modifikuotąją nulinės eilės Beselio lygtį:

$$\xi^2 \frac{\partial^2 I_0}{\partial \xi^2} + \xi \frac{\partial I_0}{\partial \xi} - \xi^2 I_0 = 0, \quad (77)$$

kuri pagal apibrėžimą yra lygi 0. Taigi, $R_f = I_0/\tilde{A}_{p0}$ iš tiesų yra ieškoma Rymano funkcija priekinei bangai.

Dabar viską skaičiuoti atgalinei bangai bus daug paprasčiau. Pažiūrėjus į (69) antrąją lygtį atgalinės bangos Rymano funkcijai, galima pastebėti, kad parinkus $R_b = I_0(\xi)$, iškart gausime (72) lygtį, kuri, kaip jau parodyta, yra tenkinama. Vadinasi, $R_b = I_0(\xi)$ yra Rymano funkcija atgalinei bangai.

3.3.3. Sprendiniai priekinei ir atgalinei bangoms

Dabar galime pradėti ieškoti sprendinių. Remiantis (57) išraiška, sprendiniai priekinei ir atgalinei bangoms yra tokio pavidalo:

$$\begin{aligned}
 (A_f R_f)_P &= \frac{1}{2}(A_f R_f)_A + \frac{1}{2}(A_f R_f)_B \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_A^B \left[R_f \frac{\partial A_f}{\partial q} - A_f \frac{\partial R_f}{\partial q} \right] \cos(n, p) ds \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_A^B \left[R_f \frac{\partial A_f}{\partial p} - A_f \frac{\partial R_f}{\partial p} \right] \cos(n, q) ds \\
 &\quad - \int_A^B A_f R_f b(p) \cos(n, q) ds,
 \end{aligned} \tag{78}$$

ir

$$\begin{aligned}
 (A_b R_b)_P &= \frac{1}{2}(A_b R_b)_A + \frac{1}{2}(A_b R_b)_B \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_A^B \left[R_b \frac{\partial A_b}{\partial q} - A_b \frac{\partial R_b}{\partial q} \right] \cos(n, p) ds \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_A^B \left[R_b \frac{\partial A_b}{\partial p} - A_b \frac{\partial R_b}{\partial p} \right] \cos(n, q) ds.
 \end{aligned} \tag{79}$$

Juos galime supaprastinti pritaikę sandaugos išvestinės taisyklės narius, esantiems kvadratinuose skliausteliuose:

$$\begin{aligned}
 (A_f R_f)_P &= \frac{1}{2}(A_f R_f)_A + \frac{1}{2}(A_f R_f)_B \\
 &\quad - \int_A^B R_f \frac{\partial A_f}{\partial q} \cos(n, p) ds + \frac{1}{2} \int_A^B \frac{\partial(A_f R_f)}{\partial q} \cos(n, p) ds \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_A^B \frac{\partial(A_f R_f)}{\partial p} \cos(n, q) ds + \int_A^B A_f \frac{\partial R_f}{\partial p} \cos(n, q) ds \\
 &\quad - \int_A^B A_f R_f b(p) \cos(n, q) ds,
 \end{aligned} \tag{80}$$

ir

$$\begin{aligned}
 (A_b R_b)_P &= \frac{1}{2}(A_b R_b)_A + \frac{1}{2}(A_b R_b)_B \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_A^B \frac{\partial(A_b R_b)}{\partial q} \cos(n, p) ds + \int_A^B A_b \frac{\partial R_b}{\partial q} \cos(n, p) ds \\
 &\quad - \int_A^B R_b \frac{\partial A_b}{\partial p} \cos(n, q) ds + \frac{1}{2} \int_A^B \frac{\partial(A_b R_b)}{\partial p} \cos(n, q) ds.
 \end{aligned} \tag{81}$$

arba pertvarkius narius:

$$\begin{aligned}
(A_f R_f)_P &= \frac{1}{2}(A_f R_f)_A + \frac{1}{2}(A_f R_f)_B \\
&+ \frac{1}{2} \int_A^B \left[\cos(n,p) \frac{\partial}{\partial q} - \cos(n,q) \frac{\partial}{\partial p} \right] (A_f R_f) ds \\
&+ \int_A^B A_f \frac{\partial R_f}{\partial p} \cos(n,q) ds - \int_A^B R_f \frac{\partial A_f}{\partial q} \cos(n,p) ds \\
&- \int_A^B A_f R_f b(p) \cos(n,q) ds,
\end{aligned} \tag{82}$$

ir

$$\begin{aligned}
(A_b R_b)_P &= \frac{1}{2}(A_b R_b)_A + \frac{1}{2}(A_b R_b)_B \\
&+ \frac{1}{2} \int_A^B \left[-\cos(n,p) \frac{\partial}{\partial q} + \cos(n,q) \frac{\partial}{\partial p} \right] (A_b R_b) ds \\
&+ \int_A^B A_b \frac{\partial R_b}{\partial q} \cos(n,p) ds - \int_A^B R_b \frac{\partial A_b}{\partial p} \cos(n,q) ds.
\end{aligned} \tag{83}$$

Tiesėje AB galioja $\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial s} = \cos(n,q) \frac{\partial}{\partial p} - \cos(n,p) \frac{\partial}{\partial q}$. Tada

$$\begin{aligned}
(A_f R_f)_P &= \frac{1}{2}(A_f R_f)_A + \frac{1}{2}(A_f R_f)_B - \frac{1}{2} \int_A^B \frac{\partial}{\partial s} (A_f R_f) ds \\
&- \int_A^B R_f \frac{\partial A_f}{\partial q} \cos(n,p) ds + \int_A^B A_f \frac{\partial R_f}{\partial p} \cos(n,q) ds \\
&- \int_A^B A_f R_f b(p) \cos(n,q) ds,
\end{aligned} \tag{84}$$

ir

$$\begin{aligned}
(A_b R_b)_P &= \frac{1}{2}(A_b R_b)_A + \frac{1}{2}(A_b R_b)_B + \frac{1}{2} \int_A^B \frac{\partial}{\partial s} (A_b R_b) ds \\
&- \int_A^B R_b \frac{\partial A_b}{\partial p} \cos(n,q) ds + \int_A^B A_b \frac{\partial R_b}{\partial q} \cos(n,p) ds.
\end{aligned} \tag{85}$$

Pirmąjį integralą dešinėje lygybės pusėje galime paprastai suintegruoti ir gauname

$$\begin{aligned}
(A_f R_f)_P &= \frac{1}{2}(A_f R_f)_A + \frac{1}{2}(A_f R_f)_B - \frac{1}{2}(A_f R_f)|_A^B \\
&- \int_A^B R_f \frac{\partial A_f}{\partial q} \cos(n,p) ds + \int_A^B A_f \frac{\partial R_f}{\partial p} \cos(n,q) ds \\
&- \int_A^B A_f R_f b(p) \cos(n,q) ds,
\end{aligned} \tag{86}$$

ir

$$(A_b R_b)_P = \frac{1}{2}(A_b R_b)_A + \frac{1}{2}(A_b R_b)_B + \frac{1}{2}(A_b R_b)|_A^B - \int_A^B R_b \frac{\partial A_b}{\partial p} \cos(n, q) ds + \int_A^B A_b \frac{\partial R_b}{\partial q} \cos(n, p) ds. \quad (87)$$

Suprastiname vienodus narius ir atliekame pakeitimus: $\frac{\partial A_f}{\partial q} = \tilde{A}_{p0} A_b^*$ ir $\frac{\partial A_b}{\partial p} = -\tilde{A}_{p0} A_f^*$ iš (62) lygčių. Paskutinius du narius priekinės bangos lygtčiai sujungiame į vieną integralą. Tokiu atveju gauname:

$$(A_f R_f)_P = (A_f R_f)_A - \int_A^B R_f \tilde{A}_{p0} A_b^* \cos(n, p) ds + \int_A^B A_f \left(\frac{\partial R_f}{\partial p} - R_f b(p) \right) \cos(n, q) ds, \quad (88)$$

ir

$$(A_b R_b)_P = (A_b R_b)_B + \int_A^B R_b \tilde{A}_{p0} A_f^* \cos(n, q) ds + \int_A^B A_b \frac{\partial R_b}{\partial q} \cos(n, p) ds. \quad (89)$$

Modifikuota Beselio funkcija taškuose P , A ir B yra lygi 1: $I_0(\xi)|_P = I_0|_A = I_0|_B = I_0(0) = 1$. Todėl Rymano funkcija priekinei bangai taškuose P ir A yra lygi $R_f|_P = R_f|_A = 1/\tilde{A}_{p0}$, o atgalinei bangai taškuose P ir B yra lygi $R_b|_P = R_b|_B = 1$. Įstatykime Rymano funkcijas ir pilną $b(p)$ išraišką:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{A}_{p0}} A_f|_P &= \frac{1}{\tilde{A}_{p0}} A_f|_A - \int_A^B I_0 A_b^* \cos(n, p) ds \\ &+ \int_A^B A_f \left[\frac{\partial (\tilde{A}_{p0}^{-1} I_0)}{\partial p} + \frac{I_0}{\tilde{A}_{p0}^2} \frac{\partial \tilde{A}_{p0}}{\partial p} \right] \cos(n, q) ds, \end{aligned} \quad (90)$$

ir

$$A_b|_P = A_b|_B + \int_A^B I_0 \tilde{A}_{p0} A_f^* \cos(n, q) ds + \int_A^B A_b \frac{\partial I_0}{\partial q} \cos(n, p) ds. \quad (91)$$

Panagrinėkime (90) lygtį priekinei bangai atskirai. Narių kvadratinuose skliausteliuose galima supaprastinti:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial (\tilde{A}_{p0}^{-1} I_0)}{\partial p} + \frac{I_0}{\tilde{A}_{p0}^2} \frac{\partial \tilde{A}_{p0}}{\partial p} \right] &= \tilde{A}_{p0}^{-1}(p) I_1(\xi) \frac{\partial \xi(p)}{\partial p} - \frac{1}{\tilde{A}_{p0}^2} \frac{\partial \tilde{A}_{p0}(p)}{\partial p} I_0(\xi) + \frac{I_0}{\tilde{A}_{p0}^2} \frac{\partial \tilde{A}_{p0}}{\partial p} \\ &= \tilde{A}_{p0}^{-1}(p) I_1(\xi) \frac{\partial \xi(p)}{\partial p}. \end{aligned} \quad (92)$$

čia panaudojama tai, kad $\frac{\partial I_0}{\partial \xi} = I_1$. Išvestinė $\frac{\partial \xi}{\partial p}$, kaip parodyta anksčiau, yra lygi $\frac{\partial \xi}{\partial p} = -2(q_P - q) \frac{|\tilde{A}_{p0}|^2}{\xi}$.

Tai įstatę, gauname galutinę išraišką priekinei bangai:

$$\frac{1}{\widetilde{A}_{p0}} A_f|_P = \frac{1}{\widetilde{A}_{p0}} A_f|_A - \int_A^B I_0 A_b^* \cos(n, p) ds - 2 \int_A^B A_f \widetilde{A}_{p0}^* \frac{I_1}{\xi} (q_P - q) \cos(n, q) ds. \quad (93)$$

Sutvarkykime (91) lygtį atgalinei bangai. Joje nežinome tik išvestinės:

$$\frac{\partial I_0(\xi(p, q))}{\partial q} = I_1(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial q} = I_1(\xi) \cdot \left(-\frac{C}{\sqrt{q_P - q}} \right). \quad (94)$$

Įstatę $C = \xi / (2\sqrt{q_P - q})$, gauname:

$$\frac{\partial I_0}{\partial q} = -I_1(\xi) \frac{\xi}{2(q_P - q)}. \quad (95)$$

Šią išvestinę įstačius į (91) lygtį, gaunama išraiška atgalinės bangos amplitudei:

$$A_b|_P = A_b|_B + \int_A^B I_0 \widetilde{A}_{p0} A_f^* \cos(n, q) ds - \frac{1}{2} \int_A^B A_b I_1 \frac{\xi}{q_P - q} \cos(n, p) ds. \quad (96)$$

Dabar konvertuojame koordinates p ir q į laiko ir erdviųjų koordinatčių sistemą. Pagal apibrėžimus: $p = \frac{\kappa}{2}(z - ut)$ ir $q = \frac{\kappa}{2}(z + ut)$. Taške P turime $p_P = \frac{\kappa}{2}(z_{n+1} - ut_{m+1})$ ir $q_P = \frac{\kappa}{2}(z_{n+1} + ut_{m+1})$. Išilgai integravimo kelio AB laikas yra fiksuotas ir lygus $t = t_m$. Todėl $q_P - q = \frac{\kappa}{2}(z_{n+1} + ut_{m+1} - z - ut_m) = \frac{\kappa}{2}(z_{n+1} - z + \Delta z)$, kadangi $ut_{m+1} - ut_m = u\Delta t = \Delta z$. Taškas A atitinka $z_n = z_{n+1} - \Delta z$, o taškas B atitinka $z_{n+2} = z_{n+1} + \Delta z$. Kreivės elementas $|ds| = \sqrt{dp^2 + dq^2} = \kappa dz / \sqrt{2}$. Kadangi tiesėje AB kintant z koordinatės kinta pagal $dp = dq = \kappa dz / 2$, tai normalių kosinusai yra teigiami: $\cos(n, p) = \cos(n, q) = 1/\sqrt{2}$. Todėl geometriniai sąryšiai duoda $\cos(n, p)ds = \cos(n, q)ds = \kappa dz / 2$.

Į gautas išraiškas įstatę šiuos sąryšius, gauname galutines iteracines lygtis priekinės ir atgalinės bangų amplitudžių radimui taške z_{n+1} laiko momentu t_{m+1} :

$$\begin{aligned} A_f(t_{m+1}, z_{n+1}) &= A_f(t_m, z_n) - A_{p0} (t_{m+1} - z_{n+1}/u) \frac{\kappa}{2} \int_{z_{n+1}-\Delta z}^{z_{n+1}+\Delta z} I_0(\xi_{nm}) A_b^*(t_m, z) dz \\ &+ A_{p0} (t_{m+1} - z_{n+1}/u) \frac{\kappa^2}{2} \int_{z_{n+1}-\Delta z}^{z_{n+1}+\Delta z} A_{p0}^*(t_m - z/u) A_f(t_m, z) \frac{I_1(\xi_{nm})}{\xi_{nm}} (z_{n+1} - z + \Delta z) dz, \end{aligned} \quad (97)$$

ir

$$\begin{aligned} A_b(t_{m+1}, z_{n+1}) &= A_b(t_m, z_{n+2}) + \frac{\kappa}{2} \int_{z_{n+1}-\Delta z}^{z_{n+1}+\Delta z} A_f^*(t_m, z) A_{p0}(t_m - z/u) I_0(\xi_{nm}) dz \\ &- \frac{1}{2} \int_{z_{n+1}-\Delta z}^{z_{n+1}+\Delta z} A_b(t_m, z) I_1(\xi_{nm}) \frac{\xi_{nm}}{z_{n+1} - z + \Delta z} dz, \end{aligned} \quad (98)$$

čia

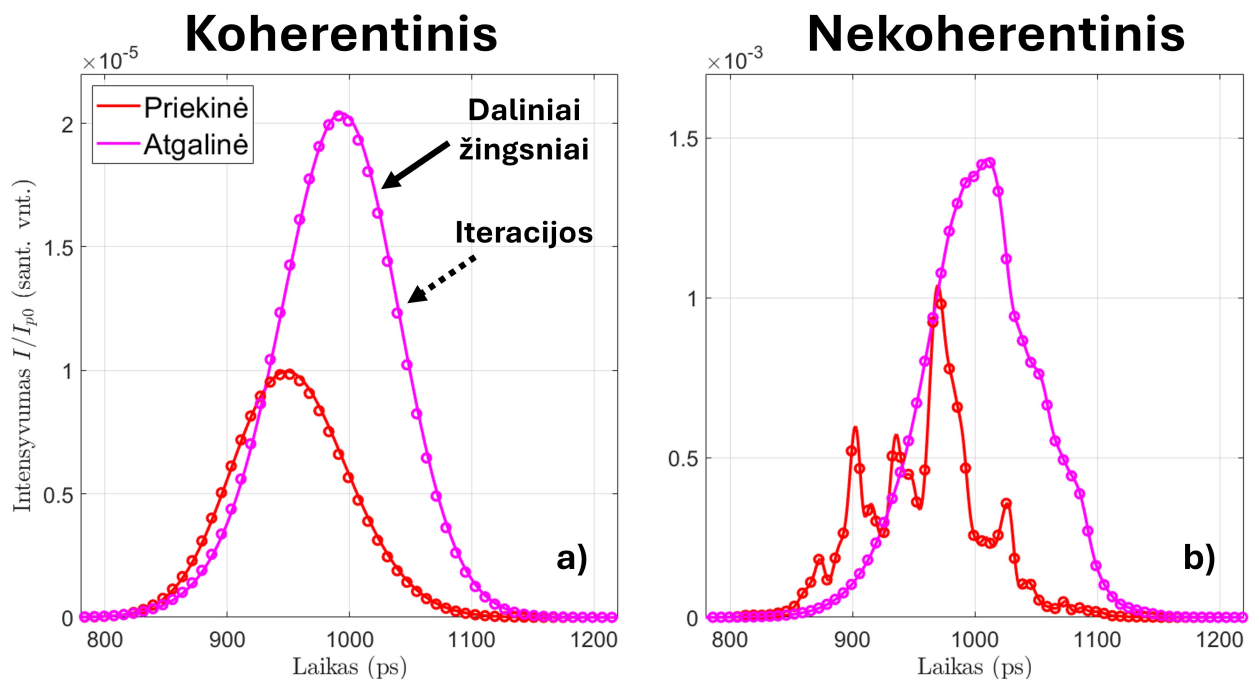
$$\xi_{nm} = \kappa \sqrt{u} \sqrt{z_{n+1} - z + \Delta z} \sqrt{\int_{t_m - z/u}^{t_m - z_n/u} |A_{p0}(t_1)|^2 dt_1}. \quad (99)$$

Šie sprendiniai yra tinkami tiek koherentiniam, tiek nekoherentiniam kaupinimo impulsui. Tačiau jie galioja tik tada, kai kaupinimo nuskurdinimo nėra (kaupinimo energija yra šalia osciliavimo slenksčio) ir visos sąveikaujančios bangos juda vienodais grupiniais greičiais.

Atidžiau pažvelgus į sprendinius, galime pastebėti, kad (97) išraiškoje priekinės bangos amplitudei prieš kiekvieną integralą stovi kaupinimo amplitudė, o (98) išraiškoje atgalinės bangos amplitudei kaupinimo amplitudė yra tik integralų viduje. Dėl šios priežasties nekoherentinio kaupinimo impulso moduliacijos ABŠPO kristale yra efektyviai perduodamos priekinės bangos impulsui, tačiau atgaliniam impulsui jos yra suvidurkinamos, todėl yra įmanoma generuoti aukšto koherentiškumo atgalinį impulsą.

3.3.4. Sprendinių patikrinimas

Siekiant patikrinti, ar Rymano integravimo metodu išvesti sprendiniai yra teisingi, sukurtas iteracinis modelis, kuris pritaiko (97) ir (98) formules. Jis palygintas su dalinių žingsnių modeliavimo metodo rezultatais. Nagrinėtas koherentinis ir nekoherentinis PH kaupinimas PPKTP kristalui. Pasirinkta $40 \mu\text{J}$ kaupinimo energija, kuri yra žemiau osciliavimo slenksčio, kad kaupinimo nuskurdinimas būtų mažas. Rezultatai yra pateikti 31 pav. Kaip matome, abiem modeliavimo metodais sugeneruoti impulsai persikloja gana neblogai tiek koherentinio, tiek ir nekoherentinio kaupinimo atveju. Iteracinis modelis skaičiuoja apie vieną valandą koherentiniam kaupinimui, kur naudojamas išilginis žingsnis $\Delta z = 427 \mu\text{m}$, ir apie šešas valandas nekoherentiniam kaupinimui, kai $\Delta z = 106,75 \mu\text{m}$. Nekoherentiniu atveju tai yra apie tris su puse karto lėčiau nei dalinių žingsnių metodas.



31 pav. Priekinės ir atgalinės bangos laikiniai intensyvumo profiliai, sumodeliuoti dalinių žingsnių (vientisa linija) ir iteraciniu (taškai) metodais, kai kaupinimas yra a) koherentinis, ir b) nekoherentinis.

Apibendrinant, šiame skyriuje buvo pritaikytas Rymano integravimo metodas ir išvestos iteracinės išraiškos priekinės ir atgalinės bangų amplitudėms. Jos leido matematiniu požiūriu įrodyti, kodėl nekoherentiškai kaupiname ABŠPO kristale sugeneruotas priekinės bangos impulsas atkartoja kaupinimo impulso laikinę formą, o atgalinis impulsas yra koherentiškas. Be to, išvestų išraiškų pagrindu sukurtas iteracinis modelis ir parodyta, kad gauti sprendiniai yra teisingi. Kita vertus, (97) ir (98) išraiškos galioja tik tuo atveju, kai kaupinimo nusukdinimas yra mažas, o iteracinio modelio skaičiavimai trunka apie tris su puse karto ilgiau nei dalinių žingsnių metodu.

Pagrindiniai rezultatai ir išvados

Šiame darbe teoriškai išnagrinėtas nekoherentiniais impulsais kaupinamas atgalinės bangos šviesos parametrinis osciliatorius. Remiantis atlikta analize, galima suformuluoti tris pagrindines išvadas:

1. Darbe parodyta, kad atgalinės bangos šviesos parametriniame osciliatoriuje, kuris yra kaupinamas nekoherentine plačiajuosčia banga, įmanoma sugeneruoti koherentinius siaurajuosčius atgalinės bangos impulsus. Taikant baigtinių skirtumų metodą, pademonstruota, kad 427 nm periodo PPKTP kristale, kaupinamame pagrindine Nd:YAG mikrolazerio harmonika, sugeneruojama atgalinė banga yra apie 2,2 karto labiau spektriškai ribota nei kaupinant antrąją harmoniką, kurios atveju kaupinimo ir priekinės bangos grupinių greičių suderinimas yra prastesnis.
2. Taikant dalinių žingsnių metodą nustatyta, kad didinant nekoherentinio kaupinimo spektro plotį, priekinės bangos spektras plečiasi proporcingai kaupinimui, o atgalinės bangos spektras išlieka siauras. Dėl šios priežasties atgalinės bangos spektrinė amplitudė gali viršyti kaupinimo amplitudę. Esant 200 GHz kaupinimo spektro pločiui, atgalinės bangos spektrinė amplitudė gauta maždaug 3 kartus didesnė už kaupinimo, o jos spektro plotis siekė vos 3,3 GHz. Tai atitinka apie 61 karto išaugusį koherentiškumą, lyginant su kaupinimo impulsu.
3. Rymano integravimo metodu išvesti analitiniai iteraciniai sprendiniai leido matematiškai pagrįsti koherentinės atgalinės bangos generacijos mechanizmą ABŠPO. Parodyta, kad priekinės bangos laikinis profilis yra tiesiogiai moduluojamas kaupinimo amplitudės fliktuacijų, tuo tarpu atgalinė banga šias fliktuacijas suvidurkina, todėl turi glotnią impulso formą ir aukštą koherentiškumą.

Literatūra

- [1] M. Ebrahimzadeh and M. H. Dunn, Optical parametric oscillators, in *Handbook of Optics, Volume IV: Fiber Optics and Nonlinear Optics*, ch. 22, New York: McGraw-Hill, 2nd ed., 2001.
- [2] J. Banys, J. Savickytė, O. Balachninaite, S. Armalytė, V. Tamulienė, V. Jarutis, and J. Vengelis, Performance investigation of high-efficiency widely tunable subnanosecond optical parametric generator and amplifier based on MgO:PPLN, *Opt. Express*, 2022, **30**, 23163–23176.
- [3] A. Žukauskas, *QPM Devices in KTA and R KTP*. PhD thesis, KTH – Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 2014.
- [4] J.-y. Zhang, J. Y. Huang, and Y. R. Shen, *Optical Parametric Generation and Amplification*, vol. 19 of *Laser Science and Technology*. Boca Raton, FL: CRC Press, 1995.
- [5] X. Zhang, *High-repetition-rate Femtosecond Optical Parametric Oscillators Based on KTP and PPLN*. PhD thesis, Philipps-Universität Marburg, Marburg/Lahn, Germany, 2002.
- [6] P. E. Powers and J. W. Haus, *Fundamentals of Nonlinear Optics*. Boca Raton, FL: CRC Press, 2nd ed., 2017.
- [7] F. Laurell and V. Pašiškevičius, Backward-wave optical parametric oscillators: principles, applications, and recent advancements, *J. Eur. Opt. Society-Rapid Publ.*, 2025, **21**, 8.
- [8] K. Mølster, M. Guionie, P. Mutter, *et al.*, Highly efficient, high average power, narrowband, pump-tunable BWOP, *Opt. Lett.*, 2023, **48**, 6484–6487.
- [9] U. Bäder, T. Mattern, T. Bauer, J. Bartschke, M. Rahm, A. Borsutzky, and R. Wallenstein, Pulsed nanosecond optical parametric generator based on periodically poled lithium niobate, *Optics Communications*, 2003, **217**, 375–380.
- [10] R. Danielius, A. Piskarskas, V. Sirutkaitis, A. Stabinis, and J. Jasevičiūtė, *Parametriniai šviesos generatoriai ir pikosekundinė spektroskopija*. Vilnius, Lithuania: Mokslas, 1983.
- [11] J. Banys, J. Jakutis Neto, A. Žukauskas, V. Pašiškevičius, V. Jarutis, and J. Vengelis, Backward wave optical parametric oscillator pumped by subnanosecond microlaser pulses, *APL Photonics*, 2025, **10**, 036123.
- [12] A. Žukauskas, G. Strömquist, V. Pašiškevičius, F. Laurell, M. Fokine, and C. Canalias, Fabrication of submicrometer quasi-phase-matched devices in KTP and R KTP [invited], *Optical Materials Express*, 2011, **1**, 1319–1325.
- [13] H. Vanherzeele and J. D. Bierlein, Magnitude of the nonlinear-optical coefficients of KTiOPO₄, *Optics Letters*, 1992, **17**, 982–984.

- [14] G. Strömqvist, V. Pašiškevičius, C. Canalias, and C. Montes, Coherent phase modulation transfer in counterpropagating parametric down-conversion, *Physical Review A*, 2011, **84**, 023825.
- [15] G. Strömqvist, V. Pašiškevičius, C. Canalias, P. Aschieri, A. Picozzi, and C. Montes, Temporal coherence in mirrorless optical parametric oscillators, *Journal of the Optical Society of America B*, 2012, **29**, 1194–1202.
- [16] F. R. Wagner, A. Hildenbrand, J. Y. Natoli, M. Commandré, F. Theodore, and H. Albrecht, Laser damage investigation in KTiOPO_4 (KTP) and RbTiOPO_4 (RTP) crystals: threshold anisotropy and the influence of SHG, in *Laser-Induced Damage in Optical Materials: 2007*, vol. 6720 of *Proceedings of SPIE*, 672015, SPIE, 2007.
- [17] G. Hansson, H. Karlsson, S. Wang, and F. Laurell, Transmission measurements in KTP and isomorphic compounds, *Applied Optics*, 2000, **39**, 5058–5069.
- [18] D. N. Nikogosyan, *Nonlinear Optical Crystals: A Complete Survey*. Ireland: Springer, 2005.
- [19] G. Tamošauskas, J. Galinis, A. Dubietis, and A. Piskarskas, Observation of spontaneous parametric down-conversion excited by high brightness blue LED, *Optics Express*, 2010, **18**, 16010–16015.
- [20] A. Picozzi and M. Haelterman, Parametric three-wave soliton generated from incoherent light, *Physical Review Letters*, 2001, **86**, 2010–2013.
- [21] C. Montes, A. Picozzi, and K. Gallo, Ultra-coherent signal output from an incoherent cw-pumped singly resonant optical parametric oscillator, *Optics Communications*, 2004, **237**, 437–449.
- [22] A. Picozzi, C. Montes, and M. Haelterman, Coherence properties of the parametric three-wave interaction driven from an incoherent pump, *Physical Review E*, 2002, **66**, 056605.
- [23] A. Picozzi and P. Aschieri, Influence of dispersion on the resonant interaction between three incoherent waves, *Physical Review E*, 2005, **72**, 046606.
- [24] S. Wabnitz, A. Picozzi, A. Tonello, D. Modotto, and G. Millot, Control of signal coherence in parametric frequency mixing with incoherent pumps: narrowband mid-infrared light generation by downconversion of broadband amplified spontaneous emission source at 1550 nm, *Journal of the Optical Society of America B*, 2012, **29**, 3128–3135.
- [25] C. Montes, W. Grundkötter, H. Suche, and W. Sohler, Coherent signal from incoherently cw-pumped singly resonant Ti:LiNbO_3 integrated optical parametric oscillators, *Journal of the Optical Society of America B*, 2007, **24**, 2796–2806.
- [26] C. Montes, B. Gay-Para, M. De Micheli, and P. Aschieri, Mirrorless optical parametric oscillators with stitching faults: backward downconversion efficiency and coherence gain versus

- stochastic pump bandwidth, *Journal of the Optical Society of America B*, 2014, **31**, 3112–3121.
- [27] A.-L. Viotti, F. Laurell, A. Žukauskas, C. Canalias, and V. Pašiškevičius, Coherent phase transfer and pulse compression at 1.4 μm in a backward-wave OPO, *Optics Letters*, 2019, **44**, 3118–3121.
- [28] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*. Academic Press, 6th ed., 2019.
- [29] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 3rd ed., 2007.
- [30] A. Khurram, “MATLAB Ode45 function - A practical guide.” <https://www.algorithmminds.com/matlab-tutorials/ode45-matlab-a-practical-guide/>. Accessed: 2026-05-19.
- [31] C. E. Minor and R. S. Cudney., Mirrorless optical parametric oscillation in bulk PPLN and PPLT: a feasibility study, *Applied Physics B*, 2017, **123**, 38.
- [32] C.-S. Wang, Theory of stimulated raman scattering, *Physical Review*, 1969, **182**, 482–494.
- [33] A. P. Sukhorukov and A. K. Shchednova, Parametric amplification of light in the field of a modulated laser wave, *Soviet Physics JETP*, 1971, **33**, 677–682.

Aprobacija

Studentas yra šių mokslinių straipsnių bendraautorius:

1. V. Tamulienė, G. Stanionytė, T. Latvys, and J. Vengelis, Subnanosecond visible two-stage optical parametric generator and amplifier based on MgO:PPLN and LBO crystals at strong pump depletion, *Heliyon*, 2024, **10**, e37513.
2. T. Latvys, J. Banys, V. Jarutis, J. Vengelis, and V. Tamulienė, X-wave formation in the subnanosecond backward-wave optical parametric oscillator, *Phys. Rev. A*, 2025, **111**, 063517.
3. V. Tamulienė and T. Latvys, Analytical treatment of backward wave optical parametric oscillator pumped by an incoherent wave, 2026 (atsakinėjama į recenzentų pastabas).

Studentas pristatė pranešimus šiose konferencijose arba dalyvavo kaip bendraautorius:

1. T. Latvys, V. Tamulienė, Influence of conical wave formation on subnanosecond backward wave optical parametric amplifier, 68th International Conference for Students of Physics and Natural Sciences Open Readings 2025, May 13-16, 2025, Vilnius, Lithuania.
2. Viktorija Tamulienė, T. Latvys, Jonas Banys, Vygandas Jarutis, Julius Vengelis, Netiesinių X-bangų įtaka atbulinės bangos šviesos parametriniam osiliatoriui kaupinamam subnanosekundiniais lazeriniais impulsais, 46-oji Lietuvos Nacionalinė fizikos konferencija, skirta Tarptautinių kvantinių mokslų ir technologijų metams pažymėti, spalio 8-10, 2025, Kaunas, Lietuva.
3. T. Latvys, V. Tamulienė, Generation of regular laser pulses in a backward wave optical parametric oscillator pumped by incoherent pulses, 69th International Conference for Students of Physics and Natural Sciences Open Readings 2026, April 27-30, 2026, Vilnius, Lithuania.

Siaurajuosčio signalo generacijos atgalinės bangos šviesos parametriniame osciliatoriuje kaupinamame plačiajuosčia banga teorinis modeliavimas

Tomas Latvys

Santrauka

Netiesiniai kristalai, kaupinami lazeriniais šaltiniais, leidžia generuoti derinamo bangos ilgio lazerinę spinduliuotę plačiame infraraudonajame diapazone. Tačiau, išpildžius tam tikras sąlygas sąveikaujančių bangų grupiniams greičiams, koherentinės spinduliuotės generacija netiesiniuose kristaluose yra įmanoma net ir tada, kai kaupinimo šaltinis yra nekoherentinis. Atgalinės bangos šviesos parametriniai osciliatoriai (ABŠPO), kuriuose sugeneruotos bangos sklinda priešpriešinėmis kryptimis, palengvina šių sąlygų išpildymą ir leidžia koherentes bangas generuoti daug platesniame spektriniame diapazone nei įprasti parametriniai prietaisai.

Šio darbo tikslas – teoriškai ištirti koherutinės spinduliuotės generacijos mechanizmą nekoherentiškai kaupinamame ABŠPO. Sąveikai modeliuoti pritaikyti baigtinių skirtumų, dalinių žingsnių ir iteracinis modeliavimo metodai.

Visų pirma, darbe pademonstruota, kad dėl geresnio kaupinimo ir priekinės bangos grupinių greičių suderinimo 427 nm periodo PPKTP kristalą, kaupinant nekoherentine 1064 nm bangos ilgio spinduliuote, sugeneruojama atgalinė banga yra apie 2,2 karto labiau spektriškai ribota nei kaupiant 532 nm spinduliuote.

Antra, nustatyta, kad didinant nekoherentinio kaupinimo spektro plotį, priekinės bangos spektras plečiasi proporcingai kaupinimui, o atgalinės bangos spektras išlieka siauras. Dėl šios priežasties atgalinės bangos spektrinė amplitudė gali viršyti kaupinimo amplitudę. Modelyje atgalinės bangos spektrinė amplitudė gauta maždaug 3 kartus didesnė, o jos spektro plotis buvo apie 61 kartą mažesnis už kaupinimo spektrą.

Trečia, Rymano integravimo metodu išvesti analitiniai iteraciniai sprendiniai priekinės ir atgalinės bangų amplitudėms. Jie parodė, kad nekoherentinio kaupinimo amplitudės fliuktuacijos priekinės bangos laikinį profilį moduliuoja tiesiogiai, o atgalinės bangos profilyje yra suvidurkinamos, todėl sugeneruotas atgalinės bangos impulsas yra koherentinis.

Numerical simulation of narrowband signal wave generation in backward wave optical parametric oscillator pumped by broadband wave

Tomas Latvys

Summary

Nonlinear crystals pumped by coherent laser sources enable the generation of tunable laser radiation across a wide infrared range. However, provided that specific conditions for the group velocities of the interacting waves are met, coherent radiation can be obtained in nonlinear crystals even if the pump light is incoherent. Backward-wave optical parametric oscillators (BWOPs), in which the generated waves propagate in opposite directions, help meet these conditions and allow the generation of coherent waves over a much broader spectral range than conventional parametric devices.

The aim of this work is to theoretically investigate the mechanism of coherent radiation generation in an incoherently pumped BWOP. Finite-difference, split-step, and iterative methods were employed to model the interaction.

First, it is shown that, due to improved group-velocity matching between the pump and the forward wave, the backward wave that is generated in a PPKTP crystal with a poling period of 427 nm is approximately 2.2 times closer to the transform limit when pumped by incoherent radiation at the wavelength of 1064 nm rather than at 532 nm.

Second, it was found that, as the spectral width of the incoherent pump increases, the spectrum of the forward wave broadens proportionally to the pump, whereas the spectrum of the backward wave remains narrow. As a result, the spectral amplitude of the backward wave can exceed that of the pump. The model predicts that the spectral amplitude of the backward wave is approximately three times greater, while its spectral width is about 61 times narrower than that of the pump.

Third, analytical iterative solutions for the amplitudes of the forward and backward waves were derived using the Riemann integration method. The obtained solutions reveal that the amplitude fluctuations of the incoherent pump directly modulate the temporal profile of the forward wave, whereas they are averaged out in the profile of the backward wave, resulting in the generation of a coherent backward-wave pulse.