



VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS STUDIJŲ PROGRAMA

Magistro baigiamasis darbas

**Matematinio mąstymo lavinimas pradinėse
mokyklose**

Developing mathematical - proof thinking in primary schools

Evita Petkevičiūtė

Darbo vadovas : Habil. Dr. Rimas Norvaiša

Recenzentas : Dr. Ieva Kilienė

Vilnius
2026

Santrauka

Šiame darbe nagrinėjama, kokias galimybes pradinų klasių matematikos mokymo priemonės sudaro mokinių matematinio mąstymo ir argumentavimo gebėjimų ugdymui. Daugiausia dėmesio skiriama įrodymo ir pagrindimo pobūdžio uždaviniams, kurie skatina mokinius ne tik atlikti skaičiavimo veiksmus, bet ir paaiškinti sprendimo eigą, pagrįsti atsakymą, tikrinti teiginius bei kelti klausimą „kodėl?“. Tyrime analizuojami 1–4 klasių serijos „TAIP!“ matematikos vadovėlių uždaviniai bei analizuojami jų tipai ir vertinant jų tipą ir argumentavimo gylį. Gauti rezultatai leidžia įvertinti, kiek mokymo priemonėse sudaroma galimybių nuosekliai ugdyti mokinių įrodymo ir pagrindimo įpročius ir pateikti rekomendacijas, kaip įprastus uždavinius papildyti pagrindimą skatinančiomis formuluotėmis.

Raktiniai žodžiai: pradinis ugdymas, matematinis mąstymas, pagrindimas, įrodymo pobūdžio uždaviniai, argumentavimas.

Summary

This thesis examines the extent to which primary school mathematics teaching materials provide opportunities for developing pupils' mathematical thinking and reasoning skills. The main focus is on proof- and justification-oriented tasks that encourage pupils not only to perform calculations, but also to explain their solution process, justify their answers, verify statements, and ask the question "why?". The study analyses tasks from the TAIP! mathematics textbooks for Grades 1–4, evaluating their type and depth of reasoning. The results make it possible to assess how consistently the teaching materials create opportunities for developing pupils' habits of justification and to propose recommendations for supplementing ordinary tasks with prompts that encourage mathematical reasoning.

Keywords: primary education, mathematical thinking, justification, proof-oriented tasks, argumentation.

Turinys

Santrauka	2
Summary	3
Lentelių sąrašas	5
Įvadas	6
1. Teorinis pagrindimas	11
1.1. Matematinio raštingumo samprata	11
1.2. Matematinio mąstymo pasireiškimas per procesus.	14
1.3. Metakognicija	17
1.4. Įrodymo uždaviniai pradinėse klasėse	19
2. Empirinio tyrimo metodika ir rezultatai	20
2.1. Tyrimo tikslas ir uždaviniai	20
2.2. Tyrimo eiga ir medžiaga	20
2.3. Statistinio metodo prielaidos	22
2.3.1. Aibės ir analizės vienetas	22
2.3.2. Pagrindinis binarinis kintamasis	23
2.3.3. Papildomi kintamieji	24
2.4. Hipotezės ir statistinės patikros	25
2.5. Gautų rezultatų suvestinė	26
2.6. Tyrimo patikimumas ir koduotojų suderinamumas	28
2.7. Rezultatai	29
3. Rekomendacijos JPGU uždavinių įtraukimui	30
3.1. Tyrimo rezultatų apibendrinimas ir praktinė reikšmė	30
3.2. JPGU uždavinių progresija nuo 1 klasės	30
Išvados	34
Rekomendacijos	35
Priedai	38

Lentelių sąrašas

1	Mokymo veiksmai ir tikslai	15
2	Numeruotų uždavinių pasiskirstymas analizuotuose 1–4 klasių matematikos vadovėliuose iš Serijos „TAIP!“	21
3	Uždavinių tipų klasifikacija pagal pagrindimo reikalavimo stiprumą	25
4	Kontingencijos lentelė (JPGU ir ne-JPGU) pagal klasę	26
5	Siūlomi JPGU pobūdžio uždavinių tipai pradinėse klasėse	31
6	Galima JPGU uždavinių progresija 1–4 klasėse	32
7	Įprasto uždavinio papildymas JPGU pobūdžio klausimais	32
8	Užduočių pasiskirstymas pagal kontekstines charakteristikas: klasę, dalį, temą, pagrindimą	38

Išvadas

Platonui priskiriama mintis, jog „niekas niekada netampa žmogumi, nepradėjęs mokytis“, taikliai pabrėžia mokymosi svarbą žmogaus tapsmui. Edukacija yra neatsiejama kiekvieno šiuolaikinio žmogaus gyvenimo dalis, kuri nėra tik techninių įgūdžių rinkinys. Per ugdymosi procesą žmogus įgyja žinių, gebėjimų, vertybių, nuostatų ir kompetencijų, kurios jam padeda gyventi, dirbti ir dalyvauti visuomenėje. Tai mokymosi procesas, kuris formuoja mūsų asmenybę, principus bei mąstymą, nes žmogus mokosi ne vien ką galvoti, bet ir kaip mąstyti, kelti klausimus, pagrįsti savo sprendimus ir vertinti kitų pateikiamus argumentus.

Remiantis Lietuvos Respublikos švietimo, mokslo ir sporto ministerijos skelbiamais duomenimis [12], mokymasis Lietuvoje prasideda ankstyvame amžiuje. Lietuvoje vaiko ugdymas yra pripažįstamas, kad prasideda dar kūdikystėje, gerokai iki formaliojo mokyklinio ugdymo pradžios. Ikimokyklinis ugdymas, apimantis ankstyvąjį ugdymą ir priežiūrą, gali būti teikiamas nuo gimimo iki priešmokyklinio ugdymo pradžios ir paprastai nėra privalomas. Šiame etape vaikų ugdymas grindžiamas mokymusi žaidžiant, socialinės ir emocinės raidos, kalbos įgūdžių bei motorikos lavinimu. Priešmokyklinis ugdymas, skirtas pasiruošti pradžinei mokyklai, yra privalomas ir, kaip nurodoma ministerijos gairėse, pradedamas tais kalendoriniais metais, kai vaikui iki balandžio 30 d. sueina 5 metai [12].

Matematikos mokymasis veikia kaip universali kalba. Pagal atliktus [8] tyrimus, ankstyvosios patirtys turi ilgalaikį poveikį vaiko raidai. Tyrime buvo nustatyta, kad aukštesnis darželį lankančių vaikų kompetencijos lygis leido numatyti statistiškai reikšmingą ir iš esmės svarų WJ-Math testo atlikimo trečioje klasėje rezultatą. Toks pagrindimas rodo, kad mokymasis prasideda ankstyvame amžiuje ir ankstyvi pasiekimai gali padėti nustatyti, kuriems vaikams ateityje gali sektis matematikos pamokose, o kurie gali patirti sunkumų.

Matematikos mokymasis lavina loginį struktūrizavimą, kuris vėliau pritaikomas visose srityse. Kai kurie [20] teigia, kad aukšti darželio laikotarpiu matematikos įgūdžiai gali sudaryti sąlygas kartu tobulėti vykdomųjų funkcijų įgūdžiams, o tai savo ruožtu gali lemti aukštesnius akademinius pasiekimus. Vykdomosioms funkcijoms yra priskiriama darbinė atmintis (gebėjimas išlaikyti ir valdyti informaciją), kognityvinis lankstumas (gebėjimas persijungti tarp užduočių) bei savikontrolė (gebėjimas susikaupti ir atsispirti išoriniams trukdžiams). Ryšys tarp matematikos ir šiųjų funkcijų yra abipusis: mokantis matematikos reikia planuoti žingsnius ir kontroliuoti dėmesį, o lavėjančios funkcijos leidžia įveikti vis sudėtingesnius akademinius iššūkius. [7] parodo, kad skaičių suvokimas paskutinaisiais metais darželyje bei pirmoje klasėje leido numatyti matematikos lygį ir augimo tempą nuo pirmos iki trečios klasės. Buvo pastebėta, kad mažas pajamas gaunantys vaikai dažniau patenka į žemą pasiekimų grupę dėl nepakankamų žinių, todėl tokie mokiniai, negavę papildomos pagalbos, yra linkę likti žemų pasiekimų trajektorijoje.

Matematinis mąstymas yra kompleksinis reiškiny, kurį sunku įvardyti vienu žodžiu ar vienu sakiniu. Knygoje *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics* [5] teigiama, kad

nė vienas terminas negali visiškai apibrėžti visų matematinės kompetencijos, žinių ir įgūdžių aspektų, kurie sudaro matematinio raštingumo sąvoką. Tačiau išskiriamos penkios esminės gijos:

- **sąvokinis supratimas** – matematinių sąvokų, operacijų ir ryšių suvokimas;
- **procedūrinis sklandumas** – gebėjimas taikyti procedūras lanksčiai, tiksliai, efektyviai ir tinkamai;
- **strateginė kompetencija** – gebėjimas formuluoti, vaizduoti ir spręsti matematines problemas;
- **adaptyvusis samprotavimas** – gebėjimas logiškai mąstyti, reflektuoti, paaiškinti ir pagrįsti;
- **produktyvios nuostatos** – įprastas polinkis matyti matematiką kaip prasmingą, naudingą ir vertingą veiklą, kartu tikint uolumo svarba ir savo paties pajėgumu.

Šių gijų visuma leidžia tiksliau apibrėžti ir suprasti matematinio raštingumo sąvoką. Kadangi ankstyvieji matematiniai gebėjimai turi įtakos tolesniems mokymosi ir gyvenimo etapams, svarbu, kad mokiniai jau pradinėse klasėse turėtų galimybę lavinti skirtingas matematinio raštingumo sritis. Carpenter ir Levi parodė, kad pradinių klasių mokiniai gali formuluoti, vaizduoti ir pagrįsti matematinius teiginius, todėl mokymo užduotys turėtų sudaryti sąlygas ne tik skaičiuoti, bet ir samprotauti, apibendrinti bei pagrįsti savo sprendimus [2]. Vis dėlto tyrimai rodo, kad pradinių klasių matematikos vadovėliuose ne visada sudaroma pakankamai galimybių mokiniams samprotauti, pagrįsti sprendimus ir formuluoti argumentus. Bieda ir kt., analizavę samprotavimo ir įrodinėjimo galimybes septyniuose pradinių klasių matematikos vadovėliuose, nustatė, kad tokio pobūdžio užduotys sudarė tik nedidelę visų užduočių dalį – vidutiniškai 3,7 % [1]. Šie rezultatai leidžia teigti, kad rašytinė ugdymo programa, tokia, kokia ji pateikiama vadovėliuose, gali būti nepakankama siekiant suteikti mokiniams prasmingų galimybių mokytis kurti ir vertinti matematinius teiginius [1]. Todėl pagrindimų nebuvimą ar bendresnius argumentų formulavimo sunkumus galima atpažinti jau pradinėse klasėse.

Dėl šios priežasties svarbu mokiniams suteikti daugiau galimybių ne tik patiems kurti pagrindimus, bet ir vertinti jau pateiktus argumentus. Tokia veikla gali tapti svarbiu „tiltu“ tarp mokinių intuityvaus supratimo apie tai, kas laikytina įtikinamu argumentu, ir užduočių, kuriose iš jų reikalaujama savarankiškai konstruoti matematinius pagrindimus. Be to, matematika mokykloje turėtų atspindėti pačios matematikos, kaip mokslinės disciplinos, pobūdį: matematinės žinios nėra įgyjamos vien pasyviai įsimenant taisykles, bet formuojasi per samprotavimą, socialinę sąveiką ir intelektualinę diskusiją [10]. Todėl mokiniai turėtų mokytis ne tik skaičiuoti, bet ir argumentuoti, kelti prielaidas bei kritiškai analizuoti vieni kitų idėjas. Šiame procese mokytojo vaidmuo yra ypač svarbus: jis padeda susieti mokinių mąstymą su matematika kaip

mokomuoju dalyku ir kuria aplinką, kurioje klaidos tampa vertingu diskusijos objektu, vedančiu į gilesnį supratimą.

A. J. Stylianidesas [19] savo straipsnyje „Proof and Proving in School mathematics“ kritiškai žiūri į matematikos mokymo metodiką ir pabrėžia mokykliniam kontekstui adaptuotą įrodinėjimo uždaviniuose trūkumą. Tokio tipo uždaviniai susieja intuityvų mokinių mąstymą ir formalią matematinę sistemą. Autorius argumentuoja, kad įrodinėjimas neturi būti kaip atskira matematikos turinio dalis, o labiau integralus matematinio raštingumo komponentas, įtraukiamas ir adaptuojamas visose švietimo pakopose. Stylianidesas įrodymą traktuoja kaip argumentų seką, kuri remiasi bendruomenės (klasės) pripažintais pamatiniais teiginiais (angl. set of accepted statements), naudoja galiojančias dedukcinio pagrindimo formas ir yra išreikšta tinkamomis reprezentacinėmis priemonėmis. Sunkiausia, bet tuo pačiu metu ir svarbiausia dalis yra padėti mokiniams pereiti nuo empirinio pagrindimo iki formalaus įrodymo. Besimokantieji klaidingai ekstrapoluoja bendras taisyklės savybes iš riboto pavyzdžių kiekio (kas priskiriama empiriniam pagrindimui), kuris tampa intelektualiniu barjeru pereiti į aukštesnį abstrakcijos lygį. Mokytojo vaidmuo čia taip pat yra pabrėžiamas. Mokytojas privalo sąmoningai suteikti mokiniams sąlygas, kurios dekonstruotų mokinių pasitikėjimą vien empiriniais pavyzdžiais ir skatintų ieškoti universalių loginių sąsajų. Įrodinėjimas turi tapti kasdieniu įrankiu, pavyzdžiui, padedančiu spręsti konfliktus tarp skirtingų nuomonių klasėje. Tai reiškia, kad matematinis įrodinėjimas turi būti suvokiamas ne kaip sausa, formali procedūra, o kaip pagrindinė kognityvinė priemonė, užtikrinanti mokinių susidomėjimą ir požiūrį į matematiką kaip į gyvą, argumentaciją grįstą mokslą.

Norint giliai išanalizuoti matematinį mąstymą pradinėse klasėse, reikėtų daugiau dėmesio skirti klasės aplinkai kuriose mąstymas yra matomas ir mokomas. Sociomatematinių normų tyrimai rodo [6], kad mokinių argumentavimas ir autonomija matematikoje formuojasi per klasėje esančius išsikeltus lūkesčius, kurie priskiriami prie matematikos, pavyzdžiui, kas laikoma priimtiniu paaiškinimu, kas laikoma kitokiu sprendimu arba pagrindimu. Toks požiūris veda prie to, kad mokinio raida nesusideda vien iš vidinių kognityvinių procesų, ji taip pat pasireiškia iš socialinės normos - reikalavimo argumentuoti, o ne tikėtis tik atsakymo gavimo. Papildomai, matematika turi ugdyti ilgalaikius procesus: ieškoti dėsningumų, eksperimentuoti, apibendrinti, struktūruotai samprotauti. To tikimasi, nes, pagal [3] „Habits of mind“ straipsnyje rašoma, kad ateityje esantys matematiniai reikalavimai nebus numatomi iki smulkmenų, todėl fiksuotų procedūrų treniravimas nėra pakankamas. Tokia situacija leidžia matyti viso darbo problemą: matematinis mąstymas yra geriausiai lavinamas vietose, kuriose mokiniams yra suteikiamos lanksčios mokymosi sąlygos bei matematinis taikymas įvairiose situacijose.

Literatūra padeda apibrėžti tris esminius teiginius: matematika ankstyvoje mokinių raidos etape yra svarbi tolesniai raidos trajektorijai, matematinis mąstymas yra daugiau nei atsikartojančios procedūros, o socialinė klasės norma ir užduočių dizainą formuoja tai, koks mąstymas yra reikalaujamas ir vystosi. Tačiau daugelyje kontekstų išlieka spraga tarp šių idėjų ir kasdienės praktikos. Joje, nors tikslai ir matematinės kompetencijos yra rodomos (kaip

sąvokinis supratimas, procedūrinis sklandumas, adaptyvusis samprotavimas, strateginė kompetencija), jie automatiškai netampa pamokų rutina, kuri nuosekliai iškelia vykdomųjų funkcijų stebėseną, pagrindinę ir argumentavimo kūrimą. Ši integracija labai svarbi pradinėse klasėse, kur mokytojai, remdamiesi vadovėliais, turi derinti bazinius pagrindus, įgūdžius ir platesnes matematinio raštingumo kompetencijas.

Darbo aktualumas

Šio darbo aktualumas siejamas su poreikiu detaliau išanalizuoti, kaip pradinių klasių matematikos mokymo priemonėse sudaromos sąlygos ugdyti mokinių matematinį mąstymą. Šiame darbe ypatingas dėmesys skiriamas ne vien skaičiavimo veiksmų atlikimui, bet ir tiems uždaviniams, kurie skatina mokinius aiškinti savo sprendimus, pagrįsti atsakymus, tikrinti teiginių teisingumą, palyginti skirtingus sprendimo būdus ar pastebėti klaidas. Tokia analizė svarbi todėl, kad mokytojams reikalingi aiškesni požymiai, pagal kuriuos būtų galima atpažinti, kokios užduotys iš tikrųjų skatina mokinius mąstyti, argumentuoti ir atsakyti į klausimą „kodėl?“, o ne tik pateikti galutinį atsakymą.

Tyrimo problema

Pradinių klasių matematikoje mokiniai mokosi atlikti daug skaičiavimo veiksmų, tačiau ne visada aišku, kiek mokymo priemonėse jiems sudaroma galimybių pagrįsti savo sprendimus, tikrinti teiginius ir aiškinti, kodėl pasirinktas sprendimo būdas yra teisingas. Todėl šiame darbe keliama problema: kaip dažnai ir kokiomis formomis pradinių klasių matematikos mokymo priemonėse pateikiami įrodymo ir pagrindimo pobūdžio uždaviniai, ir kaip tokių uždavinių seka galėtų padėti nuo 1 klasės ugdyti mokinių argumentavimo įpročius?

Tyrimo objektas

Tyrimo objektas – pradinių klasių matematikos mokymo priemonėse pateikiami įrodymo ir pagrindimo pobūdžio uždaviniai ir jų potencialas ugdyti mokinių argumentavimą.

Tyrimo tikslas

Šio darbo tikslas – išanalizuoti, koku mastu ir kokiomis formomis pradinių klasių matematikos mokymo priemonių serijoje „TAIP!“ mokiniams pateikiami įrodymo ir pagrindimo pobūdžio uždaviniai, įvertinti jų tipą bei argumentavimo gylį ir pateikti rekomendacijas, kaip nuo 1 klasės nuosekliai formuoti mokinių įprotį aiškinti „kodėl?“.

Tyrimo uždaviniai

1. Remiantis moksline literatūra, apibrėžti, kaip šiame darbe suprantami įrodymo / pagrindimo pobūdžio uždaviniai pradinėse klasėse.
2. Sudaryti įrodymo / pagrindimo pobūdžio uždavinių tipologiją, kuri būtų tinkama pradinių klasių matematikos uždavinių analizei.
3. Išanalizuoti, koku mastu ir kokiomis formomis serijos „TAIP!“ 1–4 klasių matematikos mokymo priemonėse pateikiami įrodymo / pagrindimo pobūdžio uždaviniai.

4. Įvertinti šių uždavinių argumentavimo gylį ir jų teikiamas galimybes ugdyti mokinių matematinį pagrindimą.
5. Pateikti rekomendacijas, kaip nuo 1 klasės nuosekliai įtraukti uždavinius, skatinančius mokinius aiškinti, pagrįsti, tikrinti teiginius ir kelti klausimą „kodėl?“.

Tyrimo apimtis ir apribojimai

Tyrimė analizuojamos 1–4 klasės serijos „TAIP!“ matematikos mokymo priemonės. Pagrindinis dėmesys skiriamas 1 klasei kaip etapui, kuriame gali pradėti formuotis mokinių įprotis aiškinti ir pagrįsti savo sprendimus.

Kadangi tyrimas remiasi uždavinių turinio analize, darbe vertinama mokymo priemonių teikiama galimybė ugdyti argumentavimą ir pagrindimą. Tyrimas nevertina realaus pamokos įgyvendinimo, mokytojo veiksmų ar mokinių faktinių pasiekimų. Todėl išvados parodo ne tai, kaip mokiniai iš tikrųjų sprendžia šiuos uždavinius klasėje, bet tai, kokias galimybes pačios užduotys sudaro mokiniams aiškinti, pagrįsti ir tikrinti matematinius teiginius. Šiame darbe įrodymas suprantamas ne kaip formalus matematinis įrodymas, bet kaip pradinių klasių mokiniams prieinamas pagrindimas arba argumentavimas.

1. Teorinis pagrindimas

Šiame skyriuje pristatomas teorinis tyrimo pagrindas, kuriuo remiantis apibrėžiama, kaip šiame darbe suprantami pradinį klasių mokinių matematinis mąstymas, argumentavimas ir įrodymo pobūdžio uždaviniai. Literatūros analizėje aptariamos matematinio raštingumo ir matematinio meistriškumo sampratos, išryškinant conceptualaus supratimo, procedūrinio sklandumo, strateginės kompetencijos, adaptyviojo samprotavimo ir produktyviosios nuostatos ryšį su mokinių gebėjimu aiškinti, pagrįsti ir tikrinti matematinius teiginius.

Skyriuje taip pat nagrinėjama, kaip mokinių argumentavimo gebėjimus veikia strategijų taikymas, metakognityvinė kontrolė, mokinių įsitikinimai apie matematiką ir klasėje formuojamos sociomatematinės normos. Šie aspektai leidžia pagrįsti, kodėl įrodymo ar pagrindimo pobūdžio uždaviniai gali būti prasmingi jau pradinėse klasėse, jei jie suprantami ne kaip formalūs dedukciniai įrodymai, bet kaip mokiniui prieinamos matematinio argumentavimo situacijos.

Remiantis aptarta literatūra, skyriaus pabaigoje apibrėžiama įrodymo pobūdžio uždavinių samprata ir išskiriamos pagrindinės jų tipologijos kategorijos. Ši teorinė struktūra sudaro pagrindą tyrimo metodologijai: ji leidžia analizuoti uždavinių pobūdį, jų reikalaujamą pagrindimo lygį ir ryšį su mokinių argumentavimo įpročių formavimusi.

1.1. Matematinio raštingumo samprata

Matematinio raštingumo sampratos plėtra remiantis *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics* [5]. Pradinio ugdymo etape sąvokinis supratimas (angl. conceptual understanding) veikia kaip pamatinis kognityvinis karkasas, leidžiantis mokiniui transformuoti konkrečią patirtį į abstrakčias matematines struktūras. Tai nėra tik gebėjimas atlikti aritmetines operacijas, bet gebėjimas lanksčiai operuoti skirtingomis reprezentacijomis: pavyzdžiui, vaikas tą pačią sudėties koncepciją geba susieti su manipuliacinėmis priemonėmis (kaladėlėmis), grafinais modeliais, skaičių tiese ir simboline išraiška. Tokia reprezentacijų integracija užtikrina, kad mokinys suvokia skaičiaus sandaros (pozicinės vertės) logiką, o ne tiesiog mechanškai įsimeną stulpeliu atliekamų veiksmų seką. Esminis sąvokinio supratimo privalumas pradinėse klasėse yra matematinio intuityvumo ugdymas: mokinys pradeda atpažinti dėsningumus (pvz., sudėties perstatomumo savybę), kurie leidžia drastiškai sumažinti mechanškai įsimenamos informacijos kiekį ir skatina savarankišką naujų sprendimo strategijų kūrimą. Kai mokinys supranta „kodėl“ veikia tam tikras algoritmas, jo žinios tampa atsparios pamiršimui ir suformuoja tvirtą pagrindą sėkmingam perėjimui prie sudėtingesnių, abstraktesnių matematikos temų aukštesnėse klasėse.

Šiuolaikinėje edukologinėje diskursyvo erdvėje sąvokinis supratimas (angl. conceptual understanding) apibrėžiamas ne kaip statinis faktų rinkinys, o kaip dinamiškas, integruotas ir funkcinis matematinių idėjų tinklas [5]. Skirtingai nuo procedūrinių žinių, kurios apima algoritminių taisyklių atlikimą, sąvokinis suvokimas pasižymi gebėjimu identifikuoti vidinius ryšius

tarp abstrakčių koncepcijų ir jų praktinių reprezentacijų. Mokinys, turintis išvystytą sąvokinę struktūrą, geba ne tik mechanškai taikyti formules, bet ir prasmiškai argumentuoti, kodėl tam tikras metodas yra tinkamas konkrečiame kontekste. Ši kognityvinė integracija užtikrina žinių retenciją bei jų rekonstrukciją: net ir pamiršus konkretų algoritmą, loginiai ryšiai leidžia jį atkurti remiantis pamatine sistemos logika. Be to, toks supratimas veikia kaip esminis savikontrolės mechanizmas, leidžiantis intuityviai atpažinti dydžio klaidas ir užtikrinantis sėkmingą žinių panaudojimą – gebėjimą pritaikyti žinomus principus sprendžiant visiškai naujas, nestandartines matematines problemas.

Procedūrinis sklandumas apibūdinamas kaip gebėjimas lanksčiai, tiksliai, efektyviai ir tinkamai taikyti sprendimo algoritmus [5]. Tačiau šis gebėjimas neturėtų būti suprantamas kaip vien mechaninis taisyklių taikymas. Jis glaudžiai susijęs su konceptuali supratimu, leidžiančiu mokiniui suvokti, kodėl pasirinktas sprendimo būdas yra tinkamas ir kaip jis gali būti taikomas skirtingose situacijose. Kai mokiniai kartoja veiksmų sekas nesuprasdami jų prasmės, kyla pavojus įtvirtinti neteisingus arba neefektyvius sprendimo būdus, kurių vėliau sunku atsisakyti.

Procedūrinis sklandumas ir konceptualus supratimas yra tarpusavyje susijusios matematinio mokymosi dalys. Tam tikras skaičiavimo įgūdžių lygis sudaro sąlygas gilesniam matematiniam supratimui, o prasmingas supratimas leidžia algoritmus taikyti lanksčiau ir tiksliau. Pradinėje mokykloje tai ypač svarbu mokantis veiksmų su vienaženkliais, dviženkliais ir triženkliais skaičiais, nes nepakankami baziniai skaičiavimo įgūdžiai apie vienaženklus skaičius gali apsunkinti daugiaženklių skaičių skaičiavimų supratimą. Tai lemia, kad formalus taisyklių taikymas be jų prasmės suvokimo riboja mokinių gebėjimą perkelti įgytas žinias į naujus kontekstus.

Sąvokinis pozicinės dešimtainės sistemos supratimas yra viena svarbiausių prielaidų daugiaženklių skaičių skaičiavimo sklandumui ugdyti. Jis padeda mokiniams tiksliau atlikti skaičiavimus, lanksčiau taikyti mintinės aritmetikos strategijas ir pasirinkti matematiškai pagrįstus sprendimo būdus [5]. Todėl pradiniame ugdyme svarbu derinti konceptualų supratimą ir procedūrinį sklandumą, kad mokiniai gebėtų ne tik taikyti taisykles, bet ir suprasti jų pagrindą, jas modifikuoti bei pritaikyti įvairiose matematinėse ir praktinėse situacijose.

Strateginė kompetencija apibūdinama kaip gebėjimas formuluoti matematinę problemą, pasirinkti tinkamą jos sprendimo būdą ir ją išspręsti [5]. Mokykliniuose matematikos uždaviniuose probleminis klausimas dažniausiai jau būna aiškiai pateiktas, tačiau realiame gyvenime viena sudėtingiausių užduočių yra suprasti, kokį klausimą reikia kelti ir koku būdu jį galima nagrinėti. Tiksliai suvoktas klausimas padeda mokiniui susitelkti į esminius problemos elementus ir juos aprašyti skaičiais, matematiniais simboliais, schemomis ar grafikais. Žodinės sąlygos perkėlimas į matematinę formą leidžia mokiniui susikurti aiškesnį problemos vaizdinį. Tai padeda išvengti vadinamojo „skaičių griebimo“, kai mokinys iš sąlygos pasirenka pavienius skaičius ir mechanškai atlieka su jais aritmetinius veiksmus, neįsigilindamas į uždavinio prasmę. Vietoje to mokinys skatinamas kurti sprendimo modelį, atskirti svarbią informaciją nuo nereikšmingų detalių ir pasirinkti matematiškai pagrįstą sprendimo strategiją. Gerai išvystyta

strateginė kompetencija leidžia mokiniams spręsti ne tik standartinius, bet ir nestandartinius uždavinius. Tokie mokiniai geba tiksliai įvardyti problemą, lanksčiai pasirinkti sprendimo metodą ir pritaikyti turimas matematinės žinias naujose situacijose. Vadinasi, tikslus problemos formulavimas yra svarbi prielaida gilesniam sprendimo eigos supratimui ir sąmoningam matematinių metodų taikymui.

Adaptyvusis samprotavimas apibūdinamas kaip gebėjimas kurti logiškas sąsajas tarp skirtingos informacijos, matematinių sąvokų ir įvairių situacijų [5]. Ši kompetencija pasireiškia tada, kai mokinys geba ne tik taikyti jau žinomą sprendimo būdą, bet ir jį pritaikyti naujame kontekste arba savarankiškai sukurti tinkamą metodą nestandartinei problemai spręsti. Adaptyvusis samprotavimas ugdomas palaipsniui, sprendžiant įvairaus pobūdžio uždavinius ir nuolat siejant naujas žinias su jau turimomis. Todėl nepakanka vieną kartą parodyti, kodėl tam tikras algoritmas ar taisyklė yra teisinga. Mokiniai turi turėti galimybių ilgesnį laiką taikyti naujas sąvokas ir sprendimo būdus, juos aiškinti, argumentuoti bei susieti su anksčiau įgytu supratimu. Pavyzdžiui, mokantis trupmenų sudėties, nepakanka vien atlikti praktines užduotis po to, kai algoritmas buvo pristatytas. Jei siekiama, kad mokiniai iš tiesų suprastų šio algoritmo prasmę, jiems reikia patirties patiems aiškinti, kodėl pasirinktas sprendimo būdas yra tinkamas, ir pagrįsti jį sprendžiant įvairius skirtingos struktūros uždavinius. Taip mokiniai ne tik įtvirtina matematinį metodą, bet ir mokosi lanksčiau samprotauti bei taikyti žinias naujose situacijose.

Kuo daugiau matematinių sąvokų mokiniai supranta, tuo prasmingesnė jiems tampa pati matematika. Priešingai, kai mokiniams retai pateikiamos sudėtingesnės matematinės problemos, jie gali pradėti manyti, kad matematikos mokymasis remiasi ne prasmės ieškojimu, o įsiminimu, todėl silpnėja jų pasitikėjimas savimi kaip besimokančiaisiais [5].

Produktyvioji nuostata apibūdinama kaip mokinio polinkis matematiką suvokti kaip prasmingą, naudingą ir vertingą sritį, tikėti, kad nuoseklios pastangos mokantis matematikos atsiperka, ir matyti save kaip pajėgų mokytis bei taikyti matematiką [5]. Ši nuostata yra glaudžiai susijusi su kitomis prieš tai minėtomis matematinio meistriškumo gijomis. Ji formuojasi kartu su šiomis kompetencijomis ir kartu sudaro sąlygas joms toliau plėtotis.

Produktyvioji nuostata stiprėja tada, kai mokiniai turi galimybių suprasti matematinės sąvokas, taikyti įvairias sprendimo strategijas ir spręsti prasmingas, iššūkių keliančias problemas. Pavyzdžiui, ugdydami strateginę kompetenciją ir sprenddami nestandartinius uždavinius, mokiniai gali pradėti pozityviau vertinti save kaip matematikos besimokančiuosius. Kuo daugiau matematinių sąvokų jie supranta, tuo prasmingesnė jiems tampa pati matematika. Priešingai, kai mokiniams retai pateikiamos sudėtingesnės problemos, jie gali pradėti manyti, kad matematikos mokymasis remiasi ne prasmės ieškojimu, o taisyklių įsiminimu, todėl silpnėja jų pasitikėjimas savo gebėjimu mokytis [5].

Mokinių nuostatos ypač išryškėja susidūrus su sunkumais. Tie, kurie matematinius gebėjimus suvokia kaip nekintamus, yra labiau linkę vengti sudėtingų užduočių ir nesėkmę interpretuoti kaip savo gebėjimų ribotumo įrodymą. Tuo tarpu mokiniai, kurie gebėjimus supranta

kaip ugdomus per patirtį, pastangas ir mokymąsi, dažniau priima iššūkius ir mokosi iš klaidų [4]. Todėl pradiniam ugdyme svarbu kurti tokias mokymosi situacijas, kuriose mokiniai ne tik įgytų matematinių žinių, bet ir patirtų, kad matematika yra suprantama, prasminga ir įveikiama.

Mokytojas, kaip ryšys tarp dalyko ir mokinių, turi poveikį moksleivių požiūriui į matematiką. Mokiniai į mokyklą eina noro išmokti, sužinoti ir gauti daugiau galimybių patirtį juos supantį pasaulį. Mokytojo pareiga yra skatinti mokinius turėti teigiamą požiūrį į matematikos mokslą. Be to, bendraamčių spaudimas bei išankstinis stereotipinis nusistatymas irgi lemia matematinio dalyko suvokimą. Vadinasi, požiūris į matematiką persiduoda iš mokyklos suolo į gyvenimą už mokyklos ribų.

Mokytojas, būdamas tarpininkas tarp matematikos turinio ir mokinių, daro reikšmingą poveikį mokinių požiūriui į matematiką. Pradinėse klasėse svarbu palaikyti mokinių smalsumą ir kurti tokias mokymosi situacijas, kuriose matematika būtų patiriama kaip prasminga, suprantama ir naudinga veikla. Teigiamam arba neigiamam požiūriui į matematiką įtakos turi ne tik mokytojo taikomi mokymo būdai, bet ir klasės kultūra, bendraamžių nuostatos bei visuomenėje egzistuojantys stereotipai apie matematinius gebėjimus. Todėl mokykloje formuojamas santykis su matematika gali turėti reikšmės ir mokinių mokymuisi bei problemų sprendimui už mokyklos ribų [5].

1.2. Matematinio mąstymo pasireiškimas per procesus.

Matematinis mąstymas vyksta kaip procesas. Schoenfeld [18] pristato veiksmų struktūrą bei paskirtį, kaip mokyti moksleivius spręsti problemas. Sisteminga metodika yra pritaikyti mokytojams gebėti padėti mokiniams spręsti problemas trijuose pagrindiniuose etapuose: prieš sprendimą, sprendžiant ir po jo.

Pirmoje lentelėje pirmas problemų sprendimo etapas fokusuojasi į matematinių uždavinių sąlygos analizavimą. Didelė svarba yra teikiama sąvokoms bei fokusavimuisi į galutinės problemos įvardijimą. Todėl prieš sprendžiant užduotį yra svarbu tinkamai perskaityti problemą, pabrėžiant, sąvokų ir problemos suvokimo svarbą, bei apmastyti galimų sprendimo strategijų naudojimą. Sprendimo būdai leidžia mokiniams pradėti taikyti uždavinio sąlygoje duotą informaciją ir pradėti spręsti. Tuo tarpu mokytojas turi stebėti mokinių sprendimo eigą, kad galėtų identifikuoti, kurioje vietoje mokiniai sustoja, taip įvertinant jų stipriąsias ir silpnąsias vietas. Šiuo etapu galima pradėti identifikuoti silpnesnius ir stipresnius mokinius. Mokiniams, kurie sustoja, duoti užuominas, o jau baigusiems duoti papildomas užduotis arba skatinti juos apibendrinti sprendimą išskirinat užduoties ypatumus ar dėsniumus. Svarbiausia dalis prieš einant prie kito etapo yra pateikti galutinį atsakymą. Galutinio atsakymo pateikimas leidžia mokiniams prisiminti problemos tikslą ir peržvelgti visą savo sprendimą ir logiškai įvertinti jų tikslumą. Paskutiniame žingsnyje dėmesys yra skiriamas sprendimų aptarimui ir susiejimui su anksčiau spęstomis problemomis. Mokytojas taip pat turi skirti laiko aptarti uždavinio ypaty-

1 lentelė. Mokymo veiksmai ir tikslai

Mokymo veiksmas	Tikslas / Paskirtis
PRIEŠ	
1. Perskaityti problemą – aptarti žodžius ar frazes, kurių mokiniai gali nesuprasti.	Parodyti atidaus skaitymo svarbą; susikcentruoti į specifinį žodyną.
2. Naudoti bendrą klasės diskusiją, siekiant pabrėžti problemos supratimo svarbą.	Sutelkti dėmesį į svarbius duomenis ir paaiškinimo procesą.
3. Bendra klasės diskusija apie galimas problemų sprendimo strategijas.	Išryškinti idėjas apie galimus problemos sprendimo būdus.
SPRENDŽIANT	
4. Stebėti ir apklausti mokinius, siekiant nustatyti, kuriame etape jie yra.	Diagnozuoti stipriąsias ir silpnąsias puses.
5. Suteikti užuominų pagal poreikį.	Padėti mokiniams įveikti „aklavietas“ ar stringimo momentus.
6. Pateikti papildomas užduotis (išplėtimus) pagal poreikį.	Meskite iššūkį anksčiau baigusiams, skatinant juos apibendrinti žinias.
7. Reikalauti, kad mokiniai, radę sprendimą, „atsakytų į klausimą“.	Įpareigoti mokinius peržiūrėti savo darbą ir įsitikinti, kad jis logiškas.
PO	
8. Parodyti ir aptarti sprendimus.	Parodyti ir įvardyti skirtingas strategijas.
9. Susieti su anksčiau spęstomis problemomis arba leisti mokiniams spręsti išplėstines užduotis.	Demonstruoti bendrą problemų sprendimo strategijų pritaikomumą.
10. Aptarti ypatybes, pvz., iliustracijas/paveikslėlius.	Parodyti, kaip tam tikros detalės gali paveikti sprendimo būdą.

bes ar pastebėjimas, kad mokiniui ateityje galėtų pritaikyti išmoktą informaciją. Nors mokinių išspręsta užduotis yra teisinga, tačiau gal jie galėjo pritaikyti ir kitą, efektyvesnį būdą, arba savo atsakymą patikrinti. Todėl toks mokymosi procesas negali būti suvokiamas vien kaip dalykinio turinio perteikimas, nes jis kartu ugdo mokinių problemų sprendimo, argumentavimo, refleksijos ir žinių perkėlimo į naujus kontekstus gebėjimus.

Įrodymo uždaviniai nėra atskira tema - tai uždaviniai, kurie aktyvina argumentavimo, komunikacijos, reprezentavimo procesus. Yra svarbu, kad mokiniai nuo pirmos klasės po truputi pratintųsi juos spręsti, nes matematika, kaip mokslas, yra pastatytas ant to. Pagrindimo uždaviniai yra laikomi esminiu matematinių procesų ugdymo indikatoriumi.

Matematinio mąstymo kūrimas

Straipsnyje [23] yra pristatoma unikali duombazė apie studentų matematikos mokymąsi ir aprašomas analizės metodas, taikomas tirti studentų matematinės informacijos kiekio augimą ir matematinę kalbą, t.y. tirti mokinių matematikos ir kalbos žinių raidą. Publikacijoje

yra aprašoma konstruktyvizmo teorija, idėją, kad mokinys nėra „tuščias indas“, kurį mokytojas užpildo informacija. Mokinys žinias turi susikurti pats:

- Reizrentacijų kūrimas. Mokinys turi mokėti tą patį veiksmą pamatyti skirtingai. Pavyzdžiui, trupmeną $\frac{1}{2}$ jis turi suprasti ir kaip užrašą (kalbinė forma), ir kaip per pusę perpjautą pica (vizualinė, nekalbinė forma.)
- Žinių susiejimas (mapping). Kritinis momentas. Neužtenka žinoti formulę; reikia suprasti, kaip ta formulė susijusi su realiu pasauliu ar anksčiau išmoktais dalykais. Jei vaikas nesusieja skaičiaus „5“ su penkiais obuoliais, jis turi tik simbolį, bet ne žinias.
- Spontaniškas atpažinimas. Autoriai pabrėžia, kad geriausiai mokomės ne tada, kai mums liepia įsiminti taisyklę, o kai patys pastebime dėsningumą. Tai sužadina smalsumą ir daro mokymąsi efektyvų.

Mokiniai savo matematinės idėjas išreiškia kalbėdami, piešdami, rašdami, naudodami simbolius, schemas ar kitus vaizdinius modelius. Tokios išorinės reprezentacijos padeda ne tik perteikti mąstymą kitiems, bet ir pačiam mokiniui aiškiau struktūruoti sprendimo eigą, pastebėti ryšius tarp matematinių idėjų ir tiksliau įvardyti pasirinktus sprendimo būdus. Todėl pradiniam ugdyme svarbu sudaryti sąlygas mokiniams ne tik atlikti matematinius veiksmus, bet ir juos paaiškinti, pagrįsti, susieti su jau turimomis žiniomis bei išreikšti įvairiomis reprezentacijomis. Ši mintis dera su NCTM išskiriamais matematikos mokymosi procesais – komunikacija, reprezentavimu, ryšių kūrimu, samprotavimu ir įrodymu – bei su matematinio meistriškumo samprata [5, 16].

Ankstyvajame ugdyme mokinių paaiškinimai dažnai remiasi neformaliomis raiškos formomis: konkrečiais pavyzdžiais, piešiniais, vaizdiniais modeliais ar žodiniais paaiškinimais. Vis dėlto tokie pagrindimai yra svarbūs, nes jie padeda mokiniams pereiti nuo asmeninio supratimo prie aiškesnio, kitiems suprantamo matematinio argumentavimo. Šiame darbe įrodymas pradiniam ugdyme suprantamas ne kaip formalus dedukcinis įrodymas, bet kaip klasės bendruomenei priimtinas matematinis pagrindimas, paremtas mokiniams prieinamomis priemonėmis ir argumentavimo būdais [19].

Pradinėje klasėje mokiniai taip pat gali pradėti mokytis pagrįsti savo matematinius teiginius. Šis pagrindimas dar nebūtinai turi būti formalus įrodymas, tačiau jis gali remtis pavyzdžiais, dėsningumų pastebėjimu, vaizdiniais modeliais, žodiniu paaiškinimu ar struktūriniu argumentu. Tokia veikla padeda mokiniams ne tik įtikinti kitus savo sprendimo pagrįstumu, bet ir patiems geriau suprasti, kodėl tam tikras teiginys ar sprendimo būdas yra tinkamas. Gebėjimo aiškiai įvardinti ir paaiškinti savo samprotavimą lavinimas sudaro sąlygas mokiniams geriau atpažinti ryšius tarp matematinių idėjų, tikrinti teiginius ir sąmoningiau taikyti sprendimo būdus [19].

Matematinių teiginių tikrinimas siejasi su mokinių gebėjimu planuoti veiksmus, pasirinkti strategiją ir ją koreguoti. Ankstyvame amžiuje šie gebėjimai dar tik formuojasi: jaunesni

vaikai dažniau veikia impulsyviai ir remiasi bandymų bei klaidų būdu, o vyresni pradeda taikyti sistemingesnes problemos sprendimo strategijas. Schoenfeldas, remdamasis Karmiloff-Smith tyrimu, aprašo, kaip 4–9 metų vaikai iš kartoninių detalių turėjo sudėlioti uždara geležinkelio bėgių ratą. Jaunesni vaikai užduotį atliko mažiau planuodami, o vyresni pirmiausia klasifikavo detales ir taikė nuoseklesnę veiksmų schemą [18].

Šis pavyzdys leidžia teigti, kad pradinės klasės yra svarbus laikotarpis strateginiam mąstymui ugdyti. Įrodymo ar pagrindimo pobūdžio uždaviniai gali padėti mokiniams pereiti nuo vien atsakymo gavimo prie sprendimo eigos paaiškinimo, rezultato tikrinimo ir sąmoningo savo samprotavimo pagrindimo.

1.3. Metakognicija

Pradinių klasių matematikoje metakognicija gali būti atpažįstama per paprastus, tačiau reikšmingus savikontrolės klausimus: ar supratau užduotį, nuo ko turėčiau pradėti, kokia tvarka atlikti veiksmus, ar gautas atsakymas yra pagrįstas. Tokie klausimai atspindi mokinio gebėjimą planuoti sprendimo eigą, stebėti savo veiksmus ir tikrinti rezultatą. Aukštesnio lygio metakognityvinis tikrinimas pasireiškia tada, kai mokinys vertina ne tik konkretų atsakymą, bet ir sprendimo eigą, argumento nuoseklumą bei jo galiojimą platesniu atveju. Šis požiūris siejasi su Schoenfeldo matematinių problemų sprendimo samprata, kurioje pabrėžiama ne tik strategijų taikymo, bet ir jų stebėjimo, kontrolės bei koregavimo svarba [18].

Jaunesnių mokinių metakognityviniai gebėjimai dar tik formuojasi, todėl jiems gali būti sudėtinga tiksliai įvertinti, kiek gerai jie suprato užduotį ar ar jų sprendimas yra pakankamai pagrįstas. Vis dėlto šie gebėjimai gali būti ugdomi palaipsniui: iš pradžių mokiniai mokosi atpažinti, ar suprato užduoties sąlygą, vėliau – stebėti savo mąstymo eigą, pastebėti galimas klaidas ir vertinti sprendimo patikimumą. Todėl matematikos mokyme svarbu ugdyti ne tik gebėjimą atlikti veiksmus, bet ir gebėjimą reflektuoti sprendimo eigą, kelti sau tikrinamuosius klausimus bei sąmoningai rinktis strategijas. Tai ypač reikšminga įrodymo ar pagrindimo pobūdžio uždaviniuose, kuriuose vertinamas ne vien galutinis atsakymas, bet ir argumento tvirtumas, nuoseklumas bei galiojimas kitais atvejais [18, 19].

Mokinių įsitikinimai apie matematiką taip pat daro įtaką tam, kaip jie suvokia argumentavimo ir pagrindimo paskirtį. Schoenfeldo tyrimai rodo, kad mokiniai matematiką gali suvokti kaip greitų atsakymų gavimo ir taisyklių taikymo sritį, o ne kaip prasmingo aiškinimo, ryšių kūrimo ir argumentavimo veiklą [17]. Nors šie tyrimai buvo atlikti su vyresniais mokiniais, jų išvados reikšmingos ir platesniame matematikos ugdymo kontekste, nes padeda suprasti, kaip mokinių nuostatos gali formuoti jų elgesį sprendžiant uždavinius. Jei matematika suvokiama pirmiausia kaip teisingo atsakymo radimas, mokiniams gali atrodyti, kad pakanka atlikti procedūrą, remtis mokytojo patvirtinimu ar pateikti vieną pavyzdį, užuot kūrus bendresnį argumentą.

Tokie įsitikinimai siaurina matematikos kaip disciplinos supratimą, nes dėmesys nu-

kreipiamas į rezultato gavimą, o ne į jo paaiškinimą, pagrindimą ar bendresnio dėsningumo atskleidimą. Dėl to mokiniai gali dažniau orientuotis į procedūrų atkartojimą ir autoriteto patvirtinimą, o ne į savarankišką argumento konstravimą bei vertinimą. Šiame kontekste svarbų vaidmenį įgyja klasėje formuojamos sociomatematinės normos, t. y. bendri susitarimai, kas laikoma tinkamu matematiniu paaiškinimu, pagrįstu argumentu ar skirtingu sprendimo būdu [6]. Kai klasėje nuosekliai akcentuojama, kad matematika yra ne tik atsakymo radimas, bet ir aiškinimas, ryšių kūrimas, teiginių pagrindimas bei argumentų tikrinimas, mokiniai palaipsniui mokosi matematinę veiklą suprasti kaip argumentuoto mąstymo procesą.

Apibendrinant galima teigti, kad pradinių klasių mokiniai ne visada pagrindžia savo sprendimus net ir tada, kai užduotį procedūriškai atlieka teisingai. Tai gali būti siejama su keeliais tarpusavyje susijusiais veiksniais: mokymo praktikoje dažnai vyrauja uždaviniai, kuriuose pakanka pateikti galutinį atsakymą; klasės normos ne visada nuosekliai skatina kelti klausimus „kodėl?“ ir „kaip žinai?“; mokinių metakognityviniai gebėjimai dar tik formuojasi; be to, jų įsitikinimai apie matematiką gali nukreipti dėmesį į greitą rezultato gavimą, o ne į argumento kūrimą ir tikrinimą [6, 17, 18]. Todėl vien procedūrinis užduoties atlikimas savaime negarantuoja, kad mokinys gebės paaiškinti savo sprendimą ar pagrįsti jo teisingumą.

Literatūroje pabrėžiama, kad apibendrinimas ir įrodymas sudaro svarbią matematinės veiklos dalį, todėl šių gebėjimų ugdymas neturėtų būti siejamas tik su vyresnėmis klasėmis [22]. Weinberg ir kt. kritikuoja požiūrį, kad įrodinėjimas matematikoje yra vien griežtos formalios logikos taikymas, nes toks supratimas susiaurina įrodymo sampratą ir nepakankamai atsižvelgia į mokinių pažintinę raidą. Vietoje to įrodinėjimas gali būti suprantamas kaip platesnė matematinė, socialinė ir kultūrinė praktika, kylanti iš poreikio aiškinti, pagrįsti ir ginti savo teiginius.

Dėl šios priežasties pradiniam ugdyme svarbu ne anksti reikalauti formalių deducinių struktūrų, bet sudaryti sąlygas mokiniams kurti jiems prieinamus argumentus: remtis pavyzdžiais, vartoti suprantamą kalbą, naudoti vaizdinius modelius ir palaipsniui pereiti prie bendresnio pagrindimo. Toks požiūris dera su Stylianides mokyklinio įrodymo samprata, pagal kurią argumentas tampa įrodymu ne vien dėl savo loginės struktūros, bet ir dėl to, kokiais pagrindais remiasi, kokiomis reprezentacijomis yra išreiškiamas ir ar klasės bendruomenėje laikomas pakankamu [19].

Taigi įrodymo paskirtis nėra vien pavienio atvejo patvirtinimas. Ji siejama su gebėjimu parodyti, kodėl tam tikras teiginys galioja bendresniu atveju. Ši įžvalga tiesiogiai siejasi su darbo tema: įrodymo ar pagrindimo pobūdžio uždaviniai pradinių klasių matematikoje gali būti suprantami kaip priemonė ugdyti mokinių gebėjimą pereiti nuo pavienio atsakymo pateikimo prie prasmingo matematinio samprotavimo. Todėl pradinių klasių mokinių argumentavimo ugdymas turėtų būti grindžiamas tokiomis mokymosi situacijomis, kuriose mokiniai skatinami aiškinti savo sprendimus, pagrįsti pastebėtus dėsningumus, tikrinti argumentų pakankamumą ir palaipsniui kurti bendresnius matematinius paaiškinimus.

1.4. Įrodymo uždaviniai pradinėse klasėse

Pradinių klasių matematikoje įrodymo samprata neturėtų būti tapatinama su formaliu matematiniu įrodymu, grindžiamu griežta dedukcine struktūra ir formalia logika. Toks įrodymo supratimas ne visada atitinka jaunesniojo mokyklinio amžiaus mokinių pažintines galimybes ir mokymosi patirtį. Todėl šiame darbe įrodymas pradiname ugdyme suprantamas plačiau – kaip mokinio amžiui prieinamas teiginio teisingumo pagrindimas arba uždavinio reikalaujamas argumentas, atsakantis į klausimą „kodėl tai teisinga?“. Toks pagrindimas gali būti paremtas pavyzdžiais, vaizdinėmis reprezentacijomis, matematinėmis savybėmis, ryšių pastebėjimu arba apibendrinimu [19, 22].

Toks įrodymo supratimas leidžia išskirti kelias pagrindimo formas, kurios gali pasireikšti pradinių klasių matematikoje. Empirinis pagrindimas remiasi kelių konkrečių atvejų patikrinimu. Reprezentacinis pagrindimas kuriamas pasitelkiant piešinį, schemą, modelį, lentelę ar kitą vaizdinę priemonę. Struktūrinis pagrindimas grindžiamas matematine savybe ar ryšiu, pavyzdžiui, grupavimu, poravimu, skaičiaus sandara, simetrija ar veiksmų savybėmis. Apibendrinantis pagrindimas rodo mokinio pastangą paaiškinti, kodėl teiginys galioja visiems nagrinėjamiems atvejams, o ne tik pavieniam pavyzdžiui. Kai kuriais atvejais gali būti taikomas ir paneigiantis pagrindimas, kai kontrpavyzdžiu parodoma, kad teiginys negalioja visada. Šios formos nėra griežtai atskirtos: viename mokinio sprendime ar uždavinyje gali būti derinamos kelios pagrindimo rūšys.

Šiame darbe taip pat svarbu skirti paaiškinimą nuo pagrindimo. Paaiškinimas dažniausiai nusako sprendimo eigą, t. y. atsako į klausimą, kaip mokinys atliko veiksmus. Pagrindimas, priešingai, reikalauja argumento, kuris parodytų, kodėl sprendimas, teiginys ar pasirinktas būdas yra teisingas. Ši skirtis svarbi tyrimo metodologijai ir uždavinių kodavimui, nes ne kiekviena užduotis, kurioje prašoma „paaiškinti“, iš tikrųjų reikalauja matematinio argumento. Todėl šiame tyrime įrodymo pobūdžio uždaviniais laikomi tie uždaviniai, kuriuose mokinio prašoma ne tik pateikti atsakymą ar aprašyti atliktus veiksmus, bet ir pagrįsti teiginio teisingumą, paaiškinti dėsningumą, parodyti sprendimo galiojimą platesniu atveju arba pateikti kontrpavyzdį.

Apibendrinant literatūrinę analizę, šiame darbe įrodymo uždaviniai pradinėse klasėse suprantami kaip mokiniui prieinamos matematinio argumentavimo situacijos. Tokie uždaviniai skatina mokinius pereiti nuo procedūrinio veiksmų atlikimo prie sąmoningo sprendimo aiškinimo, teiginių tikrinimo, ryšių pastebėjimo ir pagrindimo. Taip įrodymo pobūdžio uždaviniai tampa ne formalus įrodymo reikalavimu, o priemone ugdyti pradinių klasių mokinių matematinį mąstymą, argumentavimo įpročius ir gebėjimą atsakyti į klausimą „kodėl?“.

2. Empirinio tyrimo metodika ir rezultatai

Šiame darbe atliekama serijos „*TAIP! Matematika*“ (1–4 klasės) vadovėlių uždavinių turinio analizė, siekiant nustatyti, koku mastu ir kokiomis formomis mokymo priemonėse pateikiamos įrodymo ir pagrindimo galimybės. Įrodymo ir pagrindimo galimybes suteikiantys uždaviniai toliau bus naudojami trumpiau – JPGU.

Šiame tyrime vadovaujamosi nuostata, kad matematikos vadovėliai ne tik sudaro mokymo temų planą, bet ir formuoja specifinius mokinių kognityvinius bei argumentavimo gebėjimus. Remiantis [1], mokytojoje literatūroje uždaviniai gali būti analizuojami kaip JPGU veiklos.

2.1. Tyrimo tikslas ir uždaviniai

Tyrimo tikslas – atskleisti ir išanalizuoti pradinio ugdymo matematikos vadovėliuose sudarytas galimybes mokytis įrodinėjimo bei argumentavimo.

Tyrimo uždaviniai:

1. Identifikuoti uždavinius, kuriuose reikalaujama arba natūraliai kyla poreikis pagrįsti (klauskas „kodėl?“) ar tikrinti teiginius (klauskas „ar visada?“).
2. Klasifikuoti identifikuotus uždavinius pagal jų tipus.
3. Palyginti uždavinių pasiskirstymą 1–4 klasėse bei skirtingose temose.

Tyrimo klausimai:

1. Koks yra įrodymo tipo uždavinių santykis visų uždavinių atžvilgiu 1–4 klasių analizuojamose priemonėse?
2. Kaip įrodymo tipo uždavinių skaičius kinta didėjant klasei?
3. Kokie pagrindimo uždavinių tipai dominuoja, o kurių trūksta?
4. Kuriose temose argumentavimo galimybės pasitaiko dažniausiai, o kuriose jų beveik nėra?

2.2. Tyrimo eiga ir medžiaga

Tyrimo metu buvo atlikta Lietuvos pradinų klasių matematikos vadovėlių turinio analizė. Pagrindinis dėmesys skiriamas JPGU proporcijai visų uždavinių atžvilgiu 1–4 klasių matematikos vadovėliuose. Analizuojama, kaip šių uždavinių pasiūla kinta didėjant klasei, nustatomi

dominuojantys pagrindimo uždavinių tipai bei temos, kuriose argumentavimo galimybės yra gausiausios.

Tyrimo šaltiniai

Analizei pasirinkta leidyklos „Šviesa“ matematikos vadovėlių serija „**Taip!**“. Naudota skaitmeninė mokymo platforma „Eduka klasė“, kurioje pateiktas leidinys yra atnaujintas pagal 2022 m. Pradinio ugdymo bendrąją programą. Išanalizuota iš viso 12 vadovėlio dalių (po 3 dalis kiekvienai klasei nuo 1 iki 4). Iš viso peržiūrėti ir įvertinti 2249 numeruoti pratimai. Duomenis naudojome neįtraukiant pratybų sąsiuvinių, nes [9] „Lietuvoje pratybų sąsiuviniai nėra naudojami visose mokyklose, dalyje mokyklų naudojami skirtingi pratybų sąsiuviniai nei vadovėlis, dažnu atveju jie keičiami, ar apjungiami kartu su skaitmeniniu turiniu“.

Šiame darbe turinio analizė yra interpretuojama per mokymosi galimybių (opportunity-to-learn, OTL) perspektyvą [21]. Tai reiškia, kad vertinami ne faktiniai mokinių pasiekimai ar pomokos procesas, o ugdymo turinio teikiama pasiūla. Šis teorinis požiūris metodologiškai pagrindžia uždavinių pasiskirstymo analizės (pavyzdžiui, santykinio dažnio skaičiavimo) svarbą. Mokymo priemonių struktūra lemia, kaip dažnai mokiniai susiduria su tam tikromis kognityvinėmis veiklomis (argumentavimu, teiginių tikrinimu ar reprezentacijų taikymu). Atliekama turinio analizė naudojant uždaviniais paremtą kodavimą tampa patikima empirine procedūra, leidžiančia identifikuoti, ar specifinės užduotys sistemoje yra dėsningai pasikartojančios, ar išimtinės. Toks OTL argumentas padeda atskleisti įrodymo tipo mąstymo ugdymo spragas, esančias pačioje mokymo priemonių sandaroje.

2 lentelė. Numeruotų uždavinių pasiskirstymas analizuotuose 1–4 klasių matematikos vadovėliuose iš Serijos „TAIP!“.

Klasė	Numeruotų uždavinių kiekis
1 klasė	291
2 klasė	680
3 klasė	665
4 klasė	613
Iš viso	2249

Analizės vienetas yra laikomas vienas, vienu numeru numeruotas uždavinys. Įrodymo tipo uždavinys buvo laikomas, jei jame:

- prašoma „paaiškink“, „pagrįsk“, „kodėl“, „kaip žinai“;
- prašoma patikrinti teiginį („ar visada“, „ar teisinga“, „kada netinka“);
- prašoma palyginti sprendimus („kuris teisingas“, „ar abu teisingi“);
- prašoma rasti ir paaiškinti klaidą;

- prašoma rasti dėsningumą ir jį pagrįsti.

Siekiant teorinio objektyvumo, JPGU kodavimo schema grindžiama nuostata, kad matematinis mąstymas integruoja ne tik specifinį turinį, bet ir universalius procesus: problemų sprendimą, samprotavimą, komunikaciją bei reprezentavimą [16]. Užduotys, reikalaujančios paaiškinti, patikrinti teiginį ar iliustruoti sprendimą, suprantamos kaip tiesioginiai šių procesų aktyvavimas vadovėliuose.

Šiame tyrime, remiantis mokyklinio įrodymo samprata, JPGU laikomi ne tik teiginiai „įrodyk, kad...“, bet ir uždaviniai, kuriuose mokiniai raginami įvertinti teiginio ar reprezentacijos teisingumą arba pagrįsti pasirinkimą [19]. Susiformuoja požiūris, kad mokyklinis įrodymas suprantamas kaip argumentas, priimtinas klasės bendruomenei, o vadovėlių uždaviniai vertinami pagal jų suteikiamas galimybes pateikti pagrįstą paaiškinimą. Pavyzdžiui, uždavinys, kuriame reikalaujame „patikrinti, ar teisingai buvo suskaičiuota“ bus priskiriamas prie JPGU tipo, jeigu bus reikalaujama paaiškinti, pagrįsti ar argumentuoti. Atitinkamai įrodymo ir pagrindimo veikla šiame tyrime laikomi visi uždaviniai, skatinantys ieškoti klaidų, tikrinti dėsningumus ar atsakyti į klausimą „kodėl?“. Tai leidžia įvairius kintamuosius traktuoti kaip validžius metodologinius įrankius, kurie leidžia empiriškai įvertinti procesinio mąstymo bei mokyklinio įrodymo veiklas mokymo priemonėse.

2.3. Statistinio metodo prielaidos

2.3.1. Aibės ir analizės vienetas

Tegu S yra visų analizuojamų mokymo priemonių aibė. Kadangi nagrinėjama pilną seriją „TAIP! Matematika“, ją apibrėžiame kaip:

$$S = \{s_{g,d} : g \in \{1, 2, 3, 4\}, d \in \{1, 2, 3\}\}, \quad (1)$$

čia g žymi klasę, o d – tos klasės vadovėlio dalį. Iš viso aibę S sudaro $|S| = 12$ struktūrinių vienetų.

Kiekvienai vadovėlio daliai $s \in S$ priskiriame funkciją $A(s)$, kuri nurodo bendrą jame esančių numeruotų uždavinių skaičių.

Sunumeruokime visus konkrečios priemonės s uždavinius nuo $i = 1$ iki $A(s)$:

$$i = 1, 2, \dots, A(s),$$

o i -tąjį uždavinį priemonėje s žymėkime $u_i(s)$.

Kadangi atskiros vadovėlio dalys nepersidengia, bendras tiriamos imties uždavinių skaičius išreiškiamas suma:

$$A_{\text{viso}} = \sum_{s \in S} A(s) = 2249. \quad (2)$$

Analizės vienetu laikomas vienas konkrečiu numeriu pažymėtas uždavinys.

2.3.2. Pagrindinis binarinis kintamasis

Kiekvienam uždaviniui $u_i(s)$ priskiriamas binarinis kintamasis $Y_i(s) \in \{0, 1\}$, identifikuojantis jo paskirtį:

- $Y_i(s) = 1$, jei uždavinys $u_i(s)$ suteikia įrodymo ar pagrindimo galimybę (pvz., reikalauja paaiškinti/pagrįsti, tikrinti teiginį, lyginti sprendimus, analizuoti klaidą, pagrįsti taisyklę ar dėsningumą),
- $Y_i(s) = 0$ priešingu atveju.

Tuomet ĮPGU tipo uždavinių aibė konkrečioje priemonėje s yra

$$\mathcal{U}_{IP}(s) = \{u_i(s) : Y_i(s) = 1\}, \quad (3)$$

o bendras tokių uždavinių skaičius priemonėje $N_{IP}(s) = |\mathcal{U}_{IP}(s)| = \sum_{i=1}^{A(s)} Y_i(s)$.

Jei duomenys agreguojami pagal klasę g , tegu $S_g = \{s_{g,d} \in S : d \in \{1, 2, 3\}\}$. Tuomet bendras klasės uždavinių skaičius (A_g), ĮPGU skaičius (N_{IP}) ir empirinė jų dalis ($\hat{p}_g$) apibrėžiami taip:

$$A_g = \sum_{s \in S_g} A(s), \quad N_{IP} = \sum_{s \in S_g} N_{IP}(s), \quad \hat{p}_g = \frac{N_{IP,g}}{A_g}. \quad (4)$$

Sukurtą kontingencijos lentelę sudaro ĮPGU dažniai $N_{IP,g}$ ir ne-ĮPGU dažniai $A_g - N_{IP,g}$ kiekvienai klasei g .

Kodavimo procedūra

Tyrimo pradžioje buvo einama per kiekvieną užduotį vadovėlyje ir remiantis [1] buvo ieškomi raktiniai žodžiai ir frazės: „kodėl“, „ar visada“, „paaiškink“, „paaiškink, kodėl“, „kokią išvadą galima padaryti“, „pagrįsk savo atsakymą“, „užrašyk taisyklę“ ir „įrodyk“. Atrinkti uždaviniai buvo koduojami pagal klasę (K), vadovėlio dalį (D), temą (T), reikalaujamą pagrindimą (RP), pagrindimo tipą (PT) bei ar yra reikalaujama pagrįsti visiems atvejams (VA).

Papildomi uždavinių kodai – reikalavimo pagrindimo stiprumas (RP), pagrindimo tipas (PT) ir universalumo komponentas (VA) – šiame tyrime buvo sukurti siekiant ne tik kiekybiškai įvertinti įrodymo ir pagrindimo galimybių (ĮPGU) dažnį, bet ir empiriškai diagnozuoti jų kokybinę struktūrą.

Pirma, kodas RP leidžia diferencijuoti situacijas, kai argumentavimas yra tik rekomenduojamas (pvz., „paaiškink“, „kodėl?“), nuo atvejų, kai jis pateikiamas kaip privaloma sprendimo dalis (pvz., „įrodyk“). Toks skirstymas remiasi Biedos straipsniu [1]. Užduoties lingvistinė formuluotė yra kritinis veiksnys, lemiantis, ar mokiniai realiai bus paskatinti įsitraukti į samprotavimo procesą.

Antra, kodas PT fiksuoja siūlomų užduočių pagrindimo tipų įvairovę (nuo konkretaus atvejo paaiškinimo iki klaidos analizės ar dėsningumo tikrinimo). Tai leidžia nustatyti, ar vadovėliuose dominuoja vienalytis argumentavimo formatas, ar mokiniams suteikiama galimybė praktikuoti įvairiapusę, amžiui pritaikytą mokyklinio įrodymo praktiką [19].

Trečia, kodas VA identifikuoja, ar argumentas apsiriboja konkrečiu atveju, ar yra orientuotas į matematinį bendrumą („visada“, „kiekvienam“). Šis universalumo kriterijus tyrime pasirinktas remiantis Stylianides [19] teorine dalimi, kur reikalaujamas bendrumas yra atskiriamas nuo paprastų ir pavienių empirinių pavyzdžių tikrinimo.

Apibendrinant, RP, PT ir VA kodų rinkinys veikia kaip analitinis instrumentas, kuris, remiantis vadovėlių tyrimų metodologijos principais [21], leidžia atskleisti struktūrinę JPGU pasiūlos įvairovę bei jos trūkumus skirtingose klasėse ar temose.

2.3.3. Papildomi kintamieji

Kai $Y_i(s) = 1$, uždaviniui priskiriami papildomi klasifikavimo kintamieji.

(a) Pagrindimo reikalavimo stiprumas

$$R_i(s) \in \{0, 1, 2\}, \quad (5)$$

kur:

- $R_i(s) = 0$ – pagrindimas nekeliamas,
- $R_i(s) = 1$ – pagrindimas prašomas (pvz., „paaiškink“, „pagrįsk“, „kodėl?“),
- $R_i(s) = 2$ – pagrindimas būtinas, kai vartojama formuluotė „įrodyk“.

Topologiniai pavyzdžiai yra vaizduojami 3 lentelėje.

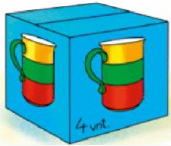
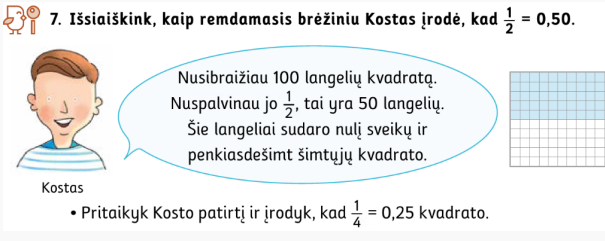
(b) Pagrindimo tipas

$$T_i(s) \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad (6)$$

kur kokybiniai tipai koduojami taip:

- $T_i(s) = 1$ – „Kodėl?“;
- $T_i(s) = 2$ – „Ar visada?“ (teiginio ar hipotezės teisingumo tikrinimas);
- $T_i(s) = 3$ – Taisyklės, dėsningumo ar sekos pratęsimo pagrindimas;
- $T_i(s) = 4$ – Skirtingų sprendimų, strategijų ar argumentų palyginimas;
- $T_i(s) = 5$ – Pateiktos klaidos analizė, paaiškinimas ir korekcija.

3 lentelė. Uždavinių tipų klasifikacija pagal pagrindimo reikalavimo stiprumą

Pagrindimas nekeliamas	
Iliustracijoje yra vaizduojamas 4 klasės uždavinys, kuriame nereikalauja pagrįsti, argumentuoti ar įrodyti	2. Pasakyk, kuriame paveikslėlyje pavaizduoti daiktai yra simetriški tiesės atžvilgiu. 
Pagrindimas prašomas	
Iliustracijoje yra vaizduojamas uždavinys iš 4 klasės vadovėlio, kuriame yra reikalaujama pagrįsti savo atsakymą	5. Nikolės klasėje iš viso yra 26 vaikai. Vienoje dėžutėje yra 4 puodeliai. Kiek mažiausiai tokių dėžučių ji turėtų paimiti, kad kiekvienas vaikas gautų po puodelį? Paaiškink kodėl. 
Pagrindimas būtinas	
Iliustracijoje yra vaizduojamas uždavinys iš 4 klasės vadovėlio, kuriame yra reikalaujama įrodyti	7. Išsiaiškink, kaip remdamasis brėžiniu Kostas įrodė, kad $\frac{1}{2} = 0,50$.  Nusibraiziau 100 langelių kvadratą. Nuspalvinau jo $\frac{1}{2}$, tai yra 50 langelių. Šie langeliai sudaro nulį sveikų ir penkiasdešimt šimtųjų kvadrato. Kostas • Pritaikyk Kosto patirtį ir įrodyk, kad $\frac{1}{4} = 0,25$ kvadrato.

(c) Universalumo komponentas

$$V_i(s) \in \{0,1\}, \quad (7)$$

kur:

- $V_i(s) = 1$, jei uždavinys reikalauja bendrumo (pvz., „visada“, „visiems“, „kiekvienam“, „įrodyk, kad visada...“),
- $V_i(s) = 0$, kitu atveju.

2.4. Hipotezės ir statistinės patikros

Siekant moksliai įvertinti uždavinių pasiskirstymo dėsningumus, formuluojamos šios statistinės hipotezės:

H1: JPGU uždavinių dalis nesikeičia tarp klasių

$$H_0 : p_1 = p_2 = p_3 = p_4 \quad \text{prieš} \quad H_1 : \exists g \neq h, p_g \neq p_h,$$

kur tikrinama apie tikrąsias proporcijas p_g .

Tikrinama naudojant Pirsono χ^2 homogeniškumo kriterijų suformuotai 2×4 kontingencijos lentelei, kurios stulpeliai atitinka klases, o eilutės – JPGU ir ne-JPGU uždavinius.

H2: JPGU uždavinių dalis turi didėjančią tendenciją didėjant klasei

$$H_0 : p_g \text{ neturi sisteminės didėjimo tendencijos su } g \quad \text{prieš} \quad H_1 : p_g \text{ didėja didėjant } g.$$

Tikrinama taikant vienpusį Cochran–Armitage tendencijos testą didėjimo kryptimi.

H3: Brandesnių JPGU tipų trūkumas Tegu $T_i(s) \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ žymi JPGU tipą, o $B = \{2, 4, 5\}$ – brandesnius tipus (teiginio tikrinimas, sprendimų palyginimas, klaidos analizė). Formuluojuame trūkumo hipotezę:

$$H_0 : \mathbb{P}(T \in B) \geq \alpha \quad \text{prieš} \quad H_1 : \mathbb{P}(T \in B) < \alpha,$$

kur α yra iš anksto pasirinktas minimalus slenkstis $\alpha = 0.05$. Hipotezė vertinama naudojant Wilson score, nes turime binominę proporciją.

H4: Universalumo komponento trūkumas

$$H_0 : \mathbb{P}(V = 1) \geq \alpha \quad \text{prieš} \quad H_1 : \mathbb{P}(V = 1) < \alpha,$$

kur α parenkamas kaip minimalus universalumo uždavinių dažnis. Hipotezė vertinama naudojant Wilson score..

2.5. Gautų rezultatų suvestinė

Atlikus pilną turinio analizę, identifikuota JPGU aibė $\mathcal{U}_{IP}$, kurios dydis $n = |\mathcal{U}_{IP}| = 86$ uždaviniai. Bendras JPGU uždavinių procentas siekia 3,82%.

4 lentelė. Kontingencijos lentelė (JPGU ir ne-JPGU) pagal klasę

	$g = 1$	$g = 2$	$g = 3$	$g = 4$
JPGU	12	24	25	25
ne-JPGU	280	659	640	589

Hipotezė H1 Empirinės proporcijos.

$$\hat{p}_1 = \frac{12}{280} \approx 0.0411, \quad \hat{p}_2 = \frac{24}{680} \approx 0.0351, \quad \hat{p}_3 = \frac{25}{665} \approx 0.0376, \quad \hat{p}_4 = \frac{25}{613} \approx 0.0407.$$

Hipotezė H1 (JPGU dalis vienoda tarp klasių).

$$H_0 : p_1 = p_2 = p_3 = p_4 \quad \text{prieš} \quad H_1 : \exists g \neq h : p_g \neq p_h.$$

Hipotezė tikrinama Pirsono χ^2 homogeniškumo kriterijumi 2×4 kontingencijos lentelei. Laisvės laipsniai:

$$df = (2 - 1)(4 - 1) = 3.$$

Gauta testo statistika ir p -reikšmė:

$$\chi^2 = 0.353, \quad p = 0.950.$$

Esant reikšmingumo lygmeniui $\alpha = 0.05$, hipotezė H_0 neatmetama: statistškai reikšmingo skirtumo tarp JPGU proporcijų 1–4 klasėse nenustatyta.

Hipotezė H2 (didėjimo tendencija didėjant klasei).

$$H_0 : \text{nėra sisteminės didėjimo tendencijos su } g \quad \text{prieš} \quad H_1 : p_g \text{ didėja didėjant } g.$$

Tendencijai įvertinti taikomas *vienpusis* Cochran–Armitage tendencijos testas didėjimo kryptimi. Gauta:

$$Z = 0.210,$$

dvipusė p -reikšmė:

$$p = 0.834,$$

o vienpusė (didėjimo kryptimi) p -reikšmė:

$$p = 0.417.$$

Taigi, esant $\alpha = 0.05$, sisteminės didėjimo tendencijos JPGU dalyje didėjant klasei taip pat nenustatyta.

Hipotezė H3: 95% viršutinė riba (Wilson) kai $k_B = 0$. Kai $k_B = 1$ ir $n = 85$, Wilson score 95% viršutinė riba proporcijai $p_B = \mathbb{P}(T \in B)$ yra:

$$p_B \leq 0.0637 \quad (95\% \text{ viršutinė riba, Wilson}).$$

Tai reiškia, kad, remiantis 95 % Wilson pasiklovimo intervalo viršutine riba, brandes-

nių tipo užduočių dalis neviršija 6,37 %. Kadangi ši riba yra didesnė už 5 %, nėra pakankamo pagrindo teigti, kad brėžinių tipo užduočių dalis yra mažesnė nei 5 %.

Hipotezė H4 Tegu $k_V = n_{V=1}$ yra universalumo atvejų skaičius IPGU aibėje. Tuomet

$$\hat{\mathbb{P}}(V = 1) = \frac{k_V}{n}.$$

Universalumo komponentas buvo užfiksuotas viename IPGU uždavinyje:

$$n_{V=1} = 1, \quad n_{V=0} = 85, \quad n = 86,$$

todėl

$$\hat{\mathbb{P}}(V = 1) = \frac{1}{86} \approx 0.0116.$$

Taikant Wilson score 95% pasikliautinį intervalą gauname:

$$\mathbb{P}(V = 1) \in [0.0021, 0.0628] \quad (95\% CI).$$

Tai reiškia, kad universalumo komponento dalis IPGU uždaviniuose yra labai maža: empiriškai ji sudaro apie 1,16 %, o pagal 95 % Wilson pasiklovimo intervalą tikroji dalis gali siekti iki maždaug 6,28 %.

2.6. Tyrimo patikimumas ir koduotojų suderinamumas

Kadangi turinio analizė yra imli subjektyviam vertinimui, tyrimo duomenų patikimumui ir objektyvumui užtikrinti analizę nepriklausomai atliko du tyrėjai. Siekiant matematiškai įvertinti tarpusavio vertinimų patikimumą (*inter-rater reliability*), pirminiame etape buvo apskaičiuotas procentinis tyrėjų sutapimo rodiklis ir Cohen kappa (κ) koeficientas binariniam kintamajam Y .

Pradiniame klasifikavimo etape tyrėjų nuomonės visiškai sutapo dėl 94.0% visų analizuotų užduočių ($A_{\text{viso}} = 2249$). Gautas Cohen kappa koeficientas:

$$\kappa = 0.68. \quad (8)$$

Pagal Landis ir Koch [11] vertinimo skalę, šis rezultatas indikuoja reikšmingą sutaptį (*substantial agreement*), kuri yra laikoma visiškai pakankama ir metodologiškai patikima atliekant edukacinių tekstų turinio analizę.

Tokį žemesnį pradinį sutapimo rodiklį galima paaiškinti dvejopai. Pradinį nuomonių išsiskyrimą lėmė pradinių klasių vadovėlių užduočių formuluočių neapibrėžtumas. Jų autoriai dažnai naudoja numanomas skatinimus argumentuoti (pvz., „paaiškink draugui“, „aptarkite“), todėl pirminio kodavimo metu abiem tyrėjams buvo sunku vienareikšmiškai nustatyti tikrąją

šių užduočių paskirtį. Kita vertus, antrasis koduotojas pradiname etape disponavė siauresne teorine informacija, todėl buvo linkęs taikyti pernelyg plačią IPGU kriterijų interpretaciją. Tai paskatino jį prie įrodymo užduočių priskirti ir standartinius, grynai procedūrinius paaiškinimus (pavyzdžiui, taisyklių, kaip sudėti du skaičius, atgaminimą), kurie neatitinka mokyklinio įrodymą skatinančio modelio.

Šie interpretaciniai skirtumai vėliau buvo pašalinti konsensuso diskusijos metu, suderinant abiejų tyrėjų teorinį supratimą. Atliekant pakartotinę kokybinę diskusiją ir dar kartą validuojant problemines užduočių formuluotes pagal Stylianides [19] kriterijus, buvo priimti suderinti sprendimai. Būtent ši suderinta generalinė imtis, kurią sudaro $n = 85$ įrodymo ir pagrindimo užduotis, buvo naudojama tolesnei kokybinei ir statistinei analizei.

2.7. Rezultatai

Atlikus serijos „TAIP! Matematika“ 1–4 klasių vadovėlių turinio analizę, iš viso peržiūrėti 2249 numeruoti uždaviniai. 86 uždaviniai buvo priskirti įrodymo ir pagrindimo galimybes suteikiančių uždavinių (IPGU) kategorijai. Tai sudaro apie 3,82 % visų analizuotų uždavinių.

IPGU dalis pagal klases buvo panaši: 1 klasėje rasta 12 IPGU uždavinių, 2 klasėje – 24, 3 klasėje – 25, o 4 klasėje – 25. Statistinė analizė parodė, kad IPGU proporcijos tarp klasių reikšmingai nesiskiria. Pearson χ^2 homogeniškumo kriterijus davė rezultatą $\chi^2 = 0,353$, $p = 0,950$. Cochran–Armitage tendencijos testas taip pat neparodė sisteminės IPGU dalies didėjimo tendencijos didėjant klasei: $Z = 0,210$, vienas $p = 0,417$.

Vertinant IPGU struktūrą pagal vadovėlio dalis, daugiausia tokių uždavinių rasta trečiojoje dalyje – 48 atvejais. Pirmoje dalyje jų buvo 22, antroje – 16. Pagal temas daugiausia IPGU uždavinių priklausė skaičių ir veiksmų sričiai – 58 atvejais. Matavimų temai priskirta 14 uždavinių, geometrijai – 8, duomenims – 4, o dėsningumams – 2 uždaviniai.

Pagal reikalaujamo pagrindimo pobūdį aiškiai dominavo prašymas „paaiškink / pagrįsk“, kuris užfiksuotas 85 uždaviniuose. Tiesioginis reikalavimas „įrodyk“ pasitaikė vieną kartą. Pagal pagrindimo tipą dažniausias buvo „kodėl? / kaip?“ tipo pagrindimas – 82 atvejais. Taisyklės ar dėsningumo pagrindimui priskirti 4 uždaviniai. Teiginio tikrinimo, sprendimų palyginimo ir klaidos analizės tipų analizuotuose IPGU uždaviniuose nebuvo aptikta. Tik vienas uždavinys buvo priskirtas „visiems atvejams“ kategorijai, o likę 85 uždaviniai buvo lokalaus pobūdžio.

Šie rezultatai rodo, kad IPGU sudaro nedidelę visų vadovėlių uždavinių dalį ir pagal klases pasiskirsto gana panašiai. Įrodymo ir pagrindimo veikla dažniausiai apsiriboja lokaliu paaiškinimu ar pagrindimu, ypač atsakant į klausimus „kodėl?“ arba „kaip?“. Rečiau pereinama prie bendresnių teiginių pagrindimo, dėsningumų formulavimo, sprendimų palyginimo, klaidų analizės ar argumentavimo formų įvairovės.

3. Rekomendacijos JPGU uždavinių įtraukimui

3.1. Tyrimo rezultatų apibendrinimas ir praktinė reikšmė

Tyrimo rezultatai parodė, kad įrodymo ir pagrindimo galimybes skatinančių tipo uždavinių procentas siekė 3,82 % visų sunumeruotų vadovėlyje esančių uždavinių kiekiui. Išanalizavus JPGU uždavinius buvo pastebėta, kad nors pačių jų pasiskirtymas tarp klasių neparodė reikšmingo nevienodumo, tačiau didžioji dauguma buvo sudaryta iš vieno pagrindimo tipo. Todėl, remiantis atlikta analize, galima išskirti kelis uždavinių tipus, kurie galėtų padėti sistemingiau ugdyti mokinių gebėjimą aiškinti, pagrįsti ir tikrinti matematinius teiginius.

Žemiau pateikiama rekomendacinė lentelė, kurioje apibendrinami pagrindiniai JPGU tipo uždaviniai, jų ugdomos kompetencijos ir pavyzdinės formuluotės. Svarbu pažymėti, kad JPGU pobūdžio užduotis nebūtinai turi būti kuriama kaip visiškai naujas uždavinys. Dažnai įprastą pradinį klasių matematikos uždavinį galima papildyti klausimais, kurie skatina mokinį paaiškinti sprendimo eigą, pagrįsti atsakymą arba patikrinti teiginio teisingumą.

3.2. JPGU uždavinių progresija nuo 1 klasės

JPGU pobūdžio uždaviniai turėtų būti pateikiami ne kaip pavienės, atsitiktinai atsirandančios užduotys, bet kaip nuosekli mokinių argumentavimo gebėjimų ugdymo seka. Tokia seka gali prasidėti nuo paprastų klausimų, skatinančių mokinį nusakyti savo sprendimo eigą, ir palaipsniui pereiti prie teiginio tikrinimo, sprendimų palyginimo, klaidos analizės, apibendrinimo ar kontrpavyzdžio paieškos. Toks požiūris dera su NRICH pateikiama samprotavimo progresijos samprata, kurioje mokiniai juda nuo veiksmų aprašymo prie aiškinimo, pagrindimo, įtikinimo ir galiausiai įrodymo [13].

Pirmoje klasėje JPGU pobūdžio uždaviniai turėtų būti siejami su konkrečia mokinio veikla, vaizdinėmis priemonėmis ir žodiniu paaiškinimu. Šiame etape svarbu skatinti mokinius atsakyti į klausimus „kaip žinai?“, „kodėl taip manai?“ arba „parodyk piešiniu“. Tokios užduotys dar nebūtinai reikalauja bendro argumento, tačiau jos pradeda formuoti įprotį, kad matematinis atsakymas turi būti ne tik pateiktas, bet ir paaiškintas.

Antroje klasėje galima dažniau įtraukti sprendimų palyginimo ir klaidos analizės uždavinius. Mokiniai jau gali būti skatinami palyginti du sprendimo būdus, paaiškinti, kuris jiems atrodo aiškesnis ar patogesnis, pastebėti klaidą pateiktame sprendime ir ją pataisyti. Šiame etape pagrindimas vis dar gali būti paremtas konkrečiais pavyzdžiais ar vaizdiniais modeliais, tačiau mokiniai palaipsniui mokosi ne tik atlikti veiksmus, bet ir vertinti sprendimo eigą.

Trečioje klasėje galima sistemingiau pereiti prie teiginių tikrinimo ir dėsningumų pastebėjimo. Mokiniai gali būti skatinami patikrinti teiginį keliais pavyzdžiais, palyginti gautus atvejus ir svarstyti, ar pastebėtas dėsningumas galioja visada. NRICH straipsnyje apie apibendrinimą ir įrodymą pabrėžiama, kad mokiniai gali būti skatinami „kasti giliau“ tada, kai jau yra

5 lentelė. Siūlomi JPGU pobūdžio uždavinių tipai pradinėse klasėse

Uždavinio tipas	Ką ugdo?	Pavyzdinė formuluotė
Paaiškinimo uždaviniai	Gebėjimą aiškiai nusakyti sprendimo eigą ir pasirinktos strategijos taikymą.	„Paaiškink, kaip sprendei.“ „Kaip gavai atsakymą?“
Pagrindimo uždaviniai	Gebėjimą argumentuoti, kodėl atsakymas, teiginys ar pasirinktas sprendimo būdas yra teisingas.	„Kodėl šis atsakymas teisingas?“ „Pagrįsk savo sprendimą.“
Teiginio tikrinimo uždaviniai	Gebėjimą vertinti teiginio teisingumą ir svarstyti, ar jis galioja ne tik vienu atveju.	„Ar šis teiginys visada teisingas? Paaiškink.“ „Patikrink keliais pavyzdžiais ir pagrįsk.“
Kontrapavyzdžio uždaviniai	Gebėjimą suprasti, kad vienas tinkamas pavyzdys gali paneigti bendrą teiginį.	„Rask pavyzdį, kuris parodo, kad teiginys neteisingas.“ „Ar gali rasti atvejį, kai ši taisyklė neveikia?“
Sprendimų palyginimo uždaviniai	Gebėjimą lyginti kelias sprendimo strategijas, vertinti jų aiškumą, efektyvumą ir pagrįstumą.	„Kuris sprendimo būdas tau atrodo aiškesnis? Kodėl?“ „Palygink du sprendimus ir paaiškink, kuris yra patogesnis.“
Klaidos analizės uždaviniai	Gebėjimą tikrinti sprendimo eigą, pastebėti klaidas ir paaiškinti, kaip jas ištaisyti.	„Rask klaidą sprendime ir paaiškink, kaip ją pataisyti.“ „Ar mokinys išsprendė teisingai? Pagrįsk.“
Apibendrinimo uždaviniai	Gebėjimą pereiti nuo pavienių atvejų prie bendresnės taisyklės ar dėsningumo.	„Ką pastebi?“ „Ar taip bus visada? Pagrįsk.“ „Suformuluok taisyklę.“

ištyrę problemą ir radę kelis sprendinius: būtent tada atsiranda galimybė ieškoti apibendrinimo arba įrodymo [14]. Tokia logika svarbi ir pradinių klasių uždaviniams: mokiniai pirmiausia turi turėti galimybę tyrinėti konkrečius atvejus, o tik tada būti skatinami kelti klausimą, ar pastebėtas ryšys yra bendras.

Ketvirtoje klasėje JPGU pobūdžio uždaviniai gali būti labiau orientuoti į bendresnių teiginių pagrindimą ir kontrapavyzdžių paiešką. Šiame etape mokiniai gali svarstyti, ar teiginys galioja visais atvejais, bandyti suformuluoti taisyklę, paaiškinti, kodėl ji veikia, arba rasti pavyzdį, kuris paneigia neteisingą teiginį. Toks perėjimas nuo pavienių pavyzdžių prie bendresnio argumento yra svarbus, nes įrodymo paskirtis nėra tik patikrinti vieną atvejį, bet parodyti, kodėl teiginys galioja plačiau.

Tokia progresija nereiškia, kad žemesnėse klasėse negali atsirasti sudėtingesnių pagrindimo elementų. Ji veikiau rodo, kokio tipo argumentavimo reikalavimai galėtų būti dažniausiai akcentuojami tam tikrame etape. Pirmose klasėse svarbiausia formuoti įprotį paaiškinti savo

6 lentelė. Galima JPGU uždavinių progresija 1–4 klasėse

Klasė	Pagrindinis akcentas	Galimi klausimai	Uždavinių tipai
1 klasė	Sprendimo eigos nusakymas, žodinis paaiškinimas, vaizdinis parodymas.	„Kaip tai supratai?“ „Kodėl taip manai?“ „Parodyk piešiniu.“	Paaiškinimo uždaviniai; reprezentaciniai pagrindimai.
2 klasė	Sprendimų palyginimas, klaidos pastebėjimas, atsakymo tikrinimas.	„Kuris būdas aiškesnis? Kodėl?“ „Rask klaidą.“ „Ar mokinys išsprendė teisingai? Kaip patikrini?“	Sprendimų palyginimo uždaviniai; klaidos analizės uždaviniai.
3 klasė	Teiginių tikrinimas keliais atvejais, dėsningumo pastebėjimas.	„Ar taip bus visada? Kodėl?“ „Patikrink keliais pavyzdžiais.“ „Ką ir kodėl galima pastebėti?“	Teiginio tikrinimo uždaviniai; apibendrinimo pradmenys.
4 klasė	Bendresnio pagrindimo kūrimas, taisyklės formulavimas, kontrpavyzdžio paieška.	„Pagrįsk, kodėl tai galioja visada.“ „Suformuluok taisyklę.“ „Rask kontrpavyzdį.“	Apibendrinimo uždaviniai; kontrpavyzdžio uždaviniai; struktūriniai pagrindimai.

sprendimą, o vėlesnėse klasėse šis įprotis gali būti plečiamas į teiginių tikrinimą, apibendrinimą ir kontrpavyzdžių paiešką.

Svarbu pažymėti, kad JPGU pobūdžio užduotis nebūtinai turi būti kuriama kaip visiškai naujas uždavinys. Dažnai įprastą procedūrinį uždavinį galima priartinti prie JPGU uždavinio, pridėdant papildomą klausimą, kuris reikalauja paaiškinimo, pagrindimo ar teiginio tikrinimo. Pavyzdžiui, uždavinys „Apskaičiuok $8 + 7$ “ daugiausia tikrina skaičiavimo veiksmą, tačiau jį papildžius klausimu „paaiškink, kaip skaičiavai“ arba „kodėl tavo būdas veikia?“, mokinys skatinamas ne tik pateikti atsakymą, bet ir artikuliuoti pasirinktą strategiją.

7 lentelė. Įprasto uždavinio papildymas JPGU pobūdžio klausimais

Įprastas uždavinys	Papildomas klausimas	Kokį mąstymą skatina?
Apskaičiuok $8 + 7$.	Paaiškink, kaip skaičiavai.	Sprendimo eigos artikuliaciją.
Apskaičiuok $8 + 7$.	Kodėl tavo pasirinktas būdas veikia?	Strategijos pagrindimą.
Mokinys sako, kad $8 + 7 = 16$.	Ar jis teisus? Rask klaidą ir paaiškink.	Klaidos analizę ir tikrinimą.
Apskaičiuok kelias sumas: $8 + 7$, $18 + 7$, $28 + 7$.	Ką pastebi? Ar gali paaiškinti dėsningumą?	Dėsningumo pastebėjimą ir apibendrinimo pradmenis.

Šią idėją iliustruoja NRICH užduotis „Round the Two Dice“, kurioje mokiniai iš dviejų išridentų skaitmenų sudaro du dviženklus skaičius ir juos apvalina iki artimiausios dešimtys [15]. Iš pirmo žvilgsnio ši užduotis yra susijusi su apvalinimo procedūra, tačiau ją galima išplėsti į JPGU pobūdžio veiklą, jei mokinių klausama: „ką pastebi?“, „kada abu skaičiai apvalinami į tą pačią dešimtį?“, „kada rezultatai skiriasi?“ arba „kaip gali pagrįsti savo atsakymą?“. Tokiu būdu

mokiniai ne tik atlieka procedūrą, bet ir tikrina atvejus, lygina rezultatus bei ieško bendresnio paaiškinimo.

NRICH medžiagoje taip pat pabrėžiama, kad mokiniai gali būti skatinami judėti nuo konkrečių atvejų tyrinėjimo prie dėsningumų pastebėjimo ir apibendrinimo [14]. Todėl panašūs uždaviniai gali būti naudojami ne tik procedūrai įtvirtinti, bet ir mokinių gebėjimui pagrįsti bei apibendrinti ugdyti.

Apibendrinant galima teigti, kad JPGU uždavinių įtraukimas turėtų būti nuoseklus ir laipsniškas. Pirmose klasėse mokiniai pirmiausia turėtų būti skatinami paaiškinti savo sprendimo eigą ir naudoti vaizdines priemones, vėliau – palyginti skirtingus sprendimus, pastebėti klaidas, tikrinti teiginius, o galiausiai – formuluoti apibendrinimus ir ieškoti kontrapavyzdžių. Tokia seka leistų palaipsniui formuoti mokinių įprotį ne tik rasti atsakymą, bet ir klausti „kodėl?“, „kaip žinai?“ bei „ar tai galioja visada?“.

Išvados

Darbe yra išanalizuota, kokių mastu ir kokiomis formomis pradinė klasių matematikos mokymo priemonių serijoje „TAIP!“ mokiniams pateikiami JPGU uždaviniai bei buvo įvertinti jų tipai bei argumentavimo gylis, pateiktos rekomendacijos, kaip nuosekliai nuo 1 klasės formuoti mokinių įprotį aiškinti. Atlikto vadovėlių empirinio tyrimo rezultatai parodė parodė JPGU uždavinių trūkumą bei pagrindimo tipų netolygumą.

Darbe atskleidžiamos šios svarbios išvados:

1. Statistinė analizė neatskleidė reikšmingų skirtumų tarp klasių ir neatskleidė didėjimo tendencijos didėjant klasei.
2. Vertinant JPGU tipų struktūrą, uždaviniai daugiausia buvo „paaiškink/pagrįsk“ pobūdžio, o tiesioginis reikalavimas „įrodyk“ pasitaikė vieną kartą.
3. Pagal pagrindimo tipą dominavo *PT1* („kodėl?/kaip?“) – 82 atvejai, o *PT3* (taisyklė/dėsningumas) sudarė 4 atvejus; teiginio tikrinimo („ar visada?“), sprendimų palyginimo ir klaidos analizės tipų (*PT2*, *PT4*, *PT5*) aptikta nebuvo.

Rekomendacijos

1. Rekomenduojama į mokomąją literatūrą nuo 1 klasės įtraukti daugiau JPGU uždavinių
2. JPGU uždavinių įtraukimas turėtų būti nuoseklus ir laipsniškai kintantis didėjant klasei.
3. Matematinį uždavinį galima papildyti klausimais, kurie skatintų mokinį paaiškinti sprendimo eigą, pagrįsti atsakymą arba patikrinti teiginio teisingumą, taip padarant uždavinį JPGU tipo.
4. Mokymo priemonėse rekomenduojama įtraukti daugiau klausimų, kuriuose būtų prašoma pagrįsti teiginį ar sprendimo teisingumą, paaiškinti, kodėl tai yra teisinga arba neteisinga, rasti kontrpavyzdį.
5. Rekomenduojama dažniau įtraukti klaidos analizės uždavinius, kuriuose mokiniai turėtų įvertinti pateiktą sprendimą, rasti klaidą ir paaiškinti, kaip ją pataisyti. Tokie uždaviniai skatina mokinius tikrinti ne tik galutinį atsakymą, bet ir sprendimo eigą, todėl padeda ugdyti metakognityvinius gebėjimus ir argumentavimo įpročius.
6. JPGU uždaviniuose taip pat svarbu leisti mokiniams pagrįsti sprendimus skirtingomis reprezentacijomis. Pradinėse klasėse pagrindimas gali būti išreiškiamas ne tik simboliais, bet ir piešiniu, schema, lentele, konkrečiais objektais ar žodiniu paaiškinimu.
7. Ateityje rekomenduojama atlikti empirinį tyrimą, kuriame mokinių prie kiekvieno uždavinio būtų pridamas klausimas „kodėl?“ ir būtų nagrinėjami jų atsakymais bei stebimas mokinių požiūris į matematinius uždavinius.

Literatūra

- [1] K. N. Bieda, X. Ji, J. Drwencke, A. Picard. „Reasoning-and-proving opportunities in elementary mathematics textbooks“. Iš: *International journal of educational research* 64 (2014), puslapiai 71–80.
- [2] T. P. Carpenter, L. Levi. „Developing Conceptions of Algebraic Reasoning in the Primary Grades. Research Report.“ Iš: (2000).
- [3] A. Cuoco, E. P. Goldenberg, J. Mark. „Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula“. Iš: *The Journal of Mathematical Behavior* 15.4 (1996), puslapiai 375–402.
- [4] C. S. Dweck. „Motivational processes affecting learning.“ Iš: *American psychologist* 41.10 (1986), puslapis 1040.
- [5] B. Findell, J. Swafford, J. Kilpatrick. *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academies Press, 2001.
- [6] E. Yackel, P. Cobb. „Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics“. Iš: *Journal for research in mathematics education* 27.4 (1996), puslapiai 458–477.
- [7] N. C. Jordan, J. Glutting, C. Ramineni. „The importance of number sense to mathematics achievement in first and third grades“. Iš: *Learning and individual differences* 20.2 (2010), puslapiai 82–88.
- [8] N. C. Jordan, D. Kaplan, C. Ramineni, M. N. Locuniak. „Early math matters: kindergarten number competence and later mathematics outcomes.“ Iš: *Developmental psychology* 45.3 (2009), puslapis 850.
- [9] I. Kilienė. „Tekstinių uždavinių vaidmuo gilinant mokyklinės matematikos žinias“. Disertacija. Vilniaus universitetas., 2024.
- [10] M. Lampert. „When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching“. Iš: *American educational research journal* 27.1 (1990), puslapiai 29–63.
- [11] J. R. Landis, G. G. Koch. „The measurement of observer agreement for categorical data“. Iš: *Biometrics* 33.1 (1977), puslapiai 159–174.
- [12] Lietuvos Respublikos švietimo, mokslo ir sporto ministerija. *Švietimas*. Prieiga per internetą. n. d. URL: <https://smsm.lrv.lt/lt/veiklos-sritys-1/smm-svietimas/> (žiūrėta 2026-05-09).
- [13] NRICH. *Reasoning: The Journey From Novice to Expert*. Accessed: 2026-05-24. 2014. URL: <https://nrich.maths.org/articles/reasoning-journey-novice-expert-article>.

- [14] NRICH. *Mastering Mathematics: The Challenge of Generalising and Proof*. Accessed: 2026-05-24. 2018. URL: <https://nrich.maths.org/articles/mastering-mathematics-challenge-generalising-and-proof>.
- [15] NRICH. *Round the Two Dice*. Accessed: 2026-05-24. n.d. URL: <https://nrich.maths.org/problems/round-two-dice>.
- [16] I. puslapis. *Principles, Standards, and Expectations*. URL: <https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-and-Standards/Principles,-Standards,-and-Expectations/> (žiūrėta 2026-01-12).
- [17] A. H. Schoenfeld. „Students’ Beliefs About Mathematics and Their Effects on Mathematical Performance: A Questionnaire Analysis.“ Iš: (1985).
- [18] A. H. Schoenfeld. „Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint)“. Iš: *Journal of education* 196.2 (2016), puslapiai 1–38.
- [19] A. L. Stylianides. „Proof and proving in school mathematics“. Iš: *Journal for research in Mathematics Education* 38.3 (2007), puslapiai 289–321.
- [20] D. Ten Braak, R. Lenes, D. J. Purpura, S. A. Schmitt, I. Størksen. „Why do early mathematics skills predict later mathematics and reading achievement? The role of executive function“. Iš: *Journal of experimental child psychology* 214 (2022), puslapis 105306.
- [21] J. Törnroos. „Mathematics textbooks, opportunity to learn and student achievement“. Iš: *Studies in educational evaluation* 31.4 (2005), puslapiai 315–327.
- [22] P. Weinberg. „Generalizing and proving in an elementary mathematics teacher education program: Moving beyond logic“. Iš: *EURASIA Journal of Mathematics, science and technology education* 15.9 (2019), em1740.
- [23] L. C. Wilkinson, A. L. Bailey, C. A. Maher. „Students’ mathematical reasoning, communication, and language representations: A video-narrative analysis“. Iš: *ECNU Review of Education* 1.3 (2018), puslapiai 1–22.

Priedai

Tyrimo kintamųjų kategorijos ir empiriniai dažniai

Atliekant vadovėlių užduočių analizę, duomenys buvo koduojami pagal šešias pagrindines dimensijas: klasę (*K*), vadovėlio dalį (*D*), tematiką (*T*), reikalaujamą pagrindimą (*RP*), pagrindimo tipą (*PT*) ir visuotinumą kriterijų (*VA*). Gautas empirinis užduočių pasiskirstymas pagal atskiras kategorijas pateikiamas žemiau esančiose lentelėse.

8 lentelė. Užduočių pasiskirstymas pagal kontekstines charakteristikas: klasę, dalį, temą, pagrindimą

Kodas	Kategorija	Dažnis
<i>KLASĖ [K]</i>		
K1	Pirma klasė	12
K2	Antra klasė	24
K3	Trečia klasė	25
K4	Ketvirta klasė	25
<i>DALIS [D]</i>		
D1	Pirma dalis	22
D2	Antra dalis	16
D3	Trečia dalis	48
<i>TEMA [T]</i>		
T1	Skaičiai / veiksmi	58
T2	Dėsningumai	2
T3	Matavimai	14
T4	Geometrija	8
T5	Duomenys	4
<i>REIKALAUJAMAS PAGRINDIMAS (RP)</i>		
RP1	Prašoma („paaiškink / pagrįsk“)	85
RP2	Būtina (prašo įrodyti)	1
<i>PAGRINDIMO TIPAS (PT)</i>		
PT1	„Kodėl?“; „kaip?“	82
PT2	„Ar visada?“	0
PT3	Taisyklė + dėsningumas	4
PT4	Sprendimų palyginimas	0
PT5	Klaidos analizė	0
<i>„VISIEMS ATVEJAMS“ (VA)</i>		
VA0	Ne	85
VA1	Taip	1

Padėka

Nuoširdžiai dėkoju darbo vadovui Prof. Rimui Norvaišai už skirtą laiką, vertingus patarimus, dalijimąsi žiniomis ir pagalbą rengiant šį darbą.