

Mokymasis įrodyti tyrinėjant matematinų teiginių sekas 5 klasėje

Kristina Šiaulytė

Vilniaus universitetas, Filosofijos fakultetas, Ugdymo mokslų institutas, Lietuva
kristina.siaulyte@mif.stud.vu.lt
<https://ror.org/03nadee84>

Vaiva Grabauskienė

Vilniaus universitetas, Filosofijos fakultetas, Ugdymo mokslų institutas, Lietuva
vaiva.grabauskiene@fsf.vu.lt
<https://orcid.org/0009-0006-0438-084X>
<https://ror.org/03nadee84>

Santrauka. Straipsnyje analizuojama mokinių supažindinimo su matematiniu įrodymu specifika. Remiantis tiksliai sukurtų įrodymo mokymosi veiklų išbandymo rezultatais nagrinėjama, kaip 5 klasės mokiniai mokosi konstruoti teiginių seką ir kaip jie supranta matematinio įrodymo sąvoką. Kokybinė duomenų turinio analizė parodė, kad 5 klasės mokiniai iš jiems žinomų matematinių teiginių konstruoja išimtinai neformalius įrodymus. Jie tikrina teiginį nagrinėdami pavyzdžius arba kuria įrodymą bendriniam pavyzdžiui. Trūkstant žinių apie įrodymui aktualias matematines sąvokas, sąryšius ir abstrakčių teiginių sekos vaizdavimą, dalis mokinių nesupranta matematinių teiginių tikslingo surikiavimo prasmės. Mokinių kuriamiems įrodymams yra būdingas su užduoties formuluote susijęs kintantis lygis. Todėl rengiantis matematinio įrodymo mokymuisi, svarbu išgryninti mokiniams žinotinus įrodymo bruožus ir detalizuoti įrodymo mokymosi etapus.

Raktiniai žodžiai: matematikos mokymo tobulinimas; matematinio įrodymo supratimas; mokymasis įrodyti; teiginių pagrindimas; pagrindinis ugdymas

Learning to Prove by Exploring Sequences of Mathematical Statements in the 5th Grade

Summary. The article analyses the specifics of introducing students to mathematical proving. Based on the results of testing purposefully designed proving-learning activities, it examines how 5th-grade students learn to construct sequences of statements and how they perceive the concept of mathematical proving. Qualitative content analysis of the data showed that 5th-grade students construct exclusively informal proving from the mathematical statements known to them. They verify a statement by examining examples or by creating a proving for a generic example. Due to a lack of knowledge regarding relevant mathematical concepts, relationships, and the representation of abstract sequences of statements, some students fail not understand the aim of purposefully ordering mathematical statements. The variety of proving created by students is characterized by a fluctuating level of complexity related to the task formulation. Therefore, when preparing for the study of mathematical proving, it is essential to clarify the features of proving that students should know, and to outline in detail the stages of the proving-learning process.

Keywords: improvement of mathematics teaching, understanding of mathematical proving, learning to prove, justification of statements, secondary education.

Received: 12/01/2026. Accepted: 26/03/2026

Copyright © Kristina Šiaulytė, Vaiva Grabauskienė, 2026. Published by Vilnius University Press. This is an Open Access article distributed under the terms of the [Creative Commons Attribution Licence](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (CC BY), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original author and source are credited.

Įvadas

Gilinantį į matematines struktūras ir sąryšius, samprotavimo pagrįstumas keičiasi abstraktumo link. Šia prasme teiginius apie matematinių objektų sąryšius pagrindžiantys įrodymai mokyklinėje matematikoje yra matematinį turinį padedanti suprasti priemonė (Hine, 2019). Įrodant teiginius, iš anksčiau turimas žinias tenka derinti su sąlygoje duotais faktais, o taip pat operuoti abstrakčiomis sąvokomis (Győry & Kónya, 2019). Įrodant formuluojama hipotezė; išskiriamos sąlygoje įvardintų objektų savybės; taikomos loginio samprotavimo kompetencijos (Varghese, 2017). Įrodymo mokymasis gali atlikti patikrinimo, paaiškinimo, atradimo, sisteminimo, komunikavimo ir intelektualinio iššūkio funkcijas (de Villiers, 1999; Rocha, 2019). Įrodymo atliekama paaiškinimo funkcija mokantis matematikos yra ypač svarbi, nes tuo pačiu mokiniai mokosi korektiškai komunikuoti vartodami matematinę kalbą (Varghese, 2017). Todėl pilnavertis matematinio įrodymo mokymasis apima ne tik teiginio pagrindimo vaizdavimą formaliai, bet ir įtikinimo, patikrinimo ir komunikavimo mokymąsi (Housman & Porter, 2003).

Vis dėlto įrodymas mokyklinėje matematikoje neretai suprantamas siaurai – vien tik kaip paaiškinimas, kurio forma atitinka tam tikrus formalius loginio taisyklingumo reikalavimus. Toks supažindinimas su įrodymais tampa beprasmiu ritualu (Alibert, 1988), o įrodymo ugdomoji vertė gali būti kvestionuojama. Mokiniai tiesiog bando atsiminti ir kartoti specifines įrodymo struktūras sekdami mokytoju ir mokydami iš vadovėlio. Bet lieka nesupratę įrodymų įvairovės, paskirties ir matematinių įrodymų taikymo galimybių (Varghese, 2017).

Įrodymų konstravimas daugelio šalių švietimo dokumentuose yra nepakankamai akcentuojamas arba pateiktas paviršutiniškai (Healy et al., 2009). Mokytojai nesulaukia tinkamų metodinių priemonių, padedančių integruoti įrodymus į matematikos pamokas (Haavold et al., 2024). Tikslingas veiklas, mokiniams padedančias suprasti įrodymų prasmę ir įgyti įrodymo gebėjimus, mokytojui tenka kurti pačiam (Varghese 2017). Mokytojams gali trūkti žinių apie įvairias įrodymų formas, mokymo būdus ir jų pritaikymą pamokose (Ko, 2010; Hine, 2019). Negaunantys metodinės pagalbos mokytojai abejoja įrodymų mokymo nauda visiems mokiniams, todėl matematinio įrodymo pristatymo mokiniams vengia arba tik remiasi empiriniais pavyzdžiais (Knuth, 2002; Hine, 2019). Visa tai rodo, kad įrodymų integravimas mokymo programose nėra tik techninė užduotis, bet reikalauja pokyčių visoje matematikos mokymo kultūroje (Nardi & Knuth, 2017). Pripažįstama, kad tuos pokyčius realizuoti yra sunku (Stylianides & Stylianides, 2017).

Mokslinėje literatūroje yra nagrinėjami įrodymo supratimo formavimosi etapai (Balacheff, 1988; Stylianides, 2007; Er & Dinç Artut, 2022; Miyazaki et al., 2024), gilinamasi į dedukcinio įrodymo mokymąsi konkrečiame matematiname turinyje (Hine, 2019; Sevgi & Orman, 2022). Tačiau mokymuisi įrodyti taikytinos veiklos mokiniams ir mokymosi įrodyti detalės yra aptariamasi retai (Dilberoglu, 2023). Dėl įrodymuose naudojamų matematinių teiginių abstraktumo ir mokinių gebėjimų įvairovės, įrodymo supratimo kryptingas ugdymas matematikos pamokose yra vis dar nepakankamai išanalizuotas (Stylianides & Stylianides, 2017; Hanna et al., 2023).

Matematinio įrodymo gebėjimai gilėjant matematinėms žinioms vystosi laipsniškai – nuo paprastų žodinių argumentų iki formalesnių rašytinių įrodymų (Maher & Martino, 1996). Tebevyksta diskusijos, kokio amžiaus vaikai tampa pajėgūs įsisavinti dedukcinį įrodymą. Manoma, jog 10–12 metų amžiaus vaikai jau gali spręsti matematinius uždavinius, reikalaujančius dedukcijos (Carreira et al., 2020). Tam svarbu korektiškai, derinant prie mokinių amžiaus, apibrėžti matematikos sąvokas, išryškinti jų bei matematinių procedūrų hierarchinę struktūrą (Mockaitytė-Rastėnienė, 2022).

Tyrimais nustatyta, kad matematinio įrodymo pristatymas mokiniams yra naudingiausias, kai įrodymus konstruoja patys mokiniai, nes norint išmokyti, vien stebėti, kaip tai yra daroma, nepakanka (Freudental, 2012). Neturintiems pakankamai matematinių žinių mokiniams įrodymus konstruoti yra sunku (Healy & Hoyles, 2000; Lin, 2005). Dažna nesėkmės priežastis yra žinių apie įrodymo struktūrą trūkumas, todėl būtina užtikrinti, kad mokiniai šias žinias įgytų (Weber, 2001, Miyazaki et al., 2024). Parinkus atvirus klausimus, mokinių įrodymo gebėjimai gali būti plėtojami samprotaujant, keliant hipotezes, formuluojant apibendrinimus (Sevgi & Orman, 2022).

Lietuvos Bendrojoje matematikos programoje (2022) įtvirtinus nuostatą mokyti argumentuoti ir formuluoti matematinius teiginius; kurti nuoseklią, logiškai pagrįstą teiginių seką ar užduoties sprendimą; vertinti teiginių teisingumą; įrodyti matematinius teiginius, aukščiau aptarta mokinių supažindinimo su įrodymais problematika tapo itin aktuali. Todėl šiame darbe ieškoma teoriniu ir empiriniu būdu pagrįsto atsakymo į **problemą** – kaip mokinius supažindinti su matematiniu įrodymu? Kadangi mokinių mokymasis suprasti ir konstruoti matematinius įrodymus vis dar nepakankamai ištirtas (Stylianides & Stylianides, 2017; Hanna et al., 2023), šiame straipsnyje pristatomo **tyrimo tikslas** dvejopas: išanalizuoti 5 klasės mokinių mokymąsi konstruoti matematinių teiginių seką ir detalizuoti mokymosi įrodyti sąlygotą matematinio įrodymo sąvokos supratimą. *Matematinio įrodymo sąvokos supratimu* čia vadinsime įrodymo proceso ir jo rezultato savybių pastebėjimą ir taikymą komunikuojant apie įrodymus bei mokinių sukurtuose įrodymuose.

Matematinio įrodymo apibrėžtis pedagoginiu požiūriu

Mokslinėje literatūroje matematinio įrodymo sąvoka apibrėžiama abstrakčiai ir įvairiai, glaustai arba detalai įvardinant esmines įrodymo savybes. Apibrėžtis grupuojant pagal savybes, gali būti išskirti įrodymo atliekamas funkcijas aprašantys, įrodymo pateikimo pavidalą detalizuojantys bei mišrūs pasirinkimai (1 lent).

Kadangi įrodymas yra pagrindinė matematikos idėja, kuri neretai suprantama intuityviai (Tall, 2002) dėl adresatų amžiaus ir negausios matematinės patirties, svarstoma įrodymo apibrėžties formuluotė turėtų pasižymėti lanksčiu požiūriu į įrodymo griežtumą. Mokyklinėje matematikoje nagrinėjami įrodymai turi remtis tuo, kas priimta ir žinoma konkrečiai klasei bendruomenei tam tikru metu (Rocha, 2019). Taigi matematinė argumentacija, kurią tam tikra mokinių klasė pripažins įrodymu, kitoje klasėje, sudarytoje iš kito amžiaus ar gebėjimų mokinių, įrodymo kategorijai gali būti ir nepriskirta. Teisingos

bet kuriomis sąlygomis įrodymo sąvokos apibrėžties nėra, nes kiekviena žmonių grupė matematinio įrodymo sąvoką yra pajėgi suprasti vis kitaip, t. y. mokyklinėje matematikoje įrodymui turi būti priskirta mokiniams konkrečiu laiko momentu pasiekiamą prasmę (CadwaladerOlsker, 2011).

1 lentelė. Mokslinėje literatūroje randami matematinio įrodymo apibrėžčių variantai

Apibrėžtyje įvardintos savybės	Apibrėžčių charakteringi pavyzdžiai	
Įrodymo paskirtis	<i>Patikrinimas</i>	Priimtinomis tiesomis pagrįsta argumentacija (Leddy, 2001; Steele & Rogers, 2012)
	<i>Paaiškinimas</i>	Sąryšius tarp objektų atskleidžianti aiškinimo forma (Ma, 2020)
Įrodymo pavidalas	Loginių išvadų grandinė, apimanti teiginių seką nuo pradinių prielaidų iki galutinės išvados (Joseph, 2011)	
Įrodymo paskirtis ir įrodymo pavidalas	Paaiškinimui, sisteminimui ir atradimams naudojama dedukcija (Bleiler-Baxter & Pair, 2017)	

Pastarąją mokslo žiniomis grindžiamą informaciją gretinant su matematinio įrodymo apibrėžčių grupavimu (1 lent.) matyti, kad įrodymo mokyklinėje matematikoje apibrėžčiai įrodymo paskirties ir jo priimtino pavidalo įvardinimas yra reikalingas. Mokyklinės matematikos įrodymų paskirtis turi išryškinti įrodymų ugdomąją vertę (patikrinimas, paaiškinimas, atradimas, sisteminimas, komunikavimas ir intelektualinis iššūkis). Priimtinas pavidalas apima įrodymo griežtumo nusakymą ir nuo jo priklausomus įrodymo raiškos būdus, t. y. mokiniams suprantamų teiginių aibę, argumentavimo ir argumentų pateikimo būdus (Stylianides, 2007).

Įrodymas matematikoje skiriasi nuo įrodymo mokyklinėje matematikoje. Mokantis matematikos, šios sąvokos prasmė yra platesnė. Apimama gausybė įvairaus griežtumo argumentavimo ir vaizdavimo formų. Įrodymu gali būti vadinami tiek paaiškinantys, tiek pagrindžiantys samprotavimai (Hanna, 1991); tiek „sintaksiniai“, tiek „semantiniai“ įrodymai (Weber & Alcock, 2004). Nors pastarųjų įrodymų grupių apibrėžtys šiek tiek skiriasi, tačiau esmė išlieka ta pati – matematinius įrodymus galima skirstyti į formalius bei neformalius. Šie terminai, nors ir neapibrėžti, vartojami ir Lietuvos bendrojo ugdymo programoje (2022).

Formalus įrodymas yra griežtą loginę struktūrą turinti teiginių seka, kurioje, naudojant logines taisykles, iš duotos prielaidų aibės yra gaunama išvada (Aristidou, 2020). Formalus įrodymas remiasi dedukciniu samprotavimu, o ne kitomis samprotavimo formomis, o jį skaityti, suprasti ir patikrinti galima remiantis aksiomų sistema ir logikos taisyklėmis. Daliais matematikų nuomone, argumentacija, kurios negalima patikrinti remiantis formalios logikos taisyklėmis, yra bereikšmė, nes negarantuoja teisingumo (Rota, 1997).

Formalūs įrodymai yra sunkiai suprantami ir dėl to jų svarba mokiniams yra menka (Thurston, 1995). Ieškant būdo kurti ir komunikuoti mokyklinės matematikos žinias,

negali būti vien tik rekomenduojama supažindinti su formaliais įrodymais (Hanna et al., 2023).

Praktinis matematinis įrodymas yra tai, ką darome, kad vieni kitus įtikintume teiginio teisingumu (Hersh, 1997). Jei formaliam įrodymui priimtina tik dedukcinio samprotavimo forma, tai neformalūs įrodymai, naudojantys schemas ar bendrinius pavyzdžius, gali būti suprasti jau žemesnėse mokyklos klasėse. Mokyklinėje matematikoje, geriausias įrodymas yra tas, kuris padeda suprasti įrodomo teiginio prasmę (Hanna, 1995). Mokykloje neformalūs įrodymai yra reikalingi, nes padeda mokiniui griežtesnį samprotavimą įvaldyti pamažu.

Terminas *įrodymas* nuo Lietuvos nepriklausomybės atgavimo minimas kiekvienoje matematikos bendrojo ugdymo programoje. Tačiau įrodymo sąvoka matematiniam ugdymui apibrėžta tik 2022 m. patvirtintoje bendrojo ugdymo programoje. Šioje programoje pateikta Stylianides (2007) suformuluota įrodymo sąvokos apibrėžtis: *įrodymu vadinama matematinė argumentacija, kurią sudaro matematinį teiginį patvirtinančių arba paneigiančių susijusių teiginių seka, pasižyminti savybėmis:*

- *naudojami mokiniams žinomi, nereikalaujantys papildomo pagrindimo teiginiai;*
- *taikomos mokiniams žinomos arba nesunkiai išvedamos argumentavimo formos;*
- *taikomas mokiniams tinkamas ir jiems žinomas vaizdavimas.*

Tokioje mokyklinio matematinio įrodymo apibrėžtyje pastebimi įrodymo pavidalą (argumentavimo ir argumentų pateikimo būdus) detalai nusakantys elementai, tačiau iš visų mokantis matematikos prasmingų įrodymo paskirčių (patikrinimas, paaiškinimas, atradimas, sisteminimas, komunikavimas ir intelektualinis iššūkis) pasirinkta įvardinti vienintelę, *patikrinimo*, funkciją.

Matematinio įrodymo kokybės vertinimas pedagoginiu požiūriu

Nors matematiniai įrodymai gali būti klasifikuojami įvairiai, mokslinėje literatūroje dažniausiai aptariami 4 įrodymo būdai (Varghese, 2017):

1. *Įrodymas kontrapavyzdžiu.* Teiginys objektų aibei negalioja, jei egzistuoja bent vienas aibės elemento pavyzdys, kuriam teiginys yra klaidingas.
2. *Tiesioginis dedukcinis įrodymas.* Teiginys išvedamas remiantis duotos informacijos struktūra, apibrėžimais, aksiomomis ir teoremomis.
3. *Netiesioginis įrodymas.* Laikomasi nuostatos, kad paneigus įrodomą teiginį atsiirandantis prieštaravimas rodo, kad pradinis teiginys vis tik yra teisingas.
4. *Įrodymas indukcijos būdu.* Remiamasi matematinės indukcijos principu (jei duota savybė yra teisinga, kai n yra 1, ir jei visiems $n > 1$, kai savybė yra teisinga n , tai ji teisinga ir $n + 1$, tai ta savybė yra teisinga visiems natūraliesiems skaičiams).

Pradedant mokytis įrodyti, svarbu ne tiek matematikams įprasta įrodymo tipų įvairovė, kiek mokinio gebėjimo suprasti/konstruoti įrodymo struktūras kaita. Šiuo požiūriu, matematinio įrodymo mokymasis apima tris lygius: ikistruktūrinį, dalinai struktūrinį ir holistinį struktūrinį (Miyazaki et al., 2017). Mokiniai įrodymą gali suprasti tiesiog kaip simboliais pavaizduotų objektų rinkinį (ikistruktūrinis lygis). Jie gali atpažinti atskiras

įrodymo struktūrinės dalis ir pastebėti sąryšius tarp kai kurių dalių (dalinių struktūrų lygis). Arba gali matyti įrodymą kaip į loginę grandinę susietų prielaidų ir išvadų visumą (holistinis struktūrų lygis).

Įrodymų skirstymas pagal įtikinimui pasirinktų argumentų prigimtį atskleidžia mokinio konstruojamo įrodymo elementų papildomas savybes. Išskiriama išorinis (angl., *external*) įtikinimas, empirinis (angl., *empirical*) bei analitinis (angl., *analytical*) įrodymai (Harel & Sowder, 2007; Housman & Porter, 2003). Išoriniam įtikinimui būdinga remtis įrodymo forma, ne jo turiniu; remtis autoritetu; manipuluoti simboliais, nesigilinant į prasmę. Empirinio įrodymo esmė yra pavyzdžių naudojimas bendrinio atvejo (angl., *general case*) teisingumo patvirtinimui; išvadų darymas remiantis nepilnai pagrįstais dedukcija elementariais vaizdiniais. Analitiniam įrodymui būdingas dedukcija grindžiamas tikslingas idėjų transformavimas; aksiomų kaip pirminių teiginių, kurių nereikia įrodyti, reikalingumo pripažinimas ir taikymas įrodant.

Vertinant mokinių konstruojamus įrodymus, daugelį metų aktualumo nepraranda ir dar viena įrodymų vertinimo tipologija (Varghese, 2011). Balacheff (1988) išskiria keturis įrodymų lygius: praktinis patikrinimas (angl., *naïve empiricism*); esminiai bandymai (angl., *crucial experiment*); bendrinis pavyzdys (angl., *generic example*); išmąstymas (angl., *thought experiment*). Praktinio patikrinimo lygiui būdinga rėmimasis vieno ar kelių pavyzdžių teisingumu. Esminių bandymų lygyje, remiantis patikrintų pavyzdžių teisingumu, kuriami apibendrinimai. Bendrinio pavyzdžio lygyje, teiginio teisingumas tikrinamas pasirinkus tam tikros objektų klasės visus atvejus reprezentuojantį pavyzdį. Išmąstymo lygyje, teisingumo įrodymas nebesiejamas su pavyzdžių teisingumu. Jame remiamasi matematiniais apibrėžimais, teiginiais, išvadų gavimo taisyklėmis (Er & Artut, 2022). Pirmieji trys įrodymo lygiai yra neformalūs, priklausantys nuo pasirinktų veiksmų ar vaizdų. Iš šios grupės labiausiai išsiskiriantis trečiasis lygis atitinka perėjimą nuo konkretaus pavyzdžio prie apibendrinimo, nuo pragmatinio pagrindimo prie konceptualaus supratimo. Ketvirtasis lygis yra formalus įrodymas (Balacheff, 1988).

Pastarasis mokinių sukonstruotų įrodymų vertinimas detalai atspindi kelią, kurį mokinis turi nueiti, siekdamas priartėti prie matematiniams įrodymams būdingo griežtumo. Ši įrodymo tipologija detalai atskleidžia mokymuisi įrodyti būdingą induktyvaus supratimo kaitą link deduktyvaus supratimo. Tokia kaita realizuojasi, laipsniškai konstruojant vis rimtesnius apibendrinimus (Varghese, 2011).

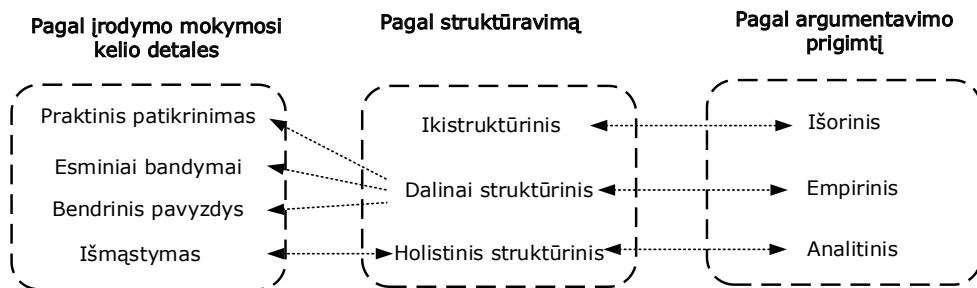
Matyti, jog čia aptartos įrodymų tipologijos pedagoginiu požiūriu tarpusavyje skiriasi įrodymo supratimo/konstravimo lygių „susmulkinimu“ (1 pav.).

Iš esmės, siekiančiam matematinių įrodymų mokymosi prasmingumo mokytojai reikia įvairiapusio žinojimo, kaip tas supratimas gali būti daugelio mokinių įgytas.

Pirma, remiantis įrodymų grupavimu pagal argumentavimo prigimtį, mokykliniame amžiuje, argumentavimo prigimtis gali keistis:

- nuo bandymų imituoti įrodymo formą link įrodomo fakto tikrinimo remiantis įvairaus bendrumo pavyzdžiais;
- nuo pavyzdžių ir įrodymo elementų tyrinėjimo link apibendrinimų, siekiant įvairiausiškai suprasti įrodomą teiginį;

- nuo bendrinio atvejo teisingumo demonstravimo link tikslingo įrodymo konstravimo remiantis dedukcija.



1 pav. Skirtingoms įrodymo tipologijoms būdingų įrodymo lygių tarpusavio dermė

Antra, remiantis įrodymų grupavimu pagal struktūravimą, struktūros supratimo kaita mokantis rodo mokinio pasirengimo jungti įrodymo elementus į visumą brandą. Mokant įrodyti, supažindinimas su struktūrinėmis įrodymo dalimis ir jų jungimo į vientisą įrodymą galimybėmis yra būtina, tačiau nepakankama sąlyga holistiniam įrodymo supratimui. Be dalinio struktūravimo mokymosi etapo, formalaus įrodymo mokymosi ugdomoji vertė daugeliui mokinių yra abejotina. Tik konstruktyviai susipažinę su daliniu struktūravimu, mokiniai gali įgyti įrodymų kūrimo pagrindus.

Trečia, įrodymų grupavimas pagal mokymosi konstruoti matematinius įrodymus kelią (1 pav.) kaip tik išryškina pedagoginės veiklos žingsnelius, sietinus su matematikos pamokose realiai vykstančiu įrodymų įsisąmoninimu. Viena vertus, šie žingsneliai atsako į klausimą, kaip organizuoti mokinių mokymąsi konstruoti ir suprasti įrodymus. Praktinio patikrinimo, esminių bandymų, bendrinio pavyzdžio lygių (Balacheff, 1988) atpažinimas mokinių veiklose mokytojai gali būti naudingas tikslingam tolimesnių veiklų parinkimui. Kita vertus, tokiu būdu mokiniai įgyja pragmatinių įrodymų ribotumus atskleidžiančią patirtį ir taip konceptualių įrodymų nagrinėjimas mokiniams gali tapti priimtinesnis (Varghese 2017).

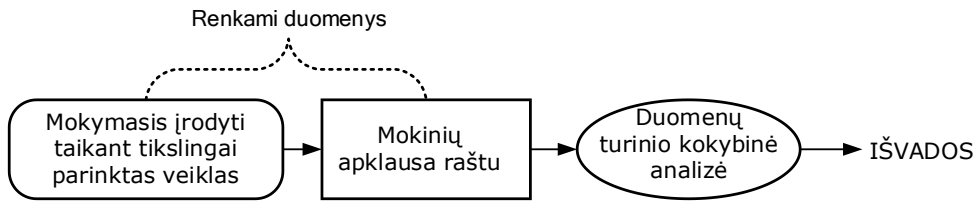
Metodologija

Mokykloje atliekami empiriniai tyrimai reikalingi norint konstruoti matematikos pamokų realybę atitinkančius, tyrėjų išankstinę nuomonę apie matematikos mokymąsi detalizuojančius ir su ta nuomone nebūtinai sutampančius, modelius (Dilberoğlu, 2023). Straipsnyje pristatomame tyrime buvo pasirinkta nagrinėti tyrėjų tikslingai parengtoje ugdymo veikloje dalyvaujančių 5 klasės mokinių įrodymo mokymąsi.

Tyrimo imtis, organizavimas, metodai. Empirinis tyrimas (2 pav.) buvo atliktas Vilniaus miesto mokykloje, kurioje viena tyrėjų dirbo penktų klasių mokinių matematikos mokytoja. Viena vertus, taip buvo išvengta mokiniams neįprastos mokymosi aplinkos poveikio. Kita vertus, dėl mokytojai-tyrėjai būdingo teorinio įsigilintojo į tyrimo problematiką, mokiniams mokantis įrodyti iškilę procesiniai netikėtumai galėjo būti lanksčiai

koreguojami be poveikio tyrimo rezultatams. Tyrime dalyvavo dviejų penktų klasių mokiniai (16 +17). Abiejų klasių mokinių matematikos pasiekimai yra panašūs. Dviejų klasių imtis tyrimui buvo pasirinkta norint sukaupti daugiau duomenų sunkumus keliančių įrodymo mokymosi potemių atskleidimui.

Ugdomoji veikla vyko mokiniams matematiškai komunikuojant ir bendradarbiaujant grupėse po 4-5 mokinius. Ugdomųjų užduočių atlikimas buvo fiksuojamas nuotraukomis. Atlikdami užduotis, mokiniai turėjo raštu atsakyti į užduočių lapuose esančius klausimus. Po ugdomosios veiklos, mokiniams buvo pateiktas klausimas apie matematinio įrodymo sąvoką, į kurį taip pat reikėjo atsakyti individualiai raštu.



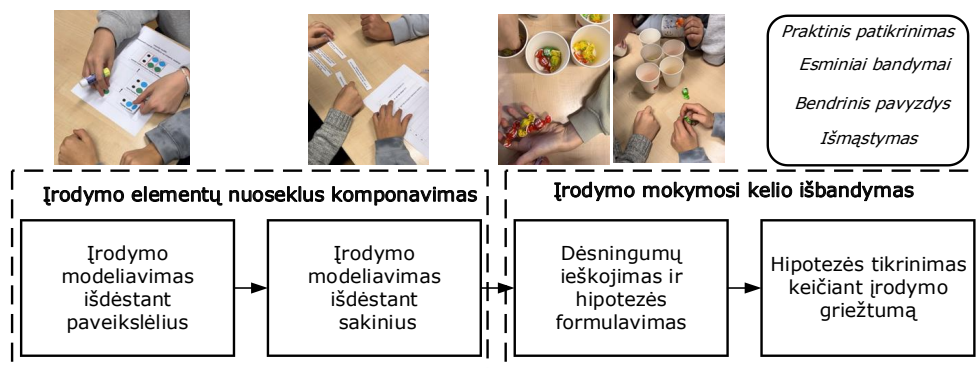
2 pav. Atlikto empirinio tyrimo logika

Buvo taikyti šie tyrimo dizaino, duomenų rinkimo ir analizės metodai: instrumentinis atvejo tyrimas (angl., *instrumental case study*); apklausa raštu; kokybinė duomenų turinio analizė (angl., *content analysis*). Atvejo tyrimai sukuria sąlygas tirti realaus gyvenimo įvykius / procesus, kai norima juos paaiškinti (Kohlbacher, 2006). Edukologijoje tyrimas yra vadinamas instrumentiniu atvejo tyrimu, kai siekia atskleisti specifinės temos mokymosi problematiką, ją iliustruojant pasirinkta grupei ar individui būdinga veikla, įvykiu, procesu (Creswell, 2012). Šiame straipsnyje pristatomas 5 klasės mokinių mokymosi įrodyti atvejis.

Tyrime taikytos matematinio įrodymo mokymosi veiklos charakteristika. Mokymasis įrodyti turi prasidėti nuo įrodymo sąvokos korektiško pristatymo ir mokinių supratimo, ką sąvoka reiškia (Stylianides, 2007). Šiame tyrime laikytasi nuostatos, kad matematinis įrodymas yra tam tikru būdu struktūruota teiginių seka, kurios konstravimo būdai keičiasi priklausomai nuo mokinio gilinimosi į įrodymus patirties. Mokytojas atsakingas už mokinių supažindinimą su teiginių sekos konstravimo galimybėmis bei už sąlygų konstruoti tinkamo abstraktumo įrodymus sudarymą.

Kuriant mokymosi įrodyti veiklą mokiniams, buvo parengtos kelių etapų užduotys (3 pav.). Užduotys konstruotos atsižvelgiant į penktokų turimas matematines žinias. Jose naudojamos sąvokos ir veiksmai, reikalingi sekų konstravimui, 5 klasės mokiniams yra žinomi ir suprantami. Kuriant užduotis, buvo adaptuotos Dilberoğlu (2023) įrodymų mokymuisi taikytos teiginių surikiavimo ir dėsningumą ieškojimo užduotys. Veiklų visuma buvo gauta, jas papildžius tikslingai sukurtomis Balacheff (1988) įrodymo lygius atitinkančiomis užduotimis.

Įrodymo elementų nuoseklaus komponavimo prasmė ir principai mokiniams buvo paaiškinti prieš veiklą. Šiame etape mokiniams buvo pasiūlyta pamėginti konstruoti matematinių teiginių sekas, kai duoti teiginiai pasižymi paveikslėlių arba rašytine forma (3 pav.).



3 pav. Įrodymo mokymuisi taikytos ugdomosios veiklos struktūra

Ugdymo tolesnio etapo paskirtis – mokyti pastebėti dėsninę bei formuluoti matematinę hipotezę. Remdamiesi tekstinio uždavinio sąlygą atitinkančios veiklos su materialiomis priemonėmis stebėjimu ir samprotavimu, mokiniai bandė atrasti matematinę taisyklę, prognozuojančią duoto skaičiaus dalumą iš 3 (3 pav.).

Baigiamajame (sudėtiniam) ugdymo etape mokiniai mokėsi patikrinti hipotezę, konstruodami skirtingo abstraktumo įrodymą. Ši veiklos dalis buvo parengta remiantis įrodymo mokymąsi detalizuojančia tipologija (Balacheff, 1988) bei matematinio įrodymo supratimo vystymosi modeliu, teigiančiu, kad įrodymo mokymasis vyksta nuo pavyzdžių tikrinimo link bendro situacijos nagrinėjimo: bendra taisyklė → abstrakcija → formalizavimas (Ahmadpour et al., 2019). Buvo remiamasis prielaida, jog efektyviausia pradėti nuo empirinių bandymų (praktinio patikrinimo)) ir tik tuomet kituose, daugiau abstraktumo reikalaujančiuose etapuose, pereiti prie formalaus matematinio įrodymo (mėginimo išmąstyti). Šiame etape, mokiniai atliko 4 uždutis. Visas jas buvo įmanoma atlikti viso labo praktiškai patikrinant hipotezės teisingumą. Tačiau kiekviena tolesnė uždutis nuosekliai vedė link vis abstraktesnio įrodymo. Taip norėta padėti bent daliai mokinių išbandyti abstraktesnį įrodymo būdą.

Tyrimo instrumentai. Ugdomojoje veikloje mokinių grupėms pildymui pateikti užduočių lapai kartu buvo ir pagrindinis tyrimo instrumentas. Visos užduotys, o tuo pačiu ir mokiniams mokantis renkami duomenys, buvo suderinti su ugdomosios veiklos etapais (3 pav.). Viena vertus, mokiniai mokėsi įrodyti, pagal užduočių pateikimo tvarką atlikdami tiksliai tai, ko buvo prašoma užduotyse. Kita vertus, sukaupti užduočių atlikimo rezultatai vėliau buvo dar ir analizuojami.

Pavyzdžiui, mokinių grupės pasirinkta eilės tvarka suklijuoti paveikslėliai ir suklijuotos popieriaus juostelės su užrašytais teiginiais, buvo išanalizuota pasirengimo nuosekliai dėstyti mintį požiūriu. Sprendžiant tekstinį uždavinį apie saldinius besidalijančius piratus, mokinių raštu suformuluota hipotezė vėliau buvo analizuojama jos pateikimo formos požiūriu. Keletą žingsnių apimantis mokymasis patikrinti hipotezę vėliau buvo analizuojamas ieškant atitikimo kažkuriam iš įrodymo mokymosi lygių, o taip pat mėginant pastebėti 5 klasės mokinių sukurtiems įrodymams būdingas savybes. Taigi, tai-

kant pagrindinį tyrimo instrumentą buvo siekta diagnozuoti 5 klasės mokiniams būdingą nuoseklaus teiginių išdėstymo įvaidymą; užrašytos hipotezės formą; mokinių kuriamų įrodymų atitikimą lygiams; mokantis įrodyti mokinių pastebėtas įrodymo savybes.

Pasibaigus mokymuisi įrodyti, kiekvieno klasės mokinio atskirai buvo dar paprašyta raštu paaiškinti, kaip supranta matematinio įrodymo sąvoką.

Duomenų rinkimas ir analizės procedūra. Kaip ir įprasta atvejo tyrimams, siekiant įsigilinti į nagrinėjamą problematiką, buvo renkami ne vieno pavidalo duomenys (veiklos klasėje nuotraukos, mokinių raštu atliktų užduočių lapai). Kritiškai vertinant surinktus duomenis, atskiras dėmesys buvo skirtas tyrėjoms bendradarbiaujant išryškėjusių nuomonių apie surinktus artefaktus suderinimui.

Atliekant empirinį tyrimą sukaupiti mokinių atsakymai buvo išnagrinėti atliekant klasiškinę duomenų turinio analizę (Kohlbacher, 2006). Turinio analizės esmė yra duomenų fragmentų, kuriuose randami tyrimui svarbūs pastebėjimai, išskyrimas, grupavimas ir kodavimas, siekiant sisteminti informaciją.

Mokinių atsakymų į kiekvienos užduoties klausimą grupėms buvo priskirti kategorijų pavadinimai. Charakteringi atliktų užduočių pavyzdžiai pateikti tyrimo rezultatus iliustruojančiuose paveiksluose ir ties kiekviena kategorija lentelėse. Rezultatai pagal išskirtas kategorijas analizuojami ir interpretuojami tekste.

Aprašant tyrimo rezultatus, atsakymai į individualiai pateiktą apklausos raštu klausimą buvo gretinami su paskutiniajame ugdomosios veiklos užduotyje mokinių grupių sukurtais įrodymais.

Siekiant didinti atlikto kokybinio tyrimo rezultatų perkeliamumą, tyrimo rezultatų aprašyme pateikti gausūs mokinių sukurtų autentiškų įrodymų pavyzdžiai. 5 klasės mokinių mokymasis konstruoti teiginių sekas yra detalai aprašytas. Tyrimo rezultatai aptarti juos išsamiai interpretuojant.

Tyrimo rezultatai

5 klasės mokinių mokymosi konstruoti teiginių seką ypatumai

5 klasės mokiniams mokantis įrodyti surinkti duomenys rodo, kad grafine arba verbaline forma pateiktus matematinius teiginius surikiuoti į įrodymą reprezentuojančią seką mokiniams pavyksta nevienodai lengvai.

Grafiškai pateiktus teiginius visos tyrime dalyvavusių klasių mokinių grupės sudėjo į seką teisingai. Tačiau atliekant atrodytą identišką užduotį su tekstu pateiktais teiginiais, abiejų klasių rezultatai buvo skirtingi. Vienos klasės mokinių grupės teiginius suklįjavo teisingai, visos mokinių sukonstruotos sekos buvo nuoseklios. Tuo tarpu daugumai kitos klasės mokinių ši užduotis buvo sunki (4 pav.) – tik vienai iš keturių mokinių grupių pavyko teiginių seką suklįjuoti nuosekliai.

Tokie rezultatai rodo, jog penktų klasių mokiniai nebūtinai pasirenkę didesnės apimties teiginių išvedimų nagrinėjimui. Gali būti, kad tiems mokiniams trūksta paprastesnių samprotavimų jungimo į teiginių seką patirties.

1	Lyginis skaičius dalijasi iš 2.	1	Lyginis skaičius dalijasi iš 2.
2	Bet kokį lyginį natūralųjį skaičių galime užrašyti sandauga $2 \cdot n$ (n – bet koks natūralusis skaičius).	2	Pritaikome daugybos skirstomumo dėsnį sudėties atžvilgiu iš kitos pusės ir gauname $2 \cdot a + 2 \cdot b = 2 \cdot (a + b)$.
3	$2 \cdot a$ (a – bet koks natūralusis skaičius) yra pirmasis lyginis skaičius.	3	$2 \cdot a$ (a – bet koks natūralusis skaičius) yra pirmasis lyginis skaičius.
4	Pritaikome daugybos skirstomumo dėsnį sudėties atžvilgiu iš kitos pusės ir gauname $2 \cdot a + 2 \cdot b = 2 \cdot (a + b)$.	4	Dviejų lyginių natūraliųjų skaičių suma yra $2 \cdot a + 2 \cdot b$.
5	$2 \cdot b$ (b – bet koks natūralusis skaičius) yra antrasis lyginis skaičius.	5	$2 \cdot b$ (b – bet koks natūralusis skaičius) yra antrasis lyginis skaičius.
6	$2 \cdot (a + b)$ dalijasi iš 2.	6	Bet kokį lyginį natūralųjį skaičių galime užrašyti sandauga $2 \cdot n$ (n – bet koks natūralusis skaičius).
7	Suma $a + b$ yra natūralusis skaičius.	7	$2 \cdot (a + b)$ yra lyginis natūralusis skaičius.
8	$2 \cdot (a + b)$ yra lyginis natūralusis skaičius.	8	Suma $a + b$ yra natūralusis skaičius.
9	Dviejų lyginių natūraliųjų skaičių suma yra $2 \cdot a + 2 \cdot b$.	9	$2 \cdot (a + b)$ dalijasi iš 2.
	Dviejų lyginių natūraliųjų skaičių suma yra lyginis natūralusis skaičius		Dviejų lyginių natūraliųjų skaičių suma yra lyginis natūralusis skaičius

4 pav. Mokinių sukonstruotų matematinių teiginių nenuoseklių sekų pavyzdžiai

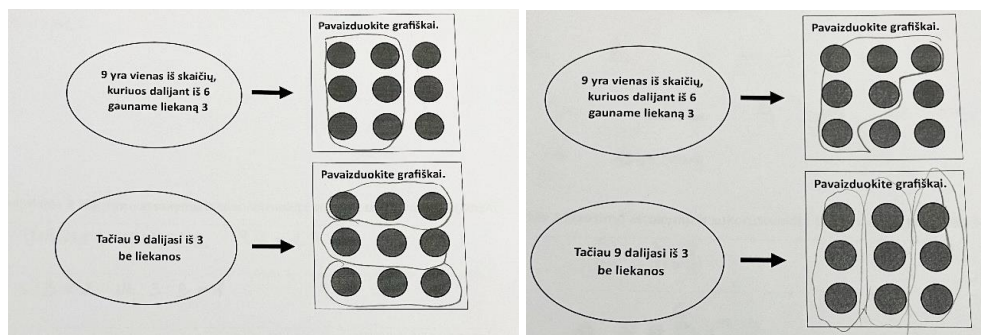
Atlikdamos tekstinio uždavinio sąlygą atitinkančią veiklą su materialiomis priemonėmis, abiejų klasių mokinių grupės pastebėjo dėsningumą ir suformulavo teisingas hipotezes. Tačiau nė vienos grupės mokiniai neužrašė bendriniam atvejui tinkančios hipotezės. Visų mokinių grupių užrašytose hipotezės formuluotėse vartojamas žodis „saldainiai“ (5 pav.). Toks pasirinkimas rodo, kad 5 klasės mokinių kuriami apibendrinimai neatsiejami nuo praktiškai nagrinėjamos situacijos. Panašu, kad samprotauti apie pastebėtą dėsningumą abstrakčiau turėtų būti specialiai mokoma.

TEIGINYS
jei daliname saldainius iš 6
ir lieka 3 tai paviks
padalinti iš 3 ir neliks!

5 pav. Mokinių suformuluoto matematinio teiginio (hipotezės) charakteringas pavyzdys

Hipotezės tikrinimas keičiant įrodymo griežtumą vyko mokiniams nuosekliai atliekant keletą užduočių. Atsakyti į pirmų dviejų užduočių klausimus nebuvo sunku nė vienai mokinių grupei.

Mokiniams pavyko grafiškai pavaizduoti hipotezę iliustruojančio pavyzdžio abu teiginius (6 pav.). Jie nesunkiai sieja atskirus tekstu užrašytus teiginius su jų grafiniu atitikmeniu, todėl galima teigti, kad tyrime dalyvavę mokiniai yra pasirengę nagrinėjamų matematinių teiginių vaizdavimo transformavimui konstruojant turimą supratimo lygį atitinkantį įrodymą.



6 pav. Hipotezę iliustruojančio pavyzdžio teiginių grafinio vaizdavimo charakteringi pavyzdžiai

Tikrindami užduotyje įvardinto keturženklį skaičiaus dalumą iš 3, mokiniai sėkmingai pritaikė dalumo iš trijų požymį (7 pav.). Tai rodo, kad teiginių apie ne itin didelių skaičių dalumą pagrindimui, mokiniai yra pajėgūs pasinaudoti jiems žinomais matematiniais faktais.

Taip dalinasi, nes yra dalumo požymis
 $2+3+3+1=9, 9:3=3$

7 pav. Teiginio pagrindimo remiantis matematiniu faktu charakteringas pavyzdys

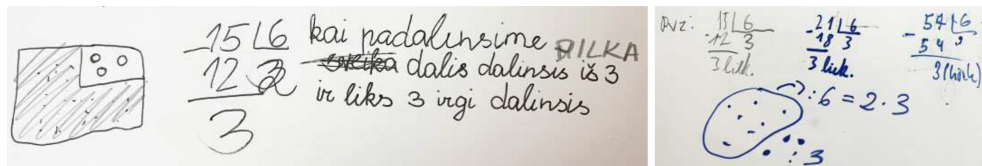
Užduotis apie gerokai didesnio, tekste net neįvardinto, skaičiaus dalumą iš trijų, buvo sukurta tikintis, kad mokiniai rinksis nagrinėti bendrinį pavyzdį. Paaiškėjo, kad ši užduotis mokiniams buvo sunki. Vietoje prašomo argumento daugumos grupių mokiniai tiesiog perrašė užduoties formuluotėje pateiktą hipotezę – neįrodytą matematinį teiginį (8 pav.). Likusios mokinių grupės užduotyje suformuluoto klausimo iš viso neatsakė. Tai rodo, kad 5 klasės mokiniai gali nesuprasti hipotezės prasmės. Panašu, kad mokinius būtų naudinga išsamiau supažindinti ir su matematinio teiginio pagrindimo struktūra.

Taip, dalinsis, nes natūralieji skaičiai ~~to~~ kuriuos dalijant iš 6 gauname liek. 3 yra dalus iš 3.

8 pav. Mokinių pateikto neleistino hipotezės naudojimo argumentacijoje pavyzdys

Pastarąjį argumento neleistino keitimo hipoteze pasirinkimą šiek tiek paaiškina tolesnę užduotį užfiksavęs 5 klasės mokinių bandymas sukurti įrodymą dar abstraktesniam

teiginiui apie skaičių dalumą. Abiejų klasių mokiniai prieš formuluodami argumentą praktiškai tikrino pasirinktų skaičių dalumą ir vaizdavo situaciją grafiškai (9 pav.).



9 pav. Mokinių atsakymuose naudojamo tikrinimo ir grafinio vaizdavimo charakteringi pavyzdžiai

Toks įrodymo būdas atitinka dalinai struktūrinio įrodymų lygio pirmuosius du žingsnius: praktinį patikrinimą ir esminius bandymus (1 pav.). Viena vertus, antrajame iš 9 pav. pateiktų užduoties atlikimo pavyzdžių matyti, jog mokiniai atrado kelis nagrinėjamą taisyklę atitinkančius pavyzdžius ir netgi šalia grafinės iliustracijos užrašė skaičiaus 6 suskaidymą, iš kurio matyti, kad 6 dalijasi iš 3. Kita vertus, ši idėja taip ir liko neišplėtotą. Tai rodo, kad 5 klasės mokiniai gali tiesiog nežinoti, kaip užrašyti bendriniam pavyzdžiui tinkantį įrodymą.

Paskutinėje mokiniams pateiktoje užduotyje buvo prašoma sukonstruoti įrodymą vaizduojančią teiginių seką. Mokinių pasiektus įrodymo supratimo lygius atitinkantys atsakymų pavyzdžiai pateikti 10 pav. Bandymo išmąstyti lygis (1 pav.) tyrimo metu nebuvo užfiksuotas.

Praktinio patikrinimo lygis

1. TURIME VEIKSMĄ $9:6=1,5$.
2. $6:3=2$ IR $3:3=1$
3. TAI REIŠKIA JŲ SUBEJUS 6 IR 3 GAUSIME SKAIČIŲ KURIS DALIJASI IŠ 3
4. $6+3=9$
5. 9 DALIJASI IŠ 3 NES YRA DAUGYBOS LENTELĖJE
6.
7.

Išvada: Natūralieji skaičiai, kuriuos dalijant iš 6 gauname liekaną 3, yra dalūs iš 3

Bendrinio pavyzdžio lygis

1. $6 \cdot n + 3$ YRA SKAIČIUS !!
2. $6 = 2 \cdot 3$ $6:3=2$ skaičius dalinsis $6 \cdot n = 2 \cdot 3 \cdot n$
3. $3:3=1$ kas liko dalinsis
4. VISKAS ✓ dalinsis

Išvada: Natūralieji skaičiai, kuriuos dalijant iš 6 gauname liekaną 3, yra dalūs iš 3

Esminių bandymų lygis

Dėl to, kad galima sudaryti daug pavyzdžių

10 pav. Ugdomojoje veikloje mokinių sukurtų įrodymų charakteringi pavyzdžiai pagal lygį

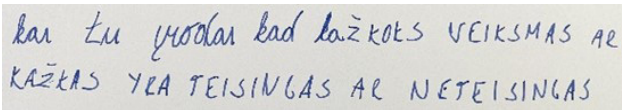
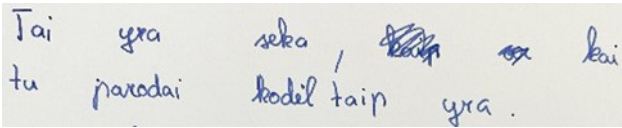
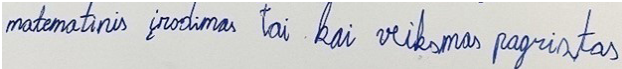
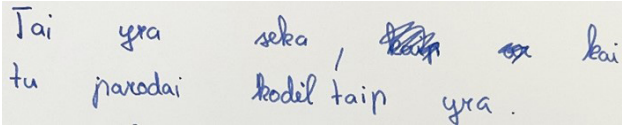
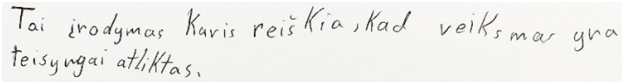
Tos mokinių grupės, kurios ugdomosios veiklos pradžioje sugebėjo teisingai sudėti matematinius teiginius į seką, teiginius paskutinei užduočiai formulavo ir seką konstravo daug sėkmingiau nei grupės, kurios teiginių nuoseklų surikiavimą atliko neteisingai.

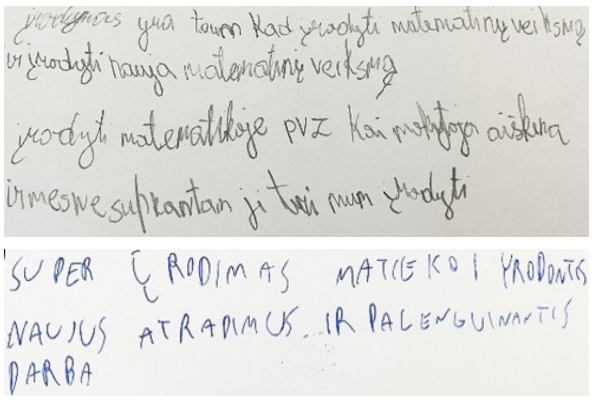
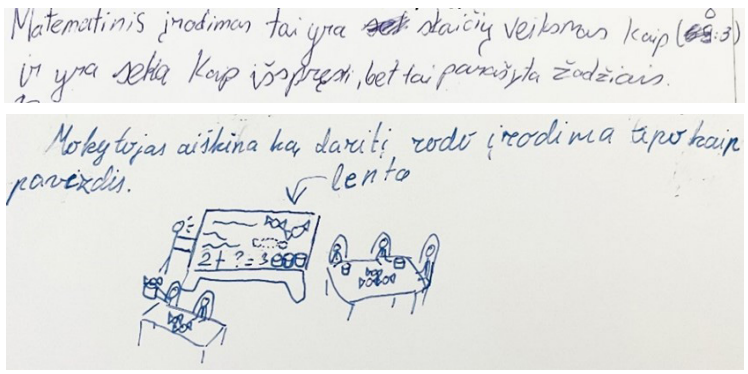
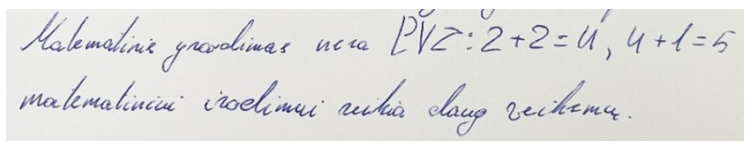
Pažymėtina, jog abiejų klasių daugumos grupių formuluojami argumentai nebuvo klaidingi ir netgi atitiko bendrinio pavyzdžio lygį. Tai leidžia konstatuoti, jog paskutinėje užduotyje pasiūlytas lentelės šablonas žymiai daliai 5 klasės mokinių palengvino aukštesnio lygio įrodymo konstravimą. Panašu, kad mokiniai yra įpratę derintis prie užduotyse tiesiogiai įvardintos formos.

Mokymosi įrodyti sąlygotas matematinio įrodymo sąvokos supratimas

Pasibaigus tikslingai parinktai įrodymo mokymosi veiklai gauti 5 klasės mokinių individualūs atsakymai raštu į klausimą *kas yra matematinis įrodymas* atskleidė įrodymo proceso ir jo rezultato savybių pastebėjimo bei taikymo komunikuojant ypatumus. Analizuojant 2 lentelėje išvardintas kategorijas ir jas atitinkančius charakteringus atsakymus matyti, kad mokiniai supranta įrodymą kaip patikimą atradimą, pagrindimui, matematikų darbo palengvinimui o taip pat aiškinimui naudojamą būdą, kuris yra gana sudėtingas ir gali pasižymėti įvairiais pavidalais.

2 lentelė. *Apklausoje raštu 5 klasės mokinių įvardintos įrodymo savybės*

Kategorija	Charakteringas pavyzdys
Pagrindimas	  
Patikimumas	 Vienu žodžiu tai dalykas pagrįstas mat. faktas Ir jis yra tikslus jeigu dauginame tai visada bus 

Kategorija	Charakteringas pavyzdys
Paskirtis	
Raiškos būdas	
Sudėtingumas	

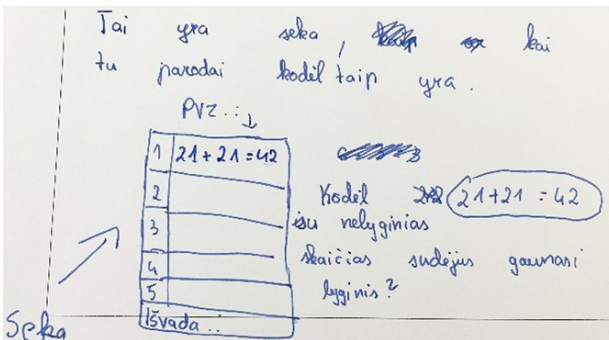
Iš esmės, toks 5 klasės mokinių įrodymo savybių supratimas netiesiogiai, tačiau apima mokslinėje literatūroje aptariamas (de Villiers, 1999; Rocha, 2019) mokyklinio matematinio įrodymo siekiamybes - realizuoti patikrinimo, paaiškinimo, atradimo, sisteminimo, komunikavimo ir intelektualinio iššūkio funkcijas. Pažymėtina, kad apie mokinių pastebėtas įrodymui būdingas paaiškinimo ir patikrinimo funkcijas ugdamosios veiklos metu su mokiniais tiesiogiai net nebuvo kalbėta.

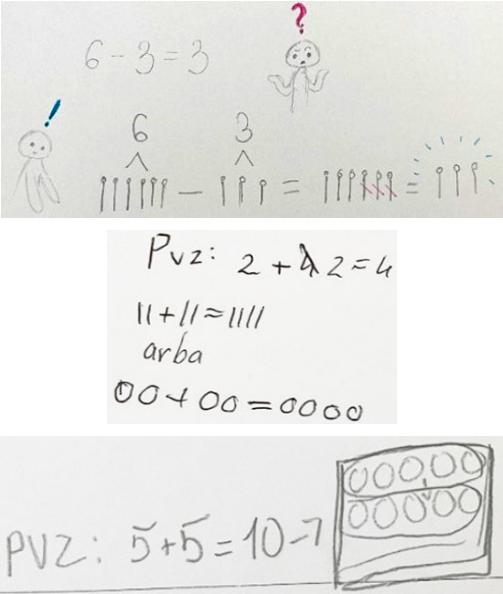
Įrodymo įvairiausių savybių supratimą mokiniai, žodinės raiškos požiūriu, vis dėlto komunikuoja ne itin sklandžiai. Daug apklaustų mokinių įrodymo sąvoką tapatino su veiksmu, veiksmų seka ar uždavinio sprendimu. Apibūdindami įrodymo sąvoką, matematinius faktus, teisingus matematinius teiginius kaip įrodymo sandaros elementus mokiniai prisiminė retai. Apie pagrindimą ir patikimumą mokiniai kalbėjo nesigilindami į detales, tiesiog tai įvardino. Panašu, kad žymiai didesnę įspūdį mokiniams daro galimybė

įrodyti ne vienu būdu ir faktas, kad įrodymai gali būti naudojami įvairiose situacijose. Šiuos įrodymo supratimo bruožus paaiškina tyrime dalyvavusių 5 klasės mokinių pasiektas ne daugiau kaip dalinai struktūrinis (1 pav.) įrodymo supratimo lygis.

Toje pačioje apklausoje kai kurie mokiniai vietoje paaiškinimo, kas yra įrodymas, pateikė savo sukurtus matematinius įrodymus. 3-oje lentelėje matyti, kad visiems mokinių sukurtiems įrodymams būdingas rėmimasis praktiniais pavyzdžiais.

3 lentelė. Mokinių individualiai sukurtuose įrodymuose matomas įrodymo sąvokos supratimas

Kategorija	Charakteringi pavyzdžiai
Sieja su veikloje matytu įrodymo pavidalu	
Sieja su pavydžių tikrinimu	Kad jei skaičius dalinasi iš 6 tai jis dalinasi iš 3. $\begin{array}{r} 6016 \\ - 2010 \\ \hline 4006 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6013 \\ - 2010 \\ \hline 4003 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5416 \\ - 5413 \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5413 \\ - 5410 \\ \hline 3 \end{array}$ $7+5=12$ $21+21=42$ $17+9=26$ ĮRODYMAS TOKS KAD VISADA SUDĖJUS NELYGINIUS SKAIČIUS VISADA GAUSIME LYGINĮ! 1. PVZ.: $9:6=1$ liko $= 9:3=3$ $27:6=4$ liko $= 27:3=9$ ŠIO ĮRODYMŲ „Taisyklė“: SKAIČIUS, KURIS DALINASI IŠ 6 IR DAR LIEKA LIEKA-NA 3 DAR DALIJASI IŠ 3.
Sieja su neprieštaringumu	tai įrodymas, kad pvz.: $2 \times 2 = 4$ o ne 5, nes $2 \times 2 = 4$, $4:2 = 2$, nes $2 \times 2 = 4$.

Kategorija	Charakteringi pavyzdžiai
Sieja su kelių vaizdavimo būdų naudojimu	 The examples show three different ways to represent mathematical operations: Top example: A subtraction problem $6 - 3 = 3$ is shown with stick figures. One figure has a blue exclamation mark above its head, and another has a red question mark above its head. Below the equation, the number 6 is represented by six vertical lines, and 3 by three vertical lines. The operation is shown as $- =$, with some lines crossed out to show the result. Middle example: A handwritten note with the text "Pvz: $2 + 2 = 4$", followed by "11 + 11 = 1111" and "arba" (or), and then "$00 + 00 = 0000$". Bottom example: A handwritten note with the text "PVZ: $5 + 5 = 10$" and a drawing of a box containing ten circles arranged in two rows of five.

Viena vertus, įrodymo pavyzdžio užrašymas atsakant į klausimą *kas yra įrodymas* taip pat rodo negebėjimą apie įrodymą kalbėti bent kiek abstrakčiau. Kita vertus, tokie mokinių atsakymai papildomai detalizuoja įrodymo vaizdavimo šiame amžiuje prioritetus: mokiniai taiko mokantis įrodyti išbandytus įrodymo užrašymo pavidalus (lentelė, veiksmų seka, skaičių skirtingi raiškos būdai, schema); mokiniai bando vartoti nagrinėjant įrodymus išgirstus terminus (išvada, taisyklė); mokiniai formuluoja klausimus ir gautą išvadą žodžiu arba teiginio išvedimą užrašo kaip veiksmų seką.

Išvados ir diskusija

Šiame straipsnyje pristatytame tyrime dalyvavę 5 klasės mokiniai mokėsi įrodyti matematinį teiginį, išbandydami skirtingus teiginių ir įrodymo vaizdavimo būdus. Lyginant su kitų tyrėjų darbais, nauja yra dėmesio telkimas į įrodymą kaip pagrindžiančių teiginių seką. Išskirtinė yra ir šiame tyrime taikyta laipsniško supažindinimo su įrodymu metodika, besiremianti tiek įvairaus abstraktumo įrodymų nagrinėjimu, tiek mokinio įrodymo supratimo formavimuisi būdinga įrodymo lygių tipologija (Balacheff, 1988). Remiantis tyrėjų atlikta mokslinės literatūros analize pasirinktas įrodymo konstravimo mokymosi būdas padėjo mokiniams suprasti, kaip matematikoje atsiranda teiginių pagrindimas. Tyrinėdami teiginių surikiavimą, išbandydami skirtingus teiginių vaizdavimo būdus, ieškodami dėsningumo, formuluodami hipotezę, mokiniai kūrė įrodymus, o kartu ir įrodymo paskirties, formos bei galimybių supratimą.

Buvo nustatyta, jog turintys pakankamai teiginio įrodymo sudarymui reikalingų matematinių žinių 5 klasės mokiniai iš jiems žinomų matematinių teiginių konstruoja

išimtinai neformalius įrodymus. Jie praktiškai tikrina teiginį nagrinėdami pavyzdžius arba kuria įrodymą bendriniam pavyzdžiui. Kiti tyrėjai (Bieda et al., 2006; Flores, 2006; Dilberoğlu, 2023; Miyazaki et al., 2024) gavo panašius rezultatus analizuodami vien tik gabių arba vyresnių klasių mokinių įrodymo pasirinkimus. Tai gali reikšti, kad šiame tyrime taikytas detalus ir vaizdus supažindinimas su įrodymo savybėmis turėjo teigiamą poveikį matematinio įrodymo sąvokos supratimui.

Būdingas pragmatinio įrodymo pasirinkimas rodo, kad mokiniams svarbiau už pagrindimą yra pasiaiškinimas, kodėl teiginys yra teisingas. Remiantis pavyzdžiais teiginio esmė yra lengviau pastebima. Teiginių tikrinimas pavyzdžiais yra iš poreikio vaizdžiai interpretuoti teiginį kylanti mokymosi konstruoti matematinį įrodymą proceso dalis. Taip pat buvo nustatyta, kad įrodymą mokiniai daugiau sieja su matematinių veiksmų atlikimu, nei matematinių teiginių teisingumo ar klaidingumo pagrindimu. Tai gali būti susiję su mokinių turima gausia matematinių veiksmų atlikimo patirtimi ir pradinėms klasėms būdingu tik būtiniausių bendresnių matematinių teiginių nagrinėjimu.

Įrodant yra svarbūs sąryšiai tarp matematinių teiginių. Viena vertus, įrodymo mokymasis turi kelis edukacinius tikslus: sustiprinti matematinio turinio supratimą; išmokyti samprotauti, supažindinant su matematinio samprotavimo specifika. Kita vertus, mokantis įrodyti pastebėti dar ir kiti nei įrodomas teiginys faktai, sąryšiai su matematinėmis savybėmis pedagoginiu požiūriu yra netgi vertingiau, nei vien tik įrodymo atradimas (Hanna et al., 2023). Ugdomosios veiklos pradžioje teisingai sukonstravę duotų matematinių teiginių seką mokiniai vėliau kurdami savo įrodymą teisingai jungė ir pačių suformuluotus matematinius teiginius. Nors argumentavimo formų yra daug, dažniausiai konstruojant įrodymą yra taikomos logikos taisyklės, kurios kai kuriems mokiniams nors ir nežinomos, gali būti intuityviai suprantamos (Epp, 2003). Atliktas tyrimas parodė, kad 5 klasėje beveik pusei mokinių tos taisyklės nėra aiškos, todėl panašu, jog mokantis įrodyti su mokiniais reikėtų detaliau aptarti ir teiginių loginio surikiavimo problematiką. Tai yra svarbu, nes gali būti naudinga ne tik matematikos, bet ir kitų mokomųjų dalykų mokymuisi (Morou & Kalospyros, 2011).

Taip pat nustatyta, jog įrodymo konstravimo sėkmė skirtingų klasių mokiniams skyrėsi. Nors abi tyrime dalyvavusios klasės panašios įrodymų konstravimo procese naudojamų teiginių ir įrodymo vaizdavimu, argumentavimo formų naudojimas vienoje iš klasių buvo daug pranašesnis. Šis pastebėjimas tiesiogiai siejasi su mokinių matematinių teiginių sąryšių suvokimo skirtumais. Kitų tyrėjų (Reid & Vargas, 2017) nuomone, pagrindinis įrodymo supratimo/ nesupratimo priežastinis veiksnys slypi nevienodame šių klasių matematikos dalyko mokyme pradinėse klasėse.

Aukščiau pateikti pastebėjimai ir išvados buvo gautos remiantis dviejų panašiais matematinio ugdymo pasiekimais pasižyminčių klasių mokinių mokymosi konstruoti teiginių sekas analize. Abiejose klasėse taikant tas pačias ugdomąsias veiklas, buvo nustatytas skirtingas mokinių pasirengimas mokytis įrodyti bei tų klasių mokymąsi įrodyti vienijančios proceso bendrybės. Tyrime taikyto mokymosi įrodyti būdo poveikis silpnėsnėms ir itin stiprioms klasėms ir toliau yra nežinomas.

Apibendrinant šiame straipsnyje pristatytas teorines ir empirines įžvalgas galima teigti, kad, mokydami įrodyti pagrindinėje mokykloje, mokytojai gali susidurti su daugybe iššūkių.

Įrodymo sąvoka yra sudėtinga. Aktualu tikslingai atsirinkti, detalizuoti, išgryninti mokiniams žinotinus įrodymo bruožus. Stengtis paprasčiau kalbėti apie sudėtingus dalykus. Supaprastinant aiškinimą neprarasti bendrų idėjų, aiškiai suprantant, nuo ko pradama ir kur link einama. Reikia iš anksto apgalvoti, kaip nuo paprastesnio aiškinimo pereiti prie sudėtingesnės įrodymo problematikos.

Mokiniai *linkę remtis iš ankščiau turimu intuicijų įrodymo supratimu*. Todėl naudinga supažindinti su skirtingais įrodymo vaizdavimo būdais. Pradedant mokytis įrodyti, yra prasmingas daugiau ar mažiau apibendrintas įrodomo teiginio empirinis patikrinimas. Mokytojas turėtų padėti pamatyti sąsajas su ankstesne patirtimi ir tik tuomet parodyti naują formalesnį įrodymo būdą (Hanna et al., 2023; Er & Artut, 2022).

Mokiniam gali trūkti žinių apie teiginių įrodymui aktualias matematines sąvokas ir sąryšius. Prieš pradedant įrodyti, naudinga jas pasikartoti, įtvirtinti. Nepakanka suprasti įrodymo struktūrą. Šalia to būtinos specifinės žinios apie pačius matematinius objektus ir sąsajas (Miyazaki et al., 2024). Mokiniai neteikia svarbos matematinėms apibrėžtims, linkę įsiminti taisykles ir savybes labiau nei jas išvesti, remiasi autoritetais, ir įsitikinę, kad lengviau pasiremti akivaizdumu, nei įrodyti (Sevgi & Orman, 2022).

Dalis mokinių *nesupranta matematinių teiginių tikslingo surikiavimo prasmės*. Ją paaiškinti galima iliustruojant nesudėtingais pavyzdžiais. Mokiniai neturi ir *abstrakčių teiginių sekos vaizdavimo patirties*. Būtina nuosekliai aiškintis, kodėl teiginiai yra tokie ir kaip vieną įrodymo sakinį susieti su kitais. Mokant įrodyti, būtina mokinius supažindinti su logikos taisyklėmis, kaip vienas pagrindimo sakinytis yra susijęs su kitais. Gebantys įrodyti mokiniai abejoja turimos informacijos išankstiniu teisingumu ir todėl kelia klausimus. Vietoje informacijos įsiminimo, jie svarsto, kaip informacija atsirado ir tik tuomet sprendžia, ar ją galima remtis samprotaujant apie konkrečią problemą. Taip stiprėja supratimas, kad matematika yra besiremiantis logikos taisyklėmis mokslas, ne atsitiktinė taisyklių ir procedūrų dėlionė (Sevgi & Orman, 2022).

Mokinių kuriamiems įrodymams *būdingas su užduoties formuluote susijęs kintantis lygis*. Įrodymo užduotys mokiniams gali būti tikslingai koreguojamos siekiant gauti abstraktesnius mokinių sukurtus įrodymus. Kiti tyrimai (Miyazaki et al., 2024) rodo, jog mokydamiesi įrodyti, mokiniai renkasi pasikliauti empiriniais duomenimis, nežino nuo ko pradėti arba nepritaiko turimų žinių. Jiems yra sunku įvertinti matomų įrodymų teisingumą, užrašyti savo įrodymą ar tiesiog sukonstruoti empirinį įrodymą su skaičiais.

Matematinio įrodymo sąvoka yra neapibrėžta ir ginčytina. Todėl nėra aišku, apie ką galvojama sakant, jog mokiniai turi išmokyti konstruoti savo įrodymus (Hanna et al., 2023). Lietuviškuose matematikos vadovėliuose dažniausiai randami konkrečius pavyzdžius demonstruojantys geometriniai įrodymai ir vien tik suskaičiavimu besiremiantys įrodymai neatskleidžia matematinio įrodymo esmės. Viena iš svarbiausių sąlygų veiksmingai įrodymo mokymosi plėtrai Lietuvos bendrojo ugdymo mokyklose yra įrodymo mokymosi sąvokos operacionalizavimas išskiriant ir detalizuojant įrodymo mokymosi etapus.

Autorių indėlis

Kristina Šiaulytė: konceptualizavimas, metodologija, tyrimas, duomenų rinkimas ir analizė, rašymas – originalus tekstas ir peržiūra.

Vaiva Grabauskienė: konceptualizavimas, metodologija, duomenų analizė, rašymas – originalus tekstas, rašymas – peržiūra ir redagavimas, vaizdavimas.

Literatūra

- Ahmadpour, F., Reid, D., & Reza Fadaee, M. (2019). Students' ways of understanding a proof. *Mathematical Thinking and Learning*, 21(2), 85–104. <https://doi.org/10.1080/10986065.2019.1570833>
- Alibert, D. (1988). Towards new customs in the classroom. *For the Learning of Mathematics*, 8(2), 31–43.
- Aristidou, M. (2020). Is mathematical logic really necessary in teaching mathematical proofs? *Athens Journal of Education*, 7(1), 99–121. <https://doi.org/10.30958/aje.7-1-5>
- Balacheff, N. (1988). A study of students' proving processes at the junior high school level. In *Second UCSMP International Conference on Mathematics Education* (pp. 1–17). Chicago: United States.
- Bieda, K., Holden, C., & Knuth, E. (2006). Does proof prove? Students' emerging beliefs about generality and proof in middle school. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 395–402). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.
- Bleiler-Baxter, S. K., Pair, J. D. (2017). Engaging students in roles of proof. *The Journal of Mathematical Behavior*, 47, 16–34. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.05.005>
- CadwalladerOlsker, T. (2011). What do we mean by mathematical proof? *Journal of Humanistic Mathematics*, 1(1), 33–60. <https://doi.org/10.5642/jhummath.201101.04>
- Carreira, S., Amado, N., Jacinto, H. (2020). Venues for analytical reasoning problems: How children produce deductive reasoning. *Education Sciences*, 10(6), Article 169. <https://doi.org/10.3390/educsci10060169>
- Creswell, J. W. (2012). *Educational research: Planning, conducting, and evaluating quantitative* (Vol. 7). Prentice Hall, Upper Saddle River: NJ.
- de Villiers, M. (1999). *Rethinking proof with the Geometer's Sketchpad*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.
- Dilberoglu, M. (2023). *Exploring the underlying mechanisms of a sixth grade student's first steps towards the deductive proof scheme* [Doctoral dissertation, Middle East Technical University, Turkey].
- Epp, S. S. (2003). The role of logic in teaching proof. *The American Mathematical Monthly*, 110(10), 886–899. <https://doi.org/10.1080/00029890.2003.11920029>
- Er Z., Dinç Artut, P. (2022). Investigation of gifted 5th grade students' proof skills. *International Journal of Research in Education and Science*, 8(2), 274–285. <https://doi.org/10.46328/ijres.2864>
- Flores, A. (2006). How do students know what they learn in middle school mathematics is true? *School Science and Mathematics*, 106(3), 124–132. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2006.tb18169.x>
- Freudenthal, H. (2012). *Mathematics as an educational task*. Springer Science & Business Media.
- Györy, Á., Kónya, E. (2019). Proving skills in geometry of secondary grammar school leavers specialized in mathematics. In *Annales Mathematicae et Informaticae* (Vol. 50, pp. 217–236). Eszterházy Károly Egyetem Líceum Kiadó. <https://doi.org/10.33039/ami.2019.11.003>
- Haavold, P., Roksvold, J., Sriraman, B. (2024). Pre-service teachers' knowledge of and beliefs about direct and indirect proofs. *Investigations in Mathematics Learning*, 16(4), 336–355. <https://doi.org/10.1080/19477503.2024.2363710>
- Hanna, G. (1991). Mathematical proof. In *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 54–61). Springer Netherlands.
- Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics*, 15(3), 42–49. <https://www.jstor.org/stable/40248188>

- Hanna, G., De Villiers, M. (Eds.). (2012). *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study* (Vol. 15). Springer Netherlands. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6>
- Hanna, G., Larvor, B., Yan, X. (2023). Human-machine collaboration in the teaching of proof. *Journal of Humanistic Mathematics*, 13(1), 99–117. <https://doi.org/10.5642/jhummath.AZEV3747>
- Harel, G., Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, pp. 805–842). Emerald Publishing Limited.
- Healy, L., Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396–428. <https://doi.org/10.2307/749651>
- Healy, L., Jahn, A. P., & Frant, J. B. (2009). Developing cultures of proof practices amongst Brazilian mathematics teachers. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (pp. 196–201). The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University, Taipei: Taiwan.
- Hersh, R. (1997). *What is mathematics, really?* Oxford: Oxford University Press.
- Hine, G. (2019). Proof by contradiction: Teaching and learning considerations in the secondary mathematics classroom. *Australian Mathematics Education Journal*, 1(3), 28–32.
- Housman, D., Porter, M. (2003). Proof schemes and learning strategies of above-average mathematics students. *Educational Studies in Mathematics*, 53(2), 139–158. <https://doi.org/10.1023/A:1025541416693>
- Joseph, G. G. (2011). *The crest of the peacock: Non-European roots of mathematics*. Princeton University Press.
- Knuth, E. J. (2002). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5, 61–88. <https://doi.org/10.1023/A:1013838713648>
- Ko, Y.-Y. (2010). Mathematics teachers' conceptions of proof: Implications for educational research. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 8(6), 1109–1129. <https://doi.org/10.1007/s10763-010-9235-2>
- Kohlbacher, F. (2006). The Use of Qualitative Content Analysis in Case Study Research. *Forum Qualitative Sozialforschung Forum: Qualitative Social Research*, 7(1), Article 21. <https://doi.org/10.17169/fqs-7.1.75>
- Leddy, J. F. J. (2001). *Justifying and proving in secondary school mathematics* (Publication No. 0-612-58600-6) [Doctoral dissertation, Ontario Institute for Studies in Education of the University of Toronto].
- Lietuvos Respublikos švietimo, mokslo ir sporto ministerija (2022). *Matematikos bendroji programa*. <https://emokykla.lt/bendrosios-programos/visos-bendrosios-programos/5>
- Lin, F. L. (2005). Modeling students' learning on mathematical proof and refutation. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3–18). University of Melbourne. <https://ftp.gwdg.de/pub/misc/EMIS/proceedings/PME29/PME29Plenaries/PME29LinPlenary.pdf>
- Ma, L. (2020). *Knowing and teaching elementary mathematics*. Routledge.
- Maher, C. A., & Martino, A. M. (1996). The development of the idea of mathematical proof: A 5-year case study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 194–214. <https://doi.org/10.5951/jres-matheduc.27.2.0194>
- Miyazaki, M., Fujita, T., Iwata, K., & Jones, K. (2024). Level-spanning proof-production strategies. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 55(7), 1597–1618. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2075288>
- Miyazaki, M., Fujita, T., & Jones, K. (2017). Students' understanding of the structure of deductive proof. *Educational Studies in Mathematics*, 94(2), 223–239. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9720-9>
- Mockaitytė-Rastienienė, O. (2022). *Pradinių klasių mokinių matematinio samprotavimo mokymosi sistema* [Daktaro disertacija, Vytauto Didžiojo universitetas].
- Morou, A. P., Kalospyros, N. A. (2011). The role of logic in teaching, learning and analyzing proof. In *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CER-*

- ME 7) (pp. 215–224). Poland: Rzeszów University. Retrieved from http://lettredelapreuve.org/pdf/CERME7/CERME7_WG1_Morou%26Kalospyros.pdf
- Nardi, E., Knuth, E. (2017). Changing classroom culture, curricula, and instruction for proof and proving: how amenable to scaling up, practicable for curricular integration, and capable of producing long-lasting effects are current interventions?. *Educational Studies in Mathematics*, 96, 267–274. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9785-0>
- Reid, D., Vargas, E. V. (2017, February 1). *Proof-based teaching as a basis for understanding why*. CERME 10. <https://hal.science/hal-01865651>
- Rocha, H. (2019). Mathematical proof: From mathematics to school mathematics. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 377(2140), Article 20180045. <https://doi.org/10.1098/rsta.2018.0045>
- Rota, G. -C. (1997). The phenomenology of mathematical proof. In F. Palombi (Ed.), *Indiscrete Thoughts* (pp. 134–150). Birkhäuser, Boston: MA. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4781-0_11
- Sevgi, S., Orman, F. (2022). Eighth grade students' views about giving proof and their proof abilities in the geometry and measurement. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(2), 467–490. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1782493>
- Steele, M. D., Rogers, K. C. (2012). Relationships between mathematical knowledge for teaching and teaching practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15, 159–180. <https://doi.org/10.1007/s10857-012-9204-5>
- Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289–321. <https://www.jstor.org/stable/30034869>
- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. (2017). Research-based interventions in the area of proof. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 119–127. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9782-3>
- Tall, D. (2002). Differing modes of proof and belief in mathematics. In F. -L. Lin (Ed.), *International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand* (pp. 91–107). National Taiwan Normal University, Taipei: Taiwan.
- Thurston, W. P. (1995). On proof and progress in mathematics. *For the learning of mathematics*, 15(1), 29–37. <https://flm-journal.org/Articles/1CC43CB68478268F48F47F5E444A.pdf>
- Varghese, T. (2011). Considerations concerning Balacheff's 1988 taxonomy of mathematical proofs. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 7(3), 181–192. <https://doi.org/10.12973/ejmste/75192>
- Varghese, T. (2017). Proof, proving and mathematics curriculum. *Transformations*, 3(1), Article 3. <https://nsuworks.nova.edu/transformations/vol3/iss1/3>
- Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 101–119. <https://doi.org/10.1023/A:1015535614355>
- Weber, K., Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational Studies in Mathematics*, 56, 209–234. <https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000040410.57253.a1>