

# Vienos klasės diferencialinių lygčių sistemos sprendinių stabilumas

Petras GOLOKVOŠČIUS (VU)

Nagrinėjame  $n$  lygčių sistemą, užrašytą vektorine lygtimi

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \Lambda \vec{x} + \vec{g}(t, \vec{x}^T); \quad (1)$$

čia  $\vec{x} = colon(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – nežinomas vektorius,  $\vec{x}^T$  – transponuotas vektorius,  $\Lambda$  – Žordano kanoninė pastovi matrica, netiesinis narys

$$\vec{g}(t, \vec{x}^T) = colon(g_1(t, \vec{x}^T), \dots, g_n(t, \vec{x}^T))$$

tenkina nelygybę

$$\|\vec{g}(t, \vec{x}^T)\| \leq \varphi(t) \|\vec{x}(t)\|, \quad t \geq t_0 \geq 0, \quad (2)$$

o skaliarinės funkcijos  $\varphi(t)$  integralas intervalu  $[t_0, +\infty)$  yra teigiamas dydis, t.y.,

$$\int_{t_0}^{+\infty} \varphi(t) dt = K < +\infty. \quad (3)$$

Taškas  $\vec{x} \equiv \vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$  yra (1) lygčių sistemos pusiausvyros (ramybės) taškas.

Tarsime, (1) lygčių sistemos bet kurio Koši uždavinio sprendinio egzistavimo ir vienaties sritis yra

$$D = \{t \geq t_0 \geq 0, \|\vec{x}\| \leq h\},$$

o vektorių  $\vec{g}(t, \vec{x}^T)$  ir  $\vec{x}$  normą apibrėžiame šitaip:

$$\|\vec{g}(t, \vec{x}^T)\| = \sum_{\nu=1}^n |g_{\nu}(t, \vec{x}^T)|, \quad \|\vec{x}\| = \sum_{\nu=1}^n |x_{\nu}|.$$

Tiesioginiu arba pirmuoju Liapunovo metodu įrodome šias dvi teoremas.

**1 teorema.** Tegų (1) lygčių sistemą atitinkančios linearizuotos sistemos

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \Lambda \vec{y} \quad (4)$$

visi sprendiniai, kai  $t \rightarrow +\infty$ , yra stabilūs pagal Liapunovą. Tada ir (1) lygčių sistemos trivialusis sprendinys  $\vec{x} \equiv \vec{0}$ , kai  $t \rightarrow +\infty$ , yra stabilus pagal Liapunovą.

Irodymas. Žinome ([1], p.86), kad (4) lygčių sistemos, kurios koeficientų matrica  $\Lambda$  pastovi, taške  $t = t_0$  normuota fundamentalioji matrica yra

$$Y(t) = e^{\Lambda(t-t_0)}, \quad Y(t_0) = E. \quad (5)$$

Sprendami (1) lygčių sistemą Lagranžo metodu, gauname

$$\vec{x}(t) = e^{\Lambda(t-t_0)} \vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\Lambda(t-\tau)} \vec{g}(\tau, \vec{x}^T(\tau)) d\tau. \quad (6)$$

Pagal 1 teoremos sąlygą (4) lygčių sistemos visi sprendiniai, kai  $t \rightarrow +\infty$ , yra stabilūs. Todėl jos (5) fundamentaliosios matricos norma yra aprėžta ([1], p.113), t.y.,

$$\|e^{\Lambda(t-t_0)}\| \leq k < +\infty, \quad \|e^{\Lambda(t-\tau)}\| \leq k < +\infty, \quad t \geq t_0. \quad (7)$$

Be to, iš (6) integralinės lygties gauname

$$\|\vec{x}(t)\| \leq \|e^{\Lambda(t-t_0)}\| \|\vec{x}(t_0)\| + \int_{t_0}^t \|e^{\Lambda(t-\tau)}\| \|\vec{g}(t, \vec{x}^T(\tau))\| d\tau. \quad (8)$$

Iš čia, atsižvelgę į (2) ir (7) nelygybes, parašome

$$\|\vec{x}(t)\| \leq k \|\vec{x}(t_0)\| + k \int_{t_0}^t \varphi(\tau) \|\vec{x}(\tau)\| d\tau, \quad t \geq t_0. \quad (9)$$

Pastarajai nelygybei pritaikome Belmano ir Gronvalio lemą ([2], p.46). Tada

$$\|\vec{x}(t)\| \leq k \|\vec{x}(t_0)\| e^{k \int_{t_0}^{+\infty} \varphi(\tau) d\tau}, \quad t \geq t_0. \quad (10)$$

Kita vertus, remdamiesi (3) nelygybe, iš (10) įverčio gauname

$$\|\vec{x}(t)\| \leq k \|\vec{x}(t_0)\| e^{k \int_{t_0}^{+\infty} \varphi(t) dt} \leq \|\vec{x}(t_0)\| \cdot K_1 < +\infty;$$

čia pastovusis teigiamasis dydis

$$K_1 = k \exp(kK) < +\infty. \quad (11)$$

Reikalaujame, kad  $\forall \varepsilon > 0$  būtų tenkinama nelygybė

$$\|\vec{x}(t)\| \leq \|\vec{x}(t_0)\| K_1 < \varepsilon \Rightarrow \|\vec{x}(t)\| < \varepsilon, \quad t \geq t_0.$$

Tada, imdami

$$\|\vec{x}(t_0)\| < \frac{\varepsilon}{K_1} = \delta,$$

įsitikiname, kad tenkinamos stabilumo pagal Liapunovą sąlygos:

$$\text{kai } \|\vec{x}(t_0)\| < \delta, \text{ tai } \|\vec{x}(t)\| < \varepsilon, \quad t \geq t_0. \quad (12)$$

Tai įrodo (1) lygčių sistemos trivialaus sprendinio, kai  $t \rightarrow +\infty$ , stabilumą.

**2 teorema.** Tarkime, (4) linearizuotos sistemos visi sprendiniai, kai  $t \rightarrow +\infty$ , yra asimptotiškai stabilūs. Tada ir (1) lygčių sistemos trivialusis sprendinys  $\vec{x} \equiv \vec{0}$ , kai  $t \rightarrow +\infty$ , yra asimptotiškai stabilus.

*Įrodymas.* Pagal šios teoremos sąlygą (4) lygčių sistemos koeficientų matricos  $\Lambda$  charakteristinės lygties visų šaknų realiosios dalys yra neigiamos ([1], p.89). Pažymime

$$\alpha = \max_{\nu} \operatorname{Re} \lambda_{\nu}(\Lambda) < 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, n), \quad (13)$$

ir pasirenkame  $\varepsilon > 0$  tiek mažą, kad būtų teisinga nelygybė

$$\alpha + \varepsilon < 0.$$

Tada žinomas įvertis ([1], p.57)

$$\|e^{\Lambda(t-t_0)}\| \leq ce^{(\alpha+\varepsilon)(t-t_0)}, \quad t \geq t_0, \quad (14)$$

kuriame  $c = c(\varepsilon)$  – teigiama konstanta. Atsižvelgę į (2) ir (14) formules, iš (8) nelygybės gauname

$$\|\vec{x}(t)\| \leq ce^{(\alpha+\varepsilon)(t-t_0)} \|\vec{x}(t_0)\| + c \int_{t_0}^t e^{(\alpha+\varepsilon)(t-\tau)} \varphi(\tau) \|\vec{x}(\tau)\| d\tau,$$

arba

$$e^{-(\alpha+\varepsilon)t} \|\vec{x}(t)\| \leq ce^{-(\alpha+\varepsilon)t_0} \|\vec{x}(t_0)\| + c \int_{t_0}^t e^{-(\alpha+\varepsilon)\tau} \varphi(\tau) \|\vec{x}(\tau)\| d\tau.$$

Iš čia, remdamiesi Belmano ir Gronvalio lema, parašome nelygybę

$$e^{-(\alpha+\varepsilon)t} \|\vec{x}(t)\| \leq ce^{-(\alpha+\varepsilon)t_0} \|\vec{x}(t_0)\| e^{c \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau}, \quad t \geq t_0,$$

kurią padauginę iš  $e^{(\alpha+\varepsilon)t}$  ir atsižvelgę į (3) integralą ir į pastovių teigiamų dydžių  $\sigma$ ,  $K_1$  žymėjimus

$$\sigma = -(\alpha + \varepsilon) > 0, \quad K_1 = c_1 \exp(cK) > 0,$$

gauname

$$\|\vec{x}(t)\| \leq e^{-\sigma(t-t_0)} \|\vec{x}(t_0)\| K_1, \quad t \geq t_0. \quad (15)$$

Remdamiesi (15) įverčiu, reikalaujame, kad esant  $\forall \varepsilon > 0$  būtų

$$\|\vec{x}(t)\| \leq e^{-\sigma(t-t_0)} \|\vec{x}(t_0)\| K_1 < \varepsilon, \quad t \geq t_0.$$

Tada

$$\|\vec{x}(t_0)\| < \frac{\varepsilon}{K_1 e^{\sigma(t-t_0)}} \leq \frac{\varepsilon}{K_1} = \delta, \quad t \geq t_0.$$

Taigi, kai  $\|\vec{x}(t_0)\| < \delta$ , tai  $\|\vec{x}(t)\| < \varepsilon$ ,  $t \geq t_0$ .

Be to, iš (15) nelygybės, kurioje  $\sigma > 0$ , išplaukia  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\vec{x}(t)\| = 0$ . Todėl, kai  $t \rightarrow +\infty$ , (1) lygčių sistemos trivialusis sprendinys yra asimptotiškai stabilus.

**Pavyzdys.** Sakykime, (1) lygčių sistemoje

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \vec{g} = \begin{bmatrix} e^{-t} \sin x_2 \\ e^{-t} \sin x_1 \end{bmatrix}.$$

Kadangi  $|\sin x_\nu| \leq |x_\nu|$  ( $\nu = 1, 2$ ), tai

$$\|\vec{g}\| \leq e^{-t} (|x_1| + |x_2|) = e^{-t} \|\vec{x}\|.$$

Be to,  $\varphi(t) = e^{-t}$ ,  $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1 = K$ ,  $\|\vec{g}\| \leq \|\vec{x}\|$ ,  $t \geq 0$ .

Sakykime, pavyzdžiui,  $\lambda_1 = i$ ,  $\lambda_2 = -i$ . Tada pagal 1 teoremą trivialusis sprendinys yra stabilus, kai  $t \rightarrow +\infty$ .

Tarkime,  $\operatorname{Re} \lambda_\nu < 0$  ( $\nu = 1, 2$ ). Tada pagal 2 teoremą jis yra asimptotiškai stabilus, kai  $t \rightarrow +\infty$ .

## Literatūra

- [1] Б.П. Демидович, *Лекции по математической теории устойчивости*, Наука, Москва (1967).
- [2] Р. Беллман, *Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений*, ИИЛ, Москва (1954).

## The asymptotic stability for a system of nonlinear PDEs

P. Golokvosčius

The asymptotic stability of a system of nonlinear PDEs is proved.