Liet. matem. rink., T. 42, spec. nr., 587–590

Nešo pusiausvyrų klasė bimatriciniuose lošimuose

Aneta Gracjana BLAŽEVIČ, Daina SŪDŽIŪTĖ (VU)
el. paštas: daina.sudziute@maf.vu.lt

Nenulinės sumos vienetinio kvadrato lošimuose, nedaug tesiskiriančiuose nuo analogiškų nulinės sumos lošimų, atsiranda galimybė tam tikrų formų Nešo pusiausvyroms egzistuoti. Iš tikrųjų, tai aktyviosios Nešo pusiausvyros kvadratiniuose bimatriciniuose lošimuose, kurių matricų elementai yra vienetinio kvadrato branduolių reikšmės. Tuo paaiškinamas mūsų dėmesys aktyviųjų pusiausvyrų bimatraciniuose lošimuose tyrinėjimams [4] ir [5], kuriuos tęsiame ir šiame darbe.

Pagrindinės sąvokos ir žymėjimai:

Bimatricinis lošimas apibrėžiamas matrica

$$A, B = \begin{pmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) & \dots & (a_{1n}, b_{1n}) \\ (a_{21}, b_{21}) & (a_{22}, b_{22}) & \dots & (a_{2n}, b_{2n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_{n1}, b_{n1}) & (a_{n2}, b_{n2}) & \dots & (a_{nn}, b_{nn}) \end{pmatrix},$$

kurią sudaro atitinkamai I-jo ir II-jo lošėjų išlošių matricos $A = (a_{ij})_{(n\times n)}$, $B = (b_{ij})_{(n\times n)}$.

Grynosios strategijos: abu lošėjai turi po n grynųjų strategijų – I-sis lošėjas renkasi matricos eilutes, II-sis – stulpelius.

Mišriomis strategijomis vadiname tikimybinius skirstinius grynųjų strategijų aibėse. Abiejų lošėjų mišriųjų strategijų aibės Ω_1 ir Ω_2 yra vienodos; jas žymėsime Ω:

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega = \left\{ (z_1, z_2, \dots, z_n) \middle| z_i \geqslant 0,\ i = \overline{1,n};\ \sum_{i=1}^{n} z_i = 1 \right\}.$$

Mišriąją strategiją vadinsime *aktyvia*, kai visos jos komponentės yra teigiamos, t.y. kai visos grynosios strategijos yra naudojamos (aktyvios).

Situacija vadiname strategijų porą – po vieną kiekvienam lošėjui:

$$(X, Y) = ((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)), \quad \text{kai } X \in \Omega_1, \quad Y \in \Omega_2.$$

Raidėmis X, Y (be transponavimo ženklų) žymime tiek vektorius-eilutes, tiek ir vektorius-stulpelius. Katras variantas naudojamas – apsprendžia reikalavimas, kad matematinės operacijos ir teiginiai būtų apibrėžti. Tas pats taikoma ir toliau sutinkamiems vektoriams $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{0}, \mathbf{b}, \mathbf{p}$.

Lošėjų išlošiai apibrėžiami kaip XAY, XBY situacijų aibėje $\Omega_1 \times \Omega_2$.

Nešo pusiausvyra vadiname fiksuotą situaciją $(\overline{X}, \overline{Y})$, kuriai teisingos nelygybės:

$$X A \overline{Y} \leqslant \overline{X} A \overline{Y}, \quad \text{visiems } X \in \Omega_1, \tag{1}$$

$$\overline{X} B Y \leqslant \overline{X} B \overline{Y}, \quad \text{visiems } Y \in \Omega_2. \tag{2}$$

Nešo pusiausvyrą sudarančias strategijas $\overline{X}$ ir $\overline{Y}$ vadinsime *pusiausvyrinėmis strategijomis.*

Aktyviąja pusiausvyra vadinsime tokią Nešo pusiausvyrą $(\overline{X}, \overline{Y})$, kurioje $\overline{X} > \mathbf{0}$, $\overline{Y} > \mathbf{0}$. Ją sudarančias strategijas vadinsime *aktyviomis pusiausvyrinėmis* strategijomis.

Išlošius pusiausvyros situacijoje žymėsime

$$\overline{X} A \overline{Y} = v, \quad \overline{X} B \overline{Y} = w.$$

Analizės pagrindu imsime Nešo pusiausvyrų teorijoje dažnai naudojamą tvirtinimą, kurio įrodymas remiasi tik aktyviosios Nešo pusiausvyros apibrėžimu:

Lema. *Bimatriciniame lošime (A, B) situacija $(\overline{X}, \overline{Y})$, $\overline{X} > \mathbf{0}$, $\overline{Y} > \mathbf{0}$, yra Nešo pusiausvyra tada ir tik tada, kai yra teisingos lygybės:*

$$A \overline{Y} = \mathbf{v}, \tag{3}$$

$$\overline{X} B = \mathbf{w}. \tag{4}$$

Čia $\mathbf{v} = (v, v, \ldots, v)$, $\mathbf{w} = (w, w, \ldots, w)$ yra n-mačiai vektoriai, o jų komponentės – išlošiai pusiausvyros situacijoje.

Taip aktyviosios pusiausvyros paieškos suvedamos į dviejų nepriklausomų analogiškų sistemų

$$AY = \mathbf{v}, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = 1, \quad y_i > 0, \ i = \overline{1, n}, \tag{5}$$

$$XB = \mathbf{w}, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad x_i > 0, \ i = \overline{1, n}, \tag{6}$$

sprendimą.

Toliau nagrinėsime tik (5) sistemą. Ją pakeisime ekvivalenčia sistema, prie kiekvieno matricos A elemento pridėdami tokį skaičių k, kad naujosios matricos $A + K$ visi elementai būtų teigiami. Tuomet ir $\mathbf{v}$ stulpelio elementai padidėja skaičiumi k ir yra teigiami.

Taip, neprarasdami bendrumo, toliau galime apsiriboti tik tokių bimatricinių lošimų (A, B), kuriuose abiejų matricų elementai yra teigiami, nagrinėjimu.

Be to, (5) sistema yra ekvivalenti sistemai

$$AY = \mathbf{v}, \quad Y > \mathbf{0}, \tag{7}$$

nes kiekvieną (7) sistemos sprendinį atitinka jos normalizuotas sprendinys, kuris yra ir (5) sistemos sprendinys.

Sistemai (7) nagrinėti pasinaudosime tvirtinimu, gautu sekant klasikine Farkašo teorema:

Teorema. *Tarkime, kad duota teigiamų elementų matrica* $\mathbf{A}_{(m\times n)}$ *ir vektorius* $\mathbf{b} \in R^m$. *Yra teisingas vienas ir tik vienas iš tokių tvirtinimų:*

arba sistema

$$AY = \mathbf{b}, \quad Y > \mathbf{0}, \quad (Y \in R^n) \tag{8}$$

turi sprendinį,

arba sistema

$$\mathbf{p}A \geqslant 0, \quad \langle \mathbf{p}, \mathbf{b}\rangle \leqslant 0, \quad (\mathbf{p} \in R^m) \tag{9}$$

turi sprendinį, bent vieną iš $(m+1)$ *jos nelygybių tenkinantį su griežtu nelygybės ženklu.*

Įrodymas. Abi sistemos (8) ir (9) turėti po sprendinį Y^* ir $\mathbf{p}^*$ negali, nes tuomet būtų teisingos lygybės

$$\langle \mathbf{p}^*, \mathbf{b}\rangle = \langle \mathbf{p}^*, AY^*\rangle = \langle \mathbf{p}^*A, Y^*\rangle.$$

Ši lygybė yra prieštaringa, nes:

jei $\langle \mathbf{p}^*, \mathbf{b}\rangle < 0$, tai $0 > \langle \mathbf{p}^*, \mathbf{b}\rangle = \langle \mathbf{p}^*A, Y^*\rangle \geqslant 0$;

jei $\langle \mathbf{p}^*, \mathbf{b}\rangle = 0$, tai bent viena iš $\mathbf{p}^*A$ komponenčių yra teigiama, kitos neneigiamos, o $Y^* > \mathbf{0}$. Todėl $0 = \langle \mathbf{p}^*, \mathbf{b}\rangle = \langle \mathbf{p}^*A, Y^*\rangle > 0$.

Dabar tarkime, kad (7) sistema neturi sprendinių, t.y. $\mathbf{b} \neq Z$, kai $Z = \{\mathbf{z} \in R^m | \mathbf{z} = AY,\ Y > \mathbf{0}\}$. Aibė Z yra netuščia, iškila, reliatyviai atvira. Todėl egzistuoja nenulinis vektorius $\mathbf{p}^*$ toks, kad $\langle \mathbf{p}^*, \mathbf{z}\rangle > \langle \mathbf{p}^*, \mathbf{b}\rangle$ visiems $\mathbf{z} \in Z$, t.y.

$$\langle \mathbf{p}^*, \mathbf{z}\rangle = \langle \mathbf{p}^*, AY\rangle = \langle \mathbf{p}^*A, Y\rangle > \langle \mathbf{p}^*, \mathbf{b}\rangle \ \text{ visiems } Y > \mathbf{0}. \tag{10}$$

Įrodysime, kad $\mathbf{p}^*A \geqslant \mathbf{0}$.

Tarkime priešingai, kad l-toji vektoriaus $\mathbf{p}^*A$ komponentė yra neigiama: $[\mathbf{p}^*A]_l < 0$. Imkime aibę vektorių Y_t $(t > 0)$, kurių l-toji komponentė lygi t, o visos kitos lygios $1/t$. Vektorių Y_t visos komponentės yra teigiamos, tačiau $\lim\limits_{t\to\infty} \langle \mathbf{p}^*A, Y_t\rangle = -\infty$, o tai prieštarauja (10) nelygybei.

Dabar pastebėkime, kad kai $\mathbf{p}^*A = \mathbf{0}$, iš (10) turėsime $0 > \langle \mathbf{p}^*, \mathbf{b}\rangle$. Kai $\langle \mathbf{p}^*, \mathbf{b}\rangle = 0$, tai iš (10) išplaukia, kad $\langle \mathbf{p}^*A, Y\rangle > 0$ visiems $Y > \mathbf{0}$, todėl šiuo atveju $\mathbf{p}^*A \neq \mathbf{0}$.

Vektorius $\mathbf{p}^*$ tinka (9) sistemai. Teorema įrodyta.

1 išvada. *Sistema* (7) *turi sprendinių tada ir tik tada, kai sistema*

$$\mathbf{p}A \geqslant \mathbf{0}, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i \leqslant 0 \tag{11}$$

neturi tokio sprendinio **p**, *kuris bent vieną iš visų* $(n+1)$ *nelygybių tenkintų su griežtu nelygybės ženklu.*

Įrodymas. Pritaikę teoremą (7) sistemai ir gautą alternatyviąją (9) sistemą

$$\mathbf{p}A \geqslant \mathbf{0}, \quad \langle \mathbf{p}, \mathbf{v} \rangle = v \sum_{i=1}^{n} p_i \leqslant 0$$

suprastinę, pasinaudodami skaičiaus v teigiamumu, gausime (11).

Nagrinėdami analogiškai (4) sistemą, gausime tokį tvirtinimą:

2 išvada. *Sistema* (4) *(kai B yra teigiamų skaičių matrica) turi sprendinių tada ir tik tada, kai sistema*

$$B\mathbf{p} \geqslant \mathbf{0}, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i \leqslant 0 \tag{12}$$

neturi tokio sprendinio **p**, *kuris bent vieną iš visų* $(n+1)$ *nelygybių tenkintų su griežtu nelygybės ženklu.*

Tokiu būdu, aktyvių Nešo pusiausvyrų egzistavimo klausimą bimatriciniame lošime (A, B) su teigiamomis išlošių matricomis suvedėme į sistemų (11) ir (12) tam tikrų sprendinių egzistavimo klausimą.

Esant matricoms A, B neteigiamoms, nagrinėjamas ekvivalentus teigiamas bimatricinis lošimas $(A+K, B+K)$.

Savo ruožtu, (11) ir (12) sistemas galima pakeisti ekvivalenčiais tiesinio programavimo uždaviniais. Apie tai – kur nors kitoje vietoje.

Literatūra

[1] А.Г. Сухарев, А.В. Тимохов, В.В. Федоров, *Курс методов оптимизации*, Москва, 328 с. (1986).

[2] С. Карлин, *Математические методы в теории игр, программировании и экономике*, Москва, 838 с. (1964).

[3] Д. Суджюте, Необходимые и достаточные условия равновесия по Нэшу в играх на единичном квадрате, *Лит. Матем. Сб.*, 178–185 (1983).

[4] D. Sūdžiūtė, Nešo pusiausvyrų konvergavimas viename laiko momento parinkimo lošime, *Lietuvos Matematikų Draugijos XLI konferencijos Darbų Rinkinys*, Šiauliai (2000).

[5] D. Sūdžiūtė, Nešo pusiausvyros iškilųjų aibių kontekste, *Lietuvos Matematikų Draugijos XLII konferencijos Darbų Rinkinys*, Klaipėda (2001).

One class of Nash equilibria in bimatrix games

D. Sūdžiūtė

Active Nash equilibria existence in bimatrix game problem is reduced to the problem of nonexistence of special solutions of the systems (11) and (12).