Liet. matem. rink., T. 42, spec. nr., 202–206

Система уравнений Шредингера с неоднородной нелинейной частью

Гинтарас ПУРЮШКИС (VU)
e-mail: gintaras.puriuskis@maf.vu.lt

В настоящей работе рассмотрим систему нелинейных уравнений Шредингера

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = ia_k \Delta u_k + f_k(u, u^*), \quad t > 0, \quad k = 1, \dots, m, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u_k(0, x) = u_{k0}(x). \tag{2}$$

Здесь $x \in R^n$, a_k, $k = 1, \dots, m$, – отличные от нуля действительные постоянные, Δ – оператор Лапласа, f_k – гладкие действительные функции $2m$ переменных, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $$\mathrm{Re}\Big(\sum f_k u_k^*\Big) = 0, \tag{3}$$

2) существуют отличные от нуля действительные постоянные $\alpha_1, \dots,$ α_m такие, что

$$2\mathrm{Im}\Big(\sum \alpha_k f_k \nabla_{x,t} u_k^*\Big) = \nabla_{x,t}\phi(u, u^*), \tag{4}$$

здесь $\nabla_{x,t} = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n, \partial/\partial t)$, функция $\phi(u, u^*)$ такая, что

$$\alpha_k f_k = i\frac{\partial \phi}{\partial u_k^*}, \quad \alpha_k f_k^* = -i\frac{\partial \phi}{\partial u_k}, \quad k = 1, \dots, m, \tag{5}$$

3) функция $\phi(u, u^*)$ является суммой однородных функций степеней s_j, т.е., $\phi(u, u^*) = \sum \phi_j(u, u^*)$, для действительных $\lambda > 0$ выполнены равенства

$$\phi_j(\lambda u, \lambda u^*) = \lambda^{s_j}\phi_j(u, u^*). \tag{6}$$

Рассматривается вопрос о взрыве решения в нормах H_1 и L_∞, т.е., о существовании конечного числа T такого, что

$$\lim_{t \to T} \sum \|\nabla u_k\|_2 = \infty, \tag{7}$$

$$\lim_{t\to T}\sum\|u_k\|_\infty=\infty. \tag{8}$$

Результаты настоящей работы обобщает результаты статьи [1]. В статье [1] получены результаты для однородной функции ϕ, т.е., для $s_1=\ldots=s_l$.

Лемма 1. *Справедливы следующие тождества*

$$I_1(t)\equiv\int\limits_{R^n}\sum_{k=1}^m|u_k|^2\mathrm{d}x\equiv\int\limits_{R^n}|u|^2\mathrm{d}x=I_1(0),$$

$$I_2(t)\equiv\int\limits_{R^n}\Big(\sum_{k=1}^m\alpha_k a_k|\nabla u_k|^2-\phi(u,u^*)\Big)\mathrm{d}x=I_2(0).$$

Обозначим

$$\Phi(t)=\int\limits_{R^n}\sum_{k=1}^m|x||u_k|^2\mathrm{d}x,\qquad M_k=2ia_k\int\limits_{R^n}\sum_{j=1}^n x_j\Big(u_k\frac{\partial u_k^*}{\partial x_j}-u_k^*\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\Big)\mathrm{d}x.$$

Лемма 2. *Если* $a_k/\alpha_k=A$, *то*

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t)=\sum M_k.$$

Леммы 1 и 2 доказываются аналогично, как в статье [1], поскольку однородность функции ϕ не используется.

Лемма 3. *Если* $a_k/\alpha_k=A$, *то*

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(t)\ &=\ 2An(s_l-2)I_2+2(4-n(s_l-2))\int\limits_{R^n}\sum_{k=1}^m a_k^2|\nabla u_k|^2\mathrm{d}x\\&\quad+2nA\int\limits_{R^n}\sum_{k=1}^{l-1}(s_l-s_k)\phi_k\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Доказательство. Вычислим

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}M_k\ &=\ 8a_k^2\int\limits_{R^n}|\nabla u_k|^2\mathrm{d}x-8A\mathrm{Im}\int\limits_{R^n}\sum_{j=1}^n x_j\alpha_k f_k\frac{\partial u_k^*}{\partial x_j}\mathrm{d}x\\&\quad-4nA\mathrm{Im}\int\limits_{R^n}\alpha_k f_k u_k^*\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Последнее слагаемое в правой части равно

$$\begin{aligned}
-4nA\mathrm{Im}\int\limits_{R^n}\alpha_k f_k u_k^*\mathrm{d}x &= -2nA\mathrm{Im}\int\limits_{R^n}\alpha_k f_k u_k^*\mathrm{d}x + 2nA\mathrm{Im}\int\limits_{R^n}\alpha_k f_k^* u_k\mathrm{d}x\\
&= -2nA\mathrm{Im}\int\limits_{R^n} i\frac{\partial\phi}{\partial u_k^*}u_k^*\mathrm{d}x - 2nA\mathrm{Im}\int\limits_{R^n} i\frac{\partial\phi}{\partial u_k}u_k\mathrm{d}x\\
&= -2nA\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{l}\int\limits_{R^n} i\Big(\frac{\partial\phi_j}{\partial u_k^*}u_k^* + \frac{\partial\phi_j}{\partial u_k}u_k\Big)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(t) = \sum\frac{\partial M_k}{\partial t}\\
&= 8A\int\limits_{R^n}\sum_{k=1}^{m}a_k\alpha_k|\nabla u_k|^2\mathrm{d}x - 4A\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{R^n}x_j\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\mathrm{d}x - 2nA\sum_{j=1}^{l}\int\limits_{R^n}s_j\phi_j\mathrm{d}x\\
&= 8A\int\limits_{R^n}\sum_{k=1}^{m}a_k\alpha_k|\nabla u_k|^2\mathrm{d}x + 4An\int\limits_{R^n}\phi\mathrm{d}x - 2nA\sum_{j=1}^{l}\int\limits_{R^n}s_j\phi_j\mathrm{d}x\\
&= 2An(s_l-2)I_2 + 2(4-n(s_l-2))\int\limits_{R^n}\sum_{k=1}^{m}a_k^2|\nabla u_k|^2\mathrm{d}x\\
&\quad +2An(s_l-2)\int\limits_{R^n}\phi\mathrm{d}x + 4An\int\limits_{R^n}\phi\mathrm{d}x - 2nA\sum_{j=1}^{l}\int\limits_{R^n}s_j\phi_j\mathrm{d}x\\
&= 2An(s_l-2)I_2 + 2(4-n(s_l-2))\int\limits_{R^n}\sum_{k=1}^{m}a_k^2|\nabla u_k|^2\mathrm{d}x\\
&\quad +2nA\int\limits_{R^n}s_l\phi\mathrm{d}x - 2nA\sum_{j=1}^{l}\int\limits_{R^n}s_j\phi_j\mathrm{d}x\\
&= 2An(s_l-2)I_2 + 2(4-n(s_l-2))\int\limits_{R^n}\sum_{k=1}^{m}a_k^2|\nabla u_k|^2\mathrm{d}x\\
&\quad +2nA\int\limits_{R^n}\sum_{k=1}^{l-1}(s_l-s_k)\phi_k\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теорема. *Пусть и решение задачи* (1), (2), *выполнены условия* (3)–(6) *и*

$$s_l \geqslant 2+\frac{4}{n},\quad AI_2(0)<0,\quad A(s_l-s_j)\int\limits_{R^n}\phi_j\mathrm{d}x\leqslant 0,\quad j=1,\dots,l-1.$$

Тогда существует конечное положительное число T такое, что выполнены равенства (7), (8).

Доказательство. Из леммы 3 и условий теоремы следует, что

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(t) \leqslant 2n(s_l - 2)AI_2(0)$$

или

$$\Phi(t) \leqslant An(s_l - 1)I_2(0)t^2 + \Phi'(0)t + \Phi(0).$$

Правая часть последнего неравенства представляет квадратичный трехчлен с отрицательным коэффициентом при t^2, поэтому существует конечное число T такое, что

$$\lim_{t\to T}\sum\int |x|^2|u_k|^2\mathrm{d}x = 0.$$

Далее доказательство аналогично, как в статье [1]. Теорема доказана.

Пример. Система

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial t} &= -i\Delta u_1 - i\frac{p_1}{2}|u_1|^{p_1-2}|u_2|^{q_1}u_1 - i\frac{p_2}{2}|u_1|^{p_2-2}|u_2|^{q_2}u_1,\\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= -i\Delta u_2 - i\frac{q_1}{2}|u_1|^{p_1}|u_2|^{q_1-2}u_2 - i\frac{q_2}{2}|u_1|^{p_2}|u_2|^{q_2-2}u_2\end{aligned}$$

удовлетворяет условиям теоремы 1, если $p_1 + q_1 \geqslant p_2 + q_2 \geqslant 2 + 4/n$, $I_2(0) < 0$, поскольку

$$(s_2 - s_1)\int_{R^n} |u_1|^{p_1}|u_2|^{q_1} \leqslant 0.$$

Здесь $s_j = p_j + q_j$, $\phi_j = |u_1|^{p_j}|u_2|^{q_j}$, $a_j = \alpha_j = -1$, $A = 1$, $j = 1, 2$, $l = 2$.

Более того, для системы в данном примере можно доказать более сильное предложение: существует конечное положительное число T такое, что выполнены равенства

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to T}\|\nabla u_k\|_2 = \infty,\\ &\lim_{t\to T}\|u_k\|_\infty = \infty, \quad k = 1,\ 2.\end{aligned}$$

Для этого вместо леммы 1 надо доказать

$$\int_{R^n} |u_k(t,x)|^2\mathrm{d}x = \int_{R^n} |u_k(0,x)|^2\mathrm{d}x, \quad k = 1, 2,$$

откуда следует

$$\lim_{t\to T}\int\limits_{R^n}|x|^2|u_k|^2\mathrm{d}x=0,\qquad k=1,2.$$

Литература

[1] А. Домаркас, О разрушении решений системы нелинейных уравнений Шредингера, *Liet. Matem. Rink.*, 35(2), 181–189 (1995).

Šredingerio lygčių sistema su netiesine nehomogenine dalimi

G. Puriuškis

Nagrinėjama Šredingerio netiesinių lygčių sistema

$$\frac{\partial u_k}{\partial t}=ia_k\Delta u_k+f_k(u,u^*),\quad t>0,\quad k=1,\dots,m,\quad u_k(0,x)=u_{k0}(x),$$

čia f_k yra skirtingo laipsnio homogeninių funkcijų suma. Nustatytos sąlygos, kuriomis sprendinys sprogsta.