

Kompiuterinė algebra ir jos taikymas

Aleksas DOMARKAS (VU, KA), Rimantas-Jonas RAKAUSKAS (KA),
Albertas PINCEVIČIUS (KA)

*el. paštas: aleksas@ieva.mif.vu.lt, rimantas.rakauskas@tmk.lka.lt,
albertas.pincevicius@tmk.lka.lt*

1. Kas yra simboliniai skaičiavimai?

Kompiuterinės algebros sistemos yra nauja ir sparčiai besivystanti kompiuterinės matematikos kryptis. Šios sistemos dar yra vadinamos simbolinių arba analizinių skaičiavimų sistemomis. Pagrindinis šių sistemų privalumas yra tai, kad skaičiavimai yra vykdomi analiziniu (simboliniu) pavidalu. Tik prireikus tam tikru momentu galima pereiti prie apytikslų aritmetinių skaičiavimų su praktiškai bet koku tikslumu ir bet kokio dydžio skaičiais. Skaitiniai matematinių uždavinių sprendimo metodai turi du rimtus trūkumus: gaunami tik atskiri sprendiniai ir rezultatai turi baigtinę paklaidą. Simboliniai sprendimo metodai šių trūkumų neturi, nes rezultatai išreiškiami tiksliai. Tačiau aišku, kad tikslias formules ne visuomet galima išvesti.

Daugelis matematinių rezultatų yra gaunami atliekant simbolinius pertvarkymus ir išvedant formules. Prieš keletą dešimtmečių tokius veiksmus galėjo atlikti tik žmogus. Dabar kompiuterinės algebros sistemos gali vykdyti aritmetinius veiksmus, pertvarkyti aritmetinius ir algebrinius reiškinius, rasti baigtines ir begalines sumas bei sandaugas, apskaičiuoti išvestines ir integralus, spręsti algebrines ir diferencialines lygtis, atlikti veiksmus su vektoriais ir matricomis, pavaizduoti skaičiavimų rezultatus grafiškai ir pan. Sudėtingesniems ir nestandartiniais uždaviniams spręsti šiuolaikinės kompiuterinės algebros sistemos turi geras programavimo galimybes.

Kiekvieno, kas susiduria su matematiniais skaičiavimais, darbo vietoje turėtų būti kompiuteris su keliomis kompiuterinės matematikos sistemomis. Kompiuteriai padarė perversmą informacinių technologinių srityje. Ne mažesnis perversmas vyksta ir matematikoje, jos taikymų bei mokymosi srityse. Todėl reiktų plačiau ir drąsiau panaudoti kompiuterines matematikos sistemas visuose matematikos mokymo etapuose ir jos naudojimo srityse.

Toliau yra pateikiami simbolių skaičiavimų pavyzdžiai.

$$\frac{2}{6} \rightarrow \frac{1}{3}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\sin(x) \rightarrow x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + O(x^8)$$

$$y = x^{3x+1} \rightarrow y' = x^{3x+1} \left(3 \ln(x) + \frac{3x+1}{x} \right)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} \sin(x)}{x} dx \rightarrow \frac{\pi}{4}$$

$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0 \rightarrow y(x) = C_1 \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$$

$$\sum_{k=1}^n k^6 \rightarrow \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{42}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \rightarrow \frac{\pi^4}{90}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^4}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi \rightarrow \frac{8\pi^4 - 60\pi^2 x^2 + 60\pi x^3 - 15x^4}{720}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

2. Kompiuterinės algebros sistemų taikymas

Nors įvairių kompiuterinės algebros sistemų galimybės yra gana skirtingos, galima išvardinti eilę tipinių uždavinių, kurie yra sprendžiami.

Simboliniai ir skaitiniai skaičiavimai

- Tikslūs aritmetiniai skaičiavimai
- Reiškinių pertvarkymas ir suprastinimas
- Vienu reiškinių įstatymas į kitus
- Bendrųjų daugiklių ir daliklių radimas
- Reiškinių skleidimas eilutėmis
- Diferencijavimas ir integravimas
- Ribų ir sumų apskaičiavimas
- Integralinių transformacijų radimas
- Diferencialinių lygčių sprendimas
- Lygčių ir nelygybių tikslus sprendimas
- Tiesinės algebros uždavinių sprendimas
- Tiesinio ir netiesinio programavimo uždavinių sprendimas
- Skaitinis funkcijų reikšmių radimas bet koku tikslumu
- Skaitinis uždavinių sprendimas bet koku tikslumu

Grafinis skaičiavimų vaizdavimas

- Funkcijų grafikų brėžimas plokštumoje ir trimatėje erdvėje
- Neišreikštinių funkcijų grafikai
- Grafikai polinėje ir kitose koordinačių sistemose
- Kontūriniai, vektoriniai ir kiti specialūs grafikai
- Diferencialinių lygčių sprendinių grafikai

- Grafikų su animacija kūrimas
- Įvairių geometrinių objektų grafinis vaizdavimas
- Grafikų eksportas įvairiu formatu

Programavimas

- Įdiegta sava programavimo kalba
- Paprasta kalbos sintaksė
- Įdiegtas sintaksės tikrinimo mechanizmas
- Didelis matematinių objektų rinkinys
- Galimybė dirbti su duomenų failais
- Naujų komandų ir programų paketų kūrimo galimybė
- Programų derinimo priemonės
- Galimas interfeisas su kitomis programavimo kalbomis ir matematinėmis sistemomis.
- Galimybė eksportuoti darbinis failus Latex, HTML, RTF ir kt. formatais.

3. Kompiuterinės algebros sistemų apžvalga

3.1. Kompiuterinės algebros sistemos

Specializuotos sistemos

- TRIGMAN 1970, dangaus kūnų mechanika
- SCHOONSCHIP 1971, kvantinė fizika
- CAMAL 1975, dangaus kūnų mechanika, bendroji reliatyvumo teorija
- SHEEP 1977, bendroji reliatyvumo teorija
- PARI 1988, skaičių teorija

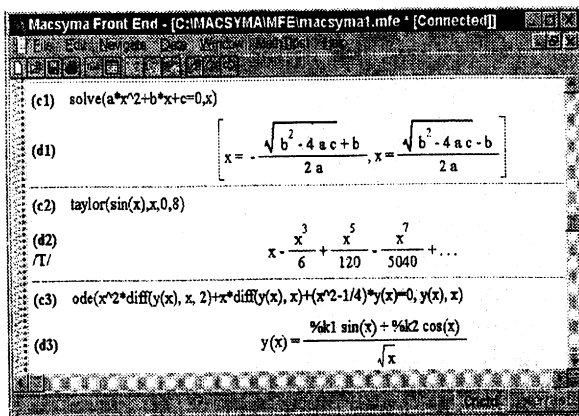
Bendrosios paskirties sistemos

- REDUCE 1968
- MACSYMA 1970
- MAPLE 1985
- DERIVE 1988
- MATHEMATICA 1988
- AXIOM 1991
- MuPAD 1997
- MAXIMA 2000

Toliau mes trumpai aptarsime svarbiausias kompiuterinės algebros sistemas. Plačiau apie jas galima sužinoti iš [1], [2].

3.2. MACSYMA

Kompiuterinės algebros sistema MACSYMA buvo sukurta JAV, Masačūseto technologijos institute 1970 m. Ilgą laiką ši sistema buvo užslaptinta, kadangi ji buvo JAV kosminių



1 pav. MACSYMA 2.6.1 sistemos langas.

ir karinių tyrimų dalis. Todėl ši sistema yra gerai pritaikyta fizikinio turinio uždaviniams. Sistema MACSYMA nėra labai paplitusi, universitetuose retai naudojama, bet daugiau naudojama mokslinio tyrimo institutuose. Net rusų autorius V.P. Djakonov [2], parašęs knygų apie daugelį kompiuterinės matematikos sitemų, apie MACSYMA nieko nekalba.

MACSYMA – tai labai tobula, turinti visas simbolinio skaičiavimo, grafikos ir programavimo galimybes. Kartu su dokumentacija yra pateikiamas gana pilnas sistemos aprašymas. Gana pilna ir gerai organizuota yra pagalbos sistema. Didelį išpūdį daro iš **Help** skyrelio demonstracinių failų sistema **Macsyma Demos**. Demonstraciniai failai pasižymi savo gausa, sprendžiamų uždavinių įvairove ir parodo dideles MACSYMA galimybes. Daugelis mokslinių darbų iš simbolių skaičiavimų srities yra daromi su kompiuterinės algebras sistema MACSYMA.

Galima paminėti keletą trūkumų (MACSYMA 2.6.1, 1997 m.): didelė komercinė kaina; sistema mažai paplitusi; lyginant su MAPLE ar MATHEMATICA sistema dirba per lėtai, yra per didelis naudojamų reiškinių ir masyvų dydžių apribojimas; nepakankamai pilnai įdiegti skaitiniai metodai; sudėtingas programavimas.

Daugiau informacijos galima rasti www.macsyma.com.

3.3. MAPLE

Kompiuterinės algebras sistema MAPLE buvo sukurta Kanadoje, Waterloo universitete, 1985 metais. Pradžioje ji buvo realizuota ant didelių kompiuterių ir praėjo ilgą aprobacijos kelią. Dabartinė programos versija yra MAPLE 8, išleista 2002 metais.

MAPLE – labai tobula ir patogi vartotojui sistema, turinti visas simbolinio skaičiavimo, grafikos ir programavimo galimybes. Ji vienodai sėkmingai gali būti naudojama tiek paprastiems tiek sudėtingiems skaičiavimams. Naudojamas programos lango meniu nėra perkrautas. Įvedamų matematinių objektų užrašymas yra labai artimas visuotinai primtiems matematiniams žymėjimams. Yra tobula pagalbos sistema su pavyzdžiais. Daugybę pavyzdžių ir ištisu kursų iš įvairių matematikos sričių galima rasti tinklalapyje www.mapleapps.com. Programavimo kalba yra paprasta. Todėl šią sistemą išsivąinti

The screenshot shows the Maple 8 interface with the following commands and results:

```

> solve(a*x^2+b*x+c=0,x);
      -b+sqrt(b^2-4ac)  -b-sqrt(b^2-4ac)
      -----
      2a                2a

> series(sin(x),x,8);
      x - 1/6 x^3 + 1/120 x^5 - 1/5040 x^7 + O(x^8)

> dsolve(x^2*diff(y(x),x,x)+x*diff(y(x),x)+(x^2-1/4)*y(x)=0);
      y(x) = C1/sqrt(x) + C2*cos(x)/sqrt(x)

> sum(k^6,k=1..n);
      (n+1)^7 - (n+1)^6 + (n+1)^5 - (n+1)^3 + n + 1
      -----
      7 - 2 + 2 - 6 + 42 + 42
  
```

2 pav. MAPLE 8 sistemos langas.

nėra sunku ir ji plačiai paplito visame pasaulyje. Kompiuterinės algebras sistema MAPLE gali naudoti platus vartotojų skaičius: nuo vidurinės mokyklos mokinio iki mokslinio darbuotojo. Dalis MAPLE sistemos yra naudojama sistemose MATLAB, MathCad, Scientific NoteBook, Scientific WorkPlace, Math Office ir kt. Pasaulyje yra išleista virš 400 knygų MAPLE tematika. Su knygų sąrašu ir kitomis nuorodomis galima susipažinti oficialiame MAPLE puslapyje www.maplesoft.com.

MAPLE tapo pirmaujančia pasaulyje kompiuterinės algebras sistema. Su ja lygintis gali nebent MATHEMATICA.

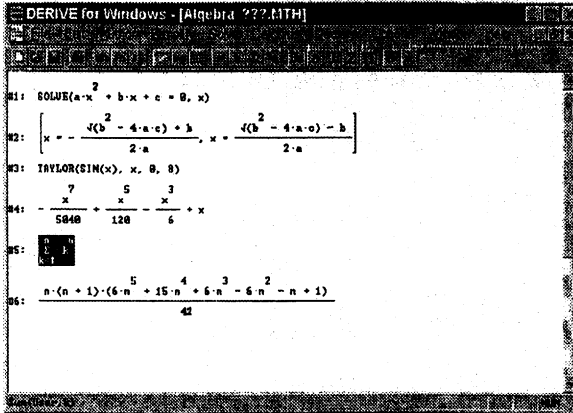
Trūkumai: didelė komercinė kaina; lyginant su MATHEMATICA ir MACSYMA yra per mažas specialiųjų funkcijų skaičius.

3.4. DERIVE

Kompiuterinės algebras sistema Derive buvo sukurta pirmiesiems asmeniniais kompiuteriams. Ji buvo diegiama ir į daugelį nešiojamų miniatūrinių kompiuterių. Savo laiku tai buvo gana gerai apbruota, patikima ir greita sistema. Todėl sistema Derive nereikalauja didelių kompiuterio resursų. Sistema Derive for Windows PRO 4.11 gali dirbti kompiuteryje, kuriame yra 8 Mb operatyviosios atminties ir diske užima 31,5 Mb.

Duomenys yra įvedami iš atskiro lango. Iš pagrindinio meniu galima pasirinkti: **Author** (reiškinių, vektorių ir matricų įvedimas), **Simplify** (reiškinių supaprastinimas, išskleidimas, skaidymas į daugiklius, skaitinis apskaičiavimas), **Solve** (lygčių ir lygčių sistemų algebrinis ir skaitinis sprendimas), **Calculus** (sumų, sandaugų, ribų, išvestinių, integralų ir kt. skaičiavimas), **Declare** (kintamųjų ir funkcijų apibrėžimas), **Options** (dokumento spalvinio apiforminimo ir spausdinimo parametrų nustatymas). Kitos pasirinkimo galimybės **File**, **Edit**, **Window**, **Help** yra standartinės.

Palyginus maža sistema Derive for Windows 4.11 gali pakankamai gerai spręsti mažo ir vidutinio sudėtingumo matematinius uždavinius. Bet sprendžiant sudėtingesnius uždavinius, kuriems reikia specialiųjų funkcijų ir įvairesnių metodų, sistema parodo savo

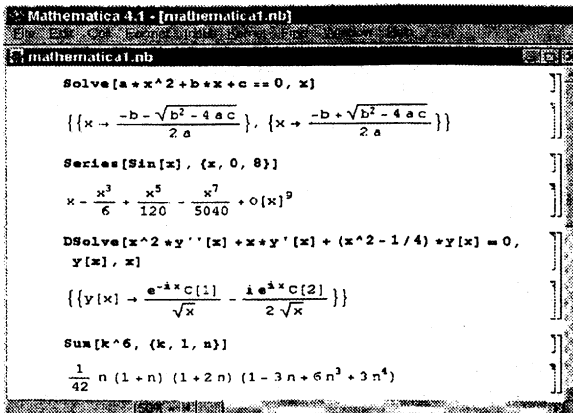


3 pav. DERIVE for Windows 4.11 sistemos langas.

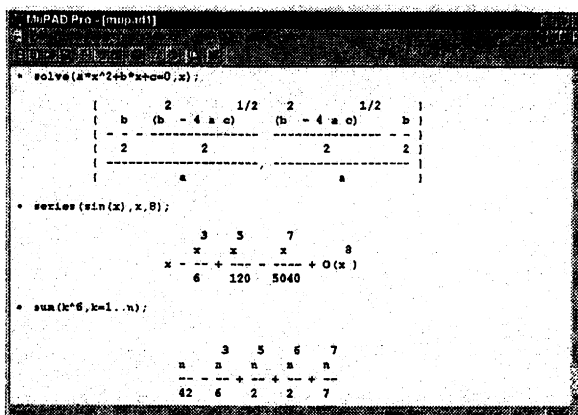
nesugebėjimą. Gana silpnos yra grafikos ir programavimo galimybės. Dabartinė sistemos versija yra Derive 5 (2000 m.). Daugiau informacijos galima rasti www.derive.com tinklalapyje.

3.5. MATHEMATICA

Kompiuterinės algebras sistema MATHEMATICA buvo išleista JAV 1988 metais. Sistemą sukūrė kompanija Wolfram Research Ltd, kuriai vadovavo pagrindinis kūrėjas Stephen Wolfram. Pagal sprendžiamų uždavinių skaičių, skaičiavimų greitį ir grafikos galimybes ši sistema nenusileidžia MAPLE sistemai. Dabartinė sistemos versija yra MATHEMATICA 4.1, 2000 m. Naujos sistemos versijos pasirodo palyginti retai: kas 2–3 metai. Pagal kai kuriuos parametrus (specialiųjų funkcijų skaičius, kai kurių integralų skaičia-



4 pav. MATCEMATICA 4.1 sistemos langas.



5 pav. MuPAD PRO 1.4.1 sistemos langas.

vimo greitis, grafinių vaizdų apdorojimas) ši sistema lenkia MAPLE sistemą. Ši sistema yra gana plačiai palitusi.

Trūkumai: neįprasta žymėjimų sistema, pavyzdžiui, sinusas užrašomas $\text{Sin}[x]$ (MAPLE ir daugelyje kitų sistemų rašome įprastai – $\sin(x)$); sudėtinga simbolinio ir grafinio programavimo sintaksė.

Daugiau informacijos galima rasti www.wolfram.com tinklalapyje.

3.6. MuPAD

MuPAD – palyginus nauja kompiuterinės algebros sistema, sukurta Vokietijoje, Paderborno universitete 1997 metais. Darbo grupei vadovauja prof. B. Fuchssteiner, o sistemą platina SciFace Software kompanija. Pilnai veikiančią paskutinę sistemos versiją MuPAD 2.5 galima atsisiųsti iš www.sciface.com. Programos veikimo laikas yra 31 diena.

Komandų sintaksė yra daug kuo panaši į MAPLE sistemą. Sistemoje yra numatytos galimybės dirbti su daugiaprocesorinėmis sistemomis, atliekant lygiagrečius skaičiavimus. Sistema padaryta labai tvarkingai, sudarytas išsamus vartotojo vadovas, neblogos grafikos galimybės.

Trūkumai: simbolinių skaičiavimų, grafikos ir programavimo galimybėmis nusileidžia MAPLE ir MATHEMATICA sistemoms; skaičiavimų rezultatai išvedami tekstiniu režimu; nepakankamas specialiųjų funkcijų skaičius.

3.7. MAXIMA

Kompiuterinės algebros sistema MAXIMA yra sistemos MACSYMA atmaina ir paskelbta 2000 m. Įvairioms operacinėms sistemoms ją laisvai galima atsisiųsti iš www.ma.utexas.edu. Sistema yra sukurta LISP programavimo kalboje. Jos komandų sintaksė daug kuo sutampa MACSYMA sistemos sintakse. Yra vartotojo vadovas.

Trūkumai: pasižymi minėtais MACSYMA sistemos trūkumais; skaičiavimų rezultatai išvedami tekstiniu režimu; nepakankamai gerai padarytas vartotojo langas; meniu sistema

```

xmaxima
Maxima 5.5 Tue Dec 5 16:55:33 2000 (with enhancements by W.
Schelter).
Licensed under the GNU Public License (see file COPYING)
(C1) solve (a*x^2+b*x+c=0,x):
          2
      Sqrt(b  - 4 a C) + b          b - Sqrt(b  - 4 a C)
(D1) [x = -----, x = -----]
          2 a                      2 a
(C2)
file:/G:/MAXIMA/intro.html

```

MAXIMA

Maxima Primer

Maxima is a computer program for doing mathematics calculations, symbolic manipulations, numerical computations and graphics. Procedures can be programmed and then run by Maxima to do complex tasks. Much of the syntax for other languages such as Maple was copied from Maxima. Full documentation is available.

6 pav. MAXIMA 5.5 sistemos langas.

yra netobula, ne visi meniu punktai veikia arba veikia tik kai kompiuteris prijungtas prie interneto.

4. Kompiuterinės algebros sistemų greičio testas

Buvo matuojamas laikas sekundėmis, per kurį išskleidžiamas reiškinys $(x + y + z)^{100}$ ir atliekamas atvirkštinis veiksmas. Buvo naudojamas kompiuteris su P3 600 MHz procesoriumi.

I lentelė

	expand((x+y+z)^100)	factor(%)
Maple 7	0,215	0.875
Maple 4	0,317	1,495
Mathematica 4	0,38	6,48
MuPAD 1.4.1	< 1	18
MAXIMA 5.5	2,92	28,95
Macsyma 2.6.1	3,768	41,365

Literatūra

- [1] R. Liska, *Computer Algebra, Algorithms, Systems and Applications*,
<http://www-troja.fjfi.cvut.cz/liska/ca/>
 [2] V.P. Djakonov, *Kompiuterinė matematika*, Maskva (2001).

Computer algebra and applications

A. Domarkas, R.-J. Rakauskas, A. Pincevičius

Short review of computer algebra systems Macsyma, Maple, Derive, Mathematica, MuPad, Maxima.