

## Apie apibendrintąsias Oilerio konstantas

Eugenijus STANKUS (VU)

el. paštas: eugenijus.stankus@maf.vu.lt

Rymano dzeta funkcija  $\zeta(s)$  taške  $s = 1$  turi paprastą polių. Jos Lorano skleidinio

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n (s-1)^n$$

koefficientai  $A_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , vadinami Stiltjeso konstantomis, o skaičiai

$$\gamma_n = (-1)^n n! A_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

– apibendrintosiomis Oilerio konstantomis,  $\gamma_0 = A_0 = \gamma = 0,577215\dots$  yra Oilerio konstanta. Oilerio konstantos skaičiuojamos pagal formules

$$\gamma_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{j=1}^m \frac{\log^n j}{j} - \frac{\log^{n+1} m}{n+1} \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

ir jų tyrimams skirta daug darbų, pavyzdžiui, [1], [3], [5], [6].

1975 m. [4] darbe buvo pradėti nagrinėti Oilerio konstantų apibendrinimai aritmetinėms progresijoms. Tegu

$$H(x, r, k) = \sum_{\substack{0 < n \leq x \\ n \equiv r \pmod{k}}} \frac{1}{n}.$$

Tuomet Oilerio konstantos  $\gamma$  analogas apibrėžiamas formule

$$\gamma(r, k) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ H(x, r, k) - \frac{1}{k} \log x \right\}.$$

Aišku, kad  $\gamma(0, 1) = \gamma$ ,  $\gamma(r \pm k, k) = \gamma(r, k)$ . Minėtame darbe, o taip pat ir [2], įrodyta daug įvairių šių konstantų savybių, nustatyti jų ryšiai su Bernulio skaičiais, gama funkcijų reikšmėmis ir t.t. Darbe [2] pateikta įdomių Oilerio konstantų teorijos taikymų, tiriant kai kurių eilučių konvergavimą.

Pažymėkime

$$G_{r,k}(s) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv r \pmod{k}}}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \quad \sigma > 1.$$

Ši funkcija analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą išskyrus tašką  $s = 1$ , kuriame ji turi paprastą polių su rezidiumu  $\frac{1}{k}$ . Iš tikrųjų,  $G_{r,k}(s)$  išreiškiama Hurvico dzeta funkcija:

$$G_{r,k}(s) = k^{-s} \zeta\left(s, \frac{r}{k}\right), \quad (1)$$

čia

$$\zeta(s, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + \omega)^{-s}, \quad \sigma > 0, \quad 0 < \omega \leq 1,$$

o taško  $s = 1$  aplinkoje

$$G_{r,k}(s) = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{s-1} + \gamma(r, k) + \dots \quad (2)$$

Šiame darbe įrodyta formulė konstantai  $\gamma(r, k)$  yra ankstesnio autoriaus darbo [6] dalinis apibendrinimas aritmetinėms progresijoms.

**Teorema.** Kai  $U \geq 2$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $m \geq 2$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ , tuomet

$$\begin{aligned} \gamma(r, k) = & \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv r \pmod{k}}}^{\infty} \frac{1}{n} \exp\left\{-\frac{n^2}{U}\right\} + \frac{\gamma}{2k} - \frac{\log U}{2k} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m \frac{(-1)^n k^{2n-1}}{n! U^n} \zeta\left(1 - 2n, \frac{r}{k}\right) + R(U, m), \end{aligned}$$

čia

$$|R(U, m)| \leq C(k, m, \varepsilon) U^{-m-1+\varepsilon}.$$

*Įrodymas.* Nagrinėjime eilutę

$$T_{r,k}(U) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv r \pmod{k}}}^{\infty} \frac{1}{n} \exp\left\{-\frac{n^2}{U}\right\}.$$

Pritaikę žinomą formulę

$$e^{-y} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re z=b} \Gamma(z) y^{-z} dz, \quad y > 0, \quad b > 0,$$

gausime:

$$T_{r,k}(U) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re s=1} \frac{1}{s} \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) U^{\frac{s}{2}} G_{r,k}(s+1) ds. \quad (3)$$

Pointegralinė funkcija turi paprastus polių taškuose  $s = 0$  ir  $s = -2n$ , kai  $n = 1, 2, \dots$ . Apskaičiuokime pointegralinės funkcijos reziduumus šiuose taškuose. Kadangi taško  $s = 0$  aplinkoje teisinga (2) lygybė ir be to

$$\Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) = 1 - \frac{\gamma}{2}s + \dots,$$

$$U^{\frac{s}{2}} = 1 + \frac{\log U}{2}s + \dots,$$

tai

$$\operatorname{Res}_{s=0} \left\{ \frac{1}{s} \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) U^{\frac{s}{2}} G_{r,k}(s+1) \right\} = \gamma(r, k) - \frac{\gamma}{2k} + \frac{\log U}{2k}.$$

Iš to, kad

$$\operatorname{Res}_{s=-2n} \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!},$$

gausime

$$\operatorname{Res}_{s=-2n} \left\{ \frac{1}{s} \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) U^{\frac{s}{2}} G_{r,k}(s+1) \right\} = \frac{(-1)^n k^{2n-1}}{n! U^n} \zeta\left(1-2n, \frac{r}{k}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Pritaikę (3) integralui reziduumų teoremą (perkėlę integravimo kontūrą į tiesę  $s = -2m - \varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ ) ir įvertinę liekamuosius narius, gausime teoremos formulę.

## Literatūra

- [1] J. Bohman, C.-E. Fröberg, The Stieltjes function – definition and properties, *Math. Comp.*, **51**, 281–289 (1988).
- [2] K. Dilcher, Generalized Euler constants for arithmetical progressions, *Math. Comp.*, **59**, 259–282 (1992).
- [3] M.I. Israilov, On the Laurent expansion of the Riemann zeta-function, *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, **158**, 98–104 (1981) (in Russian).
- [4] D.H. Lehmer, Euler constants for arithmetical progressions, *Acta Arith.*, **27**, 125–142 (1975).
- [5] Y. Mitsuoka, On the power series coefficients of the Riemann zeta function, *Tokyo J. Math.*, **12**, 49–58 (1989).
- [6] E.P. Stankus, A remark on the coefficients Laurent series of the Riemann zeta function, *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, **121**, 103–107 (1983) (in Russian).

## On generalized Euler constants

E. Stankus

The generalized Euler constants are defined by formulas

$$\gamma(r, k) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{\substack{0 < n \leq x \\ n \equiv r \pmod{k}}} \frac{1}{n} - \frac{1}{k} \log x \right\}.$$

The explicit formula for  $\gamma(r, k)$  is obtained applying the method of contour integration.