Liet. matem. rink., T. 42, spec. nr., 47–49

Apie Lerch'o dzeta funkcijos išvestinės nulius

Ramūnas GARUNKŠTIS (VU)*
el. paštas: ramunas.garunkstis@maf.vu.lt

Darbai [3], [4] iliustruoja, kad Rymano dzeta funkcijos nulių išsibarstymas yra susijęs su jos išvestinės nulių savybėmis. Tai mus paskatino nagrinėti bendresnės, Lercho dzeta funkcijos išvestinės nulius. Tegu $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis. Lerch'o dzeta funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$, kai $\sigma > 1$, apibrėžiama Dirichlet eilute

$$L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\lambda m}}{(m+\alpha)^s},$$

čia $0 < \lambda$, $\alpha \leqslant 1$. Ši funkcija pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, gal būt išskyrus tašką $s = 1$, ir, kai λ nėra sveikasis skaičius, tenkina funkcinę lygtį

$$\begin{aligned} L(\lambda, \alpha, 1-s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)\Big(&\exp\Big\{\frac{\pi i s}{2} - 2\pi\alpha\lambda\Big\}L(-\alpha, \lambda, s) \\ &+ \exp\Big\{-\frac{\pi i s}{2} + 2\pi\alpha(1-\lambda)\Big\}L(\alpha, 1-\lambda, s)\Big). \end{aligned} \tag{1}$$

Toliau mes tarsime, kad $0 < \lambda, \alpha < 1$. Darbe [1] buvo įrodyta, $L(\lambda, \alpha, s) \neq 0$, jei $\sigma \geqslant 1 + \alpha$. Apibrėžkime

$$L'(\lambda, \alpha, s) = \frac{\partial}{\partial s} L(\lambda, \alpha, s).$$

1 teorema. *Tegu* $0 < \lambda, \alpha < 1$. *Jei* $\sigma \geqslant \max\big(2; 1{,}5 - \log\log\alpha^{-1}\big)$, *tai* $L'(\lambda, \alpha, s) \neq 0$.

Įrodymas. Turime

$$-\frac{\alpha^s}{\log\alpha} L'(\lambda, \alpha, s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\pi i\lambda n} \frac{\log(n+\alpha)}{\log\alpha} \Big(\frac{\alpha}{n+\alpha}\Big)^s.$$

Pastarojoje lygybėje suma savo absoliučiu dydžiu yra ne didesnė už

$$\frac{\log(1+\alpha)}{\log\alpha^{-1}} \Big(\frac{\alpha}{1+\alpha}\Big)^\sigma + \frac{\alpha^\sigma}{\log\alpha^{-1}} \int_1^\infty \frac{\log(x+\alpha)}{(x+\alpha)^\sigma} dx \leqslant \frac{3\log 2 + 2}{\log\alpha^{-1}} \Big(\frac{\alpha}{1+\alpha}\Big)^\sigma,$$

*Darbas remiamas Lietuvos mokslo ir studijų fondo.

jei $\sigma \geqslant 2$. Lengva patikrinti, kad paskutinės nelygybės dešinioji pusė yra mažesnė už vienetą, jei teoremos sąlygos patenkintos. Teorema įrodyta.

Išdiferencijavę (1) funkcinę lygtį gauname,

$$\begin{aligned}
-L'(\lambda, \alpha, 1-s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)\Bigg(& e^{2\pi i(\frac{s}{4}-\alpha\lambda)}\Big(L'(-\alpha, \lambda, s)\\
&+L(-\alpha, \lambda, s)\Big(\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) - \log 2\pi + \frac{\pi i}{2}\Big)\Big)\\
&+e^{2\pi i(-\frac{s}{4}+\alpha(1-\lambda))}\Big(L'(\alpha, 1-\lambda, s)\\
&+L(\alpha, 1-\lambda, s)\Big(\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) - \log 2\pi - \frac{\pi i}{2}\Big)\Big)\Bigg).
\end{aligned}$$

Iš Stirlingo formulės, kai $|t| > 1$, išplaukia,

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) - \log 2\pi \pm \frac{\pi i}{2} = \log\left(\frac{|t|}{2\pi}\exp\Big(\pm\frac{\pi i}{2}\Big)\right) + O\Big(\frac{1}{|t|}\Big).$$

Todėl, panašiai kaip ir $L(\lambda, \alpha, s)$ atveju (žr. [1]), sakysime, kad $\rho' = \beta' + i\gamma'$ yra netrivialus $L'(\lambda, \alpha, s)$ nulis, jei

$$\begin{aligned}
&\min\big(-1; 2,5 + \log\log\lambda^{-1};\ 2,5 + \log\log(1-\lambda)^{-1}\big)\\
&\qquad < \beta' < \max\big(2; 1,5 - \log\log\alpha^{-1}\big).
\end{aligned}$$

Tegu $N'(T, \lambda, \alpha)$ žymi kiekį netrivialių nulių, kuriems $|\gamma'| \leqslant T$ (įskaičiuojant kartotinumus). Darbe [2] gauta,

$$N'(T, \lambda, \alpha) = \frac{T}{\pi}\log\frac{T}{2\pi e\alpha\sqrt{\lambda(1-\lambda)}} + o(T). \tag{2}$$

Pažymėkime $N'(\sigma, T; \lambda, \alpha)$ kiekį netrivialių nulių, kuriems $\beta' > \sigma$ ir $|\gamma'| \leqslant T$ (įskaičiuojant kartotinumus). Kita teorema parodo, kad „daug“ Lerch'o dzeta išvestinės nulių yra dešiniau kritinės tiesės.

2 teorema. *Tegu* $0 < \lambda, \alpha < 1$, $0 < c < 1$ *ir tegu* $\omega = \max\big(2; 1,5 - \log\log\alpha^{-1}\big)$. *Tuomet*

$$N'\left(\frac{1}{2} + \frac{c\log\log T}{\log T}, T; \lambda, \alpha\right) \geqslant \frac{(1-c)}{\big(\omega - \frac{1}{2}\big)\pi}T\log\log T + O(T).$$

Įrodymas. Straipsnyje [2] įrodyta, kad

$$\sum_{|\gamma'|\leqslant T}(b + \beta') = \left(b + \frac{1}{2}\right)\frac{T}{\pi}\log\frac{T}{2\pi e\alpha\sqrt{\lambda(1-\lambda)}}$$

$$+\frac{T}{2\pi}\log\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)}}-\frac{T}{\pi}\log\log\frac{1}{\alpha}$$
$$+\frac{T}{2\pi}\log\left(\left(\log\frac{T}{2\pi}\right)^2+\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{o}(T),$$

kur $b>\max\left(1;-2.5-\log\log\lambda^{-1};-2.5-\log\log(1-\lambda)^{-1}\right)$. Iš pastarosios lygybės atėmę (2) lygybę, padaugintą iš

$$b+\frac{1}{2}+\frac{c\log\log T}{\log T},$$

gauname, jog

$$\sum_{|\gamma'|\leqslant T}\left(\beta'-\frac{1}{2}-\frac{c\log\log T}{\log T}\right)=\frac{1-c}{\pi}\log\log T+\mathrm{O}(T).$$

Iš čia ir iš nelygybių, gautų remiantis 1 teorema,

$$\sum_{\substack{|\gamma'|\leqslant T\\ \beta'>\frac{1}{2}+\frac{c\log\log T}{\log T}}}1\geqslant\sum_{\substack{|\gamma'|\leqslant T\\ \beta'>\frac{1}{2}+\frac{c\log\log T}{\log T}}}\frac{\beta'-\frac{1}{2}-\frac{c\log\log T}{\log T}}{\omega-\frac{1}{2}-\frac{c\log\log T}{\log T}}$$
$$\geqslant\frac{1}{\omega-\frac{1}{2}}\sum_{|\gamma'|\leqslant T}\left(\beta'-\frac{1}{2}-\frac{c\log\log T}{\log T}\right)$$

gauname 2 teoremos tvirtinimą.

Literatūra

[1] R. Garunkštis, A. Laurinčikas, On zeros of the Lerch zeta-function, S. Kanemitsu, K. Győry (eds.), *Number Theory and its Applications*, Kluwer Academic Publishers, 129–143 (1999).

[2] R. Garunkštis, J. Steuding, On the zero distributions of Lerch zeta-functions, *Analysis*, **22**, 1–12(2002).

[3] N. Levinson, H.L. Montgomery, Zeros of the derivative of the Riemann zeta-function, *Acta Math.*, **133**, 49–65 (1974).

[4] A. Speiser, Geometrisches zur Riemannschen Zetafunktion, *Math. Annalen*, **110**, 514–521 (1934).

On zeros of the derivative of the Lerch zeta-function

R. Garunkštis

We consider zeros of the derivative of the Lerch zeta-function. We obtain some lower bound for the number of zeros lying on the right from the critical line.