

Apie keturmačio toro ergodinius endomorfizmus

Birutė KRYŽIENĖ (VGTU), Gintautas MISEVIČIUS (VU)

el. paštas: gintautas.misevicius@maf.vu.lt

Pirmuose dviejuose šios serijos straipsneliuose [1] buvo įrodyta teorema apie keturmačio toro transformacijų tolygų pasiskirstymą. Tai analogiškų D. Moskvino rezultatų [2] dvimačiam ir trimačiam torams apibendrinimas specialiu būdu sukonstruotam paviršiui erdvėje \mathbb{R}^4 .

Žymėkime $\Omega = \Omega_4$ keturmatį torą, t.y., aibę taškų

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4), \quad 0 \leq x_i < 1, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

su pakoordinačiumi apibrėžta sudėties operacija (mod 1) ir Lebegeo matu μ .

Atvaizdavimas $T: \Omega \rightarrow \Omega$ apibrėžiamas

$$Tx = xV \pmod{1},$$

čia V yra kvadratinė neišsigimusi matrica su sveikais elementais.

Tegu $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ yra stačiakampis plokštumoje \mathbb{R}^2 . Jame apibrėžtos dvi funkcijos $z = \varphi_1(x, y)$ ir $w = \varphi_2(x, y)$, $(x, y) \in Q$. Tada vektorius

$$\xi = (x, y, \varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y))$$

aprašo paviršių Γ erdvėje \mathbb{R}^4 .

Paviršiaus komponentių kreivis yra išreiškiamas dydžiu

$$K_i = \frac{\varphi''_{ixx} \cdot \varphi''_{iyy} - (\varphi''_{ixy})^2}{(1 + (\varphi'_{ix})^2 + (\varphi'_{iy})^2)^2}, \quad i = 1, 2.$$

Reikalavimai paviršiui Γ išreiškiami dalinėmis išvestinėmis ir kreiviais K_i . Reikalavimai matricai – charakteringojo polinomo ir (arba) charakteringųjų šaknų savybėmis.

Primename pagrindinį [1] rezultatą.

1 teorema. Tegu paviršiaus Γ komponentių Gauso kreiviai K_1 ir K_2 tenkina sąlygą $K_1 \cdot K_2 > 0$. Tegu funkcijos $\varphi_1(x, y)$ ir $\varphi_2(x, y)$ turi dalines išvestines iki trečios eilės imtinai srityje Q . Jeigu matricos V charakteringasis polinomas turi skirtingas realiąsias šaknis ir yra neredukuojamas racionaliųjų skaičių kūne, tai beveik visiems Lebegeo mato μ_2 prasme taškams $(x, y) \in Q$ seka

$$\{(x, y, \varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)) \cdot V^m\}, \quad m = 1, 2, \dots$$

yra tolygiai pasiskirsčiusi erdvės \mathbb{R}^4 vienetiniame kube $[0, 1]^4$.

Šiame darbe matricos V charakteringasis polinomas gali būti redukuojamas racionaliųjų skaičių kūne. Suformuluojame pagrindinį šio darbo rezultatą.

2 teorema. Tegu paviršiaus Γ komponentių Gauso kreiviai K_1 ir K_2 tenkina sąlyga $K_1 \cdot K_2 > 0$. Tegu funkcijos $\varphi_i(x, y)$ ($i = 1, 2$) turi aprėžtas dalines išvestines iki trečios eilės intinai. Jeigu matricos V charakteringosios šaknys yra skirtingos, tai beveik visiems Lebego mato μ_2 prasme taškams $(x, y) \in Q$ seka $\{\xi \cdot V^m\}$, $m = 1, 2, \dots$, yra tolygiai pasiskirsčiusi erdvės \mathbb{R}^4 vienetiniame kube $[0, 1]^4$.

Įrodymas. Matricos V charakteringąsias šaknis žymėkime θ_i , o jas atitinkančius charakteringuosius vektorius $w_i = (w_{i1}, w_{i2}, w_{i3}, w_{i4})$, $i = 1, 2, 3, 4$. Šiuo atveju vektoriai w_i gali turėti racionaliąsias komponentes. Tada kokiam nors vektoriumi m su sveikomis komponentėmis gali būti $(w_i \cdot m) = 0$. Todėl įrodymui negali būti naudojama lema 5 iš [1] ir reiškinių K_f (žr. [1], II, p. 107) įvertinimas nėra teisingas.

Charakteringieji vektoriai w_i sudaro erdvės \mathbb{R}^4 bazę. Todėl kiekvieną vektorių $xV^m \in \mathbb{R}^4$ galima išreikšti

$$xV^m = \sum_{i=1}^4 (v_{i1}x_1 + v_{i2}x_2 + v_{i3}x_3 + v_{i4}x_4) \cdot \theta_i^m w_i,$$

čia v_{ik} yra realieji skaičiai, apibrėžti matricos V pagalba (žr. [1], II, p. 106).

Įveskime kintamųjų z_1, z_2, z_3, z_4 tiesines formas

$$D_k(z_1, z_2, z_3, z_4) = \sum_{i=1}^4 v_{ik} \cdot (w_i \cdot m) \cdot z_i, \quad 1 \leq i \leq 4. \quad (1)$$

žymėkime sutrumpintai

$$D_k(m) = D_k(\theta_1^m, \theta_2^m, \theta_3^m, \theta_4^m).$$

Pergrupavus dėmenis ir naudojant (1) gauname

$$m \cdot xV^m = D_1(m)x_1 + D_2(m)x_2 + D_3(m)x_3 + D_4(m)x_4.$$

Tegu $|\theta_1| \leq |\theta_2| \leq |\theta_3| \leq |\theta_4|$. Pažymėkime

$$d = d(m) = \frac{1}{\ln m} \max\left(\left|\frac{\theta_2}{\theta_1}\right|^m, \left|\frac{\theta_3}{\theta_2}\right|^m, \left|\frac{\theta_4}{\theta_3}\right|^m\right), \quad m \geq 2.$$

Kadangi v_{ik} ir w_{ik} ($i, k = 1, 2, 3, 4$) yra racionalieji skaičiai, tai galima rasti tokią laipsnio rodiklį m_0 ir tokią konstantą c_0 , kad iš nelygybės

$$|m_1| + |m_2| + |m_3| + |m_4| \leq d(m) \quad (2)$$

išplaukia įvertis

$$|D_k(m)| \geq c_0 |\theta_4|^4, \quad m \geq m_0, \quad 1 \leq k \leq 4. \quad (3)$$

Pasinaudosime žinomu E. Titchmarch [4] rezultatu (žr. taip pat [5]).

Lema. Tegu stačiakampyje $Q \subset \mathbb{R}^2$ yra apibrėžta reali funkcija $f(x, y)$ su aprėžtomis dalinėmis išvestinėmis iki trečios eilės imtinai. Jeigu paviršiaus $(x, y, f(x, y))$ kreivis nelygus nuliui, tai teisingas įvertis

$$I(z) = \iint_Q \exp(2\pi izf(x, y)) \, dx \, dy = O(z^{-1/3}).$$

Kadangi tiesinės formos $D_4(z_1, z_2, z_3, z_4)$ tapatingai nelygios nuliui, tai galime apibrėžti funkciją

$$f(x, y) = \frac{D_1(m)}{D_4(m)} \cdot x + \frac{D_2(m)}{D_4(m)} \cdot y + \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y),$$

tenkinančią visas lemos sąlygas. Naudojant lemą ir $f(x, y)$ savybes, nesunku įsitikinti, kad galioja nelygybė

$$\iint_Q \exp(2\pi i(m \cdot \xi V^m)) \, dx \, dy < c_1 |D_4(m)|^{-m/3}, \quad (4)$$

jei tik

$$|m_1| + |m_2| + |m_3| + |m_4| < c_1 |\theta_4|, \quad c_1 = \text{const},$$

ir galioja (3).

Iš čia gauname, kad bet kuriai funkcijai g priklausančiai Korobovo klasei (žr. [3]) $E_3^\alpha(c)$, $\alpha > 1$, galioja įvertis

$$\begin{aligned} \iint_Q g(\xi V^m) \, dx \, dy &= \mu_2(Q) \int_{\Omega_4} g(x) \, dx + O\left(|\theta_4^{-m/3}| + \sum' \frac{1}{(\overline{m}_1 \overline{m}_2 \overline{m}_3 \overline{m}_4)^\alpha}\right) \\ &= \mu_2(Q) \int_{\Omega_4} g(x) \, dx + O\left(|\theta_4^{-m/3}| + \frac{1}{(d(m))^{\alpha-1}}\right) \\ &= \mu_2(Q) \int_{\Omega_4} g(x) \, dx + O(e^{-\lambda_0 m}), \end{aligned}$$

čia

$$\overline{m}_k = \begin{cases} 1, & \text{jeigu } m_k = 0, \\ |m_k|, & \text{jeigu } m_k \neq 0, \end{cases}$$

$\lambda_0 = \text{const}$, o \sum' reiškia sumavimą pagal visus vektorius m , tenkinančius nelygybę

$$|m_1| + |m_2| + |m_3| + |m_4| > d(m).$$

Tolesnis įrodymas sutampa su 1 teoremos iš [1] įrodymu.

3 teorema. Tegu paviršius Γ tenkina anksčiau nurodytas sąlygas. Tegu matrica $V = \|a_{ij}\|$ yra diagonalinė ir $a_{ii} = a > 1$. Tada lieka teisingas 2 teoremos tvirtinimas.

Įrodymas. Turime

$$\xi V^m = (x, y, \varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)) V^m = a^m (x, y, \varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)).$$

Iš (4) nelygybės gauname

$$\iint_Q \exp(2\pi i(\mathbf{m} \cdot \xi V^m)) dx dy < c_2 a^{-m/3}, \quad c_2 = \text{const.}$$

Tolesni samprotavimai sutampa su 2 teoremos įrodymu.

Literatūra

- [1] G. Misevičius, Uniform distribution on the four-dimensional torus, I, *Liet. Matem. Rink.*, **40**, (spec. nr.), 68–75 (2000); II, *Liet. Matem. Rink.*, **41**, (spec. nr.), 106–112 (2001).
- [2] D. Moskvina, About the projections of ergodic endomorphisms taking origin on the smooth curves, in: *Actual Problems of Analytic Number Theory*, Nauka i Technika, Minsk (1974) (in Russian).
- [3] N.M. Korobov, *Trigonometric Series and Their Applications*, Nauka, Moscow (1989) (in Russian).
- [4] E.C. Titchmarsh, *The Theory of Riemann Zeta-Function*, Oxford (1951).
- [5] S.H. Min, On the order of $\zeta(\frac{1}{2} + it)$, *Trans. Amer. Soc.*, **65**, 448–472 (1949).

About uniform distribution of four-dimensional torus

B. Kryžienė, G. Misevičius

Results on the uniform distribution of ergodic endomorphisms on the four-dimensional torus are obtained. They extend previous results [1] for the case when the characteristic polynomial of matrix V may be reducible.