

Medynų išsiretinimo stochastinės diferencialinės lygties sprendinio aproksimacijų konvergavimas

Petras RUPŠYS (LŽŪU)
el. paštas: rpetras@tech.lzuu.lt

1. Įvadas

Visapusiškesnis stochastinių modelių taikymas medynų augimo eigos analizėje pastebimas tikrai paskutinių dešimtmetį. Stochastiniai modeliai yra naudojami įvairių augimo eigos parametrų modeliavimui: medžių skaičiaus, tūrio, skersmens, aukščio ir pan. Stochastinių modelių pranašumas išsamiai nagrinėjamas Fridman ir Stahl (2001), Bi (2001). Nagrinėsime medžių skaičiaus medyje savaiminio išsiretinimo procesą išreikšą Gompertz kreive (Rupšys, 1997). Stochastinis Gompertz kreivės pavidalas yra toks:

$$q(\varpi) = \alpha - \beta \ln N + \mu W(t), t_0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

čia α, β – modelio parametrai, μ – difuzijos koeficiento pastovioji dalis, $W(t)$ – standartinis skaliarinis Brauno judėjimas, tenkinantis sąlygas:

- 1) $W(t_0) = 0$ (su tikimybe 1);
- 2) kiekvienam s, t tenkinančiam sąlygą $t_0 \leq s \leq t \leq T$, atsitiktinis dydis $W(t) - W(s)$ turi normalųjį skirstinį su vidurkiu lygiu 0 ir dispersija $t - s$;
- 3) kiekvienam s, t, u, v tenkinančiam sąlygą $t_0 \leq s \leq t \leq u \leq v \leq T$, pokyčiai $W(t) - W(s)$ ir $W(v) - W(u)$ yra nepriklausomi.

Jeigu laikysime, kad momentinis santykinis medžių skaičiaus pokytis $\frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{dt}$ yra išreiškiamas Gompertz kreive (1), tada medžių skaičiaus medyje stochastinė diferencialinė lygtis turi pavidalą:

$$dN(t) = N(t)(\alpha - \beta \ln N(t)) dt + \mu N(t) dW(t), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

čia parametrai α ir β priklauso nuo dirvožemio tipo, medžių rūšinės sudėties ir pan., difuzijos daugiklis μ įtakoja sprendinio stochastines savybes. Kai $\mu = 0$, turime determinuotąją diferencialinę lygtį, kuri turi tikslų sprendinį.

Sprendinio skaitmeninė aproksimacija

Stochastinės diferencialinės lygties (2) apytiksliam sprendimui naudosime aukštesnės eilės Milšteino skaitmeninę aproksimaciją Ito tipo integralams (Higham, 2001). Augalų

augimo eigos procesų modeliavimui priimtinesni yra Ito tipo integralai, kadangi pasižymi “nereagavimu į ateitį”. Integralinis stochastinės diferencialinės lygties (2) pavidalas yra toks:

$$N(t) = N(t_0) + \int_{t_0}^t N(s) (\alpha - \beta N(s)) ds + \mu \int_{t_0}^t N(s) dW(s). \quad (3)$$

Intervala $[t_0; T]$ dalijame į atkarpas, imdami žingsnį $\Delta t = \frac{T-t_0}{L}$, $\tau_j = t_0 + j \cdot \Delta t$ ($j = 0, 1, \dots, L$), čia L – sveikas teigiamas skaičius. Tada stochastinio integralo (3) aukštesnės eilės Milšteino skaitmeninė aproksimacija bus tokia:

$$N_j = N_{j-1} + N_{j-1} (\alpha - \beta \ln N_{j-1}) \Delta t + \mu N_{j-1} (W(\tau_j) - W(\tau_{j-1})) + \frac{1}{2} \mu^2 N_{j-1} \left((W(\tau_j) - W(\tau_{j-1}))^2 - \Delta t \right). \quad (4)$$

Naudosime parametrų α, β įvertinimus, kurie gauti determinuotam modeliui, naudojant 13 pastovių barelių stebėjimų duomenis. Parametrų įvertinimai yra tokie: $\hat{\alpha} = -0,10248$, $\hat{\beta} = -0,01248$. Turėdami tikslą ištirti konvergavimą, apskaičiuosime Brauno judėjimo kelią intervale $[t_0; T]$ naudodami pokytį $\delta t = 2^{-5}$, esant žingsniams $\Delta t = R \cdot \delta t$ ($R = 1, 2, 4, 8, 16, 32$). Kadangi stochastinė diferencialinė lygtis (2) neturi tikslaus sprendinio, tai tiksliuoju sprendiniu laikysime aukštesnės eilės Milšteino skaitmeninę aproksimaciją N_j , esant žingsniui $\Delta t = \delta t$. Stochastinės diferencialinės lygties (2) stipriuoju sprendiniu vadiname sprendinį, apskaičiuotą konkrečiam vienam Brauno judėjimo keliui, o silpnuoju sprendiniu vadiname sprendinį išreikštą 100 Brauno judėjimo kelių sprendinių vidurkiu. Silpnojo sprendinio glodumas priklauso nuo imčių skaičiaus. Didinant imčių skaičių silpnojo sprendinio glodumas didėja. Nagrinėjant silpnuosius sprendinius, būtų priimtinesnis didesnis imčių skaičius negu 100 imčių. Tai pasiekti šiame darbe neleido personalinio kompiuterio galimybės.

1 pav. pavaizduotas stiprusis ir silpnasis sprendinys apskaičiuotas naudojant aukštesnės eilės Milšteino skaitmeninę aproksimaciją (4) kartu su stebėjimo duomenimis.

Iš paveikslo matyti, kad stiprioji ir silpnoji aproksimacija pakankamai puikiai atspindi pastovių barelių stebėjimo duomenis.

Modeliuosime aukštesnės eilės Milšteino aproksimacijos stiprųjų ir silpnąjį konvergavimą. Tarkime, kad X_n yra tikslusis sprendinys, o $X(\tau_n)$ apytikslė aukštesnės eilės Milšteino skaitmeninė aproksimacija.

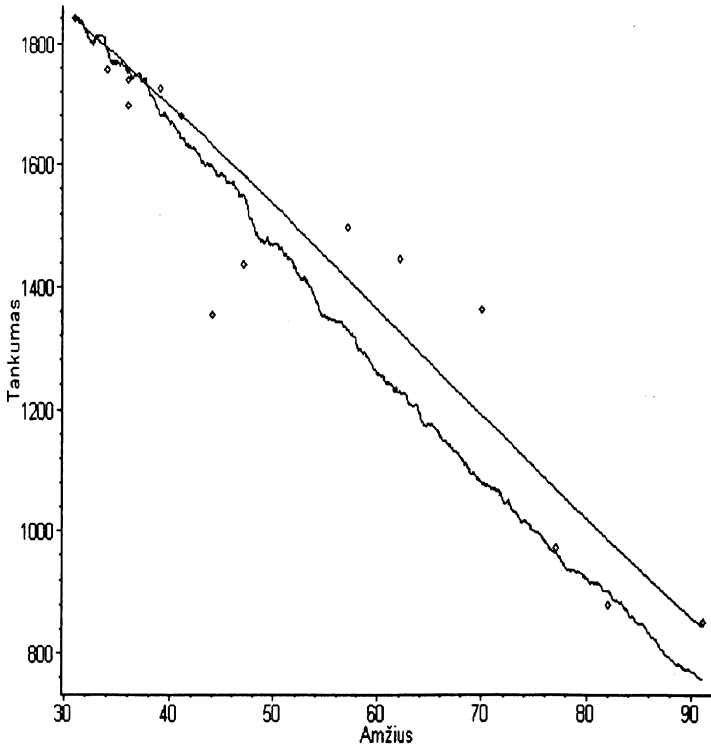
Apibrėžimas. Jeigu egzistuoja toks teigiamas skaičius c , kad kiekvienam $\tau = t_0 + n \cdot \Delta t$ ($n = 0, 1, \dots, L$) ir pakankamai mažam žingsniui Δt patenkinama lygybė

$$E |X(\tau) - X_n| \leq c \Delta t^\gamma,$$

tada sakome, kad konvergavimo lygis yra γ .

Nagrinėsime stipriosios skaitmeninės aproksimacijos paklaidas tikrai intervalo $[t_0; T]$ galo taške T , t.y.

$$e_{\Delta t}^{stiprusis} = E |X(T) - X_L|.$$



1 pav. Sprendinio stiprioji ir silpoji Milšteino aukštesnės eilės aproksimacija.

Analogiškas apibrėžimas išreiškia skaitmeninės aproksimacijos silpnojo konvergavimo lygį γ . Būtent:

$$|E(X(\tau)) - E(X_n)| \leq c\Delta t^\gamma.$$

Silpnosios aproksimacijos paklaida intervalo $[t_0; T]$ galo taške T užrašoma taip:

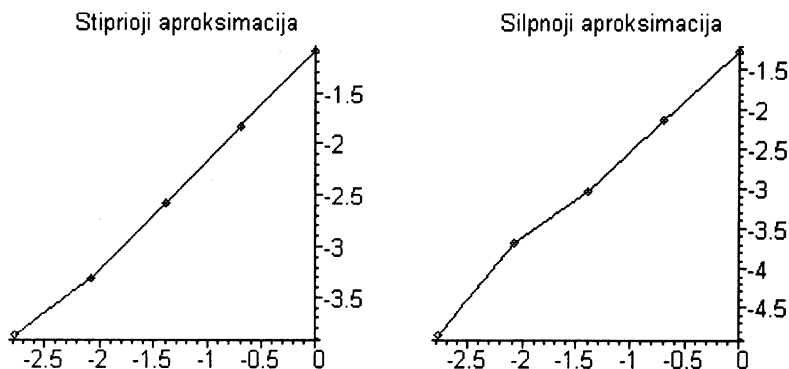
$$e_{\Delta t}^{\text{silpnasis}} = |E(X(T)) - E(X_L)|.$$

1 lentelėje yra pateikti stipriosios ir silpnosios skaitmeninių aproksimacijų paklaidų intervalo $[t_0; T]$ galo taške T įvertinimai, apskaičiuoti naudojant 100 Brauno judėjimo kelių esant pokyčiui $\delta t = 2^{-5}$ ir žingsniams: $\Delta t = 32 \cdot \delta t$, $\Delta t = 16 \cdot \delta t$, $\Delta t = 8 \cdot \delta t$, $\Delta t = 4 \cdot \delta t$, $\Delta t = 2 \cdot \delta t$.

Iš 1 lentelės matyti, kad didesnis laiko žingsnis Δt sąlygoja didesnę stipriąją ir silpnąją paklaidas.

1 lentelė. Stipriosios ir silpnosios aproksimacijos paklaidos

Paklaidos tipas	Laiko žingsnis (Δt)				
	$2 \cdot \delta t$	$4 \cdot \delta t$	$8 \cdot \delta t$	$16 \cdot \delta t$	$32 \cdot \delta t$
Stiprioji	0,020804	0,036493	0,075973	0,160470	0,338146
Silpoji	0,007784	0,024995	0,048215	0,116515	0,273428



2 pav. Stipriosios ir silpnosios aproksimacijos paklaidos.

2 pav. grafiškai pavaizduotos skaitmeninių aproksimacijų paklaidos intervalo $[t_0; T]$ galo taške T , $\ln - \ln$ skalėje. Grafikas vizualiai patvirtina prielaidą, kad stiprioji ir silpnoji konvergavimo eilė gali būti laikoma lygia 1. Be to, naudodami tiesinį regresijos modelį:

$$\ln e_{\Delta t}^{\text{stiprusis}} \approx \ln c + \gamma \cdot \ln \Delta t,$$

$$\ln e_{\Delta t}^{\text{silpnasis}} \approx \ln c + \gamma \cdot \ln \Delta t,$$

gauname

$$\ln e_{\Delta t}^{\text{stiprusis}} \approx -1,12338 + 1,018204 \cdot \ln \Delta t,$$

$$\ln e_{\Delta t}^{\text{silpnasis}} \approx -1,2732 + 1,24898 \cdot \ln \Delta t.$$

Testo $H_0: \gamma = 0$ p -reikšmė yra mažesnė už 0,0004. Todėl galime tvirtinti, kad $\gamma \neq 0$. Šie samprotavimai taip pat parodo, kad aukštesnės eilės Milšteino skaitmeninės aproksimacijos stipriojo ir silpnojo konvergavimo lygis yra nemažesnis už 1.

Rezultatų aptarimas

Stochastinis medynų savaiminio išsiretinimo modelis gerai atitinka stebėjimo duomenis gautus tiriant pastovius medynų barelius. Vadinasi, stochastinis medynų savaiminio išsiretinimo modelis yra priimtinas planuojant ūkinę veiklą.

Aukštesnės eilės Milšteino skaitmeninė aproksimacija turi aukštą stipriojo ir silpnojo konvergavimo lygį, kuris viršija 1.

Literatūra

- [1] H. Bi, The self-thinning surface, *For. Sci.*, 47(3), 361–370 (2001).
- [2] J. Fridman, G. Stahl, A Three-step approach for modelling tree mortality in Swedish forests, *Scand. J. For. Res.*, 16, 455–466 (2001).
- [3] D.J. Higham, An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations, *SIAM Review*, 43(3), 525–546 (2001).
- [4] P. Rupšys, *Matematinis Modeliavimas*, Kaunas (1997).

Convergence of numerical solution of stochastic differential equation for the self-thinning process

P. Rupšys

For theoretical and practical analysis of the self-thinning process we use stochastic differential equation, which take the form:

$$dN(t) = N(t) (\alpha - \beta \ln N(t)) dt + \mu N(t) dW(t), N(t_0) = N_0, t_0 \leq t \leq T,$$

where N – tree per hectare (stem/ha), t – stand age, $W(t)$ – scalar standard Brownian motion, N_0 – not random, α, β and μ are parameters – real constants. In this paper from a practical viewpoint we apply a simple numerical method for solution of the stochastic differential equations by the Milstein's higher order method. The programs for numerical simulation are written on MAPLE. The convergence of this model is explored too.