

Внутренние оснащения неголономной гиперповерхности с m -мерными образующими аффинного пространства A_n

Казимерас НАВИЦКИС (VU)
e-mail: kazimieras.navickis@mif.vu.lt

Пусть аффинное пространство A_n отнесено к подвижному реперу (\vec{M}, \vec{e}_i) , дифференциальные уравнения инфинитезимального смещения которого имеют вид $(i, j, \dots = 1, \dots, n)$

$$d\vec{M} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_j^i \vec{e}_j.$$

Пусть $Gr(m, n)$ – многообразие Грассмана пространства A_n . Сопоставляя каждой m -плоскости $l_m \in Gr(m, n)$ гиперплоскость $\Pi_{n-1} \in Gr(n-1, n)$, проходящую через эту m -плоскость l_m , мы получим некоторое распределение (поле), которое назовем распределением гиперплоскостей на грассмановом многообразии $Gr(m, n)$ или неголономной гиперповерхностью с m -мерными образующими. Пусть репер выбран так, чтобы $(p, q \dots = 1, \dots, m; \alpha, \beta, \dots = m+1, \dots, n-1)$

$$l_m = (M, \vec{e}_p), \quad \Pi_{n-1} = (l_m, \vec{e}_\alpha).$$

Тогда в частично канонизированном репере рассматриваемое распределение определится следующими дифференциальными уравнениями

$$\omega_\alpha^n = \lambda_{\alpha\beta} \omega^\beta + \lambda_\alpha \omega^n + \mu_{\alpha\beta}^p \omega_p^\beta + \mu_\alpha^p \omega_p^n \quad (1)$$

и соответствующими внешними квадратичными уравнениями.

Пусть

$$a_{\alpha\beta} = \lambda_{(\alpha\beta)}, \quad r_{\alpha\beta} = \lambda_{[\alpha\beta]}.$$

Определитель

$$\lambda_0 = \det ||\lambda_{\alpha\beta}||$$

является относительным инвариантом, так как $(a, b, \dots = m + 1, \dots, n)$

$$d \ln |\lambda_0| - 2\omega_\alpha^\alpha + (n - m - 1)\omega_n^n = b_a \omega^a + b_a^p \omega_p^a.$$

Предполагая, что $\lambda_0 \neq 0$, введем систему величин $\overset{*}{\lambda}^{\alpha\beta}$, для которой

$$\overset{*}{\lambda}^{\alpha\gamma} \lambda_{\gamma\beta} = \delta_\beta^\alpha, \quad \lambda_{\alpha\gamma} \overset{*}{\lambda}^{\gamma\beta} = \delta_\alpha^\beta.$$

Распределение гиперплоскостей (1) будем называть оснащенным (или нормализованным) в смысле Нордена-Гринцевичюса, если к каждой m -плоскости l_m этого распределения присоединены два подпространства

$$\Pi_I: x^\alpha = L^\alpha x^n$$

(нормальное пространство первого рода) и

$$\Pi_{II}: L_\alpha x^\alpha = 1, \quad x^p = L_\alpha^p x^\alpha, \quad x^n = 0$$

(нормальное пространство второго рода) аффинного пространства A_n .

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Уравнения

$$\begin{aligned} \varrho_\alpha &= -(\lambda_\alpha + \lambda_{\alpha\beta} L^\beta), \\ \varrho_\alpha^p &= -(\mu_\alpha^p + \mu_{\alpha\beta}^p L^\beta) \end{aligned} \quad (2)$$

устанавливают соответствие между нормальными пространствами Π_I и Π_{II} . Величины ϱ_α и ϱ_α^p определяют нормальное пространство Π_{II} .

Система величин

$$\lambda^\alpha = -\overset{*}{\lambda}^{\alpha\beta} \lambda_\beta$$

определяет внутреннее нормальное пространство первого рода.

Определитель

$$a_0 = \det ||a_{\alpha\beta}||$$

является относительным инвариантом, поскольку

$$d \ln |a_0| - 2\omega_\alpha^\alpha + (n - m - 1)\omega_n^n = a_a \omega^a + a_a^p \omega_p^a.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Каждая из систем величин*

$$B^\alpha = -\frac{1}{n-m+1} \overset{*}{\lambda}{}^{\beta\alpha} b_\beta,$$

$$a^\alpha = -\frac{1}{n-m+1} \overset{*}{\lambda}{}^{\beta\alpha} a_\beta$$

определяет внутреннее нормальное пространство первого рода.

При $a_0 \neq 0$ построим тензор $\overset{*}{a}{}^{\alpha\beta}$, который связан с тензором $a_{\alpha\beta}$ соотношениями

$$a_{\alpha\gamma} \overset{*}{a}{}^{\gamma\beta} = \delta_\alpha^\beta, \quad \overset{*}{a}{}^{\alpha\gamma} a_{\gamma\beta} = \delta_\beta^\alpha.$$

Из дифференциальных уравнений

$$\nabla \lambda_{\alpha\beta} + \lambda_{\alpha\beta} \omega_n^n = \lambda_{\alpha\beta a} \omega^a + \lambda_{\alpha\beta a}^p \omega_p^a$$

следует, что

$$\nabla \lambda_{\alpha\beta\gamma} + \lambda_{\alpha\beta\gamma} \omega_n^n - (\lambda_{\alpha\beta} \lambda_{\epsilon\gamma} + \lambda_{\alpha\gamma} \lambda_{\epsilon\beta} + \lambda_{\beta\gamma} \lambda_{\alpha\epsilon}) \omega_n^\epsilon = \lambda_{\alpha\beta\gamma a} \omega^a + \lambda_{\alpha\beta\gamma a}^p \omega_p^a.$$

Свертка

$$\gamma_\alpha = \frac{1}{2} \overset{*}{a}{}^{\gamma\beta} (\lambda_{\alpha\beta\gamma} + \lambda_{\alpha\gamma\beta} + \lambda_{\beta\alpha\gamma} + \lambda_{\gamma\alpha\beta} - \lambda_{\beta\gamma\alpha} - \lambda_{\gamma\beta\alpha})$$

удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$\nabla \gamma_\alpha - (n-m+1) \lambda_{\alpha\beta} \omega_n^\beta = \gamma_{\alpha a} \omega^a + \gamma_{\alpha a}^p \omega_p^a.$$

При помощи величин a_α и γ_α построим величины

$$\beta_\alpha = \frac{1}{2} (a_\alpha + \gamma_\alpha).$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Геометрические объекты*

$$\beta^\alpha = -\frac{1}{n-m+1} \overset{*}{a}{}^{\alpha\beta} \beta_\beta,$$

$$\gamma^\alpha = -\frac{1}{n-m+1} \overset{*}{\lambda}{}^{\alpha\beta} \gamma_\beta$$

определяют внутренние нормальные пространства первого рода.

Внутреннему нормальному пространству первого рода

$$M^\alpha = \frac{1}{2} (\lambda^\alpha + \gamma^\alpha)$$

в соответствии (2) соответствует нормальное пространство второго рода, определенное геометрическим объектом $\{m_\alpha, m_\alpha^p\}$:

$$m_\alpha = -\frac{1}{2} \left(\lambda_\alpha - \frac{\gamma_\alpha}{n-m+1} \right),$$

$$m_\alpha^p = -\frac{1}{2} \left(\mu_\alpha^p - \bar{C}_\alpha^p + \mu_{\alpha\beta}^p \gamma^\beta \right),$$

где

$$\bar{C}_\alpha^p = - \left(\mu_{\alpha\beta}^p \lambda^\beta + \mu_\alpha^p \right).$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Геометрический объект*

$$S^\alpha = \beta^\alpha + \overset{*}{a}^{\beta\alpha} m_\beta$$

определяет внутреннее нормальное пространство первого рода.

Intrinsic normalizations of a nonholonomic hypersurface with m -dimensional generators in affine space A_n

K. Navickis

In this article intrinsic normalizations of a nonholonomic hypersurface with m -dimensional generators in affine space A_n is constructed in an invariant form.