

Геометрия распределения флагов четномерного аффинного пространства

Казимерас НАВИЦКИС (VU)

e-mail: kazimieras.navickis@mif.vu.lt

Если N -мерное аффинное пространство A_N ($n = 2m + 2$; $m = 1, 2, \dots, n$) отнесено к подвижному реперу (M, \vec{e}_i) ($i, j, \dots = 1, \dots, N$), то инфинитезимальное смещение такого репера определяется дифференциальными уравнениями

$$d\vec{M} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_j^i \vec{e}_j.$$

Множество $Gr(m, N)$ всех m -плоскостей пространства A_N называется многообразием Грассмана. Флагом (возрастающим) типа $(m, m + 1)$ в пространстве A_N называется такая пара $(l_m, \Pi_{m+1}) \in Gr(m, N) \times Gr(m + 1, N)$, что $l_m \subset \Pi_{m+1}$. Распределением K_{m+1} флагов типа $(m, m + 1)$ на грассмановом многообразии $Gr(m, N)$ назовем распределение $(m + 1)$ -плоскостей Π_{m+1} на многообразии $Gr(m, N)$, каждая $(m + 1)$ -плоскость которого проходит через соответствующую m -плоскость l_m .

Пусть репер (M, \vec{e}_i) выбран так, что $l_m = (M, \vec{e}_p)$, $\Pi_{m+1} = (l_m, \vec{e}_N)$, где $p, q, \dots = 1, 2, \dots, m$. В частично канонизированном репере распределение K_{m+1} флагов типа $(m, m + 1)$ определяется дифференциальными уравнениями ($\alpha, \beta, \dots = m + 1, \dots, 2m + 1$)

$$\omega_N^\alpha = \lambda_\beta^\alpha \omega^\beta + \lambda^\alpha \omega^N + \lambda_\beta^{\alpha p} \omega_p^\beta + \lambda^{\alpha p} \omega_p^N$$

и соответствующими внешними квадратичными уравнениями.

Распределение K_{m+1} назовем оснащенным (или нормализованным) в смысле Нордена–Гриневичюса, если к каждой m -плоскости l_m этого распределения присоединены два подпространства $\Pi_I(l_m)$ и $\Pi_{II}(l_m)$ пространства A_N , причем первое из них (нормальное пространство первого рода) определяется уравнением

$$\Pi_I(l_m): x^N = \nu_\alpha x^\alpha,$$

а второе (нормальное пространство второго рода) – уравнениями

$$\Pi_{II}(l_m): \nu x^N = 1, \quad x^p = \nu^p x^N, \quad x^\alpha = 0.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Величины

$$V = -\frac{1}{m+1}(\lambda_\alpha^\alpha + \lambda^\alpha \nu_\alpha), \quad (1)$$

$$V^p = -\frac{1}{m+1}(\lambda_\alpha^{\alpha p} + \lambda^{\alpha p} \nu_\alpha) \quad (2)$$

определяют нормальное пространство второго рода распределения флагов K_{m+1} .

Отметим, что уравнения (1) и (2) устанавливают соответствие Бомпф-Яни-Пантази между нормальными пространствами $\Pi_I(l_m)$ и $\Pi_{II}(l_m)$.

Определитель

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda^{m+1} & \lambda^{m+1,1} & \dots & \lambda^{m+1,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{2m+1} & \lambda^{2m+1,1} & \dots & \lambda^{2m+1,m} \end{vmatrix}$$

является относительным инвариантом. Предполагая, что $\Lambda \neq 0$, введем величины A_α , B_α^p , C_α , $M_{p\alpha}$, $N_{p\alpha}^q$ и $K_{p\alpha}$, связанные с величинами λ_β^α , λ^α , $\lambda_\beta^{\alpha p}$ и $\lambda^{\alpha p}$ соотношениями

$$\begin{aligned} \lambda^\alpha C_\beta + \lambda^{\alpha p} K_{p\beta} &= \delta_\beta^\alpha, \\ \lambda_\beta^\alpha + \lambda^\alpha A_\beta + \lambda^{\alpha p} M_{p\beta} &= 0, \\ \lambda_\beta^{\alpha q} + \lambda^\alpha B_\beta^q + \lambda^{\alpha p} N_{p\beta}^q &= 0, \\ C_\alpha \lambda^\alpha &= 1, & K_{p\alpha} \lambda^{\alpha q} &= \delta_p^q, \\ A_\alpha &= -C_\beta \lambda_\alpha^\beta, & M_{p\alpha} &= -K_{p\beta} \lambda_\alpha^\beta, \\ B_\alpha^p &= -C_\beta \lambda_\alpha^{\beta p}, & N_{p\alpha}^q &= -K_{p\beta} \lambda_\alpha^{\beta q}, \\ C_\alpha \lambda^{\alpha p} &= 0, & K_{p\alpha} \lambda^\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Геометрический объект

$$\varrho_\alpha = \frac{1}{m+1} (A_\alpha + N_{p\alpha}^p - \nu C_\alpha - \nu^p K_{p\alpha})$$

определяет нормальное пространство первого рода $\Pi_I(l_m)$.

Система величин

$$*_\alpha = -\frac{1}{m+1} (A_\alpha + N_{p\alpha}^p)$$

позволяет установить соответствие между нормальными пространствами $\Pi_I(l_m)$ и $\Pi_{II}(l_m)$:

$$\begin{aligned} \nu &= -(m+1)\lambda^\alpha(\varrho_\alpha + \overset{*}{a}_\alpha), \\ \nu^p &= -(m+1)\lambda^{\alpha p}(\varrho_\alpha + \overset{*}{a}_\alpha). \end{aligned}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Величины*

$$\begin{aligned} l &= \frac{m+1}{m(m+2)}(\overset{*}{a}_\alpha \lambda^\alpha - \lambda^\alpha_\alpha), \\ l^p &= \frac{m+1}{m(m+2)}(\overset{*}{a} \lambda^{\alpha p} - \lambda^{\alpha p}_\alpha) \end{aligned}$$

определяют внутреннее нормальное пространство $\Pi_{II}(l_m)$. Величины

$$H_\alpha = -\frac{1}{m+1}(lC_\alpha + l^p K_{p\alpha}) - \overset{*}{a}_\alpha$$

определяют внутреннее нормальное пространство $\Pi_I(l_m)$.

Величины H_α удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\nabla H_\alpha + H_\alpha \omega_N^N + \omega_\alpha^N = H_{\alpha\beta} \omega^\beta + \bar{H}_\alpha \omega^N + H_{\alpha\beta}^p \omega_p^\beta + H_\alpha^p \omega_p^N.$$

Распределение флагов K_{m+1} будем называть оснащенным в смысле Э. Картана, если каждой m -плоскости l_m этого распределения отнесена m -плоскость $C_m(l_m)$, не пересекающая $(m+1)$ -плоскость Π_{m+1} :

$$C_m(l_m): m_\alpha x^\alpha = 1, \quad x^p = m_\alpha^p x^\alpha, \quad x^N = \bar{m}_\alpha x^\alpha.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Система величин $\{H_\alpha, \tilde{H}_\alpha, \tilde{H}_\alpha^p\}$, где*

$$\begin{aligned} \tilde{H}_\alpha &= H_\alpha H_\beta \lambda^\beta - \bar{H}_\alpha, \\ \tilde{H}_\alpha^p &= H_\alpha H_\beta \lambda^{\beta p} - H_\alpha^p, \end{aligned}$$

образует геометрический объект, определяющий внутреннее оснащение распределения K_{m+1} в смысле Э. Картана.

Распределение флагов K_{m+1} будем называть оснащённым в смысле Э. Бортолотти, если каждой m -плоскости l_m этого распределения присоединена $(m+1)$ -плоскость

$$B_{m+1}(l_m) : \begin{cases} K_\alpha x^\alpha + K x^N = 1, \\ x^p = K_\alpha^p x^\alpha + K^p x^N \end{cases}$$

пространства A_N , не проходящая через m -плоскость l_m .

Имеет место следующая теорема.

Теорема 5. *Геометрический объект $\{G_\alpha, G_\alpha^p, l, l_\alpha^p\}$, где*

$$G_\alpha = \tilde{H}_\alpha - H_\alpha l,$$

$$G_\alpha^p = \tilde{H}_\alpha^p - H_\alpha^p l^p,$$

определяет инвариантное внутреннее оснащение распределения K_{m+1} в смысле Э. Бортолотти.

Geometry of distribution of flags in an even-dimensional affine space

K. Navickis

In this article the problem of intrinsic normalizations of distribution of flags in an even-dimensional affine space is considered.