VILNIAUS UNIVERSITETAS

ROKAS TAMOŠIŪNAS

# LERCHO IR PERIODINIŲ HURVICO DZETA FUNKCIJŲ REIKŠMIŲ PASISKIRSTYMAS

Daktaro disertacijos santrauka

Fiziniai mokslai, matematika (01P)

Vilnius 2018

Disertacija rengta 2013–2017 metais Vilniaus universitete.

**Mokslinis vadovas** – prof. dr. Ramūnas Garunkštis (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

**Mokslinis konsultantas** – prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

**Disertacija ginama viešame disertacijos gynimo tarybos posėdyje:**

**Pirmininkas** – prof. habil. dr. Eugenijus Manstavičius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

**Nariai:**

- Prof. habil. dr. Artūras Dubickas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P);
- Prof. Łukasz Pańkowski (Poznanės Adomo Mickevičiaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P);
- Prof. habil. dr. Konstantinas Pileckas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P);
- Prof. dr. Jonas Šiaulys (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

Disertacija bus ginama viešame disertacijos gynimo tarybos posėdyje 2018 m. rugsėjo mėn. 21 d., 15 val., VU Matematikos ir informatikos fakultete, 102 auditorijoje, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius, Lietuva.

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2018 m. rugpjūčio 20d.

Su disertacija galima susipažinti Vilniaus universiteto bibliotekoje ir VU interneto svetainėje – *https://www.vu.lt/naujienos/ivykiu-kalendorius*.

VILNIUS UNIVERSITY

ROKAS TAMOŠIŪNAS

# VALUE DISTRIBUTION OF LERCH AND PERIODIC HURWITZ ZETA-FUNCTIONS

Summary of doctoral dissertation

Physical sciences, mathematics (01P)

Vilnius 2018

Doctoral dissertation was written in 2013–2017 at Vilnius University.

**Scientific supervisor** – prof. dr. Ramūnas Garunkštis (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P).

**Scientific adviser** – prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P).

**The defence of dissertation will take place at the public meeting of the council:**

**Chairman** – prof. habil. dr. Eugenijus Manstavičius (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P).

**Members:**

- Prof. habil. dr. Artūras Dubickas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P);
- Prof. Łukasz Pańkowski (Adam Mickiewicz University in Poznań, Physical sciences, Mathematics – 01P);
- Prof. habil. dr. Konstantinas Pileckas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P);
- Prof. dr. Jonas Šiaulys (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P).

The defence of dissertation will take place at the public meeting of the council at 15:00, September 21st, 2018, Vilnius University, Faculty of Mathematics and informatics, lecture room 102, Naugarduko str. 24, LT-03225 Vilnius, Lithuania.

The summary of the dissertation was distributed on August 20th, 2018.

The dissertation is available at the library of Vilnius University and VU website – *https://www.vu.lt/naujienos/ivykiu-kalendorius.*

# 1 Disertacijos mokslinė problema ir tyrimo objektas

Disertacijoje, kuri pristatoma šioje santraukoje, nagrinėjamos Lercho (Lerch) dzeta funkcijos, jos išvestinės ir periodinės Hurvico (*Hurwitz*) dzeta funkcijos nulių savybės. Minėtos dzeta funkcijos yra Rymano (*Riemann*) dzeta funkcijos, apibrėžiamos Dirichlė (*Dirichlet*) eilute

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{1}$$

apibendrinimai. Tegul $s = \sigma + it$, $\sigma, t \in \mathbb{R}$, yra kompleksinis kintamasis. Dirichlė eilutė absoliučiai konverguoja kompleksinėje pusplokštumėje $\sigma > 1$. Rymano dzeta funkcija turi paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu 1 ir yra meromorfiškai pratęsiama į likusią kompleksinės plokštumos dalį funkcine lygtimi.

Tegul $0 < \lambda, \alpha \leqslant 1$. Periodinę seką su periodu $k$ žymėsime $r = (r_m)_{m=0}^{\infty}$, $r_m \in \mathbb{C}$. Kai $\sigma > 1$, tuomet periodinė Hurvico dzeta ir Lercho dzeta funkcijos apibrėžiamos Dirichlė eilutėmis

$$\zeta(s, \alpha; r) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{r_m}{(m+\alpha)^s} \quad \text{ir} \quad L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda m}}{(m+\alpha)^s}.$$

Disertacijos pradžioje pateikiama pagrindinių rezultatų santrauka bendrame problematikos kontekste, aptariami pagrindiniai klasikiniai pasiekimai, susiję su dzeta funkcijų ir jų išvestinių nulių pasiskirstymu. Metodologijos skyrelyje aptariamos pagrindinės disertacijoje naudojamos technikos (Koši argumento principas, Rušė (*Rouché*) teorema, Litlvudo (*Littlewood*) lema, Kronekerio (*Kronecker*) teorema, Jenseno (*Jensen*) ir Stirlingo (*Stirling*) formulės bei Rymano dzeta funkcijos absoliutaus dydžio įverčiai. Pateikiami klasikiniai jų įrodymai. Tolesniuose skyriuose atskirai nagrinėjamos trys pagrindinės tarpusavyje susijusios temos: periodinės Hurvico dzeta funkcijos nulių ir $a$ reikšmių išsidėstymas; Lercho dzeta funkcijos išvestinės nulių išsidėstymas; atskiro Lercho dzeta funkcijos atvejo su lygiais parametrais elgesys.

## 2 Disertacijos tikslai ir pagrindiniai uždaviniai

Pirmasis disertacijos tikslas – išnagrinėti periodinės Hurvico dzeta funkcijos netrivialiųjų nulių ir $a$ reikšmių pasiskirstymą bei Lercho dzeta funkcijos išvestinės nulių pasiskirstymą. Tam reikia rasti asimptotinę nulių skaičiaus iki fiksuoto dydžio formulę ir įvertinant nulių išsidėstymą kritinės tiesės atžvilgiu. Antrasis disertacijos tikslas – ištirti atskirą Lercho dzeta funkcijos atvejį, kai parametrai $\lambda$ ir $\alpha$ yra lygūs.

**Pagrindiniai disertacijoje nagrinėti uždaviniai:**

1. **Periodinės Hurvico dzeta funkcijos nulių išsidėstymas.** Ketvirtame skyrelyje nagrinėjamos neturinčios nulių sritys bei asimptotinė netrivialiųjų periodinės Hurvico dzeta funkcijos nulių skaičiaus formulė. Taip pat įrodoma teorema apie nulių išsidėstymą kritinės tiesės atžvilgiu.

2. **Periodinės Hurvico dzeta funkcijos $a$ reikšmių išsidėstymas.** Penktame skyrelyje rezultatai, gauti nagrinėjant periodinės Hurvico dzeta funkcijos nulius, praplečiami bendresniam periodinės Hurvico dzeta funkcijos $a$ reikšmių atvejui.

3. **Lercho dzeta funkcijos išvestinės nulių išsidėstymas.** Šeštame disertacijos skyrelyje Lercho dzeta funkcijos išvestinės nulių išsidėstymas tyrinėjamas tokia tvarka: randamos neturinčios nulių sritys; apibrėžiami stačiakampiai, kuriose yra trivialieji nuliai; nagrinėjama asimptotinė netrivialiųjų nulių skaičiaus formulė; pateikiama išvada apie nulių išsidėstymą kritinės tiesės atžvilgiu.

4. **Lercho dzeta funkcijos su lygiais parametrais nulių simetriškumas kritinės tiesės atžvilgiu.** Septintame skyrelyje nagrinėjamas atskiras Lercho dzeta funkcijos atvejis, kai parametrai $\lambda$ ir $\alpha$ yra tarpusavyje lygūs. Naudojantis atliktais skaičiavimais samprotaujama, kad šiuo atskiru atveju, netrivialieji nuliai arba yra labai arti kritinės tiesės, arba išsidėsto beveik simetriškai jos atžvilgiu. Minėtas pastebėjimas disertacijoje nagrinėjamas analiziniais metodais ir randamas Speiserio tipo sąryšis tarp Lercho dzeta funkcijos su lygiais parametrais ir jos išvestinės netrivialiųjų nulių.

# 3 Tyrimų metodika

Disertacijoje remtasi klasikiniais kompleksinės analizės rezultatais. Trečiame disertacijos skyrelyje pateikiamos kai kurių dažniau naudojamų klasikinių teoremų, lemų bei formulių formuluotės bei įrodymai.

Sprendžiant disertacijos uždavinius naudotasi Dirichlė eilučių savybėmis, periodinės Hurvico bei Lercho dzeta funkcijų funkcinėmis lygtimis. Remtasi Rušė, Litlvudo, Kronekerio, Jenseno bei Stirlingo idėjomis ir rezultatais.

Visi disertacijos rezultatai, gauti taikant klasikines analizines metodikas, yra nauji ir orginalūs.

# 4 Moksliniai rezultatai

Šiame skyrelyje pateikiami pagrindiniai disertacijos rezultatai. Visur tarkime, kad $T$ tolsta į begalybę.

## 4.1 Periodinės Hurvico dzeta funkcijos nuliai

Nagrinėsime periodinės Hurvico dzeta funkcijos nulius periodinėms sekoms $r = (r_m)_{m=0}^{\infty}$, $r_m \in \mathbb{C}$ su periodu $k$. Pažymėkime

$$d = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : r_n \neq 0\}. \tag{2}$$

Tuomet funkcijų $\zeta(s, \alpha; r)$ ir $r_d^{-1}\zeta(s, \alpha; r)$ nuliai sutampa. Neprarasdami bendrumo tarkime, kad $r_d = 1$.

Periodinę Hurvico dzeta funkciją patogu išreikšti kaip Hurvico dzeta funkcijų sumą:

$$\zeta(s, \alpha; r) = \frac{1}{k^s}\sum_{l=0}^{k-1} r_l \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + (l + \alpha/k))^s} = \frac{1}{k^s}\sum_{l=0}^{k-1} r_l \zeta\left(s, \frac{\alpha + l}{k}\right).$$

Įrodymuose remiamasi funkcine lygtimi

$$\begin{aligned}\zeta(s, \alpha; r) = \frac{1}{k^s}\frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}}\Bigg(&\exp\left(\frac{-\pi i(1-s)}{2}\right)\zeta\left(s, 1; q^+\right) \\ &+ \exp\left(\frac{\pi i(1-s)}{2}\right)\zeta\left(s, 1; q^-\right)\Bigg),\end{aligned} \tag{3}$$

čia

$$q^{\pm}(n) = q^{\pm}(n, \alpha, d; r) = \sum_{l=0}^{k-d-1} r_{l+d} \exp\left(\pm 2\pi i n \frac{\alpha + l + d}{k}\right).$$

Disertacijoje įrodoma, kad egzistuoja nenuliniai minimalūs indeksai

$$j_1 = \min\left\{n \in \mathbb{N} : q^+(n) \neq 0\right\} \text{ ir } j_2 = \min\left\{n \in \mathbb{N} : q^-(n) \neq 0\right\}. \tag{4}$$

Naudojantis Dirichlė eilučių savybėmis, nesunku įsitikinti, kad egzistuoja toks teigiamas $\sigma_1$, su kuriuo $\zeta(s, \alpha; r) \neq 0$ dešiniojoje pusplokštumėje $\sigma > \sigma_1$.

Kompleksinėje plokštumoje apibrėžkime tiesę

$$l:\ (\sigma - 1)\log\frac{j_1}{j_2} - \pi t = \log\left|\frac{q^-(j_2)}{q^+(j_1)}\right|. \tag{5}$$

Atstumą nuo $s$ iki tiesės $l$ žymėsime $\varrho(s, l)$. Sritį taškų, nutolusių nuo tiesės $l$ atstumu $\varepsilon > 0$, žymėsime

$$L_{\varepsilon}(l) = \left\{s \in \mathbb{C} :\ \varrho(s, l) < \varepsilon\right\}.$$

Pradėsime nuo teoremos, kuri apibrėžia neturinčią nulių sritį kairiojoje kompleksinės plokštumos dalyje.

**1 teorema.** *Egzistuoja konstantos* $\sigma_0 \leqslant 0$ *ir* $\varepsilon_0 > 0$ *tokios, kad* $\zeta\left(s, \alpha; r\right) \neq 0$*, kai* $\sigma < \sigma_0$ *ir* $s \notin L_{\varepsilon_0}(l)$*.*

Periodinės Huvico dzeta funkcijos $\zeta\left(s, \alpha; r\right)$ nulį $\rho = \beta + i\gamma$ vadinsime *trivialiuoju*, jei šis priklauso sričiai $L_{\varepsilon_0}(l)$. Visi kiti nuliai (vadinami *netrivialiaisiais*) yra išsidėstę juostoje $\sigma_0 \leq \beta \leq \sigma_1$. Naudojantis Rušė teorema, nesunku parodyti, kad yra be galo daug netrivialiųjų nulių.

**1 teiginys.** *Tegul* $0 < \alpha \leqslant 1$*. Tuomet pakankamai dideliems* $b$ *gauname*

$$\sum_{|\gamma|<T} (b+\beta) = \left(b + \frac{1}{2}\right) \frac{T}{\pi} \log \frac{T}{2\pi e} + \frac{T}{2\pi} \left(\log\left|q^{+}\left(j_1\right)\right| + \log\left|q^{-}\left(j_2\right)\right|\right)$$
$$+ \frac{T}{\pi} b \log \frac{k}{\alpha + d} + O(\log T).$$

Pažymėkime $N\left(T, k, \alpha\right)$ netrivialių nulių $\rho$, kuriems $|\gamma| \leqslant T$, skaičių (įskaitant kartotinumus). Paskutiniame teiginyje vietoje $b$ įstatę $b+1$ ir atėmę gauname kitą teoremą.

**2 teorema.** *Galiojant 1 teiginio sąlygoms*

$$N\left(T, k, \alpha\right) = \frac{T}{\pi} \log \frac{Tk}{2\pi e\left(\alpha + d\right)} + O\left(\log T\right).$$

Naudojantis išraiška

$$\sum_{\tau<\gamma\leq T} \left(\beta - \frac{1}{2}\right) = \sum_{\tau<\gamma\leq T} (\beta + b) - \left(\frac{1}{2} + b\right) \sum_{\tau<\gamma\leq T} 1,$$

2 teorema bei 1 teiginiu nesunku įsitikinti, kad periodinės Hurvico dzeta funkcijos nuliai yra susispietę apie kritinę tiesę $\sigma = 1/2$.

**3 teorema.** *Galiojant 1 teiginio sąlygoms*

$$\sum_{|\gamma|<T} \left(\beta - \frac{1}{2}\right) = -\frac{T}{2\pi} \log \frac{k}{(\alpha + d)} + \frac{T}{2\pi} \left(\log\left|q^{+}\left(j_1\right)\right| + \log\left|q^{-}\left(j_2\right)\right|\right) + O\left(\log T\right).$$

## 4.2 Periodinės Hurvico dzeta funkcijos $a$ reikšmės

Lygties $\zeta\left(s, \alpha; r\right) = a$ sprendinius, kai $a \in \mathbb{C}$, vadinsime $a$ reikšmėmis. Praeitame skyrelyje minėti rezultatai gali būti praplėsti periodinės Hurvico dzeta funkcijos $a$ reikšmių išsidėstymui apibūdinti. Konstruojant įrodymus kritinės juostos, esančios viršutinėje ir apatinėje pusplokštumėse, bus nagrinėjamos atskirai. Atvejis, kai $a = 0$, jau išnagrinėtas, todėl tarkime, kad $a \neq 0$. Naudosimės tais pačiais $d, q^{\pm}, j_1, j_2$ apibrėžimais: (2), (3) ir (4).

Kaip ir praeitame skyrelyje, $\varrho\left(s,l\right)$ žymėsime atstumą nuo taško $s$ iki tiesės $l$, apibrėžtos (5).

**4 teorema.** *Egzistuoja toks* $\varepsilon\left(a,\sigma\right) > 0$ *ir* $\sigma_0 = \sigma_0\left(r\right) < 0$*, kad* $\zeta\left(s,\alpha;r\right) \neq a$*, jei* $\sigma < \sigma_0$ *ir* $\varrho\left(s,l\right) > \varepsilon$*.*

Trivialiosiomis $a$ reikšmėmis vadinsime lygties $\zeta\left(s,\alpha;r\right) = a$ sprendinius, kuriems $\varrho\left(s,l\right) < \varepsilon$. Pažymėkime $\varrho = \beta + i\gamma$ visus kitus funkcijos $\zeta\left(s,\alpha;r\right) - a$ nulius. Juos vadinsime netrivialiosiomis $a$ reikšmėmis. $N\left(T,k\right)$ žymėsime skaičių tokių netrivialiųjų $a$ reikšmių, kurioms $|\gamma| \leqslant T$ (įskaitant kartotinumus).

Remiantis $\zeta(s,\alpha;r)$ Dirichlė eilučių savybėmis, egzistuoja toks $\sigma'\left(\alpha;r\right)$, kad visiems $\sigma > \sigma' > 0$ periodinė Hurvico dzeta funkcija neturi $a$ reikšmių.

**5 teorema.** *Tegul* $a \neq 0$ *yra fiksuotas kompleksinis skaičius. Tuomet pakankamai dideliems* $b \in \mathbb{R}$ *gauname*

$$\begin{aligned}2\pi \sum_{0<t<T} \left(b+\beta\right) = &- T\log\left|a - r_0\alpha^{-c}\right| + Tb\log k + \left(b+\frac{1}{2}\right)T\log\frac{T}{2\pi e}\\ &- T\left(1+b\right)\log j_2 + T\log\left|q^{-}\left(j_2\right)\right| + O\left(\log T\right)\end{aligned}$$

*ir*

$$\begin{aligned}2\pi \sum_{-T<t<0} \left(b+\beta\right) = &- T\log\left|a - r_0\alpha^{-c}\right| + Tb\log k + \left(b+\frac{1}{2}\right)T\log\frac{T}{2\pi e}\\ &- T\left(1+b\right)\log j_1 + T\log\left|q^{+}\left(j_1\right)\right| + O\left(\log T\right).\end{aligned}$$

Tegul $N^{+}\left(\lambda,\alpha,T\right)$ ir $N^{-}\left(\lambda,\alpha,T\right)$ žymi netrivialiųjų $a$ reikšmių skaičių teigiamojoje ir neigiamojoje pusplokštumėse.

**6 teorema.** *Galiojant 5 teoremos sąlygoms*

$$\begin{aligned}N^{+}\left(T,k\right) &= \frac{T}{2\pi}\log\frac{Tk}{2\pi e j_2} + O\left(\log T\right),\\ N^{-}\left(T,k\right) &= \frac{T}{2\pi}\log\frac{Tk}{2\pi e j_1} + O\left(\log T\right).\end{aligned}$$

Paskutinį rezultatą padauginę iš $b + \frac{1}{2}$ ir atėmę iš 5 teoremos rezultato gauname dar vieną teoremą.

**7 teorema.** *Galiojant 5 teoremos sąlygoms turime*

$$2\pi \sum_{0<t<T} \left(\beta - \frac{1}{2}\right) = T \log \frac{|q^- (j_2)|}{|a - r_0\alpha^{-c}| \sqrt{kj_2}} + O(\log T),$$
$$2\pi \sum_{-T<t<0} \left(\beta - \frac{1}{2}\right) = T \log \frac{|q^+ (j_1)|}{|a - r_0\alpha^{-c}| \sqrt{kj_1}} + O(\log T).$$

## 4.3 Lercho dzeta funkcijos išvestinės

Kaip visuomet tarkime, kad $T$ tolsta į begalybę ir $0 < \lambda, \alpha \leqslant 1$. Sveikąją skaičiaus $\alpha$ dalį žymėsime $[\alpha]$, o trupmeninę – $\{\alpha\}$, taigi $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$. Lercho dzeta funkcija analiziškai praplečiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastąjį polių taške $s = 1$, naudojantis funkcine lygtimi

$$L(\lambda, \alpha, 1-s) = (2\pi)^{-s}\, \Gamma(s) \left( \exp\left(\frac{\pi i s}{2} - 2\pi i \alpha\lambda\right) L(-\alpha, \lambda, s) \right.$$
$$\left. + \exp\left(-\frac{\pi i s}{2} + 2\pi i \alpha (1 - \{\lambda\})\right) L(\alpha, 1 - \{\lambda\}, s) \right).$$

$L(\lambda, \alpha, s)$ nulių išsidėstymas (pavyzdžiui, kai $\lambda$ transcendentusis) stipriai skiriasi nuo $\zeta(s)$ funkcijos nulių elgesio. Funkcijos $L(\lambda, \alpha, s)$ nulių skaičių srityje $\sigma > \sigma'$, $0 \leq t \leq T$ pažymėkime $N(\sigma', T; \alpha, \lambda)$. Tičmaršas (*Titchmarsh*) įrodė, kad esant Rymano dzeta funkcijai

$$N(\sigma, T) := N(\sigma, T; 1, 1) = o(T),$$

jei $\sigma > 1/2$. Panašiai Lercho dzeta funkcijai galioja

$$N(\sigma, T; \alpha, \lambda) \asymp T,$$

jei $1/2 < \sigma < 1 + 0{,}6\alpha$ ir $\alpha$ yra transcendentusis.

Bendru atveju Lercho dzeta funkcijai Rymano hipotezė negalioja. Funkcinė lygtis nėra simetrinės formos, todėl akivaizdu, kad netrivialieji nuliai nėra simetriškai išsidėstę kritinės tiesės atžvilgiu. Kita vertus, Garunkštis ir Štoidingas (*Steuding*) įrodė, kad dauguma $L(\lambda, \alpha, s)$ netrivialiųjų nulių yra išsidėstę arti kritinės tiesės. Toliau pristatysime minėto rezultato analogą Lercho dzeta funkcijos išvestinei.

Berndtas (*Berndt*) 1970 metais įrodė, kad Rymano dzeta funkcijai teisinga lygybė

$$N(T) = N_k(T) + \frac{T \log 2}{2\pi} + O(\log T).$$

Nagrinėsime šio tvirtinimo analogą Lercho dzeta išvestinei, kurią žymėsime

$$L'(\lambda, \alpha, s) = \frac{\partial}{\partial s} L(\lambda, \alpha, s).$$

Visų pirma rasime sritis, kuriose Lercho dzeta išvestinė neturi nulių, ir apibrėšime trivialiuosius nulius. Pradėkime nuo srities dešiniojoje pusplokštumėje, kuri neturi nulių.

**8 teorema.** *Jei* $0 < \alpha < 1$, $t \in \mathbb{R}$ *ir*

$$\sigma > \max\left\{2, \left(\log\log\alpha^{-1} - \log\left(\frac{1}{2e} + \frac{3\log 2 + 2}{4}\right)\right)(\log\alpha)^{-1}\right\},$$

*tuomet* $L'(\lambda, \alpha, \sigma + it) \neq 0$. *Taip pat* $L'(\lambda, 1, \sigma + it) \neq 0$, *kai* $\sigma > 3.6$.

Apibrėžkime tiesę

$$l: \quad \sigma = 1 - \pi t\left(\log\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)\right)^{-1}, \quad \lambda \neq \frac{1}{2}, \lambda \neq 1. \tag{6}$$

Kaip visuomet atstumą nuo tiesės $l$ iki taško $s$ žymėsime $d(s, l)$. Toliau nagrinėsime nulių neturinčias sritis kairiojoje pusplokštumėje.

Tegul

$$s_k := \begin{cases} \sigma_k + i\frac{1}{\pi}(\sigma_k - 1)\log\frac{1-\lambda}{\lambda}, & \text{kai } \lambda \neq \frac{1}{2}, \lambda \neq 1, \\ 2(1 - \alpha + k), & \text{kitu atveju;} \end{cases} \tag{7}$$

čia

$$\sigma_k = 1 + \frac{-2\alpha - 2k + 1}{1 + \pi^{-2}\log^2\frac{1-\lambda}{\lambda}}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Šie $s_k$ sukonstruoti taip, kad priklausytų tiesei $l$. Remdamiesi Rušė teorema, įrodėme, kad tikrieji Lercho dzeta funkcijos išvestinės trivialieji nuliai yra lygiagretainiuose, apibrėžtuose apie taškus $s_k$.

**9 teorema.** *Tegul* $\lambda \neq \frac{1}{2}, \lambda \neq 1$. *Tuomet bet kokiam* $\varepsilon > 0$ *egzistuoja toks* $\sigma' = \sigma'(\varepsilon) < 0$, *kad yra vienas nulis kiekviename lygiagretainyje, kurio viršūnės* $(s_k + s_{k\pm1})/2 \pm \varepsilon$, *jei* $\sigma_k < \sigma'$. *Taip pat nėra kitų nulių pusplokštumėje* $\sigma < \sigma'$.

Panašus rezultatas gautas parametrams $\lambda = \frac{1}{2}$ bei $\lambda = 1$.

**10 teorema.** *Jei* $\lambda = \frac{1}{2}$ *arba* $\lambda = 1$, *tuomet egzistuoja toks* $\sigma''$, *kad visiems* $\sigma \leqslant \sigma''$ *yra vienas nulis intervale* $(-2(n+\alpha) - 1, -2(n+\alpha) + 1)$, *gulintis ant realiosios ašies, jei* $n > 1/2 - \sigma''/2 - \alpha$, $n \in \mathbb{N}$. *Taip pat nėra kitų nulių pusplokštumėje* $\sigma \leqslant \sigma''$.

Trivialiųjų Lercho dzeta funkcijos nulių, nutolusių nedidesniu nei $R$ atstumu nuo 0, skaičių (įskaitant kartotinumus) žymėsime $N_{triv.}(\lambda, \alpha, R)$, o Lercho dzeta funkcijos išvestinės atveju – $N'_{triv.}(\lambda, \alpha, R)$.

**1 išvada.** *Tegul* $0 < \lambda, \alpha \leqslant 1$. *Tuomet*

$$\left| N_{triv.}\left(\lambda, \alpha, R\right) - N_{triv.}^{'}\left(\lambda, \alpha, R\right) \right| \ll 1, \quad R \to \infty.$$

Netrivialiųjų Lercho dzeta funkcijos išvestinės nulių $\rho' = \beta' + i\gamma'$ skaičių (įskaitant kartotinumus) iki aukščio $T$ žymėsime $N'\left(\lambda, \alpha, T\right)$.

**11 teorema.** *Tegul* $0 < \lambda, \alpha \leqslant 1$. *Tuomet*

$$N'\left(\lambda, \alpha, T\right) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi e \lambda \left(\left[\alpha\right] + \alpha\right)} + O\left(\log T\right).$$

Netrivialiųjų $L'\left(\lambda, \alpha, s\right)$ nulių skaičius apatinėje pusplokštumėje nesunkiai gaunamas taikant formulę $L'\left(\lambda, \alpha, s\right) = \overline{L'\left(1 - \{\lambda\}, \alpha, \overline{s}\right)}$.

Paskutinė šio skyriaus teorema įrodo, kad Lercho dzeta funkcijos išvestinės nuliai yra išsidėstę apie kritinę tiesę $\sigma = \frac{1}{2}$. Apibrėžkime logaritminį integralą

$$\mathrm{li}\left(x\right) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

**12 teorema.** *Tegul* $0 < \lambda, \alpha \leqslant 1$. *Tuomet*

$$\begin{aligned} \sum_{0 < \gamma' \leqslant T} \left(\beta' - \frac{1}{2}\right) =& \frac{T}{2\pi} \log\log \frac{T}{2\pi\lambda} + \frac{T}{4\pi} \log \frac{\left[\alpha\right] + \alpha}{\lambda} \\ & - \frac{T}{2\pi} \log\left|\log\left(\left[\alpha\right] + \alpha\right)\right| - \lambda \mathrm{li}\left(\frac{T}{2\pi\lambda}\right) + O\left(\log T\right). \end{aligned}$$

Pastaroji teorema patikslina Gaunkščio ir Štoidingo 2002 metais gautą rezultatą:

$$\sum_{|\gamma'| \leqslant T} \left(\beta' - \frac{1}{2}\right) = \frac{T}{\pi} \log\log T + O(T).$$

## 4.4 Lercho dzeta funkcija su lygiais parametrais

Daugumai parametrų $\lambda$ ir $\alpha$ reikšmių Lercho dzeta funkcijos $L(\lambda, \alpha, s)$ nuliai yra chaotiškai išsibarstę apie kritinę tiesę $\sigma = 1/2$. Šiame skyrelyje pristatomi rezultatai, gauti nagrinėjant atskirą atveji, kai parametrai yra lygūs, t. y. $L(\lambda, \lambda, s)$. Skaičiuojant pastebėta, kad netrivialieji nuliai arba yra labai arti kritinės tiesės, arba yra beveik simetriniai jos atžvilgiu. Pateiksime teoremas, kurios pagrindžia šį pastebėjimą.

Kaip visuomet, tegul $T$ tolsta į begalybę, o skaičiai $\lambda$ ir $\alpha$ žymi fiksuotas konstantas.

Atlikus skaičiavimus pastebėta, kad kai $\lambda = \alpha$, tai pirmieji netrivialieji Lercho dzeta funkcijos nuliai yra beveik ant kritinės tiesės $\sigma = 1/2$. Pirmi keturi nuliai suapvalinus iki šimtųjų:

$L(1/3, 1/3, s)$ : $0.50 + 3{,}99i$, $0{,}50 + 7{,}28i$, $0{,}50 + 9{,}54i$, $0{,}50 + 12{,}18i$.

$L(1/3, 2/3, s)$ : $0{,}86 + 5{,}68i$, $0{,}53 + 9{,}59i$, $0{,}86 + 12{,}66i$, $0{,}49 + 15{,}11i$.

$L(3/4, 3/4, s)$ : $0{,}50 + 9{,}69i$, $0{,}50 + 15{,}26i$, $0{,}50 + 18{,}65i$, $0{,}50 + 23{,}05i$.

$L(1/4, 3/4, s)$ : $1{,}03 + 5{,}24i$, $0{,}64 + 8{,}81i$, $0{,}76 + 11{,}96i$, $0{,}88 + 14{,}19i$.

Kai $\lambda \neq 1/2, 1$ žinoma, kad $L(\lambda, \lambda, s)$ turi daug nulių ne ant kritinės tiesės. Pavyzdžiui, funkcijai $L(3/4, 3/4, s)$ gauname nulius $-0.10 + 120{,}60i$ ir $1 + 0{,}10 + 120{,}60i$; $0{,}37 + 202{,}77i$ ir $1 - 0{,}37 + 202{,}77i$. Pastarieji suformuoja beveik simetriškų kritinės tiesės atžvilgiu nulių poras. Svarbu atkreipti dėmesį, kad minėtais atvejais gauname paklaidas, t. y. nuliai nėra tiksliai ant kritinės tiesės ir nėra griežtai simetriniai jos atžvilgiu. Dzeta funkcijų simetriškumas dažniausiai gali būti paaiškinamas funkcinės lygties išraiška (žr. (8) žemiau).

Iš pradžių parodysime, kad netrivialieji Lercho dzeta funkcijos su lygiais parametrais nuliai viršutinėje pusplokštumėje vidutiniškai yra simetriškai išsidėstę su nedidele paklaida.

**13 teorema.** *Kai* $0 < \lambda, \alpha \leqslant 1$*, tai*

$$\sum_{0<\gamma\leqslant T} \left(\beta - \frac{1}{2}\right) = \frac{T}{4\pi} \log \frac{\alpha}{\lambda} + O(\log T).$$

Toliau nagrinėsime atskirų $L(\lambda, \lambda, s)$ nulių $\rho$ simetriškumą. Kai $\lambda = \alpha$, tuomet Lercho dzeta funkcijos funkcinę lygtį galime perrašyti taip:

$$\begin{aligned} \overline{L(\lambda, \lambda, 1 - \overline{s})} =& (2\pi)^{-s}\Gamma(s)e^{-\pi i \frac{s}{2} + 2\pi i \lambda^2} L(\lambda, \lambda, s) \\ &+ (2\pi)^{-s}\Gamma(s)e^{\pi i \frac{s}{2} - 2\pi i (1-\lambda)\lambda} L(1 - \lambda, 1 - \{\lambda\}, s) \\ =& G(s)L(\lambda, \lambda, s) + P(s). \end{aligned} \tag{8}$$

Remdamiesi ja ir Rušė teorema, gauname, kad $L(\lambda, \lambda, s)$ turi beveik simetrišką nulį skritulyje $|s - (1 - \overline{\rho})| < r$, jei $P(s)$ yra mažas ir $L(\lambda, \lambda, s)$ nėra maža ant minėto skritulio krašto.

Kai $s$ yra greta nulio, tuomet $L(\lambda, \lambda, s)$ galime aprėžti iš apačios.

**2 teiginys.** *Tegul* $0 < \lambda, \alpha \leq 1, \sigma_0 \in \mathbb{R}$ *ir* $\Re s \geq \sigma_0$. *Tarkime, kad* $L(\lambda, \alpha, s) \neq 0$ *ir pažymėkime raide* $d$ *atstumą nuo* $s$ *iki artimiausio* $L(\lambda, \alpha, s)$ *nulio. Tada*

$$\frac{1}{|L(\lambda, \alpha, s)|} < \exp(C(|\log d| + 1) \log t),$$

*čia* $C = C(\lambda, \alpha, \sigma_0)$ *yra teigiama konstanta.*

Naudodamiesi šiuo teiginiu, įrodome teoremą.

**14 teorema.** *Tegul* $0 < \lambda \leq 1$ *ir* $A > 0$ *toks, kad* $AC < \pi$*, kai* $C = C(\lambda, \alpha, -1)$ *apibrėžta 2 teiginyje. Tegul* $\rho = \beta + i\gamma$ *žymi netrivialųjį* $L(\lambda, \lambda, s)$ *nulį. Jei* $\gamma$ *yra pakankamai didelis, tuomet atsiras toks spindulys* $r$

$$\exp(-A\gamma/\log\gamma) \leq r \leq \exp(-A\gamma/\log\gamma)\log^2\gamma, \tag{9}$$

*kad abu skrituliai*

$$|s - \rho| < r \quad ir \quad |s - (1 - \overline{\rho})| < r$$

*turės po tiek pat nulių.*

Remiantis Garunkščio ir Laurinčiko gautu įverčiu

$$N(\lambda, \alpha, T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi e\alpha\lambda} + O(\log T),$$

egzistuoja tokia konstanta $D = D(T_0)$, kad

$$\left| N(\lambda, \alpha, T) - \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi e\alpha\lambda} \right| \leq D\log T, \tag{10}$$

kai $T > T_0$.

Tegul $f : [T, T+U] \to \mathbb{R}$ tolydi funkcija. Srityje $T < t < T+U$, $\sigma < f(t)$ pažymėkime netrivialiuosius $L(\lambda, \lambda, s)$ nulius $N(T, U, f)$, o $L'(\lambda, \lambda, s)$ nulius – $N'(T, U, f)$.

**15 teorema.** *Tegul* $0 < \lambda \leq 1$ *ir* $0 < U \leq T$*. Tarkime, kad fiksuotiems* $T_0$ *ir* $0 < \varepsilon < 1$*,*

$$D(T_0) < \frac{\varepsilon}{\log 4}. \tag{11}$$

*Tuomet esant pakankamai dideliems* $T$ *egzistuoja tokia tolydi funkcija* $f : [T, T+U] \to \mathbb{R}$*, kad*

$$1/2 - \exp(-T^{1-\varepsilon}/\log T) \leq f(t) \leq 1/2,$$

*ir*

$$N(T, U, f) = N'(T, U, f) + O(\log T).$$

Trudgian irodė, kad Rymano dzeta funkcijai, t. y. $L(1, 1, s)$, galioja $D < 0{,}12 < 1/\log 4 = 0{,}72\ldots$, o $L(1/2, 1/2, s)$ atveju, $D < 0{,}16$. Naudojantis Lindeliofo (*Lindelöf*) hipoteze būtų galima parodyti, kad konstanta $D$ gali būti norimai maža. Remiantis Garunkščio darbais, tikėtina, kad Lindeliofo hipotezė teisinga ir Lercho dzeta funkcijai. Taigi labai tikėtina, jog ir minėtu atveju $D$ gali būti norimai maža.

# 5 Darbo mokslinis naujumas ir aktualumas

Disertacijos rezultatai publikuoti penkiose mokslinėse publikacijose (žr. 7 skyrių) ir pristatyti konferencijose bei seminaruose (žr. 8 skyrių), yra originalūs.

Teoremų ir lemų įrodymai remiasi klasikiniais skaičių teorijos rezultatais ir praplečia periodinių Hurvico bei Lercho dzeta funkcijų nulių tyrimus. Hurvico dzeta funkcija yra atskiras Lercho dzeta funkcijos atvejis, todėl visi rezultatai apie Lercho dzeta funkcijos išvestinės nulius gali būti naudingi tiriant Hurvico dzeta funkcijos ir jos išvestinės nulius. Atskiro Lercho dzeta funkcijos atvejo su lygiais parametrais tyrimas atskleidžia įdomų ir dar nenagrinėtą nulių elgesio fenomeną. Kiek žinoma autoriui, periodinės Hurvico dzeta funkcijos nulių ir $a$ reikšmių asimptotinė formulė dar nebuvo nagrinėta. Rezultatai gali būti panaudoti tolesniems dzeta funkcijų, kurios gali būti išreikštos kaip periodinės Hurvico dzeta funkcijos, tyrimams.

# 6 Darbo struktūra ir apimtis

Disertacija parašyta anglų kalba. Disertaciją sudaro aštuoni skyriai: įvadas, literatūros apžvalga, keturi moksliniams rezultatams paskirti skyriai, išvados ir literatūros sąrašas. Bendra darbo apimtis yra 96 puslapiai.

# 7 Pagrindinės publikacijos

Pristatomos disertacijos rezultatai publikuojami šiuose moksliniuose straipsniuose:

1. R. Garunkštis and R. Tamošiūnas, „Zeros of the periodic Hurwitz zeta-function“, Šiauliai Math. Semin., 8(16):49–62, 2013.

2. R. Tamošiūnas, „$a$-values of the periodic Hurwitz zeta-function“, Šiauliai Math. Semin., 11(19):125–133, 2016.

3. R. Garunkštis and R. Tamošiūnas, „Symmetry of zeros of Lerch zeta-function for equal parameters“, Lith. Math. J., 57(4):433–440, 2017.

4. R. Garunkštis and R. Tamošiūnas, „Zeros of the Lerch zeta-function and of its derivative for equal parameters“, (įteiktas).

5. R. Garunkštis, R. Tamošiūnas and R. Šimėnas, „Zeros of derivative of Lerch's zeta-function“, Proceedings of Conference in Honor of Kohji Matsumoto's 60th Birthday, (priimtas, 2018).

# 8 Rezultatų sklaida

Disertacijoje gauti rezultatai pristatyti Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto Tikimybių ir skaičių teorijos katedros seminaruose. Dauguma rezultatų buvo pristatyti šiose mokslinėse konferencijose ir seminaruose:

1. „Zero distribution of the periodic Hurwitz zeta-function“, stendinis pranešimas Diophantine Analysis Summer School, Vokietija, liepos 21–26 d., 2014 m.

2. „Zero distribution of the periodic Hurwitz zeta-function“, The 56th Conference of the Lithuanian Mathematical Society, Kaunas, Lietuva, birželio 16–17 d., 2015 m.

3. „On $a$-value distribution of the periodic Hurwitz zeta-function“, The 57th Conference of the Lithuanian Mathematical Society, Vilnius, Lietuva, birželio 20–21 d., 2016 m.

4. „Zeros and $a$-values of the periodic Hurwitz zeta-function“, The Sixth International Conference Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory, Palanga, Lietuva, rugsėjo 11–17 d., 2016 m.

5. „Zero trajectories of the Lerch zeta-function and its derivative“, The 58th Conference of the Lithuanian Mathematical Society, Vilnius, Lietuva, birželio 21–22 d., 2017 m.

6. „Symmetry of zeros of the Lerch zeta-function for equal parameters“, Vilnius Conference in Combinatorics and Number Theory, Vilnius, Lietuva, liepos 16–22 d., 2017 m.

# 9 Išvados

Disertacijoje gauti rezultatai apibendrinami šiomis išvadomis:

1. Periodinės Hurvico dzeta funkcijos nuliai ir $a$ reikšmės yra susispietusios aplink kritinę tiesę $\sigma = \frac{1}{2}$. Šis tvirtinimas taip pat galioja Lercho dzeta funkcijos išvestinės nuliams.
2. Periodinės Hurvico dzeta funkcijos nulių ir $a$ reikšmių skaičius iki aukščio $T$ priklauso nuo $T$, parametro $\alpha$ ir periodinės sekos savybių. Jei $a \neq 0$, tuomet periodinės Hurvico dzeta funkcijos $a$ reikšmių skaičius iki fiksuoto aukščio iš esmės nepriklauso nuo $a$ reikšmės.
3. Lercho dzeta funkcijos trivialiųjų nulių iki aukščio $T$ skaičius beveik toks pat, kaip ir jos išvestinės trivialiųjų nulių iki aukščio $T$ skaičius.
4. Lercho dzeta funkcijos su lygiais parametrais netrivilieji nuliai vidutiniškai yra simetriškai pasiskirstę su maža paklaida. Šiam atskiram atvejui galioja Speiserio tipo sąryšis tarp Lercho dzeta funkcijos ir jos išvestinės netrivialiųjų nulių.

Minėti rezultatai gali būti praplėsti nagrinėjant k-osios išvestinės atvejį. Gali būti, kad įmanoma įrodyti Berndto rezultato analogą, t. y. parodyti, kad nulių skaičius iš esmės nepriklauso nuo išvestinės eilės.

# 10 Summary

In this dissertation the Lerch zeta-function, its derivative and the periodic Hurwitz zeta-function are studied. These functions are generalizations of the famous Riemann zeta-function. We investigate three related topics: the zero and $a$-value distribution of the periodic Hurwitz zeta-function; the zero distribution of the derivative of the Lerch zeta-function; the zero behavior of the Lerch zeta-function for the special case, when parameters are equal.

The first three chapters contain an introduction, literature review and methodology with some classical proofs.

The fourth chapter is devoted to the distribution of the zeros of the periodic Hurwitz zeta-function. We find the asymptotic formula for the number of nontrivial zeros. Also, we prove, that the zeros and $a$-values of the periodic Hurwitz zeta-function are mostly clustered around the critical line $\sigma = \frac{1}{2}$. In the fifth chapter these results were extended to $a$-values distribution of the periodic Hurwitz zeta-function.

The sixth chapter the zero distribution of the derivative of the Lerch zeta-function is explored. We indicate zero-free regions; locate approximate positions of the trivial zeros; consider the asymptotic formula for the number of nontrivial zeros; explore the zero distribution with respect to the critical line. We conclude, that the number of the zeros and $a$-values of the periodic Hurwitz zeta-function till the given size $T$ does depend only on $T$, parameter $\alpha$ and properties of the periodical sequence. Notice, that if $a \neq 0$, then the number of $a$-values of the periodic Hurwitz zeta-function till the given size mainly does not depend on $a$ itself.

Final chapter is devoted to the special case of the Lerch zeta-function when parameters $\lambda$ and $\alpha$ are equal. Calculations show that the nontrivial zeros either lie extremely close to the critical line or are distributed almost symmetrically with respect to it. We investigate this phenomenon theoretically proving, that on average they are symmetrically distributed with a small error term. For this special case, there is the Speiser type relation between zeros of the Lerch zeta-function and its derivative.

# 11 Trumpos žinios apie autorių

## Išsilavinimas

| | |
|---|---|
| 2010–2012 | Edukologijos magistras, darbo tema: „Inovatyviųjų informacinių technologijų taikymas ugdant matematines kompetencijas“, Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas |
| 2006–2010 | Matematikos bakalauras, darbo tema: „Programa GeoGebra: lietuvinimas, 3D bazės ir didaktinis taikymas“, įgyta profesinė pedagogo kvalifikacija, Vilniaus universitetas, Edukologijos fakultetas |
| 2002–2006 | Vilniaus Jėzuitų gimnazija |

## Darbo patirtis

| | |
|---|---|
| 2015– | Duomenų mokslininkas, Exacaster |
| 2012–2015 | „GeoGebra institute - Vilnius“ įkūrėjas, septynių tarptautinių GeoGebra konferencijų organizatorius, mokymų mokytojams vedėjas |
| 2012–2014 | Matematikos lektorius, Kazimiero Simonavičiaus universitetas |
| 2007–2012 | Matematikos ir informatikos mokytojas, Vilniaus Jėzuitų gimnazija |
| 2007–2010 | gauta Michigan stipendija pedagogams |