

Diofantinių artinių teorema

Vilius Stakėnas* (VU)

Išvadas. Klasikinė Hurwitz'o teorema tvirtina, kad bet kokiam iracionaliajam α atsiras be galo daug nesuprastinamų trupmenų m/n , kad

$$\left| \alpha - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}n^2}.$$

Šios teoremos neįmanoma patikslinti, t. y. pakeitus konstantą $\sqrt{5}$ didesne, atsiras iracionaliųjų skaičių (pavyzdžiui, „auksinio pjūvio“ skaičius $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$), kuriems teiginys nebebus teisingas.

Kartais iracionaliųjų skaičių aproksimavimo racionaliaisiais uždavinys nagrinėjamas, formuluojant sąlygas ne tik aproksimacijos tikslumui, bet ir reikalaujant kokių nors artinių savybių. Pavyzdžiui, reikalaujama, kad m, n būtų pirminiai [1], bekvadrachiai skaičiai [2,3] ir t. t.

Šiame darbe diofantiniams artiniams specializuoti naudosime sąlygą $f(m/n) = a$, čia $f: \mathbb{Q}_+ \rightarrow G$, multiplikacinė funkcija, apibrėžta racionaliųjų skaičių aibėje ir įgyjanti reikšmės kokioje nors komutatyvioje pusgrupėje su vienetiniu elementu e , t. y. su visais poromis tarpusavyje pirminiais m_1, n_1, m_2, n_2 tenkinanti sąlygą

$$f\left(\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2}\right) = f\left(\frac{m_1}{n_1}\right)f\left(\frac{m_2}{n_2}\right).$$

Su multiplikacine funkcija f susiekime aibę

$$P_f = \{p: f(p) \neq e, \text{ arba } f(p^{-1}) \neq e\},$$

čia kaip ir kitur p žymi pirminius skaičius.

Tarkime eilutė

$$\sum_{p \in P_f} \frac{1}{p} \tag{1}$$

konverguoja. Tada galima įrodyti (žr. [5]), kad kiekvienai f reikšmei a egzistuoja teigiama konstanta $c(a)$ tokia, bet kokiam skaičiui $\alpha > 0$ atsiras be galo daug trupmenų m/n , kurioms su $\varphi(n) = c(a)/n$ bus teisinga

$$\left| \alpha - \frac{m}{n} \right| < \varphi(n), \quad f\left(\frac{m}{n}\right) = a. \tag{2}$$

*Mokslinį darbą remia Lietuvos Mokslo ir Studijų fondas.

Iracionaliesiems skaičiams ši teiginį galima žymiai patikslinti, pareikalavus, kad aibė P_f būtų „reta“ (žr. [4]). Tikėtina, kad funkcijoms, tenkinančioms (1) ir visiems iracionaliesiems $\alpha > 0$ teiginys (2) teisingas su funkcija

$$\varphi(n) = \frac{1}{n^{1+\theta}}, \quad \theta \in (0; 2/3);$$

t.y. tikslumas tas pats, kaip aproksimuojant iracionaliuosius skaičius trupmenomis, sudarytomis iš bekvadračių skaičių, žr. [3]. Šiame darbe įrodoma teorema garantuoja tokį tikslumą, jei

$$\#(P_f \cap [2; x]) = o\left(\frac{x^{1/3}}{\log x}\right), \quad x \rightarrow \infty.$$

TEOREMA. Tegu $\theta \in (0; 2/3)$ ir multiplikacinė funkcija f tenkina sąlygą

$$\#(P_f \cap [2; x]) = o\left(\frac{x^{1-\theta}}{\log x}\right), \quad x \rightarrow \infty.$$

Tada bet kokiam iracionaliajam $\alpha > 0$ ir f reikšmei a atsiras be galo daug racionaliųjų skaičių tenkinančių sąlygą

$$\left| \alpha - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{n^{1+\theta}}, \quad f\left(\frac{m}{n}\right) = a.$$

[rodymas. Su pirminių skaičių aibe Q apibrėžkime multiplikacinę funkciją $\lambda(m, Q)$

$$\lambda(p^\alpha, Q) = \begin{cases} 1, & \text{jei } p \notin Q, \\ 0, & \text{jei } p \in Q. \end{cases}$$

Teorema išplaukia iš tokio teiginio.

LEMA 1. Tegu $\theta \in (0; 2/3)$, $c > 0$, ir aibei Q teisingas įvertis

$$\#(Q \cap [2; x]) = o\left(\frac{x^{1-\theta}}{\log x}\right), \quad x \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Tada bet kokiam iracionaliajam $\alpha > 0$ atsiras be galo daug racionaliųjų skaičių, tenkinančių sąlygą

$$\left| \alpha - \frac{m}{n} \right| < \frac{c}{n^{1+\theta}}, \quad \mu^2(m)\mu^2(n)\lambda(m, Q)\lambda(n, Q) = 1.$$

Šioje lemoje ir kitur μ reiškia Miobuso funkciją. Tarkime racionaliajam skaičiui k/l teisinga $f(k/l) = a$. Sudarykime aibę

$$Q = P_f \cup \{p: p|kl\}.$$

Tada aibė Q tenkina (3) sąlygą. Imdami $c = k^{-1}l^{-\theta}$ ir pasirėmę 1 lema, gauname, kad egzistuoja be galo daug racionaliųjų m/n , kuriems

$$\left| \frac{l}{k} \alpha - \frac{m}{n} \right| < \frac{c}{n^{1+\theta}}, \quad \mu^2(m)\mu^2(n)\lambda(m, Q)\lambda(n, Q) = 1.$$

Tačiau tada

$$\left| \alpha - \frac{km}{ln} \right| < \frac{1}{(ln)^{1+\theta}}, \quad f\left(\frac{km}{ln}\right) = a.$$

Taigi pakanka įrodyti 1 lemą. Savo ruožtu ji išplaukia iš tokio teiginio.

Tegu a/q kokia nors nesuprastinama trupmena, $A > 0$ – bet kokia konstanta. Jeigu q yra pakankamai didelis, tai atsiras trupmena m/n , tenkinanti sąlygas

$$\left| \frac{m}{n} - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}, \quad \mu^2(m)\mu^2(n)\lambda(m, Q)\lambda(n, Q) = 1, \quad Aq^{2/(1+\theta)} \leq n \leq 2Aq^{2/(1+\theta)}. \quad (4)$$

Tarkime, (4) teiginys teisingas. Tada imdami iracionaliojo skaičiaus α grandininės trupmenos reduktus a/q su pakankamai dideliais vardikliais ir (4) sąlygą tenkinančius artinius, gautume

$$\left| \alpha - \frac{m}{n} \right| \leq \left| \alpha - \frac{a}{q} \right| + \left| \frac{a}{q} - \frac{m}{n} \right| < \frac{2}{q^2} < \frac{2(2A)^{1+\theta}}{n^{1+\theta}}.$$

Lema būtų įrodyta.

Įrodysime (4) teiginį. Pažymėkime $N = Aq^{2/(1+\theta)}$, $L = N/q$. Tada (4) teiginys būtų teisingas, jei atsirastų sveikųjų skaičių trejetas $\langle m, n, l \rangle$, tenkinantis sąlygas

$$mq - an = l, \quad N \leq n \leq 2N, \quad 1 \leq l \leq L, \quad (5)$$

ir $I_Q(m, n) = \mu^2(m)\mu^2(n)\lambda(m, Q)\lambda(n, Q) = 1$. Tarkime, S_q yra visų trejetų, tenkinančių (5) sąlygas, aibė. Įrodysime, kad

$$T_q = \sum \{I_Q(m, n): \langle m, n, l \rangle \in S_q\} > 0.$$

Pažymėkime

$$Q_z = \prod \{p: p \leq z, p \in Q\}, \quad P_z = \prod_{p \leq z} p.$$

Iš akivaizdžių nelygybių

$$\mu^2(m) \geq \sum \{\mu(d): d^2 | m, d | P_z\} - \sum \{1: p > z, p^2 | m\},$$

$$\lambda(m, Q) \geq \lambda(m, Q_z) - \sum \{1: p > z, p \in Q, p | m\}$$

gauname

$$I_Q(m, n) \geq f(m)f(n)\lambda(m, Q)\lambda(n, Q) - r_1(m) - r_1(n) - r_2(m) - r_2(n),$$

čia pažymėjome

$$f(m) = \sum \{\mu(d): d^2|m, d|P_z\},$$

$$r_1(m) = \sum \{1: p > z, p^2|m\}, \quad r_2(m) = \sum \{1: p > z, p \in Q, p|m\}.$$

Tada

$$T_q \geq U - R_{11} - R_{12} - R_{21} - R_{22}, \quad (6)$$

čia

$$U = \sum_{\langle m, n, l \rangle \in S_q} f(m) f(n) \lambda(m, Q) \lambda(n, Q),$$

$$R_{11} = \sum_{\langle m, n, l \rangle \in S_q} r_1(m), \quad R_{21} = \sum_{\langle m, n, l \rangle \in S_q} r_2(m),$$

R_{12} ir R_{22} yra analogiškos reikšmių $r_1(n), r_2(n)$ sumos.

Pasinaudosime sumų R_{11}, R_{12} įverčiais, gautais Heath-Brown'o darbe [3]. Šiame darbe sumos įvertintos, kai $N = q^{2/(1+\theta)}$. Tie patys samprotavimai tinka ir atveju $N = Aq^{2/(1+\theta)}$. Jei $\theta < 2/3$, tai

$$R_{11} + R_{12} \ll \frac{NL}{q \log \log q}. \quad (7)$$

Natūraliųjų skaičių a, b, c bendrą didžiausią daliklį žymėsime (a, b, c) . Dydžius R_{21}, R_{22} vertinsime pasinaudodami šiuo teiginiu.

LEMA 2 ([3], Lema 3). Tegu v_1, v_2, v_3 – sveikieji skaičiai, $(v_1, v_2, v_3) = 1, X_1, X_2, X_3 > 0$. Tada lygties

$$v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0$$

sprendinių sveikaisiais skaičiais x_1, x_2, x_3 su sąlyga $|x_i| \leq X_i, (x_1, x_2, x_3) = 1$, kiekis neviršija

$$4 + 12\pi \frac{X_1 X_2 X_3}{\max\{|v_i| X_i: i = 1, 2, 3\}}.$$

Įvertinsime tik sumą R_{22} , nes kita suma vertinama analogiškai. Kaip ir [3] straipsnyje dalsime S_q į poaibius pagal $d = (m, n, l)$ reikšmes. Vieno trejeto $\langle m, n, l \rangle$ įnašas į R_{22} yra nedidesnis už n skirtingų pirminių daliklių skaičių, kuris savo ruožtu vertinamas dydžiu $O(\log q / \log \log q)$, taigi

$$\begin{aligned} R_{22} &\ll \frac{\log q}{\log \log q} \sum \{1: \langle m, n, l \rangle \in S_q, d = (m, n, l) > z\} \\ &\quad + \sum \{1: \langle m, n, l \rangle \in S_q, d = (m, n, l) < z, z < p < 2N, p \in Q, p|n\} \\ &= R_{21}^* + R_{22}^*. \end{aligned}$$

Pirmąją sumą vertiname kaip [3] (žymėsime x_1, x_2, x_3 skaičius, kuriems $(x_1, x_2, x_3) = 1$):

$$\sum_{\substack{(m,n,l) \in S_q \\ d=(m,n,l) > z}} 1: \leq \sum_{d \geq z} \# \left\{ (x_1, x_2, x_3): qx_1 - ax_2 - x_3 = 0, |x_2| \leq \frac{2N}{d}, |x_3| \leq \frac{L}{d} \right\}. \quad (8)$$

Kadangi $|qx_1| \leq |ax_2| + |x_3| \ll N/d$, tai $|x_1| < cNq/d$.

Dabar (8) sumos dėmenį įvertinę 2 lemos dydžiu ($X_1 = cNq/d$, $X_2 = 2N/d$, $X_3 = L/q$, $v_1 = q$, $v_2 = -a$, $v_3 = -1$) gausime ($z = \log q$)

$$R_{21}^* \ll \frac{\log q}{\log \log q} \sum_{d \geq z} \frac{NL}{qd^2} \ll \frac{LN}{q \log \log q}. \quad (9)$$

Įvertinsime R_{22}^* ; kadangi $p \nmid d$ ir $p|n$, tai $m = x_1d$, $n = x_2pd$, $l = x_3d$ ir

$$R_{22}^* \ll \sum_{\substack{z \leq p \leq 2N \\ p \in Q}} \sum_{d < z} \# \left\{ (x_1, x_2, x_3): qx_1 - apx_2 - x_3 = 0, |x_2| \leq \frac{2N}{dp}, |x_3| \leq \frac{L}{d} \right\}.$$

Vėl panaudoję 2 lemą su tais pačiais X_i ir $v_i = q$, $v_2 = -ap$, $v_3 = -1$, gausime

$$\begin{aligned} R_{22}^* &\ll \sum \left\{ \left(1 + \frac{LN}{qpd^2}\right): z < p < 2N, p \in Q, d < z \right\} \\ &\ll \sum \{z: p < 2N, p \in Q\} + \frac{LN}{q} \sum \left\{ \frac{1}{p}: p > z, p \in Q \right\}. \end{aligned}$$

Kadangi $LN/q = A^2 q^{2(1-\theta)/(1+\theta)}$, tai pasinaudoję sąlyga aibei Q , gausime

$$\sum \{z: p < 2N, p \in Q\} = o\left(\log q \cdot \frac{q^{\frac{2(1-\theta)}{1+\theta}}}{\log q}\right) = o\left(\frac{LN}{q}\right).$$

Be to

$$\sum \left\{ \frac{1}{p}: p > z, p \in Q \right\} = o(1), \quad q \rightarrow \infty,$$

taigi $R_{22}^* = o(NL/q)$. Iš (7), (9) matome, kad šis įvertis teisingas visoms sumoms R_{ij} . Tada

$$T_q \geq U + o\left(\frac{LN}{q}\right),$$

ir teorema bus įrodyta, jei nustatysime, kad $U \gg LN/q$.

Sumažinkime sandaugą P_z išmesdami pirminius daugiklius $p \in Q_z$: $P_z^* = P_z / (P_z, Q_z)$, tada $(P_z^*, Q_z) = 1$. Apibrėžkime

$$f^*(m) = \sum \{\mu(d): d^2 | m, d | P_z^*\},$$

tada

$$f(m)\lambda(m, Q_z) = f^*(m)\lambda(m, Q_z),$$

nes abi pusės sutampa, kai $(m, Q_z) = 1$ ir virsta nuliais, kai $(m, Q_z) > 1$. Tada

$$\begin{aligned} U &= \sum_{(m,n,l) \in S_q} f^*(m)f^*(n)\lambda(m, Q_z)\lambda(n, Q_z) \\ &= \sum_{(m,n,l) \in S_q} \sum \{\mu(d_1)\mu(d_2)\mu(\delta_1)\mu(\delta_2): d_1^2|m, d_2^2|n, d_i|P_z^*, \delta_1|m, \delta_2|n, \delta_i|Q_z\}, \end{aligned}$$

čia pasinaudojome lygybe

$$\lambda(m, Q_z) = \sum \{\mu(\delta): \delta|(m, Q_z)\}.$$

Dabar

$$U = \sum \{\mu(d_1)\mu(d_2)\mu(\delta_1)\mu(\delta_2)\#A(d_1, d_2, \delta_1, \delta_2): d_1, d_2|P_z^*, \delta_1, \delta_2|Q_z\},$$

čia

$$A(d_1, d_2, \delta_1, \delta_2) = \{(m^*, n^*, l^*): qd_1^2\delta_1m^* - ad_2^2\delta_2n^* = l, N \leq d_2^2\delta_2n^* \leq 2N, 1 \leq l \leq L\}.$$

Pažymėkime $D = (d_1^2\delta_1, d_2^2\delta_2)$, tada aibė $A(d_1, d_2, \delta_1, \delta_2)$ netuščia tik tuo atveju, kai $l = Dl^*$. Tada

$$A(d_1, d_2, \delta_1, \delta_2) = \{(m^*, n^*, l^*): -(ad_2^2\delta_2D^{-1})n^* \equiv l^* \bmod (qd_1^2\delta_1D^{-1}),$$

$$N(d_2^2\delta_2)^{-1} \leq n^* \leq 2N(d_2^2\delta_2)^{-1}, 1 \leq l^* \leq L/D\}.$$

Kadangi su kiekvienu l^* lyginys turi vienintelį sprendinį, tai

$$\begin{aligned} \#A(d_1, d_2, \delta_1, \delta_2) &= \left(\frac{L}{D} + O(1)\right) \left(\frac{N}{d_2^2\delta_2} \frac{D}{qd_1^2\delta_1} + O(1)\right) \\ &= \frac{LN}{q} \frac{1}{d_1^2d_2^2\delta_1\delta_2} + O\left(\frac{ND}{d_1^2d_2^2\delta_1\delta_2}\right) + O\left(\frac{L}{D}\right) + O(1). \end{aligned}$$

Tada

$$U = \frac{LN}{q}R_0 + \frac{N}{q}O(R_1) + LO(R_2) + O(R_3),$$

čia

$$R_0 = \sum_{\substack{d_i|P_z^* \\ \delta_i|Q_z}} \frac{\mu(d_1)\mu(d_2)\mu(\delta_1)\mu(\delta_2)}{d_1^2d_2^2\delta_1\delta_2}, \quad R_1 = \sum_{\substack{d_i|P_z^* \\ \delta_i|Q_z}} \frac{\mu^2(d_1)\mu^2(d_2)\mu^2(\delta_1)\mu^2(\delta_2)D}{d_1^2d_2^2\delta_1\delta_2},$$

$$R_2 = \sum_{\substack{d_i | P_z^* \\ \delta_i | Q_z}} \frac{\mu^2(d_1)\mu^2(d_2)\mu^2(\delta_1)\mu^2(\delta_2)}{D}, \quad R_3 = \sum_{d_i | P_z^*, \delta_i | Q_z} \mu^2(d_1)\mu^2(d_2)\mu^2(\delta_1)\mu^2(\delta_2).$$

ibės P_z^* , Q_z neturi bendrų elementų, tai

$$R_0 = \prod_{p | P_z^*} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^2 \prod_{q | Q_z} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 > \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^2 \prod_{q | Q} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 = \sigma > 0.$$

kivaizdu, kad $R_1, R_2 \ll R_3$, tačiau $R_3 \ll \tau(P_z^*)^2 \tau(Q_z)^2 = 4^{\omega(P_z)}$, čia τ skirtingų atūraliųjų, ω – skirtingų pirminių daliklių funkcijos. Kadangi $\omega(P_z) = \pi(z) \ll \log q / \log \log q$, tai $R_3 \ll q^\varepsilon$ su kiekvienu $\varepsilon > 0$. Taigi

$$U \gg \frac{NL}{q} + \left(\frac{N}{q} + L + 1\right)q^\varepsilon \gg \frac{NL}{q}.$$

teorema įrodyta.

LITERATŪRA

- [1] G. Harman, Metric diophantine approximation with two restricted variables III. Two prime numbers, *Journal of Numb. Th.*, **29** (1988), 364–375.
- [2] G. Harman, Metric diophantine approximation with two restricted variables I. Two square-free integers, or integers in arithmetic progressions, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **103** (1988), 197–206.
- [3] D. R. Heath-Brown, Diophantine approximation with square-free numbers, *Math. Z.*, **187** (1984), 335–344.
- [4] V. Stakėnas, *Approximation of irrationals by m/n satisfying $f(m/n) = a$* , New Trends in Probability and Statistics. Vol.2: Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory, F. Schweiger and E. Manstavičius (Eds), VSP, Utrecht/TEV, Vilnius, 1992, 31–36.
- [5] V. Stakėnas, A sieve result for Farey fractions, Preprintas 98-5, Vilnius universiteto matematikos fakultetas, 1998.

A theorem on diophantine approximations

Vilius Stakėnas (VU)

A result is proved on approximation of irrational numbers by rational ones, satisfying some requirements on their multiplicative structure. The statement is comparable with that one on diophantine approximations with square-free integers.