

## Landau formulė su svoriu

Audrius KACĖNAS\* (VU)

el. paštas: audrius.kacenas@maf.vu.lt

Tarkime  $\zeta(s)$  yra kompleksinio kintamojo  $s = \sigma + it$  Rymano dzeta funkcija, kuri kompleksinėje pusplokštumėje  $\sigma > 1$  apibrėžiama eilute

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

ir likusioje srityje pasinaudojus analiziniu pratėsimu. Žinoma, kad visi funkcijos  $\zeta(s)$  kompleksiniai nuliai  $\rho = \beta + i\gamma$  guli srityje  $0 < \beta < 1$ . Jeigu teisinga Rymano hipotezė, tada visiems kompleksiniams nuliams  $\beta = 1/2$ . Garsi Landau [1] formulė tvirtina, kad kiekvienam fiksuotam  $x > 1$  turime

$$\sum_{0 < \gamma \leq T} x^{\rho} = -\frac{T}{2\pi} \Lambda(x) + O(\log T),$$

kai  $T \rightarrow \infty$ ; kur  $\Lambda(x) = \log p$ , jeigu  $x = p^k$  ir  $\Lambda(x) = 0$ , jeigu  $x \neq p^k$ .

Mūsų uždavinys yra įrodyti šią teoremą

**Teorema.** Tarkime  $x > 1$  fiksuotas realus skaičius,  $\rho$  – Rymano dzeta funkcijos kompleksinis nulis. Tada, kai  $\delta \rightarrow 0_+$ , turime

$$\sum_{\rho, \gamma > 0} x^{\rho} e^{i\delta \rho} = -\frac{\Lambda(x)}{2\pi\delta} + O(\log \delta).$$

**Išvada.** Galiojant teoremos sąlygoms ir priėmus teisingą Rymano hipotezę, turime

$$\sum_{\gamma > 0} x^{i\gamma} e^{-\delta\gamma} = -x^{-\frac{1}{2}} \frac{\Lambda(x)}{2\pi\delta} + O(\log \delta).$$

---

\*Mokslinį darbą remia Lietuvos Mokslo ir studijų fondas.

*Teoremos įrodymas.* Tarkime  $x, T > 1$  ir  $T$  nėra  $\zeta(s)$  kompleksinio nulinio ordinatė. Nagrinėsime kontūrinį integralą

$$I = \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{2+i}^{2+iT} + \int_{+2+iT}^{-1+iT} + \int_{-1+iT}^{-1+i} + \int_{-1+i}^{2+i} \right) \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} x^s e^{i\delta s} ds \quad (1)$$

Pastebėsime, kad visiems kompleksiniams  $\zeta(s)$  nuliams turime  $\gamma > 14$ , taigi remiantis Rezi-diumų teorema, galime tvirtinti, kad

$$I = \sum_{0 < \gamma \leq T} x^\rho e^{i\delta \rho}. \quad (2)$$

Norint gauti sumos (2) asimptotiką, turime įvertinti visus keturis formulės (1) integralus. Iš pradžių nagrinėkime integralą

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{2+i}^{2+iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} x^s e^{i\delta s} ds. \quad (3)$$

Žinoma, kad absoliutaus konvergavimo srityje

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s}.$$

Įstatydami šią išraišką į integralą (3) ir integruodami panariui, gauname

$$\begin{aligned} I_1 &= - \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda(n) \left(\frac{x}{n}\right)^2 e^{2i\delta} \left( \frac{1}{2\pi} \int_1^T \left(\frac{x}{n}\right)^{it} e^{-\delta t} dt \right) \\ &= -e^{2i\delta} \Lambda(x) \frac{1}{2\pi\delta} (e^{-\delta} - e^{-\delta T}) + O\left( \sum_{\substack{n=2 \\ n \neq x}}^{\infty} \Lambda(n) \frac{1}{n^2} \right) \\ &= -e^{2i\delta} \Lambda(x) \frac{1}{2\pi\delta} (e^{-\delta} - e^{-\delta T}) + O(1). \end{aligned} \quad (4)$$

Pastebėkime, kad šioje vietoje naudojoms prielaida, jog  $x > 1$  yra fiksuotas. Panašiu būdu įvertinsime integralą

$$I_3 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1+i}^{-1+iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} x^s e^{i\delta s} ds. \quad (5)$$

Turėsime naudotis Rymano dzeta funkcijos funkcionaline lygtimi

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{\frac{s-1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s). \quad (6)$$

Atlikdami integrale (5) kintamojo pakeitimą  $s = 1 - z$ , gauname

$$I_3 = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i}^{2-iT} \frac{\zeta'}{\zeta}(1-s) x^{1-s} e^{i\delta(1-s)} ds. \quad (7)$$

Imdami (6) lygybės abiejų pusių logaritmines išvestines ir naudodamiesi Stirlingo formule, turime, kad

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(1-\sigma+it) = \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma-it) + \log \frac{t}{2\pi} + O\left(\frac{1}{t}\right),$$

kur  $t > 1$ . Įstatydami paskutinę lygybę į (7) randame, kad

$$I_3 = \frac{x^{-1} e^{-i\delta}}{2\pi} \int_1^T x^{it} \frac{\zeta'}{\zeta}(2-it) e^{-\delta t} dt + \frac{x^{-1} e^{-i\delta}}{2\pi} \int_1^T x^{it} e^{-\delta t} \log \frac{t}{2\pi} dt + O\left(\int_1^T \frac{1}{t} e^{-\delta t} dt\right). \quad (8)$$

Pasinaudodami funkcijos  $\frac{\zeta'}{\zeta}(2-it)$  Dirichlė eilutės išraiška ir integruodami panariui, gauname, kad pirmas (8) lygybės integralas yra aprėžtas dydžiu

$$\ll \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^2 \log n} \ll 1.$$

Akivaizdu, kad antrasis lygybės (8) integralas neviršija  $O\left(\log \frac{1}{\delta}\right)$ , kai  $T \rightarrow \infty$ . Liekamasis (8) narys trivialiai neviršija  $O(1)$ . Taigi, priimdami prielaidą, kad  $T \rightarrow \infty$  ir  $x > 1$  fiksuotas, turime

$$I_3 = O(\log \delta). \quad (9)$$

Trečias integralas iš formulės (1)

$$I_4 = \int_{-1+i}^{2+i} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) x^s e^{i\delta s} ds = O(1), \quad (10)$$

nes funkcija  $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$  duotoje atkarpoje yra aprėžta.

Liko įvertinti integralą

$$I_2 = \int_{2+iT}^{-1+iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} x^s e^{i\delta s} ds.$$

Naudosimės įverčiu

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{|\gamma-T|<1} \frac{1}{s-\rho} + O(\log T).$$

Pagal išankstinį pasirinkimą  $T$  nebuvo kompleksinio  $\zeta(s)$  nulio  $\rho$  ordinatė, bet jis gali būti kiek norima artimas kažkuriam  $\rho$ . Kad to išvengtų, konstruojame kontūrinį integralą

$$\int_{2+iT}^{-1+iT} \frac{x^s}{s-\rho} e^{i\delta s} ds = -2\pi i x^\rho e^{i\delta \rho} u(\rho) + \left( \int_{2+iT}^{2+i(T+2)} + \int_{2+i(T+2)}^{-1+i(T+2)} + \int_{-1+i(T+2)}^{-1+iT} \right) \frac{x^s}{s-\rho} e^{i\delta s} ds,$$

kur  $u(\rho) = 1$ , jeigu  $T < \gamma < T+1$ , ir  $u(\rho) = 0$  visur kitur. Pastebėję, kad nulių skaičius srityje  $T < \gamma < T+1$  yra  $O(\log T)$  ir, kad funkcija  $e^{i\delta \rho}$  yra aproksimuojanti, kai  $T \rightarrow \infty$ , gauname

$$I_2 = O(1). \tag{11}$$

Taigi, leisdami  $T \rightarrow \infty$ , iš formulių (1), (2), (4), (9), (10) ir (11) išvedame, kad

$$\sum_{\rho: \gamma > 0} x^\rho e^{i\delta \rho} = -\frac{\Lambda(x)}{2\pi\delta} + O(\log \delta),$$

čia mes pasinaudojome prielaida, kad  $\delta \rightarrow 0_+$ . Jeigu priimsime teisingą Rymano hipotezę, tada  $\rho = \frac{1}{2} + i\gamma$  ir

$$\sum_{\gamma > 0} x^{i\gamma} e^{-\delta\gamma} = -\frac{\Lambda(x)}{2\pi\delta} x^{-\frac{1}{2}} + O(\log \delta).$$

Teorema įrodyta.

## Literatūra

- [1] E. Landau, Über die Nullstellen der Zetafunction, *Math. Annalen*, **71**, 548–564 (1911).

## **Landau formula with a weight**

A. Kačēnas

The Landau formula with a weight was considered. The explicit asymptotic formula for the concrete weight was proved.